



海洋湍流对光子轨道角动量量子通信的影响

刘瑞熙 马磊

Effects of ocean turbulence on photon orbital angular momentum quantum communication

Liu Rui-Xi Ma Lei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 010304 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20211146

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211146>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

## 海洋湍流对光子轨道角动量量子通信的影响

刘瑞熙 马磊<sup>†</sup>

(成都理工大学地球物理与空间科学系, 成都 070801)

(2021年6月17日收到; 2021年8月30日收到修改稿)

本文研究了基于光子轨道角动量的量子通信在水下量子信道中受海洋湍流运动的影响. 基于 Elamassie 等提出的海洋湍流功率谱模型, 本文建立了不同海洋湍流参数与光子轨道角动量量子通信的单光子探测概率、信道容量、密钥产生率以及双光子共生纠缠度的定量关系, 并利用纠缠光子对的共生纠缠度在海洋湍流中的普适衰减特性进一步研究了轨道角动量纠缠光子对在海洋湍流中的最大纠缠距离. 研究表明: 水下量子通信性能和纠缠光子对的共生纠缠度都随海洋湍流的湍流动能耗散率的增大或温度方差耗散率的减小而降低; 温度和盐度因素对海洋湍流贡献的比值对水下量子通信的影响在海水是否稳定分层的条件下具有显著的区别; 在通过海洋湍流进行量子通信时, 增加信号光子的初始轨道角动量量子数可以提高量子密钥分发的密钥产生率和纠缠光子的纠缠衰减抵抗性.

**关键词:** 量子通信, 轨道角动量, 海洋湍流, 纠缠衰减**PACS:** 03.67.Hk, 42.50.-p, 42.50.Nn**DOI:** 10.7498/aps.71.20211146

## 1 引言

量子通信是一种应用量子叠加态和量子纠缠等量子特性进行信息传输的通信方式, 与传统通信技术相比, 其最大的优势是由量子力学原理保证的安全性. 2010年, 潘建伟团队<sup>[1]</sup>实现了 16 km 的量子隐形传态实验, 首次证实了在自由空间进行远距离量子态隐形传输的可行性. 2017年, 金贤敏团队<sup>[2]</sup>完成了基于海水信道的量子通信实验, 首次验证了水下量子通信的可行性, 对进一步开拓包括水下量子信道在内的全球化量子通信系统具有重要意义. 量子信号在传输过程中会不可避免地受到外界环境因素的影响导致量子退相干, 使得量子通信性能下降甚至中断. 在自由大气中进行量子通信时, 光子的传输会受到天气、空气污染等自然环境因素的影响. 聂敏等<sup>[3-6]</sup>对基于单光子传输的量子通信性能在降雨<sup>[3]</sup>、降雪<sup>[4]</sup>、沙尘暴<sup>[5]</sup>和大气污染<sup>[6]</sup>

等具体自然环境因素影响下的衰减做了大量的研究. 与自由空间量子通信类似, 水下量子通信的性能也会受到海水的吸收、散射和复杂的湍流运动等环境因素的影响. 嵇玲等<sup>[2]</sup>进行了室内海水管道中的偏振光子传输实验, 发现光子的偏振特性在通过海水通道时能够得到保持. 已有的理论和实验研究表明, 在海水通道的吸收和散射作用的影响下利用偏振光子进行短距离的水下量子密钥分发是可行的<sup>[7,8]</sup>.

涡旋光束可以携带具有任意整数形式的量子数  $l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  的轨道角动量光子 (Orbital-angular-momentum photons, OAM 光子) 进行量子态传输<sup>[9]</sup>. 不同于偏振光子只能用于编码二维量子信息, OAM 光子可以运用任意数量的特征态编码高维度的量子信息<sup>[10]</sup>, 同时确保更高的信道容量<sup>[11,12]</sup>并增强量子通信信道的安全性<sup>[13]</sup>. 此外, 由于 OAM 态在传输方向上具有旋转不变性, 采用 OAM 编码可以避免通信双方对参考系的实时校准<sup>[14]</sup>. 然而

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: malei18@cdu.edu.cn

当涡旋光束在湍流介质中传播时, 由于介质折射率的随机波动, 涡旋光束的波前相位结构将会遭到破坏而产生相位畸变, 造成 OAM 信号光子的丢失. 对于自由空间中的 OAM 量子通信, 国内外学者就大气湍流影响下的 OAM 单光子以及纠缠 OAM 光子对的传输开展了大量研究. Paterson<sup>[15]</sup> 推导了 OAM 光子在大气湍流影响下的探测概率公式, 并且从理论上分析了大气湍流对量子信道容量的影响; Ibrahim 等<sup>[16]</sup> 通过数值和实验研究了纠缠 OAM 单光子和双光子在大气湍流中的纠缠衰减, 证明了量子纠缠态在大气湍流中随着 OAM 量子数的增加而变得更加稳定.

对于水下 OAM 量子通信, Bouchard 等<sup>[17]</sup> 完成了基于光子轨道角动量的水下量子通信实验, 并对水下量子信道中不同的量子密码协议进行比较, 证明了水下高维编码方案的可行性; 胡涛等<sup>[18]</sup> 基于 Nikishov 提出的海水折射率功率谱模型, 计算了拉盖尔-高斯 (Laguerre-Gaussian, LG) 光束在不同水下湍流因素和不同传输距离条件下的 OAM 量子信道容量; Cheng 等<sup>[19]</sup> 用 Rytov 近似理论给出了海洋湍流因素对轨道角动量螺旋谱的影响, 结果表明不同模式的 OAM 信号光子在海洋湍流作用下会发生串扰; Elamassie 等<sup>[20]</sup> 提出了新的海洋湍流功率谱模型, 考虑了海水分层的不稳定性以及温度与盐度的涡流扩散率的差异, 为研究更接近真实海洋环境下的海洋湍流运动特性奠定了基础. 目前, 国内外学者针对海洋湍流对 OAM 量子通信性能的影响的研究基于简单地假设海水稳定分层的 Nikishov 海洋湍流模型, 而采用 Elamassie 海洋湍流模型能够反映 OAM 光子在更复杂的海洋湍流中的传输情况. 此外, 研究海洋湍流中的光子纠缠特性对于提高水下量子通信性能具有重要意义, 然而对于纠缠 OAM 光子对在海洋湍流背景下的纠缠衰减特性的研究还未见报道.

本文基于 Elamassie 等提出的海洋湍流功率谱模型, 针对 LG 光束在海洋湍流中传播的波前相位畸变所导致的 OAM 量子态串扰, 通过分别计算不同海洋湍流参数下的 OAM 单光子探测率、信道容量、密钥产生率和纠缠 OAM 光子对的共生纠缠度, 分析研究了 OAM 量子通信性能以及纠缠 OAM 光子对的纠缠特性在海水量子信道中受各海洋湍流因素的影响, 并且提出了纠缠 OAM 光子在海洋湍流中的最大纠缠距离与各海洋湍流参数的关系,

为进一步研究基于光子轨道角动量的水下高维量子通信系统提供了理论依据.

## 2 理论模型

Elamassie 等<sup>[20]</sup> 基于 Nikishov 提出的海水折射率功率谱模型, 考虑了温度和盐度的涡旋扩散率彼此不同而导致海水分层的不稳定, 提出了更符合实际海洋环境的海洋湍流功率谱模型, 即

$$\begin{aligned} \Phi(\kappa) = & (4\pi\kappa^2)^{-1}C_0 \left( \frac{\alpha^2\chi_T}{w^2} \right) \varepsilon^{-1/3}\kappa^{-5/3} \\ & \times [1 + C_1(\kappa\eta)^{2/3}] \cdot [w^2 \exp(-A_T\delta) \\ & + d_r \exp(-A_S\delta) - w(d_r + 1) \exp(-A_{TS}\delta)], \quad (1) \end{aligned}$$

式中:  $\kappa$  是海洋湍流功率谱空间波数;  $\eta$  是 Kolmogorov 内尺度;  $\chi_T$  是温度方差耗散率,  $\chi_T \in [10^{-4}, 10^{-10}] \text{K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $\varepsilon$  是湍流动能耗散率,  $\varepsilon \in [10^{-1}, 10^{-10}] \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ ;  $w \in [-5, 0]$  是温度和盐度对折射率变化贡献的比率, 当其取值为 -5 和 0 时分别代表由温度和盐度起伏引起的海洋湍流; 温度因子为  $A_T = 1.863 \times 10^{-2}$ , 盐度因子为  $A_S = 1.9 \times 10^{-4}$ , 综合影响因子  $A_{TS} = 9.41 \times 10^{-3}$ , 中间变量为  $\delta = 8.284(\kappa\eta)^{4/3} + 12.978(\kappa\eta)^2$ ;  $\alpha$  是热膨胀系数; 常数  $C_0 = 0.72$ ,  $C_1 = 2.35$ ;  $d_r$  为涡流扩散率, 当海水稳定分层时,  $d_r$  取值为 1, 当海水不稳定分层时,  $d_r$  表达式为关于  $w$  的分段函数<sup>[20]</sup>

$$d_r = \begin{cases} \left[ |w| - \sqrt{|w|(|w| - 1)} \right]^{-1} |w|, & |w| \geq 1, \\ (1.85 - 0.85|w|^{-1}) |w|, & 0.5 \leq |w| \leq 1, \\ 0.15|w|, & |w| < 0.5. \end{cases} \quad (2)$$

在 Rytov 近似下, 各向同性海水介质中球面波的波结构函数为<sup>[21]</sup>

$$D_{\text{sp}}(\rho, L) = 8\pi^2 k^2 L \int_0^1 \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\xi\rho)] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa d\xi, \quad (3)$$

其中  $\rho$  为光束波阵面上两点间距,  $L$  为传播距离,  $\xi = 1 - z/L$  为归一化距离变量,  $z$  是可变距离. 由此可以推导出在惯性范围内即 ( $\rho \gg \eta$ ) 的海洋湍流中球面波的波结构函数的解析表达式为<sup>[22]</sup>

$$\begin{aligned} D_{\text{sp}}(\rho, L) \approx & 4.524\alpha^2 k^2 L \varepsilon^{-1/3} \frac{\chi_T}{w^2} \rho^2 (0.419w^2 \\ & - 0.419(d_r + 1)w + 0.419d_r). \quad (4) \end{aligned}$$

根据空间相干长度  $\rho_0$  的定义式  $D(\rho_0, L) = 2$ , 得到海洋湍流中球面波的空间相干长度为

$$\rho_0 \approx \left[ 4.524\alpha^2 k^2 L \varepsilon^{-1/3} \frac{\chi_T}{2w^2} (0.419w^2 - 0.419(d_r + 1)w + 0.419d_r) \right]^{-3/5}, \quad (5)$$

由 (4) 式、(5) 式可以得到

$$D_{sp}(\rho, L) = 2(\rho/\rho_0)^{5/3}, \quad (6)$$

由 Fried 参数的定义<sup>[23]</sup> 可得海洋湍流中的球面波 Fried 参数  $r_0$  的表达式

$$r_0 \approx \left[ 0.6571\alpha^2 k^2 L \varepsilon^{-1/3} \chi_T (0.419w^2 - 0.419(d_r + 1)w + 0.419d_r) / w^2 \right]^{-3/5}. \quad (7)$$

引入 Fried 参数  $r_0$ , 再由 (5) 式、(6) 式可得到由海洋湍流导致涡旋光束波前相位畸变的相位结构函数表达式为

$$D_\phi(r) = 6.88(r/r_0)^{5/3}. \quad (8)$$

(8) 式表明基于 Elamassie 海洋湍流功率谱得到的在惯性范围内的海洋湍流中传播的球面波相位结构函数仍满足大气湍流中的 Kolmogorov 三分之五幂律。

### 3 数值仿真

#### 3.1 海洋湍流对 OAM 单光子探测率的影响

根据 LG 光束在湍流中传播的 Rytov 近似理论, 可以设初始 OAM 量子数为  $l_0$ , 径向量子数为  $p_0$  的 LG 光束在湍流中传播距离  $z$  处的波函数复振幅为

$$\Psi(r, \theta, z) = R_{l_0, p_0}(r, z) \frac{\exp(i l_0 \theta)}{\sqrt{2\pi}}, \quad (9)$$

其中, LG 光束的径向分量  $R_{l_0, p_0}(r, z)$  的表达式为<sup>[24]</sup>

$$\begin{aligned} & R_{l_0, p_0}(r, z) \\ &= \frac{1}{\omega(z)} \sqrt{\frac{2p_0!}{\pi(p_0 + |l_0|)!}} \left[ \frac{r\sqrt{2}}{\omega(z)} \right]^{l_0} L_{l_0, p_0} \left[ \frac{2r^2}{\omega^2(z)} \right] \\ & \times \exp \left\{ \frac{-r^2}{\omega^2(z)} - \frac{ikr^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} \right. \\ & \left. + i(2p_0 + |l_0| + 1) \tan^{-1}(z/z_R) \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

式中,  $\omega(z) = \omega_0 \left[ 1 + (z/z_R)^2 \right]^{1/2}$  是光束传播距离

为  $z$  的光斑尺寸,  $\omega_0$  是 LG 光束的束腰半径,  $L_{l_0, p_0}(x)$  是广义的 Laguerre 多项式,  $z_R = k\omega_0/2$  是 Rayleigh 距离。

定义半径为  $r$  处的相位畸变的旋转场相干函数为

$$C_\phi(r, \Delta\theta) = \exp \left[ -\frac{1}{2} D_\phi \left( 2r \sin \left( \frac{\Delta\theta}{2} \right) \right) \right], \quad (11)$$

其中,  $D_\phi(r)$  是海洋湍流中的球面波相位结构函数。

由此得到 OAM 量子数为  $l$  的光子的探测概率<sup>[15]</sup> 为

$$P(l) = \int_0^\infty |R_{l_0, p_0}(r, z)|^2 r \Theta(r, l - l_0) dr, \quad (12)$$

式中,  $\Theta(r, l - l_0)$  是旋转相干函数的圆谐波变换, 其表达式为

$$\Theta(r, \Delta l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_\phi(r, \Delta\theta) \exp[-i\Delta l \Delta\theta] d\Delta\theta. \quad (13)$$

下面根据 (2) 式、(6) 式、(8) 式和 (12) 式, 对初始 OAM 量子数  $l_0 = 1$ , 径向量子数  $p_0 = 0$  的 OAM 单光子探测概率与不同海洋湍流因素的关系进行仿真。

图 1(a) 分别给出了  $d_r = 1$  和  $d_r \neq 1$  对应的两种海洋湍流功率谱模型下的单光子探测概率随温度-盐度贡献比变化的曲线。计算参数为  $\lambda = 417 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $z = 10 \text{ m}$ ,  $\alpha = 2.6 \times 10^{-4} \text{ 1/deg}$ ,  $\varepsilon = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^3$ ,  $\chi_T = 10^{-7} \text{ K}^2/\text{s}$ 。从图 1(a) 可以看出: 当  $d_r = 1$  时, 对应于海水稳定分层的情况, 单光子探测概率  $P(l_0)|_{d_r=1}$  随温度-盐度贡献比的绝对值  $|w|$  的减小而单调递减, 由盐度因素主导的湍流对单光子传输的影响更加显著。当  $d_r \neq 1$  时, 对应于海水不稳定分层的情况, 在  $1 < |w| \leq 5$  的范围内, 单光子探测概率  $P(l_0)|_{d_r \neq 1}$  随温度-盐度贡献比的绝对值  $|w|$  的减小而降低并且始终满足  $P(l_0)|_{d_r=1} > P(l_0)|_{d_r \neq 1}$ , 表明海水不稳定分层时的海洋湍流对单光子探测的干扰更加显著; 值得注意的是在  $|w| = 1$  时, 满足  $P(l_0)|_{d_r=1} = P(l_0)|_{d_r \neq 1}$ , 此时两种情况下的海洋湍流对单光子探测的干扰相等; 而在  $0.5 \leq |w| \leq 1$  的范围内,  $P(l_0)|_{d_r \neq 1}$  随  $|w|$  减小而逐渐增大, 并在  $|w| = 0.5$  处取得最大值之后随  $|w|$  减小而迅速降低; 以上结果表明海水是否稳定分层对单光子探测概率的影响具有较大的差异。

为了探究海水是否稳定分层对单光子探测概率的影响, 以及与其对应的海洋湍流之间的关系,

图 1(b) 分别给出了在两种海洋湍流模型下的单光子探测概率相对差值  $\Delta_1 = (P(l_0)|_{d_r=1} - P(l_0)|_{d_r \neq 1})/P(l_0)|_{d_r \neq 1}$  以及在两种海洋湍流模型下的 Fried 参数相对差值  $\Delta_2 = (r_0|_{d_r=1} - r_0|_{d_r \neq 1})/r_0|_{d_r \neq 1}$  随温度-盐度贡献比变化的曲线. 由图 1(b) 可以看出: 当  $|w| > 1$  即温度起伏引起的湍流占主导地位时, 由海水稳定分层对应的 Nikishov 海洋湍流模型计算得到单光子探测概率明显偏高; 而当  $|w| < 1$  即盐度起伏引起的湍流占主导地位时, 其对应的计算结果明显偏低; 此外, 两种海洋湍流模型下的单光子探测概率相对差值曲线与相应海洋湍流的 Fried 参数吻合得很好, 说明海水是否稳定分层所导致的单光子探测概率随温度-盐度贡献比变化关系的差异可以通过相应海洋湍流的 Fried 参数相对差值得到很好的反映.

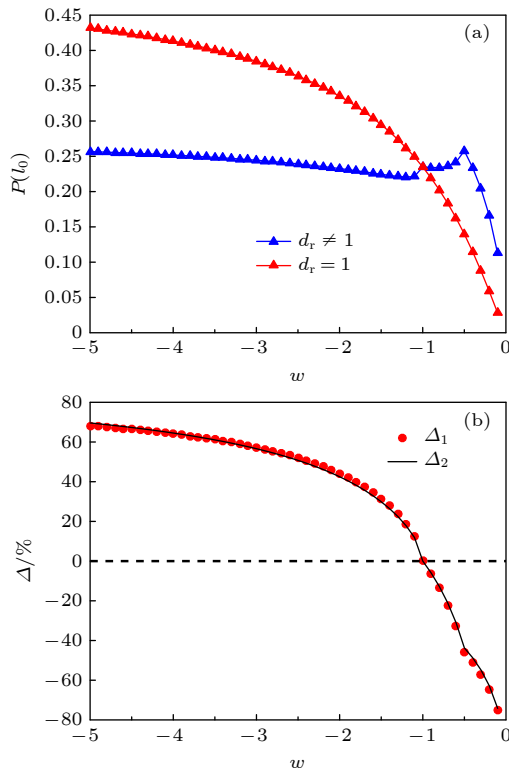


图 1 单光子探测概率与  $w$  的关系

Fig. 1. Relationship between single photon detection probability and  $w$ .

图 2 给出了单光子探测概率随湍流动能耗散率  $\chi_T$  和温度方差耗散率  $\varepsilon$  变化的关系. 计算参数为  $\lambda = 417 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $z = 10 \text{ m}$ ,  $\alpha = 2.6 \times 10^{-4} \text{ 1/deg}$ ,  $w = -5$ ,  $d_r = 1$ . 可以看出: 当湍流动能耗散率  $\chi_T$  增大或温度方差耗散率  $\varepsilon$  减小时, 海洋湍流随之增强, 导致单光子探测概率降低.

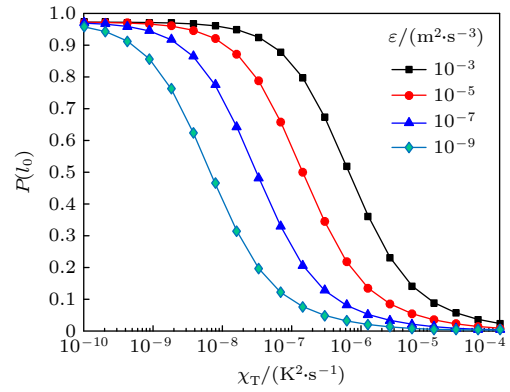


图 2 单光子探测概率与  $\chi_T$  和  $\varepsilon$  的关系

Fig. 2. The relationship between single photon detection probability and  $\chi_T$  and  $\varepsilon$ .

### 3.2 海洋湍流对 OAM 量子信道容量的影响

信道容量可以通过单光子探测概率量化, 从而评价海洋湍流对通信链路的影响, 信道容量的定义为

$$C = \max [H(x) - H(x|y)], \quad (14)$$

其中,  $H(x)$  是信号原始信息的熵,  $H(x|y)$  给定接收信息为  $y$  时的条件熵, 二者分别定义为<sup>[15]</sup>

$$H(x) = - \sum_{x_i} P(x_i) \log P(x_i), \quad (15)$$

$$H(x|y) = - \sum_{ij} P(x_i) P(y_j|x_i) \times \left[ \log P(y_j|x_i) - \log \sum_i P(y_j|x_i) \right], \quad (16)$$

式中,  $P(x_i)$  是传输信号为  $\{x_i\}$  的概率,  $P(y_j|x_i)$  是给定发射信号为  $\{x_i\}$  的条件下所接受到的信号为  $\{y_j\}$  的条件概率. 假设信道中传输的 LG 光束具有 OAM 量子数的范围为  $l_0 = -L_0, \dots, L_0$ , 则每种信号的概率为  $P_{x_i} = 1/(2L_0 + 1)$ , 信号源的熵为  $H(x) = \log(2L_0 + 1)$ . 经过海洋湍流传输后, 探测器接收到具有不同 OAM 量子数的光子的概率可以通过 (12) 式得到.

下面通过对不同初始 OAM 量子数范围的 LG 光束在不同程度的海洋湍流环境中的信道容量进行数值计算, 研究在不同海洋湍流环境下的 OAM 量子信道衰减特性.

图 3 为不同初始 OAM 量子数范围的 LG 光束在海洋湍流背景下的信道容量随不同海洋湍流参数的变化曲线. 计算参数分别为  $\lambda = 417 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $\alpha = 2.6 \times 10^{-4} \text{ 1/deg}$ . 由图 3(a)、图 3(b)

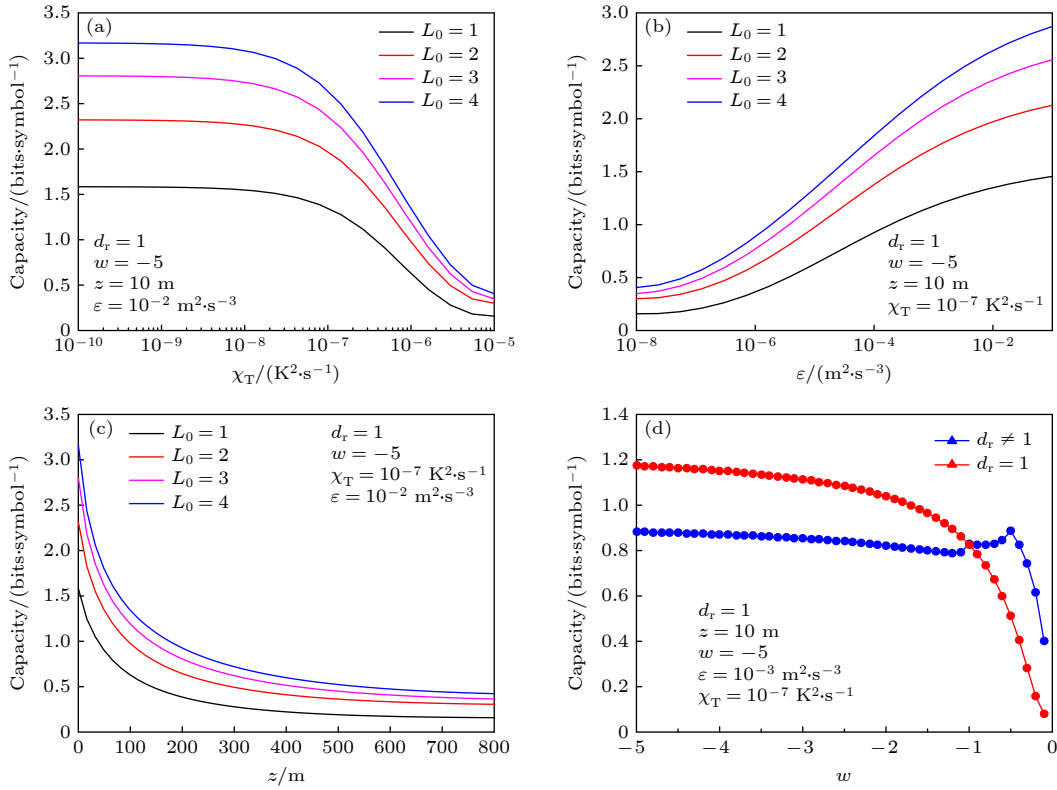


图 3 信道容量随各海洋湍流参数的变化关系

Fig. 3. The relationship of channel capacity with the ocean turbulence parameters.

可知: 信道容量随湍流动能耗散率  $\chi_T$  增大或温度方差耗散率  $\epsilon$  减小而不断衰减; 图 3(c) 表明: 随着传输距离的增加, 信道容量迅速衰减; 图 3(d) 表明: 温度-盐度贡献比对信道衰减的影响与对单光子探测概率的影响在变化趋势上是相似的, 即在海水是否稳定分层的条件下具有显著的差异. 以上结果表明: 在海洋湍流强度相同的条件下, 初始 OAM 量子数范围越大的 LG 光束具有数量更多的量子编码态, 其对应的信道容量就越大.

### 3.3 海洋湍流对 OAM 量子密钥分发的密钥产生率的影响

基于 Lo 等<sup>[25]</sup> 提出的测量设备无关量子密钥分发 (measurement-device-independent quantum key distribution, MDI-QKD) 协议的 OAM 量子密钥分发系统, 其安全密钥产生率的计算公式为<sup>[26]</sup>

$$R = \mu\nu \exp[-(\mu + \nu)] Y_{11}^{\text{OAM}} [1 - H(e_{11}^{\text{SUP}})] - Q_{\mu\nu}^{\text{OAM}} f H(E_{\mu\nu}^{\text{OAM}}), \quad (17)$$

式中,  $\mu, \nu$  分别为 Alice、Bob 每次脉冲发射的平均光子数;  $Y_{11}^{\text{OAM}}$  为在 OAM 基下发射单光子的计数率;  $e_{11}^{\text{SUP}}$  为叠加基下的单光子误码率;  $Q_{\mu\nu}^{\text{OAM}}(E_{\mu\nu}^{\text{OAM}})$

是平均光子数分别为  $\mu, \nu$  时的总接收率 (总误码率);  $f$  为纠错效率;  $H(x)$  为二元香农熵函数.

采用 Wang 等<sup>[26]</sup> 提出的方法计算  $Y_{11}^{\text{OAM}}$ 、 $e_{11}^{\text{SUP}}$ 、 $Q_{\mu\nu}^{\text{OAM}}$ 、 $E_{\mu\nu}^{\text{OAM}}$ , 设  $\eta_0(\bar{\eta}_0)$  为接收光子与发射光子具有相同 (不同) OAM 状态的概率,  $\eta_0$  和  $\bar{\eta}_0$  可以利用 (12) 式计算得到, 即  $\eta_0 = P(l_0)$ 、 $\bar{\eta}_0 = P(-l_0)$ . 密钥分发系统的仿真参数值如表 1 所列, 其中  $P_d$  为探测器的暗计数率,  $e_d$  为基未对准概率.

表 1 密钥分发系统的仿真参数值

Table 1. Simulation parameters of key distribution system.

Parameter	$P_d$	$f$	$e_d$	$\mu(\nu)$
Value	$3.0 \times 10^{-6}$	1.16	1.5%	0.1

图 4 给出了不同初始 OAM 量子数下的密钥产生率随传输距离的变化关系. 计算参数为  $\lambda = 417 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $\alpha = 2.6 \times 10^{-4} \text{ 1/deg}$ ,  $w = -5$ ,  $d_r = 1$ ,  $\chi_T = 10^{-7} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\epsilon = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ . 结果表明: 在海洋湍流的影响下, 量子密钥分发系统的密钥产生率随传输距离的增加而迅速减小; OAM 编码光子的最大传输距离随初始 OAM 量子数的增大而增加.

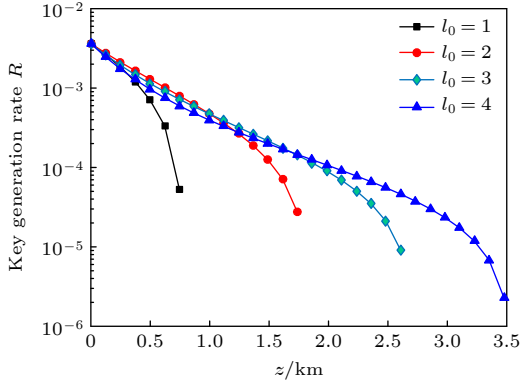


图 4 密钥产生率随传输距离的变化关系

Fig. 4. The relationship of key generation rate with transmission distance.

### 3.4 海洋湍流对 OAM 光子对纠缠衰减的影响

下面考虑一对由束腰半径为  $\omega_0$  的 LG 光束传输的纠缠光子, 它们具有相同的径向量子数  $p_0 = 0$ , 以及相反的 OAM 量子数  $l_0$  和  $-l_0$ . 设初始状态下的纠缠光子处于可以通过实验制备的 Bell 态 [27], 定义为

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|l_0, -l_0\rangle + e^{i\phi} |-l_0, l_0\rangle). \quad (18)$$

若仅考虑海洋湍流对 LG 光束的相位畸变效应, 则纠缠光子穿过的海洋湍流层可以等效为一个随机相位屏. 将海洋湍流对光子的作用视为一个线性算符  $A$ , 则探测器接收到光子的量子态表示为 [28]

$$\rho = (A_1 \otimes A_2) \rho^{(0)}, \quad (19)$$

其中,  $A_1$  和  $A_2$  分别表示这两个光子所处信道中的海洋湍流对光子的作用. 假设海洋湍流对两个光子的相位干扰具有相同的统计特性, 则有  $A_1 = A_2 = A$ . 算符  $A$  的矩阵元表示为

$$A_{l_0, \pm l_0}^{l_0, \pm l_0} = \frac{\delta_{l_0 - l_0', l_0 \mp l_0'}}{2\pi} \int_0^\infty dr R_{l_0, p_0}(r) R_{l_0', p_0}^*(r) r \int_0^{2\pi} d\vartheta \times e^{-i\vartheta[l \pm l - (l_0 + l_0')]/2} e^{-0.5 D_\phi(2r|\sin(\vartheta/2))}, \quad (20)$$

式中,  $\delta_{l_0 - l_0', l_0 \mp l_0'}$  是克罗内克符号,  $R_{l_0, p_0}(r)$  是 LG 光束波函数在传播距离为零时的径向分量,  $D_\phi(r)$  是海洋湍流模型的相位结构函数.

定义初始量子态的基矢为  $\{|l_0, l_0\rangle, |l_0, -l_0\rangle, |-l_0, l_0\rangle, |-l_0, -l_0\rangle\}$ , 根据 Wootters 提出的双量子混合态的共生纠缠度公式 [29], 可以得到输出量子态共生纠缠度的解析表达式为

$$C(\rho) = \max \left\{ 0, \frac{(1 - 2c)}{(1 + c)^2} \right\}, \quad (21)$$

其中,  $c = b/a$ ,  $a$  和  $b$  分别定义为 OAM 光子信号的生存振幅和串扰振幅

$$a = A_{l_0, l_0}^{l_0, l_0} = A_{-l_0, -l_0}^{-l_0, -l_0} = A_{-l_0, l_0}^{-l_0, l_0} = A_{l_0, -l_0}^{l_0, -l_0}, \quad (22)$$

$$b = A_{l_0, l_0}^{-l_0, -l_0} = A_{-l_0, -l_0}^{l_0, l_0}. \quad (23)$$

下面根据 (20)–(23) 式, 对初始 OAM 量子数  $l_0 = 1$ , 径向量子数  $p_0 = 0$  的 OAM 双光子共生纠缠度与不同海洋湍流因素的关系进行仿真.

图 5 给出了共生纠缠度随湍流能耗散率  $\chi_T$  和温度方差耗散率  $\varepsilon$  变化的关系. 计算参数为  $\lambda = 417 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $z = 1000 \text{ m}$ ,  $\alpha = 2.6 \times 10^{-4} \text{ 1/deg}$ ,  $d_r = 1$ . 由图 5 可知: 共生纠缠度随湍流能耗散率  $\chi_T$  增大或温度方差耗散率  $\varepsilon$  减小而降低, 对应于海洋湍流随湍流能耗散率  $\chi_T$  增大或温度方差耗散率  $\varepsilon$  减小而增强, 导致信号光子的串扰振幅增大直至纠缠完全消失, 即纠缠猝死现象 [30].

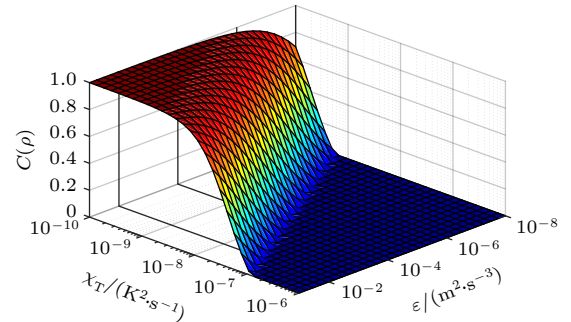

 图 5 共生纠缠度与  $\chi_T$  和  $\varepsilon$  的关系

Fig. 5. The relationship between output state concurrence and  $\chi_T$  and  $\varepsilon$ .

图 6 给出了共生纠缠度随传播距离  $z$  和温度-盐度贡献比  $w$  变化的关系. 计算参数分别为  $\lambda = 417 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $\chi_T = 10^{-7} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\varepsilon = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ ,  $\alpha = 2.6 \times 10^{-4} \text{ 1/deg}$ ,  $d_r = 1$ . 由图 6 可知: 在相同传播距离的条件下, 共生纠缠度随温度-盐度贡献比的增大而降低, 表明由盐度起伏引起的湍流对共生纠缠度的影响更加显著.

为了探究不同初始 OAM 量子数的纠缠光子在海洋湍流中的纠缠衰减特性, 在应用 Fried 参数  $r_0$  表征的特定湍流强度下, 计算了不同初始 OAM 量子数  $l_0$  的共生纠缠度衰减曲线, 结果如图 7 所示. 计算参数为  $\lambda = 417 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $\chi_T =$

$10^{-7} \text{ K}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\varepsilon = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ ,  $\alpha = 2.6 \times 10^{-4} \text{ 1/deg}$ ,  $d_r = 1$ . 由图 7 可知: 在海洋湍流强度相同且纠缠未完全消失的条件下, 初始量子数  $l_0$  越大则共生纠缠度越高, 表明具有更高初始 OAM 量子数的纠缠光子对在湍流中的纠缠衰减更缓慢.

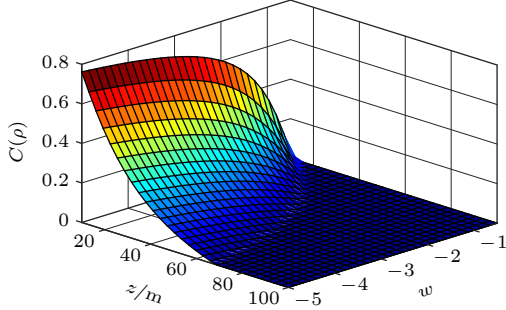


图 6 共生纠缠度与  $z$  和  $w$  的关系

Fig. 6. The relationship between output state concurrence and  $z$  and  $w$ .

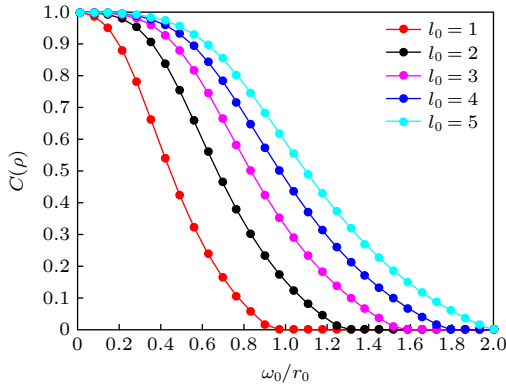


图 7 共生纠缠度与  $l_0$  和  $r_0$  的关系

Fig. 7. The relationship between output state concurrence and  $l_0$  and  $r_0$ .

为了研究不同初始 OAM 量子数的纠缠光子对的共生纠缠度在海洋湍流中的普适衰减特性, 按照文献 [28] 中的方法引入相位相干长度, 定义为

$$\xi(l_0) = \sin\left(\frac{\pi}{2|l_0|}\right) \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(|l_0| + 3/2)}{\Gamma(|l_0| + 1)}, \quad (24)$$

其中,  $\omega_0$  为 LG 光束的束腰半径,  $\Gamma(x)$  为伽玛函数.

对共生纠缠度  $C(\rho)$ 、相位相干长度与 Fried 参数的特征比值  $x = \xi(l_0)/r_0$  之间的关系进行仿真, 结果如图 8 所示.

图 8 给出了不同初始 OAM 量子数  $l_0$  的纠缠光子对应的共生纠缠度衰减曲线. 当  $r_0 \gg \xi(l_0)$  时, 海洋湍流对双光子态的共生纠缠度几乎没有影响, 随着  $r_0$  逐渐趋近于  $\xi(l_0)$ , 海洋湍流对光波波前的相位扰动效果增强, 导致不同量子态之间的串扰加

剧, 从而使共生纠缠度快速衰减至 0. 此外, 不同初始 OAM 量子数  $l_0 > 1$  的纠缠光子的纠缠衰减与一条指数型函数曲线拟合得很好, 由此可以得到不同 OAM 量子数  $l_0 > 1$  的纠缠光子的普遍纠缠衰减特性, 其拟合曲线的表达式为  $f(x) = \exp(-3.54x^{2.93})$ . 为了验证计算结果的可靠性, 图 8 还画出了 Leonhard 等 [28] 提出的 OAM 纠缠光子对在大气湍流中传播的普遍纠缠衰减曲线, 其表达式为  $g(x) = \exp(-4.16x^{3.24})$ , 可以看出两条拟合曲线的结果基本一致.

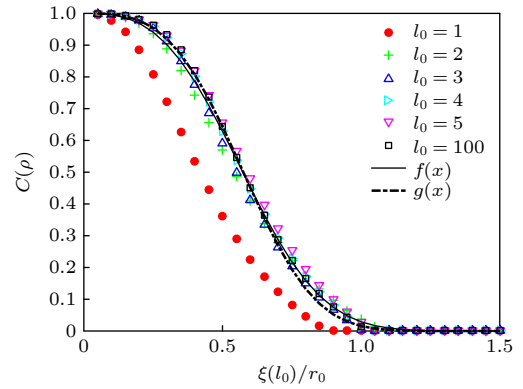


图 8 共生纠缠度与  $\xi(l_0)/r_0$  的关系

Fig. 8. The relationship between output state concurrence and  $\xi(l_0)/r_0$ .

### 3.5 海洋湍流中的最大纠缠距离

为了表征在大气湍流中传输的纠缠光子发生纠缠衰退的空间尺度, Ibrahim 等 [16] 将退相干距离  $L_{\text{dec}}$  被定义为共生纠缠度衰减至 0.5 所对应的传播距离, 并且退相干距离与量子数满足关系  $L_{\text{dec}} \propto (l_0)^{5/6}$ . 纠缠光子对在海洋湍流中的共生纠缠度随特征比值  $\xi(l_0)/r_0$  的衰减规律对于不同量子数的纠缠光子具有普适性, 因此可以将特征比值  $\xi(l_0)/r_0$  作为判断纠缠衰减程度的依据. 定义共生纠缠度衰减至 0 所对应的传输距离为最大纠缠距离, 将  $\xi(l_0)/r_0 = 1$  作为纠缠完全消失的判别依据, 根据 (6) 式、(8) 式、(20) 式、(21) 式可以得到海洋湍流中的最大纠缠距离的表达式:

$$L = w^2 (\xi(l_0))^{-5/3} [0.6571 \alpha^2 k^2 \varepsilon^{-1/3} \chi_T (0.419 w^2 - 0.419 (d_r + 1) w + 0.419 d_r)]^{-1}. \quad (25)$$

下面根据 (24) 式、(25) 式, 对不同初始 OAM 量子数的纠缠光子在海洋中的最大纠缠距离与各海洋湍流因素的关系进行仿真.



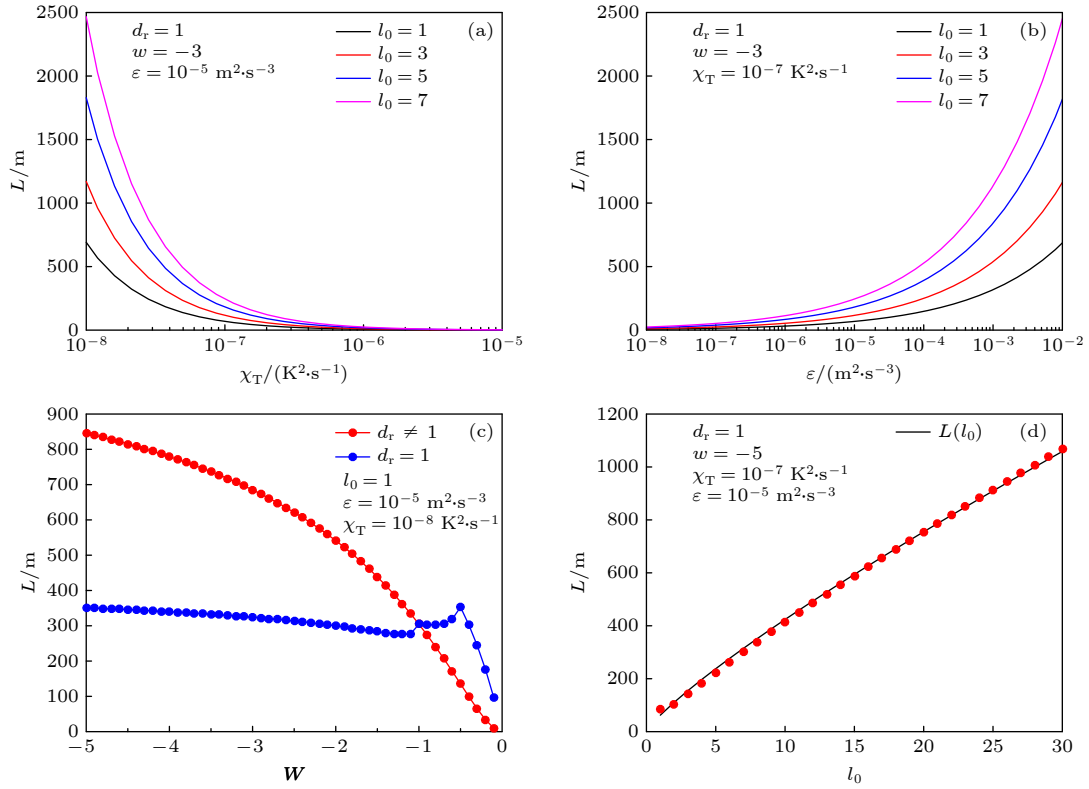


图 9 共生纠缠度随各海洋湍流参数的变化关系

Fig. 9. The relationship between concurrence and the ocean turbulence parameters.

图 9 为不同初始 OAM 量子数的纠缠光子对在海洋湍流背景下的最大纠缠距离随不同海洋湍流因素的变化曲线. 计算参数分别为  $\lambda = 417 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $\alpha = 2.6 \times 10^{-4} \text{ 1/deg}$ . 由图 9(a)、图 9(b) 可知: 最大纠缠距离随湍流动能耗散率  $\chi_T$  增大或温度方差耗散率  $\epsilon$  减小而迅速降低; 图 9(c) 表明: 温度-盐度贡献比对最大纠缠距离衰减的影响在海水是否稳定分层的条件下具有显著的区别, 与图 1(a) 中的不同海洋湍流模型下的单光子探测概率随温度-盐度贡献比变化的曲线具有相似的变化趋势; 图 9(d) 给出了最大纠缠距离与初始 OAM 量子数的关系: 在海洋湍流强度相同的条件下, 初始 OAM 量子数越大则对应的最大纠缠距离越远, 并且最大纠缠距离与初始 OAM 量子数满足关系  $L \propto (l_0)^{5/6}$ , 图中给出的拟合曲线表达式为  $L(l_0) = 62.2l_0^{5/6}$ , 与 Ibrahim 等<sup>[16]</sup> 定义的大气湍流中的退相干距离  $L_{\text{dec}}$  随  $l_0$  变化的指数关系一致.

## 4 结 论

本文基于 Elamassie 海洋湍流功率谱模型, 建立了 OAM 单光子探测概率、信道容量、密钥生成

率和纠缠 OAM 光子对的共生纠缠度与各海洋湍流参数之间的定量关系, 研究了海洋湍流运动对基于光子轨道角动量的水下量子通信性能和纠缠特性的影响. 仿真结果表明: 当湍流动能耗散率  $\chi_T$  增大或温度方差耗散率  $\epsilon$  减小时, 海洋湍流随之增强, 引起 OAM 信号光子在不同模式之间的串扰加剧, 从而导致 OAM 量子通信的信道容量、密钥产生率和纠缠光子对共生纠缠度的降低; 对于 Nikishov 海洋湍流功率谱, 信道容量、密钥生成率和纠缠光子对共生纠缠度随温度-盐度贡献比的绝对值  $|w|$  的减小而单调递减, 由盐度因素主导的湍流对水下量子通信的干扰更加显著; 而 Elamassie 提出的海洋湍流功率谱考虑了更合理的海水不稳定分层的情况, 即涡流扩散率  $d_r$  的取值不再恒等于 1 而是随温度-盐度贡献比  $w$  变化, 因此温度-盐度贡献比  $w$  对水下量子通信性能和纠缠特性的影响在海水是否稳定分层的条件下具有显著的区别; 在海洋湍流强度相同的条件下, 初始 OAM 量子数  $l_0$  越大则对应的最大密钥分发距离和最大光子对纠缠距离越远. 因此, 在进行基于光子轨道角动量的水下量子通信时, 可根据实际情况适当提高信号光子的初始

OAM 量子数以降低海洋湍流对量子通信的影响. 本文的研究结果对于海洋湍流环境下的某些实用性的量子密码协议, 如量子保密查询<sup>[31]</sup>等, 具有重要的参考价值.

## 参考文献

- [1] Jin X M, Ren J G, Yang B, Yi Z H, Zhou F, Xu X F, Wang S K, Yang D, Hu Y F, Jiang S, Yang T, Yin H, Chen K, Peng C Z, Pan J W 2010 *Nat. Photonics* **4** 376
- [2] Ji L, Gao J, Yang A L, Feng Z, Lin X F, Li Z G, Jin X M 2017 *Opt. Express* **25** 19795
- [3] Nie M, Wang Y, Yang G, Zhang M L, Pei C X 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 020303 (in Chinese) [聂敏, 王允, 杨光, 张美玲, 裴昌幸 2016 物理学报 **65** 020303]
- [4] Nie M, Wang C X, Yang G, Zhang M L, Sun A J, Pei C X 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 030301 (in Chinese) [聂敏, 王超旭, 杨光, 张美玲, 孙爱晶, 裴昌幸 2021 物理学报 **70** 030301]
- [5] Nie M, Shang P G, Yang G, Zhang M L, Pei C X 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 240303 (in Chinese) [聂敏, 尚鹏钢, 杨光, 张美玲, 裴昌幸 2014 物理学报 **63** 240303]
- [6] Nie M, Ren J, Yang G, Zhang M L, Pei C X 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 150301 (in Chinese) [聂敏, 任杰, 杨光, 张美玲, 裴昌幸 2015 物理学报 **64** 150301]
- [7] Zhao S C, Li W D, Shen Y, Yu Y H, Han X H, Zeng H, Cai M Q, Qian T, Wang S, Wang Z M, Xiao Y, Gu Y J 2019 *Appl. Opt.* **58** 3902
- [8] Li D D, Shen Q, Chen W, Li Y, Han X, Yang K X, Xu Y, Lin J, Wang C Z, Yong H L, Liu W Y, Cao Y, Yin J, Liao S K, Ren J G 2019 *Opt. Commun.* **452** 220
- [9] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, Woerdman J P 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8185
- [10] Molina-Terriza G, Torres J P, Torner L 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 013601
- [11] Gibson G, Courtial J, Padgett M J, Vasnetsov M, Pas'ko V, Barnett S M, Franke-Arnold S 2004 *Opt. Express* **12** 5448
- [12] Barreiro J T, Wei T C, Kwiat P G 2008 *Nature Phys.* **4** 282
- [13] Bechmann-Pasquinucci H, Peres A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3313
- [14] Spedalieri F M 2006 *Opt. Commun.* **260** 340
- [15] Paterson C 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 153901
- [16] Ibrahim A H, Roux F S, McLaren M, Konrad T, Forbes A 2013 *Phys. Rev. A* **88** 012312
- [17] Bouchard F, Sit A, Hufnagel F, Abbas A, Zhang Y W, Heshami K, Fickler R, Marquardt C, Leuchs G, Boyd R W, Karimi E 2018 *Opt. Express* **26** 22563
- [18] Hu T, Pan S X, Wang L, Zhang S M *Chin. J. Quantum Electron.* **35** 499 (in Chinese) [胡涛, 潘孙翔, 王乐, 赵生妹 2018 量子电子学报 **35** 499]
- [19] Cheng M J, Guo L X, Li J T, Huang Q Q, Cheng Q, Zhang D 2016 *Appl. Opt.* **55** 4642
- [20] Elamassie M, Uysal M, Baykal Y, Abdallah M, Qaraqe K 2017 *J. Opt. Soc. Am. A* **34** 1969
- [21] Andrews L C, Phillips R L 2005 *Laser Beam Propagation through Random Media* (Bellingham, Washington USA: SPIE Press) pp192–206
- [22] Wu T, Ji X L, Li X Q, Wang H, Deng Y, Ding Z L 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 224206 (in Chinese) [吴彤, 季小玲, 李晓庆, 王欢, 邓宇, 丁洲林 2018 物理学报 **67** 224206]
- [23] Fried D L 1966 *J. Opt. Soc. Am.* **56** 1372
- [24] Alonso J R G, Brun T A 2013 *Phys. Rev. A* **88** 022326
- [25] Lo H K, Curty M, Qi B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 130503
- [26] Wang L, Zhao S M, Gong L Y, Cheng W W 2015 *Chin. Phys. B* **24** 120307
- [27] Fickler R, Lapkiewicz R, Plick W N, Krenn M, Schaeff C, Ramelow S, Zeilinger A 2012 *Science* **338** 640
- [28] Leonhard N D, Shatokhin V N, Buchleitner A 2015 *Phys. Rev. A* **91** 012345
- [29] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [30] Yu T, Eberly J H 2006 *Opt. Commun.* **264** 393
- [31] Gao F, Qin S J, Huang W, Wen Q Y 2019 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **62** 070301

# Effects of ocean turbulence on photon orbital angular momentum quantum communication

Liu Rui-Xi    Ma Lei<sup>†</sup>

(*College of Geophysics, Chengdu University of Technology, Chengdu 070801, China*)

( Received 17 June 2021; revised manuscript received 30 August 2021 )

## Abstract

The effect of the turbulent motion of ocean on the quantum communication based on the orbital angular momentum in an underwater quantum channel is studied in this work. Based on the power spectrum model of ocean turbulence proposed by Elamassie, the quantitative relationships of different ocean turbulence parameters with the single photon detection probability of orbital angular momentum photons, the channel capacity, the key generation rate, the concurrence of two entangled photons are proposed. The maximum entanglement distance of the orbital angular momentum entangled photon-pairs in the ocean turbulence is further studied by the universal entanglement decay of the concurrence of entangled photon-pairs in the ocean turbulence. The results show that the detection probability of single photon, the channel capacity, the key generation rate, and the concurrence of entangled photon-pairs decrease with the increase of the dissipation rate of turbulent kinetic energy and the decrease of the rate of dissipation of mean-squared temperature. The influence of the temperature and salinity balance parameter of ocean turbulence on the performance of underwater quantum communication are significantly different under the condition of whether the stable stratification of seawater is assumed or not. In the ocean turbulent environment, the increasing of the initial orbital angular momentum quantum number of signal photons can improve the key generation rate of quantum key distribution and the resistance of entangled photons to entanglement decay.

**Keywords:** quantum communication, orbital angular momentum, ocean turbulence, entanglement decay

**PACS:** 03.67.Hk, 42.50.-p, 42.50.Nn

**DOI:** [10.7498/aps.71.20211146](https://doi.org/10.7498/aps.71.20211146)

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [malei18@cdut.edu.cn](mailto:malei18@cdut.edu.cn)