



## 频率啁啾对强场下真空正负电子对产生的增强效应

谢柏松 李烈娟 麦丽开·麦提斯迪克 王莉

### Enhancement effect of frequency chirp on vacuum electron-positron pair production in strong field

Xie Bai-Song Li Lie-Juan Melike Mohamedsedik Wang Li

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 131201 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220148

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220148>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 极强激光场驱动超亮伽马辐射和正负电子对产生的研究进展

Research progress of ultrabright  $\gamma$ -ray radiation and electron-positron pair production driven by extremely intense laser fields  
物理学报. 2021, 70(8): 085202 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202224>

#### 光子对撞机产生正负电子对的数值方法

Numerical method of electron-positron pairs generation in photon-photon collider  
物理学报. 2020, 69(1): 019501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20190729>

#### 正负电子对产生过程中不同外场宽度下的多光子跃迁效应

Multi-photon transition effects under different external field widths in electron-positron-pair creation process  
物理学报. 2021, 70(23): 231202 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202101>

#### 基于微波-电子康普顿背散射的环形正负电子对撞机束流能量测量方案

Circular electron-positron collider beam energy measurement scheme based on microwave-electronic Compton backscattering  
物理学报. 2021, 70(13): 131301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202081>

#### 强激光驱动高能极化正负电子束与偏振伽马射线的研究进展

Review on laser-driven high-energy polarized electron and positron beams and  $\gamma$ -rays  
物理学报. 2021, 70(8): 087901 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210009>

#### 膜间相互作用、开弦对产生和增强效应及其可能的实验探测

D-brane interaction, the open string pair production and its enhancement plus its possible detection  
物理学报. 2020, 69(10): 101101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200037>

综述

# 频率啁啾对强场下真空正负电子对产生的增强效应\*

谢柏松<sup>1)2)†</sup> 李烈娟<sup>1)</sup> 麦丽开·麦提斯迪克<sup>1)</sup> 王莉<sup>2)‡</sup>

1) (北京师范大学核科学与技术学院, 北京 100875)

2) (北京市科学技术研究院辐射技术研究所, 北京 100875)

(2022年1月21日收到; 2022年3月21日收到修改稿)

在强背景场下真空产生正反粒子对的研究中, 频率啁啾对增强粒子对的产生起着关键作用. 本文介绍了狄拉克-海森伯-维格纳 (Dirac-Heisenberg-Wigner)、求解量子弗拉索夫方程 (quantum Vlasov equation) 和计算量子场论等方法, 并详细综述了它们如何应用到空间非均匀场、均匀含时场以及外部势场中正负电子对产生的研究. 通过研究各种不同的场得到了不同参数 (如场强和基准频率) 下产生的粒子动量谱和粒子对产额, 发现当频率啁啾形式或/和啁啾强度改变时结果受到显著影响. 在低频场下啁啾增强的数密度可提高 2—3 个数量级, 这主要是因为啁啾增加了场的高频成分, 从而低频强场和高频弱场相结合的动力学辅助机制起到了很大的作用. 一般来说在高频情况下数密度只有几倍的提高, 说明动力学辅助作用被大大地抑制了. 在有空间变化的场情形下, 对于小空间尺度变化的场, 无啁啾时本身的数密度不高, 但啁啾可以对数密度有数量级的提高; 对于大空间尺度变化的场, 数密度逐渐趋于空间均匀的结果, 啁啾也能对数密度有几倍的提高. 通过 Wentzel-Kramer-Brillouin 近似和转变点结构的物理分析和讨论可以对相关的数值结果进行理解. 最后简要地给出了频率啁啾对粒子对产生增强效应可能的应用前景与展望.

**关键词:** 正负电子对产生, 频率啁啾, 强场, 量子动力学方法

**PACS:** 12.20.-m, 11.15.Tk, 32.80.-t

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220148

## 1 引言

1928年狄拉克通过其创立的狄拉克方程在人类历史上第一次理论预言了反物质——正电子的存在<sup>[1]</sup>, 并于1933年被安德森的实验证实<sup>[2]</sup>, 这一事实表明量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 真空中存在固有的虚粒子涨落. 早期 Sauter<sup>[3]</sup>, Heisenberg 和 Euler<sup>[4]</sup> 采用了有效拉氏量方法进行了研究, 发现 QED 真空可以在一定的场强条件下通过隧穿产生正负电子对, 后来 1951年 Schwinger

用固有时方法计算得到了恒定电场中正负电子对的产生率是  $\Gamma \approx \exp(-\pi E_{\text{cr}}/E)$ <sup>[5]</sup>, 其中  $E_{\text{cr}} = m^2 c^3 / (e\hbar) \approx 1.3 \times 10^{16}$  V/cm 是施温格临界场强, 对应的激光强度则是  $I_{\text{cr}} \approx 4.3 \times 10^{29}$  W/cm<sup>2</sup>. 自此, 在强的背景电磁场下真空正负电子对的产生, 就被称为施温格效应, 它是 QED 中的一种非微扰现象. 由于其非微扰特性和观察它所需的极大场强, 理论和实验的研究都有很大的挑战性<sup>[6-8]</sup>.

众所周知, 随着上世纪八十年代 Strickland 和 Mourou<sup>[9]</sup> 发明的啁啾脉冲放大 (chirped pulse amplification, CPA) 技术的提出和应用, 激光强度

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11875007, 11935008) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: bsxie@bnu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: wangli@brc.ac.cn

一直在增加<sup>[10–15]</sup>. 特别是本世纪以来, 随着超强激光技术的不断发展, 在不久的将来正负电子对产生的实验观察的可能性将大大增加. 目前激光器的激光强度已达到  $10^{22}$ – $10^{23}$  W/cm<sup>2</sup>, 许多计划中的激光装置, 例如欧洲的极端光基础设施 (ELI) 设计的预期强度为  $10^{25}$ – $10^{26}$  W/cm<sup>2</sup><sup>[16]</sup>, 另外 X 射线自由电子激光器 (XFEL) 系统也预期可以实现  $E/E_{\text{cr}} \approx 0.01$ – $0.1$  的亚临界场强<sup>[10]</sup>. 通过各种增强机制来实现真空对的产生<sup>[17–21]</sup>, 这为未来先进激光设施检测真空对的产生带来了希望<sup>[16,22,23]</sup>.

理论上, 已经在许多简单但重要的场的形式下研究了真空的正负电子对产生. 例如, Nikishov<sup>[24]</sup> 研究了包括磁场在内的恒定外场, 人们也研究了交变电场<sup>[25,26]</sup>, 特别是 Ritus<sup>[6]</sup> 和 Nikishov<sup>[27]</sup> 使用散射矩阵方法对 QED 中的对产生问题进行了详细的分析和介绍. 到目前为止, 多种理论与计算方法已经用来研究在强的外背景场下真空中的正负电子对的产生问题, 一些常用的方法包括世界线瞬子技术<sup>[28–31]</sup>、量子弗拉索夫方程 (quantum Vlasov equation, QVE) 求解方法<sup>[32–34]</sup>、计算量子场论<sup>[35–37]</sup>、狄拉克-海森伯-维格纳 (Dirac-Heisenberg-Wigner, DHW) 形式<sup>[38–43]</sup> 等等.

为了达到降低正负电子对产生阈值的目的, 人们试图控制场的时间和空间的脉冲形状, 广泛研究了许多不同的场结构形式. 例如通过对亚周期结构短激光脉冲对产生的研究<sup>[44]</sup>, 发现动量谱对相应的外场参数极为敏感; 在空间非均匀脉冲场<sup>[38]</sup> 下, 粒子对产生过程中会有粒子的自聚集效应. 也有研究发现外场的有质动力在空间非均匀电场的多光子对产生过程中有重要影响<sup>[41]</sup>. 作为增加正负电子对产生数额的重要一步, Schützhold 等<sup>[17]</sup> 提出了动力学辅助机制, 即所加的电场是低频强场与高频弱场的结合形式. 他们的研究发现, 组合场能极大地提高粒子对的产生率. 此外, 频率啁啾效应也被广泛研究, 是因为它们能影响时间依赖场<sup>[45,46]</sup> 和空间非均匀振荡电场<sup>[42]</sup> 下的粒子动量谱和总粒子数. 有些工作研究了不同的组合场以增强正负电子对的产生<sup>[47–49]</sup>, 尤其是对频率啁啾下与时间依赖的单色和双色激光场中粒子对产生的增强效应的研究<sup>[34,50,51]</sup>, 以及对既有时间依赖又有空间不均匀性的单色和双色场频率调制下粒子对产生的增强效应的研究<sup>[52,53]</sup>.

值得一提的是, 对超强场下正负电子对的产生

问题, 我们做了一些卓有成效的研究. 主要有两个方面, 一是对频率啁啾场下正负电子对产生的增强效应问题的研究<sup>[34,42,46,50–53]</sup>, 二是对一般性的椭圆极化方面的研究<sup>[30,46,49,54–56]</sup>. 我们最近的工作<sup>[52,53]</sup> 则把相关研究拓展到了空间非均匀情形, 使用的啁啾形式既有对称的, 也有非对称的; 场的形式有单色场, 也有双色组合场; 场的振动频率有低频的, 也有高频的, 或者高低频组合的, 等等. 有关 QED 下正负电子对产生的研究可参看综述性文章<sup>[6–8,40,57,58]</sup>.

本文主要介绍了 DHW 形式方法、QVE 方法和计算量子场论等方法, 并对空间均匀和非均匀的含时频率啁啾单色场和双色动力学辅助组合场以及组合势阱中正负电子对的产生问题进行了总结. 在本文中, DHW 形式方法和 QVE 方法使用自然单位  $\hbar = c = 1$ , 计算量子场论方法采用原子单位制  $\hbar = e = m = 1$ . 在自然单位制中, 所有物理量和归一化的值都以电子质量  $m$  所对应的物理量及大小来表示, 如长度单位是  $\lambda_c = 2\pi\hbar/(mc) = 2.43 \times 10^{-12}$  m, 时间单位是  $\tau_c = \lambda_c/c = 1.287 \times 10^{-21}$  s, 而动量则是  $mc = 0.551$  MeV/c, 最重要的一个物理量——电场强度则是用  $E_{\text{cr}}$  来归一化的.

还需要指出的是, 在原子电离和这里研究的正负电子对产生问题中, 有一个重要的物理参数是 Keldysh 参数<sup>[59]</sup>,  $\gamma = m\omega/(eE)$ , 用来描述场的隧穿电离或正负电子对产生的势垒时间与场的周期时间之比. 显然  $\gamma \ll 1$  和  $\gamma \gg 1$  分别对应了隧道效应和多光子过程. 本文的很多研究除了上述两种情况外, 也涉及了  $\gamma \sim 1$  情况下隧道效应和多光子过程之间的相互影响和相互竞争.

本文的总体构架如下: 第 2 节简要介绍所使用的 DHW 方法、QVE 方法和计算量子场论方法; 第 3 节给出空间均匀、非均匀含时场、具有啁啾的动力学辅助双色场以及组合势阱下不同啁啾形式的数值结果; 第 4 节给出 WKB 与转变点介绍及其对研究结果的半经典讨论; 第 5 节是结论与展望.

## 2 量子动力学方法和计算量子场论方法

在给出具体的 DHW 方法、QVE 方法和计算量子场论方法之前, 先简单介绍这几种方法的物理思想、适用范围以及它们之间的相互联系.

DHW 方法是正负电子对产生研究中适用

范围广泛、功能强大的量子动力学方法之一. 用 DHW 方法不仅能够研究含时的空间均匀外场情况下的正负电子对产生, 还可以研究空间非均匀外场情况下的正负电子对产生. 实时 DHW 形式的出发点是 Heisenberg 绘景中的两个狄拉克 (Dirac) 场的对易子所构成的协变密度算符, 乘上 Wilson 线积分后的等时密度算符具有规范不变性, 它对两个 Dirac 场的相对坐标进行傅里叶变换后的真空期望值就是 Wigner 函数. Wigner 函数可以用一组完备集作为基底进行旋量分解, 得到 16 个实的 Wigner 分量 (又称为 DHW 函数), 这 16 个分量包括 1 个标量、1 个赝标量、4 分量矢量、4 分量轴矢量和有 6 个分量的反对称 2 阶张量. 把这种分解形式代入到 Wigner 函数所满足的运动方程可以得到 16 个 DHW 函数所满足的偏微分方程组, 此偏微分方程组即为实时 DHW 形式. 数值求解该偏微分方程组便可以得到 16 个 DHW 函数, 进一步可以得到产生的正负电子对的动量分布函数以及动量积分后得到其粒子数密度. 这就是研究强场下正负电子对产生的实时 DHW 形式方法.

QVE 方法是针对只有含时的空间均匀外场情况下正负电子对产生的研究, 得到的 QVE 方程是量子动力学方程. 有两种方法可以得到 QVE 方程, 一种方法是由上述的 DHW 方法得到的方程通过把外场限制在时间依赖的形式上而得到; 另一种方法则是直接由狄拉克方程出发来得到, 其主要思想如下: 首先把满足狄拉克方程 (其中含有时间依赖的外场) 的费米子波函数通过产生湮灭算符用两个旋量 (分别对应于正负电子) 态的叠加表示. 这两个态的时间演化可以由一个互为复共轭的含时函数的一阶 (时间) 微分算子和一个共同的不含时的旋量所构成, 于是原来的狄拉克方程就转化成了二阶 (时间) 微分算子的本征问题. 由于费米子自旋矩阵和外加场的存在导致的哈密顿算符是非对角的, 因此为了得到物理上可以理解的结果, 需要对产生湮灭算符做波戈留波夫 (Bogoliubov) 变换使得哈密顿算符对角化. 这样由变换后产生湮灭算符所构造的粒子 (准确说是准粒子) 数的算符就能得到含时的正负电子对产生数密度的分布函数. 它与波戈留波夫变换式中的一个系数 (复数) 的模有关. 这个系数模满足的方程的左端是其一阶的时间微分, 右端则是一个从外场开始的时间直到当前时间的积分, 而积分里含有未知的那个系数模本身, 这

便是直接得到 QVE 方程的方法. 因此对分布函数的方程本质上是一个微分-积分方程. 该方程既反映了费米子的 Pauli 阻塞效应, 也联系了外场作用时间历史导致的非马尔可夫物理过程. 当外场逐渐消失或关闭时, 得到的准粒子就是我们需要的或者是实验上可观测到的真实的正负电子对.

下面再来谈谈计算量子场论方法. 众所周知, 在量子场论中, 每一种基本粒子都对应着一种场, 即使在真空中, 这些场都无处不在, 场的能量是量子化的. 粒子的产生和湮灭是不同的场之间的能量交换的结果. 量子电动力学是量子场论发展史中最长和最成熟的分支. 它可以研究电磁相互作用的量子性质, 如光子的发射和吸收、带电粒子的产生和湮灭、带电粒子间的散射和带电粒子与光子间的散射等. 在这个理论中, 带电粒子、光子和外场都用统一的场的概念来描述. 为了更好地理解在非常强的电磁辐射下原子电子的动力学过程, 从本世纪初开始, Su 和 Grobe 等提出用劈裂算符的方法数值求解含时的狄拉克方程, 并基于这一方法建立了一维情况下的正负电子对产生的数值模拟框架, 被称为是计算量子场论 (computation quantum field theory, CQFT). 与传统的散射矩阵方法不同, CQFT 通过求解含时的狄拉克方程, 并定义任意时刻的量子场论观测量, 从而得到含时演化的非微扰结果. 在对于含时单粒子波函数的求解中, 这种劈裂算符方法精度较高, 能够很好地保证波函数在演化过程中的完备性和归一性.

上述的三种方法相互之间是有机联系的, 各有其优缺点和适用范围, 针对具体不同的外场人们可以灵活使用不同的方法. 一般来说, DHW 和 CQFT 都能处理既有时间依赖又有空间变化的外场情况, 但对于高维空间的场 CQFT 处理起来于 DHW 来说更加复杂和困难; 而 QVE 只能处理只是时间变化的外场, 它是 DHW 的一个特殊情形, 尽管两个空间方向的时间依赖场也能做, 但很多情况下的研究只是对一个空间方向的含时场进行. 对同样的时空依赖的外场, 一些数值实验的例子表明, 用 DHW 和 CQFT 两种方法给出的正负电子对产生的谱和数密度结果是一致的.

## 2.1 DHW 方法

DHW 方法作为一个相对论性的相空间量子动力学方法<sup>[60,61]</sup>, 已被广泛应用于真空正负电子对



产生的研究<sup>[38,43,46,48]</sup>. 其中最后要解的 DHW 运动方程是从有外场时费米子的狄拉克方程推导出来的. 首先可由两个位置处的狄拉克场定义系统的协变密度算符为

$$\hat{C}_{\alpha\beta}(r, s) = \mathcal{U}(A, r, s) \left[ \bar{\psi}_\beta \left( r - \frac{s}{2} \right), \psi_\alpha \left( r + \frac{s}{2} \right) \right], \quad (1)$$

其中  $r$  表示质心坐标,  $s$  是相对坐标,  $\mathcal{U}(A, r, s)$  是为了保持  $U(1)$  规范不变性引入的 Wilson 线因子

$$\mathcal{U}(A, r, s) = \exp \left[ i e s \int_{-1/2}^{1/2} d\xi A(r + \xi s) \right]. \quad (2)$$

通过对协变密度算符进行从  $s$  空间到  $p$  的傅里叶变换得到协变 Wigner 算符:

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(r, p) = \frac{1}{2} \int d^4 s e^{i p s} \hat{C}_{\alpha\beta}(r, s). \quad (3)$$

考虑协变 Wigner 算符的真空期望值可以得到 Wigner 函数:

$$W(r, p) = \langle \Phi | W(r, p) | \Phi \rangle. \quad (4)$$

在狄拉克代数中 Wigner 函数能够用 16 个协变 Wigner 分量展开为

$$W = \frac{1}{4} (IS + i\gamma_5 P + \gamma^\mu \mathbf{V}_\mu + \gamma^\mu \gamma_5 \mathbf{A}_\mu + \sigma^{\mu\nu} \mathbf{T}_{\mu\nu}), \quad (5)$$

其中的  $S, P, \mathbf{V}_\mu, \mathbf{A}_\mu, \mathbf{T}_{\mu\nu}$  分别是标量、赝标量、矢量、轴矢量和反对称 2 阶张量. 由于我们主要研究粒子对产生, 可将其表示为初值问题, 因此可以通过求能量平均转换到等时形式来实现, 即

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int \frac{d p_0}{2\pi} W(r, p). \quad (6)$$

经过计算可以得到任意场下等时形式的运动方程如下 (在等时下 (5) 式中出现的物理量用相应的小写符号表示):

$$D_t s - 2\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{t}_1 = 0, \quad (7)$$

$$D_t \mathbf{p} + 2\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{t}_2 = -2m a_0, \quad (8)$$

$$D_t \mathbf{v}_0 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (9)$$

$$D_t \mathbf{a}_0 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{a} = 2mp, \quad (10)$$

$$D_t \mathbf{v} + \mathbf{D} v_0 + 2\mathbf{\Pi} \times \mathbf{a} = -2m \mathbf{t}_1, \quad (11)$$

$$D_t \mathbf{a} + \mathbf{D} a_0 + 2\mathbf{\Pi} \times \mathbf{v} = 0, \quad (12)$$

$$D_t \mathbf{t}_1 + \mathbf{D} \times \mathbf{t}_2 + 2\mathbf{\Pi} s = 2mv, \quad (13)$$

$$D_t \mathbf{t}_2 - \mathbf{D} \times \mathbf{t}_1 - 2\mathbf{\Pi} p = 0, \quad (14)$$

其中的  $\mathbf{t}_1$  和  $\mathbf{t}_2$  分别是反对称 2 阶张量  $\mathbf{t}_{\mu\nu}$  的类电场

的 3 分量矢量和类磁场的 3 分量矢量, 而伪微分算符和广义动量是

$$D_t = \partial_t + e \int_{-1/2}^{1/2} d\xi \mathbf{E}(\mathbf{x} + i\xi \nabla_p, t) \cdot \nabla_p,$$

$$\mathbf{D} = \nabla_x + e \int d\xi \mathbf{B}(\mathbf{x} + i\xi \nabla_p, t) \times \nabla_p,$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - ie \int d\xi \xi \mathbf{B}(\mathbf{x} + i\xi \nabla_p, t) \times \nabla_p. \quad (15)$$

众所周知, 这个含有 16 个分量的微分方程组 ((7) 式—(14) 式) 在特殊情况下可以简化, 下面针对文中研究的两种情形进行简单描述. 一是外加的电场只是时间函数但有两个方向的情形, 此时  $\mathbf{p} = \mathbf{a}_0 = \mathbf{v}_0 = 0$  以及  $\mathbf{t}_2 = 0$ , 从而 16 个分量的微分方程组可以简化为 10 个分量的偏微分方程组:

$$D_t s - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}_1 = 0, \quad (16)$$

$$D_t \mathbf{v} + 2\mathbf{p} \times \mathbf{a} = -2m \mathbf{t}_1, \quad (17)$$

$$D_t \mathbf{a} + 2\mathbf{p} \times \mathbf{v} = 0, \quad (18)$$

$$D_t \mathbf{t}_1 + 2\mathbf{p} s = 2m \mathbf{v}. \quad (19)$$

二是研究的 1+1 维空间非均匀的外加电场情况, 这时发现只有  $s, \mathbf{p}$  和  $\mathbf{v}$  ( $\mu = 0, 1$ ) 存在, 其余物理量都是 0, 因此有

$$D_t s - 2p_x p = 0, \quad (20)$$

$$D_t v_0 + \partial_x v_1 = 0, \quad (21)$$

$$D_t v_1 + \partial_x v_0 = -2mp, \quad (22)$$

$$D_t p + 2p_x s = 2m v_1. \quad (23)$$

结合真空初始条件

$$s_{\text{vac}} = -\frac{2m}{\omega}, \quad v_{\text{vac}} = -\frac{2p_x}{\omega}, \quad (24)$$

其中  $\omega = \sqrt{p_x^2 + m^2}$  是单个粒子的能量, 得到粒子数密度为

$$n(x, p_x, t) = \frac{m s^\nu(x, p_x, t) + p_x v^\nu(x, p_x, t)}{\omega(p_x)}, \quad (25)$$

其中  $s^\nu(x, p_x, t) = s - s_{\text{vac}}$  及  $v^\nu(x, p_x, t) = v - v_{\text{vac}}$  是修正之后的 Wigner 分量. 从而粒子数密度的动量空间分布可以通过  $n(x, p_x, t)$  对空间  $x$  的积分获得, 即  $n(p_x, t) = \int dx \frac{m s^\nu(x, p_x, t) + p_x v^\nu(x, p_x, t)}{\omega(p_x)}$ , 再对其进行动量积分, 得到产生粒子总数为

$$N(t) = \int dp_x n(p_x, t). \quad (26)$$

为了研究空间尺度  $\lambda$  的影响, 本文主要研究约化

动量谱  $\bar{n}(p_x, t) = n(p_x, t) / \lambda$  和约化粒子数  $\bar{N}(t) = N(t) / \lambda$ .

## 2.2 QVE 方法

对于空间均匀的只有时间依赖的背景电场  $E(t)$ , 正负电子对产生的数密度分布函数可以表示成如下形式:

$$\frac{df(\mathbf{p}, t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{eE(t)\varepsilon_{\perp}}{\Omega^2(\mathbf{p}, t)} \int_{t_0}^t dt' \frac{eE(t')\varepsilon_{\perp}}{\Omega^2(\mathbf{p}, t')} \times [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \cos[2\Theta(\mathbf{p}, t', t)], \quad (27)$$

其中的  $\Omega(\mathbf{p}, t) = \sqrt{\varepsilon_{\perp}^2 + (p_{\parallel} - eA(t))^2}$  是产生粒子 (例如电子) 的能量 ( $\varepsilon_{\perp}^2 = m^2 + p_{\perp}^2$ ),  $\Theta(\mathbf{p}, t', t) = \int_{t'}^t d\tau \Omega(\mathbf{p}, \tau)$ . 如果引入两个辅助函数, 则 (27) 式的微分积分方程可以写成下面的关于三个未知函数的常微分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{df(\mathbf{p}, t)}{dt} &= \frac{1}{2} W(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{p}, t), \\ \frac{du(\mathbf{p}, t)}{dt} &= W(\mathbf{p}, t) [1 - 2f(\mathbf{p}, t)] - 2\Omega(\mathbf{p}, t) v(\mathbf{p}, t), \\ \frac{dv(\mathbf{p}, t)}{dt} &= 2\Omega(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{p}, t), \end{aligned} \quad (28)$$

这里  $W(\mathbf{p}, t) = eE(t)\varepsilon_{\perp} / \Omega^2(\mathbf{p}, t)$ . 事实上方程 (28) 可以由 DHW 在时间函数场下简化得到, 也可以直接从狄拉克方程出发通过波戈留波夫变换得到<sup>[61]</sup>, 两者结果是一样的. 方程 (27) 或 (28) 一般称为量子弗拉索夫方程.

最后, 单个粒子的动量分布函数  $f(\mathbf{p}, t)$  可以通过解方程 (28) 得到, 初始条件为  $f(\mathbf{p}, -\infty) = u(\mathbf{p}, -\infty) = v(\mathbf{p}, -\infty) = 0$ . 因此, 每  $dp_{\perp} / (2\pi)^2$  的横向动量空间微面积元内产生的粒子数密度随时间的演化表示为

$$n(t) = 2 \int \frac{dp_{\parallel}}{2\pi} f(p_{\parallel}, t), \quad (29)$$

其中因子 2 是考虑了电子的简并度.

## 2.3 计算量子场论方法

在量子场论中, 正负电子在势阱  $V(z, t)$  中的时间演化算符  $\hat{\psi}(z, t)$  满足 Dirac 方程<sup>[35-37,62]</sup>,

$$i\partial\hat{\psi}(z, t)/\partial t = [c\alpha_z\hat{p}_z + \beta c^2 + V(z, t)], \quad (30)$$

其中  $\alpha_z$  和  $\beta$  为 Dirac 矩阵,  $c$  为真空中光速,  $V(z, t)$

为  $z$  方向随时间  $t$  变化的外加强场. 本方法采用原子单位制, 满足  $\hbar = e = m_e = 1$ . 现在引入正能级的产生算符  $\hat{b}_p$  和负能级的产生算符  $\hat{d}_n^{\dagger}$ , 将场算符展开成如下形式:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(z, t) &= \sum_p \hat{b}_p(t) W_p(z) + \sum_n \hat{d}_n^{\dagger}(t) W_n(z) \\ &= \sum_p \hat{b}_p W_p(z, t) + \sum_n \hat{d}_n^{\dagger} W_n(z, t), \end{aligned} \quad (31)$$

其中  $p$  和  $n$  分别代表正能态动量和负能态动量,  $\sum_{p(n)}$  代表对所有的正 (负) 能量的求和,  $W_p(z) = \langle z|p\rangle$  ( $W_n(z) = \langle z|n\rangle$ ) 为无外场时自由粒子的正 (负) 能量本征态. 需要注意的是,  $W_p(z, t) = \langle z|p(t)\rangle \times$  ( $W_n(z, t) = \langle z|n(t)\rangle$ ) 是以自由粒子态为初始条件随时间演化以后的单粒子态. 从 (31) 式可以得到:

$$\begin{aligned} \hat{b}_p(t) &= \sum_{p'} \hat{b}_{p'} U_{pp'}(t) + \sum_{n'} \hat{d}_{n'}^{\dagger} U_{pn'}(t), \\ \hat{d}_n^{\dagger}(t) &= \sum_{p'} \hat{b}_{p'} U_{np'}(t) + \sum_{n'} \hat{d}_{n'}^{\dagger} U_{nn'}(t), \\ \hat{b}_p^{\dagger}(t) &= \sum_{p'} \hat{b}_{p'}^{\dagger} U_{pp'}^*(t) + \sum_{n'} \hat{d}_{n'} U_{pn'}^*(t), \\ \hat{d}_n(t) &= \sum_{p'} \hat{b}_{p'}^{\dagger} U_{np'}^*(t) + \sum_{n'} \hat{d}_{n'} U_{nn'}^*(t), \end{aligned} \quad (32)$$

其中  $U_{pp'}(t) = \langle p|\hat{U}(t)|p'\rangle$ ,  $U_{pn'}(t) = \langle p|\hat{U}(t)|n'\rangle$ ,  $U_{nn'}(t) = \langle n|\hat{U}(t)|n'\rangle$ ,  $U_{np'}(t) = \langle n|\hat{U}(t)|p'\rangle$ , 时间演化算符满足  $\hat{U}(t) = \hat{T} \exp\left\{-i \int_0^t d\tau \left[c\alpha_z\hat{p}_z + \beta c^2 + V(z, \tau)\right]\right\}$ .

在方程 (31) 中, 描述电子部分的场算符定义为  $\hat{\psi}_e(z, t) \equiv \sum_p \hat{b}_p(t) W_p(z)$ . 根据量子场论, 可以知道产生的电子的密度可以表示为

$$\begin{aligned} \rho(z, t) &= \langle \text{vac} | \hat{\psi}_e^{\dagger}(z, t) \hat{\psi}_e(z, t) | \text{vac} \rangle \\ &= \sum_n \left| \sum_p U_{pn}(t) W_p(z) \right|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

通过对空间积分可得产生的电子数目:

$$N(t) = \sum_p \sum_n |U_{pn}(t)|^2. \quad (34)$$

也可以得到产生的电子的动量谱:

$$\rho_p(t) = \sum_n |U_{pn}(t)|^2. \quad (35)$$

经过以上理论推导, 得到了在一定场分布下真空产

生粒子的概率密度和数目的具体表达式, 还可以得到产生粒子的能谱特性. 在数值计算中, 首先用劈裂算符法对时间演化算符进行处理, 然后通过傅里叶变换和逆傅里叶变换对波函数进行演化, 最后得到想要的结果.

### 3 数值模拟与结果分析

首先来看看空间均匀含时场在有频率啁啾时正负电子对产生的情形.

#### 3.1 空间均匀含时场

2017年我们用求解量子弗拉索夫方程的方法对一个和两个不同频率(通常也叫一色场和二色场, 这里的色是表示频率的意思)的激光脉冲场下正负电子对产生问题研究了频率啁啾的影响, 发现小的频率啁啾就可以使得动量谱发生移动<sup>[34]</sup>. 另外正和负啁啾的效应是一样的, 都能使正负电子对产生增加, 但在 $t = 0$ 时改变啁啾符号则效应不一样, 先正后负啁啾更能提高正负电子对的产额. 也发现两色场比一色场啁啾时正负电子对产额的增加更大, 而且较大频率啁啾的场起着主导作用. 进一步研究还发现, 随着两个场频率比的变化, 正负电子对产生的数密度在小的频率啁啾下对频率比不敏感, 但在大的频率啁啾情况下, 如果啁啾施加于高频弱的那个场时, 数密度对频率比就非常敏感.

本文使用的背景场形式, 对于一色场是

$$E_1(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \cos(bt^2 + \omega t), \quad (36)$$

其中参数选取为场强 $E_0 = 0.1$ , 原初频率 $\omega = 0.02$ , 脉冲宽度 $\tau = 100$ ,  $b$ 是频率啁啾参数, 根据有效频率的最大值不超过原初频率的一般原则来确定其变化范围. 对于二色场, 即两个电场之和, 它们有相同的包络函数形式但是有不同的场强、原初频率和啁啾参数, 即

$$E(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) [E_1 \cos(b_1 t^2 + \omega_1 t) + E_2 \cos(b_2 t^2 + \omega_2 t)], \quad (37)$$

其中的参数选取为 $E_1 = 0.1$ ,  $E_2 = 0.01 = 0.1E_1$ ,  $\omega_1 = 0.02$ ,  $\omega_2 = 0.2 = 10\omega_1$ , 脉冲宽度仍取 $\tau = 100$ .

图1是一色脉冲激光场下正负电子对产生的

数密度与原初频率的依赖关系, 三种情况分别是正啁啾、负啁啾和无啁啾. 其中原始频率的变化范围为 $0-0.5$ . 可以看出, 当 $\omega < 0.1$ 时, 数密度先减小后增大, 三条曲线基本一致. 当 $\omega > 0.1$ 时, 随着频率的增加, 曲线呈明显的振荡, 这是由多光子过程引起的. 显然没有啁啾时的振荡更为显著, 而频率啁啾的加入导致了数密度的平滑和峰值的加宽, 并且正和负啁啾的结果一样. 此外, 对于大多数频率, 啁啾激光脉冲产生的对的数密度高于无啁啾激光脉冲产生的对的数密度. 随着原始频率的增加, 差异变得更大, 甚至能达到三个数量级, 例如在最右端频率约为 $0.49$ 时, 无啁啾曲线的谷底与对应处的有啁啾时存在差异. 对两色场的研究表明, 数密度提高更多, 而且较大的啁啾参数贡献大, 这里不再详细描述, 可以参见参考文献<sup>[34]</sup>.

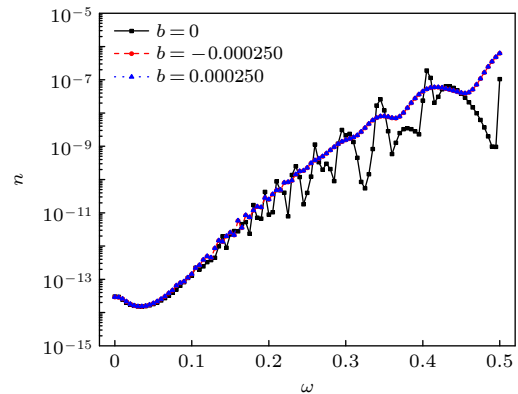


图1 一色脉冲激光场下正负电子对的数密度与原初频率的依赖关系(取自参考文献<sup>[34]</sup>)

Fig. 1. Electron-positron number density vs the original frequency in one-color pulse laser field (from Ref. <sup>[34]</sup>).

2019年我们使用实时狄拉克-海森伯-威格纳DHW形式研究了强电场中的电子-正电子对产生<sup>[46]</sup>, 即 Sauter-Schwinger 效应, 使用的电场为具有亚临界峰值场强的均匀单脉冲场. 在线性频率啁啾下分别对四种不同极化, 即线极化、椭圆极化、近圆的椭圆极化和圆极化计算了相应的动量谱以及产生的正负电子对的数密度. 研究发现动量谱计算的细节取决于选择的极化、频率啁啾等导致的干涉效应, 因此动量谱在不同情况下有相当大的变化. 产生的对的数密度与表征极化的参数有较强的非线性关系, 并且对啁啾参数的变化非常敏感. 特别值得一提的是对于一些特定的频率啁啾而言, 数密度可以提高3-4个数量级.

对于任意极化的场

$$\mathbf{E}(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1+\delta^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) [\cos(bt^2 + \omega t) \mathbf{e}_x + \delta \sin(bt^2 + \omega t) \mathbf{e}_y], \quad (38)$$

其中  $E_0/\sqrt{1+\delta^2}$  表示电场的幅值强度,  $\delta$  是椭圆极化度. 研究中选取  $E_0 = 0.1\sqrt{2}$ ,  $\omega = 0.6$  和  $\tau = 10$ . 图 2 给出了不同啁啾参数下产生的粒子数密度与场极化度的依赖关系, 可以看出, 左右旋的相同椭圆极化度  $\delta$  有一个预期的镜像对称性, 这也意味着线性极化  $\delta=0$  的情况可能提供了数密度的极值. 正如图 2(左上) 所示, 小啁啾时的确如此, 但在较大的啁啾时, 线极化出现的最大值变为最小值, 然后在更大的啁啾下又再次变为最大值. 对于非常大的  $b$ , 甚至会出现额外的极值, 例如  $b \geq 0.04$ . 然而, 更重要的是随着啁啾的增加, 峰值数密度显著增加, 特别是当  $b$  从 0.02 增加到 0.03 时, 这种效应最为显著. 对于所有极化而言, 其数密度都有至少一个量级程度的增加.

啁啾情况下不同极化时的动量谱也表现出特别丰富和有趣的结构, 这里不打算详细描述, 仅给出一个示例, 如图 3 所示. 可以看出, 随着啁啾的

增大, 动量谱逐渐呈现螺旋结构且向零动量的中心处会聚.

2020 年, 我们用求解 QVE 的方法进一步研究了如下形式的啁啾场:

$$E_1(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \cos[\omega t + b \sin(\omega_m t)], \quad (39)$$

其中  $b$  和  $\omega_m$  分别是啁啾的调制幅度和调制频率. 图 4 是当啁啾频率的调制幅度  $b = 1.0$  固定时, 调制频率分别是  $\omega_m = 0, 0.07, 0.1$  时产生的粒子对的动量谱, 其中动量谱各个峰上标记的数字是与场的傅里叶变换中各种峰值谱的频率及其拍频后的频率相对应, 反映了啁啾场是多重不同频率场的叠加, 而正负电子对产生是这些场的不同多光子过程的组合, 显然不同频率和场强的配合在一定程度上体现了动力学辅助机制的作用.

对动量谱的积分, 也就是谱函数曲线下面的面积就是粒子对的数密度. 研究发现, 在有调制时, 粒子数的增加在一些情况下是很惊人的, 如在场强  $E_0 = 0.1$  下, 当中心频率  $\omega = 0.5$  时, 调制参数  $(\omega_m, b) = (0.022, 8.64)$  下的数密度  $2.03 \times 10^{-5}$  比  $(\omega_m, b) = (0.023, 2.34)$  下的数密度  $6.1 \times 10^{-7}$  提高了约两个量级,

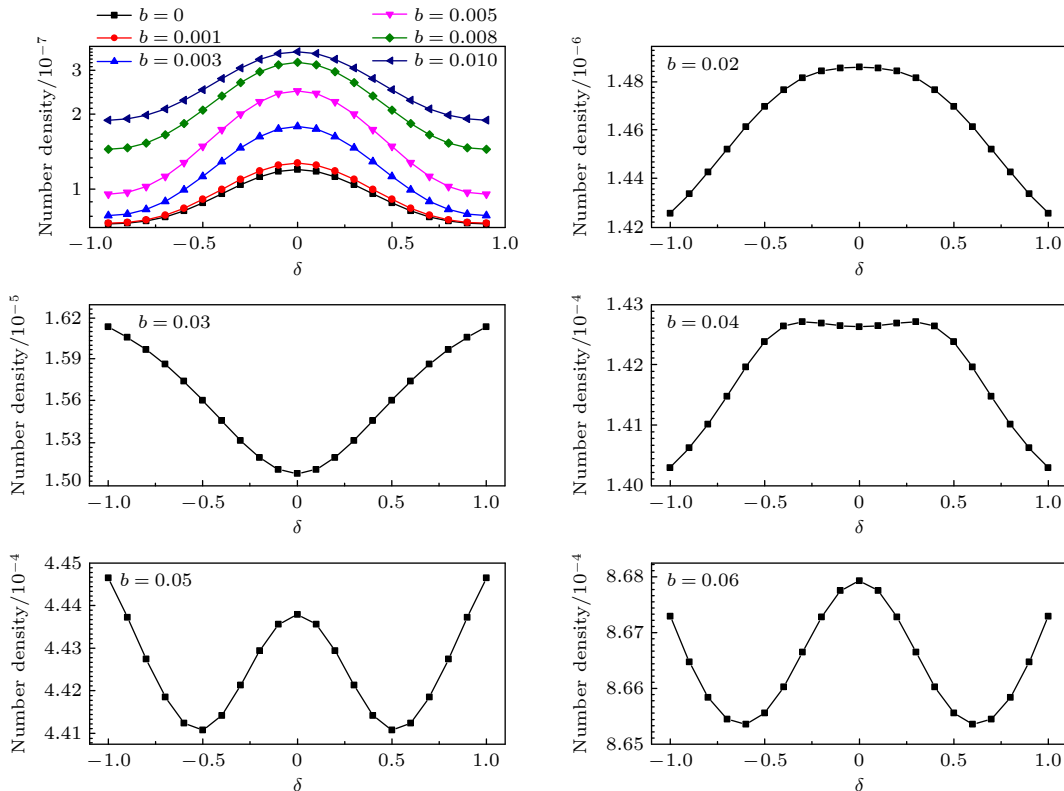


图 2 在不同啁啾参数下产生的粒子数密度与场极化度的依赖关系 (取自参考文献 [46])

Fig. 2. The number density of created particles as a function of the field polarization  $\delta$  for different chirp parameters  $b$  (from Ref. [46]).



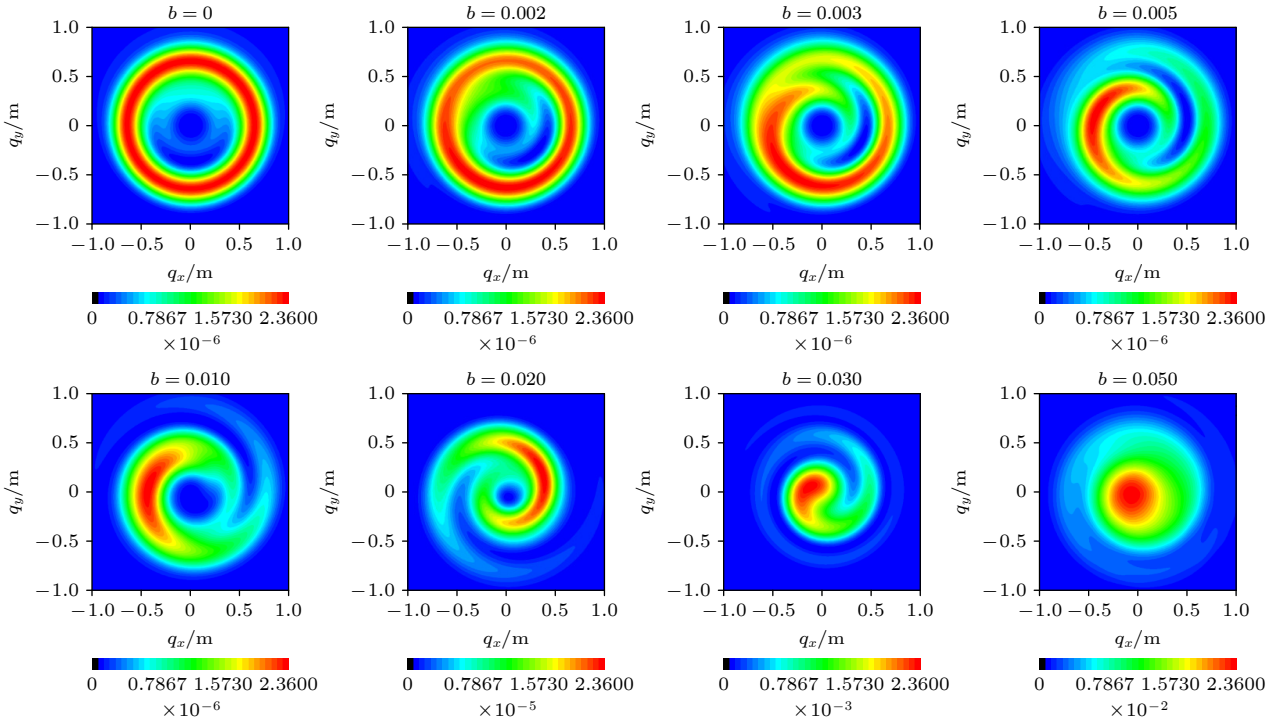


图 3 圆极化时在不同啁啾参数下产生的粒子的动量谱(取自参考文献 [46])

Fig. 3. Momentum spectra of produced pairs for circular polarization (from Ref. [46]).

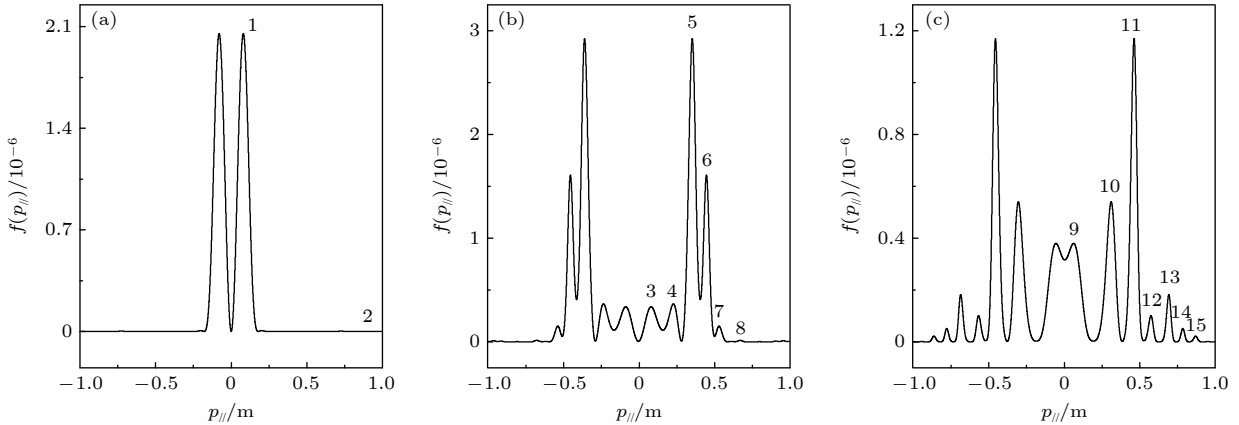


图 4 在调制幅度  $b = 1.0$  下不同啁啾调制频率  $\omega_m = 0, 0.07, 0.1$  时产生的粒子对的动量谱(取自参考文献 [50])

Fig. 4. Momentum spectra of produced pairs in the field Eq.(39) with  $\omega_m = 0, 0.07, 0.1$  for (a)–(c), respectively when  $b = 1.0$  is fixed (from Ref. [50]).

而比  $(\omega_m, b) = (0.009, 9.52)$  下的数密度  $7.63 \times 10^{-9}$  相比更是提高了 3—4 个量级.

总之, 利用量子动力学方法 (DHW 或 QVE) 研究了激光场频率啁啾或调制下产生的电子-正电子对的动量谱和数密度. 发现动量频谱呈现出明显的干涉图样, 动量谱的峰值对应于对产生过程中吸收的不同频率分量的光子. 此外, 还可以通过分析转变点结构来定性理解干涉效应. 对对产生的数密度研究表明, 数密度对啁啾参数非常敏感, 在某些

参数下它可以提高 2—3 个数量级. 这些研究提供了一种可能的新方法使得在未来实验中产生正负电子对的数目能大幅增加.

### 3.2 空间不均匀且有时间依赖的场

其次, 在空间-时间都有依赖的场的情形下再来看看频率啁啾是如何影响正负电子对产生的动量谱和粒子对的数密度的.

### 3.2.1 高斯时间包络的非对称啁啾场

在研究工作 [42] 中, 我们研究了如下 1+1 形式的空间-时间场:

$$E(x, t) = \varepsilon E_{cr} \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \times \cos(\omega t + bt^2 + \phi), \quad (40)$$

其中  $\varepsilon = 0.5$ , 对高频取  $\omega = 0.7$  和  $\tau = 45$ , 但对低频则取  $\omega = 0.1$  和  $\tau = 25$ , 显然  $\lambda$  是反映场的空间变化的尺度.

图 5 给出了高频  $\omega = 0.7$  和  $\tau = 45$  下取不同啁啾参数  $b = 0.00078$  和  $b = 0.0016$  时产生的粒子对的约化动量谱 (所谓约化的意思是对获得的物理量除以空间尺度  $\lambda$ , 后面的约化数密度也是如此). 可以看出, 大的空间尺度与均匀时结果一致, 随着  $\lambda$  减小, 谱的峰值下降并向较大动量移动; 另外啁啾的提高也增加了干涉效应.

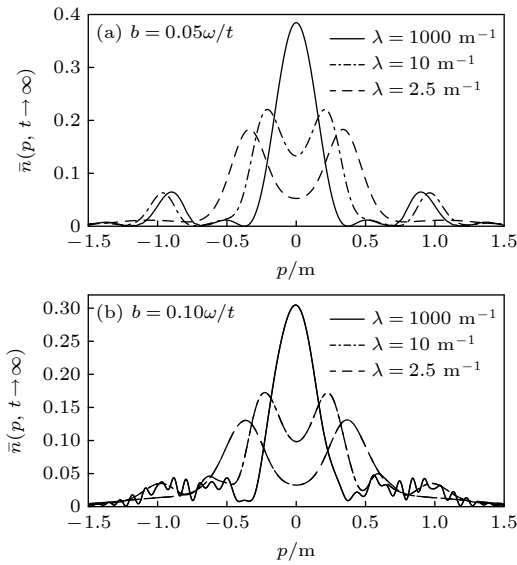


图 5 高频  $\omega = 0.7$  下取不同啁啾参数  $b$  时产生的粒子对的约化动量谱 (取自参考文献 [42])  
Fig. 5. Reduced momentum spectra of produced pairs in the field Eq.(40) with  $b = 0.00078$  for (a) and  $b = 0.0016$  for (b), respectively, when high frequency  $\omega = 0.7$  is fixed (from Ref. [42]).

图 6 是约化数密度与空间尺度变化的关系, 值得注意的有两点: 一是在无啁啾或者啁啾较小时, 大的空间尺度基本上与空间均匀结果接近 (见图 6 右端的平坦曲线部分), 当空间尺度减小时, 有时会有一个极大值 (如图 6 中的虚线无啁啾时  $b = 0$  情形), 即最优化的尺度, 这主要是空间场变化和时

间场变化的联合效应导致的, 具体分析比较困难, 但定性上来说空间变化一般要减低产额, 而时间变化要增加产额, 这样的非线性竞争所导致. 但不管怎样, 非常小的空间尺度一定使得产额下降, 因为电场在空间中的存在范围和强度都非常有限, 不能有足够的能量提供正负电子对的产生, 当然因为量子力学的隧道效应, 尽管很小, 但还是有一定的产额. 另外一点尤其引人注目的是在大的啁啾下 (图 6 中最上面的点画线), 在小空间尺度下的下降趋势减缓, 这说明大啁啾下粒子产额主要是吸收了高能光子所致, 且小尺度对其影响有限.

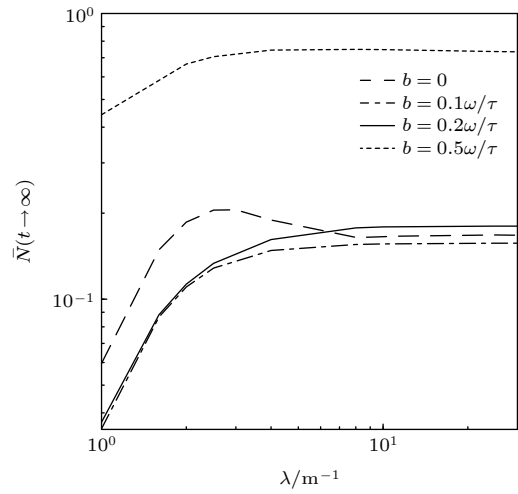


图 6  $\omega = 0.7$  下粒子对的约化数密度与场的空间尺度  $\lambda$  的关系 (取自参考文献 [42])  
Fig. 6. Reduced number of produced pairs in the field Eq.(40) with respect to spatial extent  $\lambda$  when  $\omega = 0.7$  (from Ref. [42]).

对于慢振荡电场我们也进行了研究, 发现啁啾和载波相位参数  $\phi$  对粒子动量分布有重要影响. 由于篇幅所限这里不再给出详细描述. 但值得指出的是强聚焦尺度使得啁啾效应在各种振荡模式下的表现有显著不同. 特别是对于  $\phi = \pi/2$ , 随着啁啾值的增加, 动量谱会合并, 并形成振荡图案. 这表明, 场的有限空间尺度会以不同方式呈现时间脉冲结构的效果, 并通过额外维度使正负电子对产生过程的非马尔可夫性质复杂化 [63].

进一步对有不同啁啾形式情况或有不同时间包络的空间不均匀场进行了卓有成效的研究, 下面分别介绍最近几个有特色的研究工作和得到的有趣结果.

### 3.2.2 高斯时间包络的对称啁啾场

第一个工作是研究了有限空间尺度下对称啁

啁啾场中真空对的产生<sup>[52]</sup>. 研究方法还是基于 DHW 的形式化理论, 在场的时振荡部分考虑了余弦和正弦两种形式. 发现动量谱对于对称啁啾非常敏感, 对称啁啾对不同的空间尺度以及场的载波相位还表现出不同的干涉效应. 约化粒子数通常随着啁啾的增加而增加. 特别是在小空间尺度下, 当存在啁啾时, 粒子数能增加 1—2 个数量级. 此外, 还发现与非对称啁啾时粒子数增加相比, 对称啁啾时粒子数增加更大, 后者的粒子数大约是前者的两倍.

这一研究的 1+1 形式的空间-时间场如下:

$$E(x, t) = \varepsilon E_{\text{cr}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \times \cos(\omega t + b|t| + \phi), \quad (41)$$

其中  $\varepsilon = 0.5$ , 对高频取  $\omega = 0.7$  和  $\tau = 45$ , 对低频则取  $\omega = 0.1$  和  $\tau = 25$ , 显然除了啁啾是关于时间正负具有对称性之外, 其余的参数选择和场的形式与上述<sup>[42]</sup>一致, 这也是为了与文献<sup>[42]</sup>中不对称啁啾结果进行比较而方便的选择.

图 7 给出了高频  $\omega = 0.7$  和  $\tau = 45$  下取不同啁啾参数  $b$  时不同空间尺度下动量谱的对称啁啾效应. 可以看出, 在大空间尺度上, 如  $\lambda = 1000$  时, 动量谱对啁啾参数的变化非常敏感. 即使对于较小的啁啾, 也可以观察到微弱的振荡, 见图 7(a) 和图 7(b). 随着啁啾的增加, 动量谱中出现强烈振荡, 见图 7(c) 和图 7(d). 对于非零啁啾, 有效频率随着啁啾的增

加而增加, 并提供更多能量以产生更多粒子. 因此, 这些粒子相互作用会对动量谱产生更明显的干涉效应, 这一结果与均匀场的结果相似. 在小空间尺度下, 如  $\lambda = 10$  和  $\lambda = 2.5$  时, 对于小啁啾, 振荡不明显, 但我们在动量谱上观察到峰值分裂, 见图 7(a) 和图 7(b). 这一现象可以用有质动力效应来解释. 因为有质动力的大小与空间尺度的大小成反比, 因此动量峰值在空间尺度 2.5 时比 10 时要更远离中心些. 然而, 对于大啁啾, 有质动力分裂的峰值被图 7(c) 和图 7(d) 所示的强的振荡所取代. 因为有效频率随啁啾的增大而明显增大, 对外场频率的贡献更大. 因此, 有质动力的相应效应减小, 而动量谱发生强烈振荡的原因可以归咎于产生的粒子之间很强的量子干涉效应.

图 8 给出了不同啁啾参数下约化粒子数与空间尺度的依赖关系. 可以看到, 粒子数随着啁啾的增加而增强. 这种增强对于最大啁啾最为明显. 当啁啾相对较小时, 如  $b \leq 0.2\omega/\tau$ , 粒子数随着空间尺度的增加而迅速增加. 由于电场能量随着空间尺度的扩大而增加, 因此在电场区域产生的粒子也相应增加. 然而, 当啁啾非常大时, 如  $b = 0.5\omega/\tau$ , 粒子数受空间尺度的影响较小, 在整个空间尺度上显示出相对平坦的变化. 另一方面, 在较大的空间尺度下, 随着空间尺度的增大, 每个啁啾参数的粒子数都趋于常数. 这一点并不奇怪, 因为这时的场可以看作是一个空间均匀场.

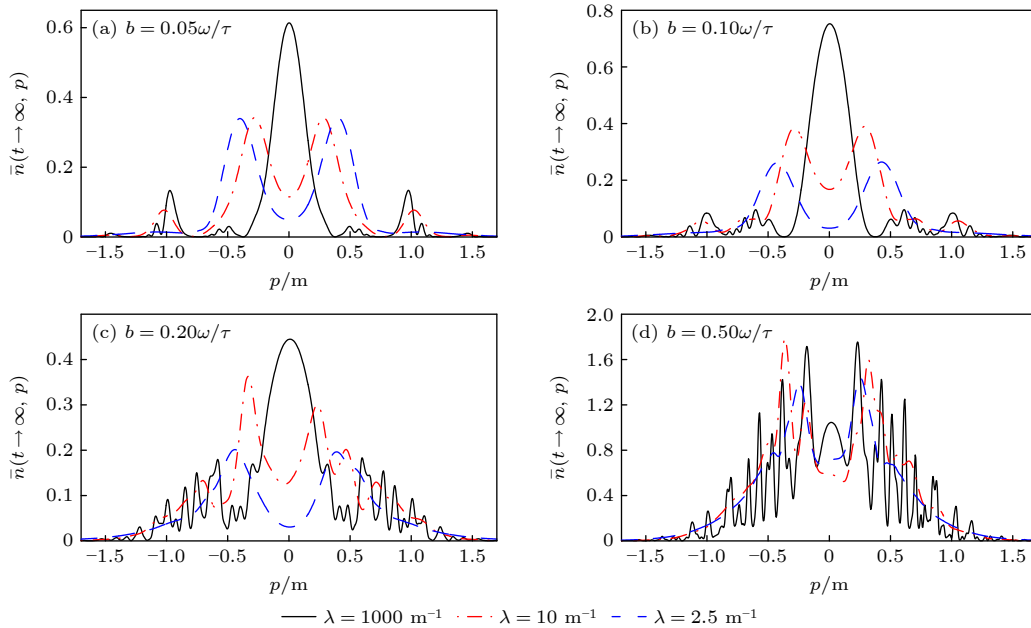


图 7 高频  $\omega = 0.7$  下不同啁啾不同空间尺度时产生的粒子对约化动量谱 (取自参考文献<sup>[52]</sup>)

Fig. 7. Reduced momentum spectra of produced pairs in the field Eq.(41) for high frequency field with  $\omega = 0.7$  (from Ref. <sup>[52]</sup>).

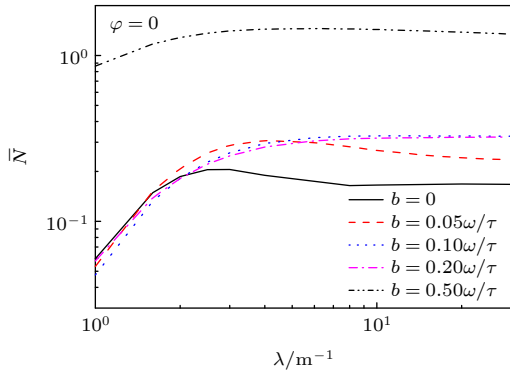


图 8  $\omega = 0.7$  下粒子对的约化数密度与场的空间尺度  $\lambda$  的关系(取自参考文献 [52])

Fig. 8. Reduced number of produced pairs in the field Eq.(41) with respect to spatial extent  $\lambda$  when  $\omega = 0.7$  (from Ref. [52]).

我们注意到, 与无啁啾的情况相比, 在大的啁啾情况下, 粒子数有一个数量级的提高. 为了获得直观的认识, 表 1 中对比了 (31) 式的对称啁啾场和 (30) 式的非对称啁啾场的结果. 显然对称啁啾的数密度把非对称情况下的数密度又提高了约 2 倍.

图 9 是低频场  $\omega = 0.1$  和  $\tau = 25$  时的动量谱. 当没有啁啾时 (参见图 9(a)), 动量谱与参考文献 [42] 中的图 6(a) 相同. 在大空间尺度, 如 500 时, 即使没有啁啾也可以观察到非常微弱的振荡, 见图 9(a) 实线; 有小啁啾时在图 9(b) 中的动量谱两侧 (实线) 看到了更强的振荡. 对于较大的啁啾, 会出现非常强的振荡, 同时动量谱会收缩并向正方向移

动, 见图 9(c) 和图 9(d). 这些振荡可以理解为时间场相反符号的大峰值产生的粒子间的干涉效应 [44].

表 1 空间尺度  $\lambda = 10$  时不同啁啾下 (31) 式对称啁啾场与 (30) 式的非对称啁啾场数密度及其比值 (参考文献 [52])

Table 1. Reduced pair number and ratio of symmetric and asymmetric fields for different chirping when  $\lambda = 10$  (from Ref. [52]).

$b(\omega/\tau)$	$N_{\text{sym}}$	$N_{\text{asym}}$	$N_{\text{sym}}/N_{\text{asym}}$
0.05	0.2680	0.1663	1.612
0.10	0.3274	0.1561	2.097
0.20	0.3178	0.1791	1.774
0.50	1.4340	0.7474	1.919

当空间尺度缩小到 10 m 时, 无啁啾下动量谱上没有振荡. 对于小啁啾, 可以在左侧观察到一个微弱的振荡, 同时, 动量谱展宽到负区域, 这是因为具有一定动量的粒子离开了场区, 并错过了负场峰值对其减速 [42]. 对于较大的啁啾, 动量谱上也会出现强烈的振荡, 这是由来自相反场峰值所产生粒子的干涉效应引起的, 见图 9(c) 和图 9(d) 的点画线. 当空间尺度进一步减小到 2 时, 对于小啁啾, 动量谱上没有观察到明显的振荡. 而对于较大的啁啾, 则出现振荡, 但比较弱. 另外, 因为空间尺度很小, 所以电场所做的功相应地也减少了, 因此产生的粒子也会随之减少, 表现在动量谱上也不会观察到明显的干涉现象.

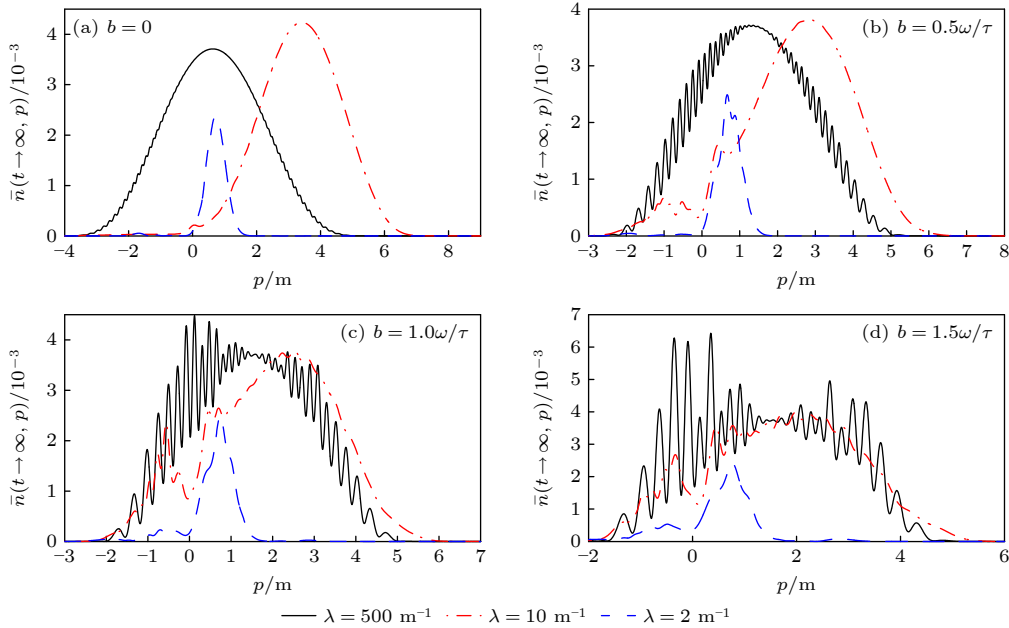


图 9 低频  $\omega = 0.1$  下不同啁啾不同空间尺度时产生的粒子对约化动量谱(取自参考文献 [52])

Fig. 9. Reduced momentum spectra of produced pairs in the field Eq.(41) for low frequency field with  $\omega = 0.1$  (from Ref. [52]).



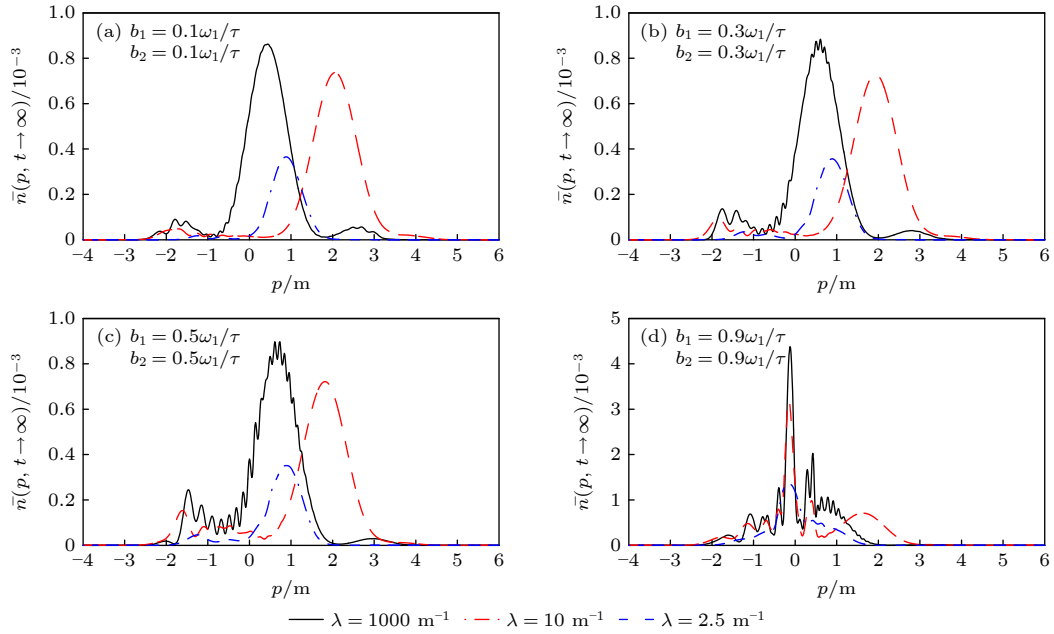


图 10 不同啁啾不同空间尺度时产生的粒子对约化动量谱(取自参考文献 [53])

Fig. 10. Reduced momentum spectra of produced pairs in the field Eq.(42) for different chirping (from Ref. [53]).

对此低频场情形,我们也比较了对称啁啾与非对称啁啾情况下的约化粒子数,与非对称频率啁啾的情况相比,在对称啁啾的情况下,约化粒子数几乎没有变化.通过画出得到的粒子数与空间尺度的依赖关系发现与高频场类似,但啁啾效应对其产额提高没有高频时的大.我们也研究了相位  $\phi = \pi/2$  下相应的高频和低频场在不同空间尺度和不同啁啾强度下的动量谱和粒子数产额等,由于篇幅关系,不再详细阐述,有兴趣的读者可以参看参考文献 [52].

### 3.2.3 余弦时间包络的非对称啁啾场

我们还研究了如下形式的两个叠加的场:

$$\begin{aligned}
 E(x, t) &= E_{1s}(x, t) + E_{2w}(x, t) \\
 &= \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right) \cos^4\left(\frac{t}{\tau}\right) [E_{1s0} \cos(b_1 t^2 + \omega_1 t) \\
 &\quad + E_{2w0} \cos(b_2 t^2 + \omega_2 t)], \quad (42)
 \end{aligned}$$

其中的参数选取为  $E_{1s0} = 0.3$ ,  $E_{2w0} = 0.075 = 0.25E_{1s0}$ ,  $\omega_1 = 0.1$ ,  $\omega_2 = 0.7 = 7\omega_1$ , 脉冲宽度仍取  $\tau = 50$ .

图 10 是各种空间尺度下不同啁啾时的约化动量谱.可以看出,小啁啾下动量谱振荡不大,即有弱的干涉效应,但大啁啾引起了复杂和大的振荡,即产生粒子间的干涉效应加强了.从图 10(d) 还可以看到,下动量谱主峰旁边出现了一些额外的小

峰,且与其他情况的结果相比,这时动量谱的峰值更高.

图 11 给出了作为各种空间尺度函数的不同啁啾值下约化粒子总产量的增强因子.增强因子的定义是:两个场同时存在时产生的粒子数  $N_{1s+2w}$  与 1 和 2 场单独存在时各自产生的粒子数简单相加后的  $N_{1s} + N_{2w}$  的比值大小.研究发现,在准均匀区域,每个啁啾下的增强因子几乎是一个常数.然而,在有限的空间尺度上,增强因子的变化是复杂的,我们也发现对于小啁啾情形,增强因子的变化在  $\lambda = 2.4$  处最大,而对于大啁啾情形,则在 16 处最大.

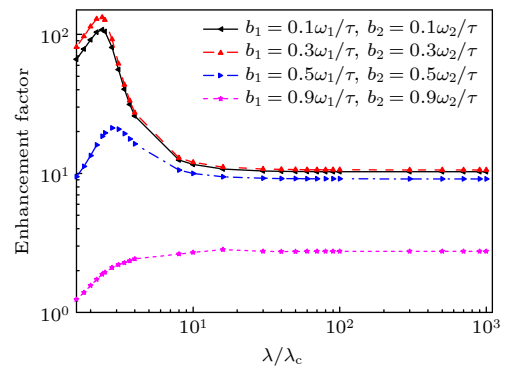

 图 11 粒子对约化数密度的增强因子与场的空间尺度  $\lambda$  的关系(取自参考文献 [53])

 Fig. 11. Enhancement factor of reduced number of produced pairs in the field Eq.(42) with respect to spatial extent  $\lambda$  (from Ref. [53]).

表 2 优化空间尺度和啁啾参数下单个啁啾场或两个啁啾场的增强因子 (参考文献 [53])

Table 2. Optimal spatial scales related to the optimal enhancement factor at the chosen optimal chirp parameters (from Ref. [53]).

Different chirping	Chirp parameter $(\omega_i/\tau), (i = 1, 2)$	Spatial scale/m <sup>-1</sup>	$\frac{N_{1s+2w}}{N_{1s} + N_{2w}}$
Only $b_1$	$b_1 = 0.9$	$\lambda = 2.4$	94.756
Only $b_2$	$b_2 = 0.3$	$\lambda = 2.4$	133.584
$b_1$ and $b_2$	$b_1 = b_2 = 0.3$	$\lambda = 2.4$	132.517

$$V(z, t) = \begin{cases} (V_1 + V_2) \sin(\pi t/2t_0) S(z), & 0 \leq t < t_0, \\ \{V_1 + V_2 \cos[b(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \phi]\} S(z), & t_0 \leq t < t_0 + t_1, \\ [V_1 + V_2 \cos(bt_1^2 + \omega_0 t_1 + \phi)] \cos[\pi(t - t_1 - t_0)/2t_0] S(z), & t_0 + t_1 \leq t < 2t_0 + t_1, \end{cases} \quad (43)$$

其中前面的空间场是  $S(z) = \{\tanh[(z - D/2)/W] - \tanh[(z + D/2)/W]\}/2$ , 显然  $D$  是势阱的宽度,  $W$  是势阱边缘的宽度.

图 12 是在参数选取为  $V_1 = V_2 = 1.5c^2$ ,  $W = 0.3/c$ ,  $D = 10/c$ ,  $t_0 = 5/c^2$  以及  $t_1 = 20\pi/c^2$  下在取不同基频  $0.5c^2$ ,  $1.5c^2$ ,  $1.9c^2$  和  $2.0c^2$  时所产生的粒子对的数目与啁啾参数之间的依赖关系. 当基频取  $0.5c^2$  时, 随着啁啾参数的提高, 电子数先快速增加然后缓慢减少, 粒子数从 1.87 增加到 4.76, 这时的最佳啁啾参数  $b$  为  $1.6c^2/t_1$ . 对于基频为  $1.5c^2$  的情况, 最终产生的电子数从 4.19 增加到 5.39. 当  $b = 0.8c^2/t_1$  时, 最终的粒子数达到最大值. 基频为  $1.9c^2$  时, 当  $b = 0.1c^2/t_1$  时粒子数达到最大值 5.65. 总的来说, 随着基频的增加, 最佳啁啾参数却逐渐减小. 通过频率调制, 特别是对于基频较低的情况, 电子的数量显著增加. 值得注意的是当中心频率为  $2c^2$  时, 随着啁啾参数  $b$  的增大, 电子数反而直接减小, 这说明频率调制阻止了高基频下的正负电子对产生.

表 3 给出了几组不同基频下电子数目增长的比值, 其中基频选取小于临界频率  $\omega_0 < 2.0c^2$ . 当  $b = 0$  时, 组合势阱在恒定频率下产生的电子数目最少. 随着基频的增长, 恒定频率下产生的粒子数目迅速增加, 而调制后最大产生的粒子数基本不变. 从二者的比值可以发现, 啁啾效应对低频区域比较敏感, 可以使粒子数目提高 2—3 倍. 另外还发现, 随着基频的增加, 粒子数达到最大值时对应的啁啾参数不断减小, 二者近似满足  $\omega_0 + bt_1 = 2.0c^2$ .

表 2 给出了几组不同情况下的增强因子, 可以看到, 无论是对单个场啁啾, 还是两个场同时啁啾, 在优化空间尺度和啁啾参数下, 产生的粒子数都有两个量级的增强.

### 3.2.4 组合势阱下的线性啁啾场

我们最新的一个工作是利用计算量子场论研究了线性啁啾频率对组合势阱中真空产生电子-正电子对过程的影响 [64]. 场的构型所对应的势如下:

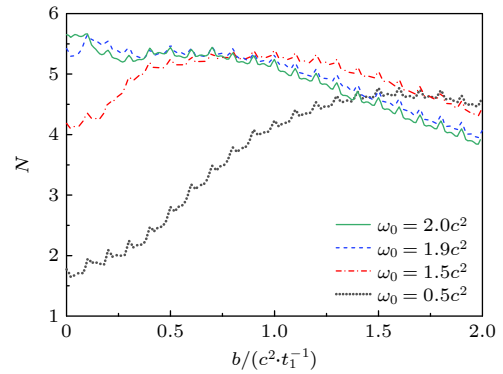


图 12 产生的粒子对的数目与啁啾参数的依赖关系 (取自参考文献 [64])

Fig. 12. Number of produced pairs in the field Eq. (43) with respect to chirping parameter (from Ref. [64]).

表 3 不同的基频下产生的电子数目的最大值和最小值以及二者之间的比值 (参考文献 [64])

Table 3. The maximum, the minimum number of created electrons and the ratio between them for different fundamental frequencies (from Ref. [64]).

$\omega_0/c^2$	$N_{\min}(b = 0)$	$N_{\max}$	$R(N_{\max}/N_{\min})$
0.1	1.87	4.58 ( $b = 1.8c^2/t_1$ )	2.45
0.2	1.85	4.69 ( $b = 1.7c^2/t_1$ )	2.54
0.5	1.77	4.76 ( $b = 1.6c^2/t_1$ )	2.69
1.0	2.30	5.13 ( $b = 1.2c^2/t_1$ )	2.23
1.5	4.18	5.39 ( $b = 0.8c^2/t_1$ )	1.29
1.9	5.42	5.65 ( $b = 0.1c^2/t_1$ )	1.04

图 13 是电子数目随基频和啁啾参数变化的等高线图. 可以发现, 当  $\omega_0 + bt_1$  等于同一常数时, 产生的电子数目基本相同. 当  $\omega_0 + bt_1 = 0$  时, 组合势

阱是由两个亚临界的静态势阱组成的超临界静态势阱, 通过 Schwinger 机制产生的正负电子对数目较大. 当  $\omega_0 + bt_1$  增加到很小区域时, 其中一个静态势阱变成了慢变的势阱, 有效相互作用时间减小, 因此产生电子的数目降低. 随着  $\omega_0 + bt_1$  的继续增加, 产生的电子数目先增加后减小. 当  $\omega_0 + bt_1 = 2.0c^2$  时, 电子数目达到最大, 这也验证了上一段中得出的结论.

图 14 是在频率调制的势阱在不同的调制参数下的频谱. 在图 14(a) 中, 调制参数为  $\omega_0 = 1.5c^2$ ,  $b = 0.3c^2/t_1$ , 频谱关于  $\omega_0 + bt_1 = 1.8c^2$  对称. 对于基频比较高的情况, 频率调制后的频谱会延展到超

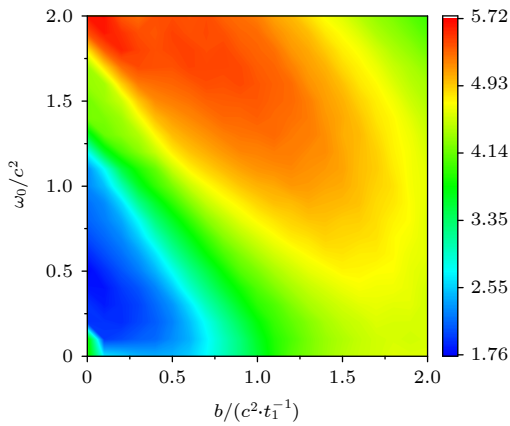


图 13 电子数目随着基频和啁啾参数变化的等高线图 (取自参考文献 [64])

Fig. 13. The contour plot of the electron number varying with the fundamental frequency and the chirp parameter (from Ref. [64]).

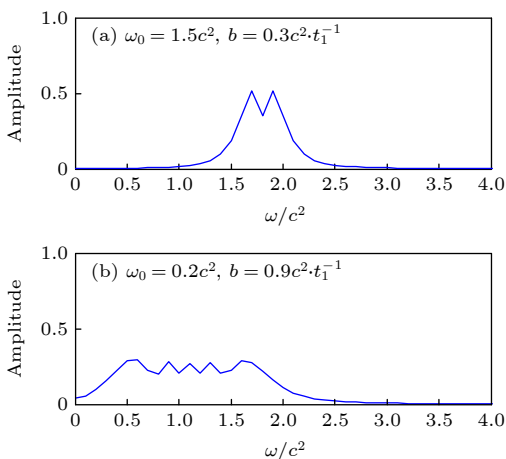


图 14 不同的调制频率参数下频率调制的势阱的频谱 (取自参考文献 [64])

Fig. 14. The frequency spectrum of frequency modulated potential well with different modulation parameters (from Ref. [64]).

高频区域, 而超高频区域对正负电子对的产生具有抑制作用, 这也解释了为什么在图 12 中基频为  $2.0c^2$  时产生的粒子数目随着参数  $b$  一直降低. 在图 14(b) 中, 调制参数为  $\omega_0 = 0.2c^2$ ,  $b = 0.9c^2/t_1$ , 频谱关于频率  $1.1c^2$  对称. 与固定频率  $\omega_0 = 0.2c^2$  相比, 调制后频谱从低频覆盖到高频区域, 高频成分促进了多光子过程, 这是图 12 中基频为  $0.5c^2$  时, 随着啁啾参数  $b$  的增加, 正负电子对数目得到明显提升的原因.

图 15 是固定频率和啁啾频率下产生的电子的能谱, 其中黑色虚线代表固定频率  $\omega_0 = 1.9c^2$ ,  $b = 0$ , 红色实线表示啁啾频率  $\omega_0 = 1.9c^2$ ,  $b = 0.1c^2/t_1$ . 其他参数和图 12 相同. 在图 15(a) 中包括单光子过程、双光子过程和单光子过程的能谱. 与固定频率相比, 啁啾频率下能谱向右移动, 能谱变宽和变高. 在图 15(b)—图 15(d) 中分别对三个多光子过程进行能谱分析. 势阱参数为  $D = 10/c$ ,  $V_1 = 1.5c^2$  时, 静态势阱共有 8 个束缚态, 分别为  $E_1 = -0.4247c^2$ ,  $E_2 = -0.3069c^2$ ,  $E_3 = -0.1361c^2$ ,  $E_4 = 0.0680c^2$ ,  $E_5 = 0.2919c^2$ ,  $E_6 = 0.5260c^2$ ,  $E_7 = 0.7618c^2$ ,  $E_8 = 0.9778c^2$ . 在图 15(b) 中, 对于固定频率, 峰值  $E = 1.56c^2, 1.74c^2, 1.95c^2, 2.19c^2, 2.44c^2, 2.69c^2, 2.91c^2$  对应着  $E_2—E_8$ , 满足关系式  $E = E_i + 1.9c^2$  ( $i = 2—8$ ); 对于调制频率情况, 峰值  $E' = 2.01c^2, 2.27c^2, 2.54c^2, 2.8c^2$  满足关系式  $E' = E_i + 2.0c^2$  ( $i = 4—7$ ), 其中  $E' = 1.47c^2$  满足  $E' = E_1 + 1.9c^2$ . 固定频率时吸收的光子能量只有  $\omega_0 = 1.9c^2$ , 频率啁啾时吸收的光子能量包含  $\omega_0$  和  $\omega_0 + bt_1$ . 频率调制提供多种能量的光子, 促进了单光子过程. 在图 14(c) 的双光子过程中, 固定频率下能量峰值满足  $E = E_i + 2\omega_0$ , 啁啾频率时能量峰值满足  $E' = E_i + 2(\omega_0 + bt_1)$  和  $E' = E_i + 2\omega_0$ . 同理对于三光子过程, 如图 15(d), 在固定频率下, 满足  $E = E_i + 3\omega_0$ , 啁啾频率时能量峰值满足  $E' = E_i + 3(\omega_0 + bt_1)$  和  $E' = E_i + 3\omega_0$ .

研究中我们得到了不同频率调制参数下电子数和能谱的数值结果. 通过与固定频率的比较, 发现频率调制对电子数有显著的增强作用. 特别是当频率较小时, 适当的频率调制增强对应多光子过程, 从而促进了对产生. 然而, 高频振荡组合势阱下产生的粒子数在频率调制后减少了, 这是高频抑制的原因. 粒子数随频率和频率调制参数变化的研究, 为将来可能的实验能提供必要的理论参考.

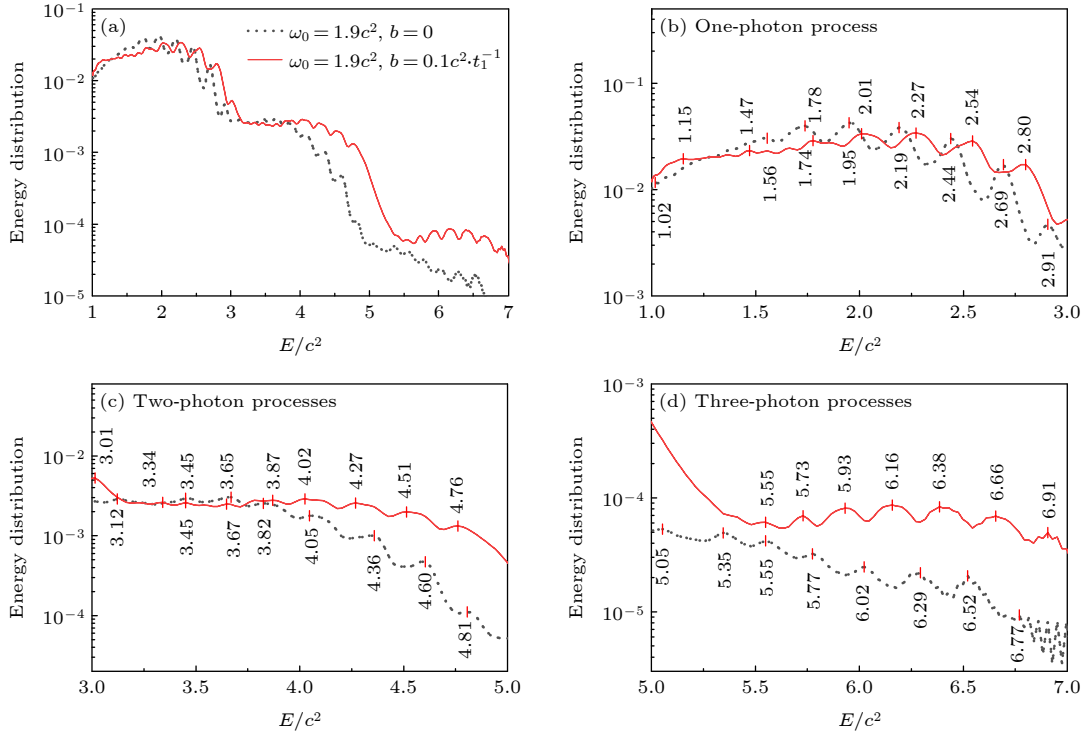


图 15 固定频率(黑色虚线)和啁啾频率(红色实线)下产生电子的能谱(取自参考文献[64])

Fig. 15. Energy spectrum of created electrons under the fixed frequency (the black dotted curve) and the chirp frequency (the red solid curve) (from Ref. [64]).

#### 4 WKB 近似和转变点结构

空间均匀时间依赖的外电场下真空正负电子对的产生类似于量子电动力学中的过势垒散射问题,产生粒子对的动量分布函数可以通过反射系数得到,因此对于旋量 QED,其近似表达式为

$$N \approx \sum_{t_i} e^{-2K_i} + \sum_{t_i \neq t_j} 2\cos(2\theta_{(i,j)}) (-1)^{i-j} e^{-K_i - K_j},$$

其中  $K_i = \left| \int_{t_i^*}^{t_i} \omega(p, t) dt \right|$  是第  $i$  的转变点对粒子数产生的贡献,  $\theta_{(i,j)} = \int_{s_i}^{s_j} \omega(p, t) dt$  是第  $i$  对的转变点和第  $j$  对的转变点的相互干涉项,  $t_i$  表示反射势  $\omega(p, t) = 0$  的第  $i$  个时间点,即转变点,  $s_i$  是复转变点  $t_i$  的实部. 我们定义的总能量为  $\omega(p, t) = \sqrt{\varepsilon_{\perp}^2(p) + (p_{\parallel} - eA(t))^2}$ . 特别地,对于旋量 QED,在有两对转变点  $(t_1, t_1^*)$  和  $(t_2, t_2^*)$  时,那么粒子数公式中就会只有一个干涉项,因此有  $N \approx e^{-2K_1} + e^{-2K_2} - 2\cos\theta_{(1,2)} e^{-2K_1 - 2K_2}$ .

从上面的粒子数表达式可以看出,一对复共轭的转变点离实数轴越近,其中的积分  $K_i$  就越小,从而对粒子数的贡献就越大,另一方面,如果两对转

变点之间的横向距离越近,那么相互干涉效应就越显著,从而动量谱中的振荡行为就越明显. 这一点被大量数值结果所证实.

图 16 是在场方程 (42) 下当空间依赖函数不存在也就是纯的时间场时得到的转变点结构. 图 16(a) 中,黑点是无啁啾时只有弱场  $E_{2w}$  的转变点,而红点是具有大啁啾  $b_2 = 0.9\omega_2/\tau$  时的转变点. 显然,与无啁啾(黑色)的情况相比,啁啾(红色)的情况下,位于正实数区的转变点要多得多,并且它们更接近实轴. 这意味着在大的啁啾下粒子数密度增加,并且干涉效应增强,这就是为什么在动量谱上可以观察到更强的干涉效应的原因. 作为进一步比较,我们将强场  $E_{1s}$  添加到弱场  $E_{2w}$  中,使模型成为双色场. 图 16(b) 中绘制了转变点结构,啁啾仍选取为第二个场的  $b_2 = 0.9\omega_2/\tau$ ,但第一个场无啁啾(参见蓝色圆点). 从图 16(b) 可以看出,与单色啁啾弱场(红点)相比,对于双色场,即使强场没有啁啾只是保持了弱场的啁啾,此时的转变点结构也有很多变化,特别是占主导的一对蓝色转变点非常接近实轴,并且在其右侧出现了更多的点. 因此,与图 16(a) 对应的动量谱结构相比,图 16(b) 参数下的动量谱中出现更明显的干涉效应和更加剧烈的振荡行为



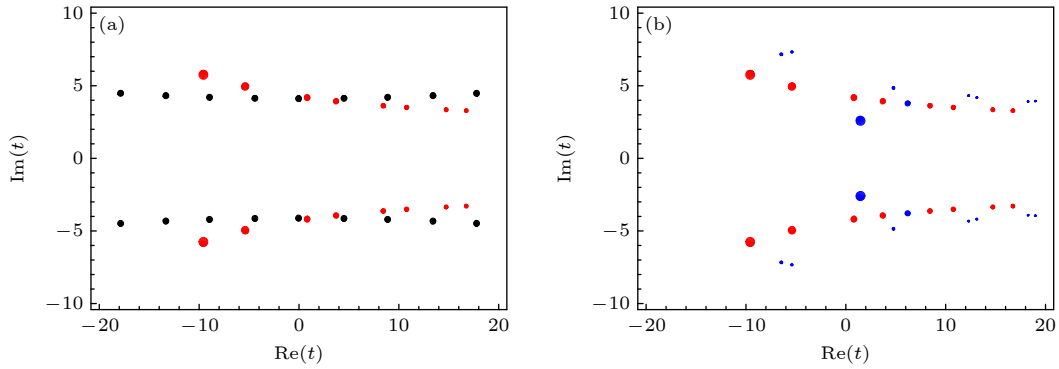


图 16 动量为 0 时的时间复平面上的转变点 (取自参考文献 [53])

Fig. 16. The turning points of complex time-plane when the momentum is zero (from Ref. [53]).

就不难理解了.

当然, 其他动量谱也可以通过相应的转变点结构通过类似的讨论来理解. 由于作为半经典 WKB 近似的物理图像是简单有效的, 对于更多情况, 无需重复演示. 这里需要指出的是, 在正负电子对产生的研究中, 除了用 WKB 的物理图像来理解之外, 用其他方法对动量谱特征和粒子对产额的精细理解也是可能的, 如从能级之间的交叉和免交叉的角度进行细致的分析等 [65], 当然更多的物理机理和理解值得在将来做进一步的研究和探索.

## 5 结论与展望

本文详细报道了有频率啁啾时外加强的背景场对真空下正负电子对产生的增强效应, 其中对外加场的形式和个数、场的强度和基频以及频率啁啾的形式和对称性等都有不同的考虑和研究. 总的来说, 可以总结出以下几条结论:

1) 对空间均匀的含时场, 啁啾效应对于椭圆极化具有非线性的依赖关系, 动量谱具有涡旋结构且在大啁啾下向小动量的中心收缩; 产生的粒子数在啁啾下均有不同程度的提高, 在一些合适的场参数和啁啾参数下, 能提高 2—3 个数量级甚至更高.

2) 对空间不均匀同时有时间依赖的 1(空间)+1(时间) 场, 发现啁啾效应对于低基频场和高基频场均有增强效应. 啁啾对于小空间尺度的场的影响更大, 啁啾增强更高. 啁啾的对称性比非对称性对粒子数的增强更好.

3) 对空间不均匀同时有时间依赖的 1(空间)+1(时间) 的组合场, 发现啁啾效应配合组合场的动力学辅助效应对粒子数产生的提高起到了更大的作用. 与一个场类似, 啁啾对于小空间尺度的场的

影响更大, 啁啾增强也更高.

4) 对有空间变化和时间振荡的组合势阱场, 发现线性频率调制对产生的粒子数有显著的增强作用. 特别是当频率较小时, 适当的频率调制增强对应了多光子过程, 从而促进了对产生. 然而, 高频振荡组合势阱下产生的粒子数在频率调制后有所减少.

上述关于动量谱和粒子数随场的各种参数变化而变化的结论可以从势散射的半经典 WKB 方法以及对应的转变点结构等物理图像上加以理解和认识. 当然各种结果背后的非线性物理机理仍需要新的理论和方法的探索来对其进行进一步的理解.

就此研究方向, 即频率啁啾对粒子对产生的增强效应未来可能的发展, 我们认为以下几点值得进一步深入研究: 1) 理论上搞清楚频率啁啾除了改变场的频谱范围从而使得多场的动力学辅助机制起到了作用外, 是否还有其他的非线性机制? 2) 两个空间上只有时间依赖的极化场在有啁啾情况下触发的动量谱涡旋结构的物理原因还不是很清楚, 这个带有角动量信息的结构对于探测外加场的频率、极化度和场强分布等有很大意义; 3) 动量谱的干涉效应在啁啾下非常敏感, 这与产生的粒子对之间 WKB 转变点波函数之间的关系有非常密切的联系, 并且它们带有鞍点结构的拓扑特性, 这些效应与整体的粒子对产生的增强之间的联系有没有更一般性的规律? 其对动量谱结构的调控 (如限制其动量存在范围, 或让动量分布定向在事先设定的位置等) 是否有可能潜在的应用 (如可产生大通量的单能正电子束等)? 4) 频率啁啾在一些情况下使粒子对产额提高 3—4 个数量级, 也就意味着对在实验上可能观测到的粒子对产生的场的阈值条

件有显著降低,如何在目前已有和不久的将来建造好的实验装置上通过频率啁啾技术和能达到的激光强度实现真正可观的粒子对的产额?总之,这些问题既有进一步探索的必要并具有一定的挑战性,也提供了强场物理中具有应用前景的很多的研究机遇.

感谢 Reinhard Alkofer 教授以及与李子良、古丽、卡斯木、马木提江、龚驰等在文章所述课题方面的合作研究与物理讨论.

## 参考文献

- [1] Dirac P A M 1928 *Proc. R. Soc. A* **118** 351
- [2] Anderson C D 1933 *Phys. Rev.* **43** 491
- [3] Sauter F 1931 *Z. Phys.* **69** 742
- [4] Heisenberg W, Euler H 1936 *Z. Phys.* **98** 714
- [5] Schwinger J 1951 *Phys. Rev.* **82** 664
- [6] Ritus V I 1985 *J. Sov. Laser Res.* **6** 497
- [7] Piazza A D 2011 *Rev. Mod. Phys.* **84** 1177
- [8] Gelis F, Tanji N 2016 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **87** 1
- [9] Strickland D, Mourou G 1985 *Opt. Commun.* **55** 447
- [10] Ringwald A 2001 *Phys. Lett. B* **510** 107
- [11] Yanovsky V P, Chvykov V, Kalinchenko G, Rousseau P, Krushelnick K 2008 *Opt. Express* **16** 2109
- [12] Heinzl T, Ilderton A 2009 *Eur. Phys. J. D* **55** 359
- [13] Marklund M, Lundin J 2009 *Eur. Phys. J. D* **55** 319
- [14] Dunne G V 2009 *Eur. Phys. J. D* **55** 327
- [15] Pike O J, Mackenroth F, Hill E G, Rose S J 2014 *Nat. Photonics* **8** 434
- [16] <https://www.eli-beams.eu/>. [2022-1-21]
- [17] Schuetzhold R, Gies H, Dunne G 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 130404
- [18] Bell A R, Kirk J G 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 2952
- [19] Dunne G V, Gies H, Schützhold R 2009 *Phys. Rev. D* **80** 111301
- [20] Piazza A D, E Lötstedt, Milstein A I, Keitel C H 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 170403
- [21] Bulanov S S, Mur V D, Narozhny N B, Nees J, Popov V S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 220404
- [22] <https://xcels.iapras.ru/news.html>[2022-1-21]
- [23] <http://www.hibef.eu>[2022-1-21]
- [24] Nikishov A I 1969 *Sov. Phys. JETP* **30** 660
- [25] Brezin E, Itzykson C 1970 *Phys. Rev. D* **2** 1191
- [26] Marinov M S, Popov V S 1977 *Fortschr. Phys.* **25** 373
- [27] Nikishov A I 1985 *J. Sov. Laser Res.* **6** 619
- [28] Gies H, Klingmüller K 2005 *Phys. Rev. D* **72** 065001
- [29] Dunne G, Wang Q H, Gies H, Schubert C 2006 *Phys. Rev. D* **73** 065028
- [30] Xie B S, Melike M, Sayipjamal D 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 021102
- [31] Schneider C, Schützhold R 2016 *J. High Energy Phys.* **02** 164
- [32] Kluger Y, Eisenberg J M, Svetitsky B, Cooper F, Mottola E 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 2427
- [33] Alkofer R, Hecht M B, Roberts C D, Schmidt S M, Vinnik D V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 193902
- [34] Abdukerim N, Li Z L, Xie B S 2017 *Chin. Phys. B* **26** 020301
- [35] Krekora P, Cooley K, Su Q, Grobe R 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 070403
- [36] Lv Q Z, Liu Y, Li Y J, Grobe R, Su Q 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 183204
- [37] Wang L, Wu B B, Xie B S 2019 *Phys. Rev. A* **100** 022127
- [38] Hebenstreit F, Alkofer R, Gies H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 180403
- [39] Kohlfürst C 2015 *Ph. D. Dissertation* arXiv: 1512.06082
- [40] Xie B S, Li Z L, Tang S 2017 *Matter Radiat. Extremes* **2** 225
- [41] Kohlfürst C, Alkofer R 2018 *Phys. Rev. D* **97** 036026
- [42] Ababekri M, Dulat S, Xie B S, Zhang J 2020 *Phys. Lett. B* **810** 135815
- [43] Kohlfürst C 2020 *Phys. Rev. D* **101** 096003
- [44] Hebenstreit F, Alkofer R, Dunne G V, Gies H 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 150404
- [45] Dumlu C K 2010 *Phys. Rev. D* **82** 045007
- [46] Olugh O, Li Z L, Xie B S, Alkofer R 2019 *Phys. Rev. D* **99** 036003
- [47] Orthaber M, Hebenstreit F, Alkofer R 2011 *Phys. Lett. B* **698** 80
- [48] Ababekri M, Xie B S, Zhang J 2019 *Phys. Rev. D* **100** 016003
- [49] Olugh O, Li Z L, Xie B S 2020 *Phys. Lett. B* **802** 135259
- [50] Gong C, Li Z L, Xie B S, Li Y J 2020 *Phys. Rev. D* **101** 016008
- [51] Wang K, Hu X H, Dulat S, Xie B S 2021 *Chin. Phys. B* **30** 060204
- [52] Mohamedsedik M, Li L J, Xie B S 2021 *Phys. Rev. D* **104** 016009
- [53] Li L J, Mohamedsedik M, Xie B S 2021 *Phys. Rev. D* **104** 036015
- [54] Li Z L, Lu D, Xie B S 2015 *Phys. Rev. D* **92** 085001
- [55] Li Z L, Li Y J, Xie B S 2017 *Phys. Rev. D* **96** 076010
- [56] Li Z L, Xie B S, Li Y J 2019 *J. Phys. B:At. Mol. Opt. Phys.* **52** 025601
- [57] Li Z L, Abdukerim Nuriman, Xie B S 2016 *Progress in Phys.* **36** 129 (in Chinese) [李子良, 努尔曼古丽·阿卜杜克热木, 谢柏松 2016 *物理学进展* **36** 129]
- [58] Xie B S, Li Z L, Tang S, Liu J 2017 *Physics* **46** 713 (in Chinese) [谢柏松, 李子良, 唐瑛, 刘杰 2017 *物理* **46** 713]
- [59] Keldysh L V 1965 *Sov. Phys. JETP* **20** 1307
- [60] Bialynicki-Birula I, Gornicki P, Rafelski J 1991 *Phys. Rev. D* **44** 1825
- [61] Hebenstreit F 2011 *Ph. D. Dissertation* arXiv: 1106.5965
- [62] Greiner W 2000 (3 rd Ed. ) (Berlin: Springer)
- [63] Schmidt S M, Blaschke D, Röpke, G, Prozorkevich A V, Smolyansky S A, Toneev V D 1999 *Phys. Rev. D* **59** 094005
- [64] Wang L, Li L J, Mohamedsedik M, An R, Li J J, Xie B S, Zhang F S 2021 arXiv: 2109.05399
- [65] Kamiński J Z, Twardy M, Krajewska K 2018 *Phys. Rev. D* **98** 056009

REVIEW

# Enhancement effect of frequency chirp on vacuum electron-positron pair production in strong field\*

Xie Bai-Song<sup>1)2)†</sup> Li Lie-Juan<sup>1)</sup> Melike Mohamedsedik<sup>1)</sup> Wang Li<sup>2)‡</sup>

1) (*College of Nuclear Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*)

2) (*Institute of Radiation Technology, Beijing Academy of Science and Technology, Beijing 100875, China*)

( Received 21 January 2022; revised manuscript received 21 March 2022 )

## Abstract

In this review article, we show an important aspect of electron-positron pair production from vacuum under strong background field where the frequency chirping plays a key role in enhancing the pair production. A series of researches on the enhancement effect of frequency chirp on electron-positron pair production in strong field is summarized. Three approaches are introduced, i.e. the Dirac-Heisenberg-Wigner formalism used to treat the spatial inhomogeneous field or/and multidimensional homogeneous time-dependent field, quantum Vlasov equation to cope with the one-dimensional homogeneous time-dependent field, and the computation quantum field theory employed to study the problem with external potential. Some interesting results about the momentum spectrum structure of created particle and the yielding of pair numbers are demonstrated for various different field parameters such as field strength and central frequency, in particular their significant influence on results when the frequency chirping form or/and strength are changed. In general, the number density can be improved by 2-3 orders of magnitude with the strengthening of frequency chirping in comparison with that without chirping for low frequency field, which is attributed to the effect that the dynamically assisted mechanism plays a significant role since the chirping expands the frequency spectrum of field. For high frequency field, however, this effect is suppressed so that the number density is enhanced by about a few times. For spatially inhomogeneous field, field changing on a small scale does not make the number density so high and the frequency chirping can enhance the yield in the order of magnitude, while the field changing on a large scale makes the number density to approach to that of homogeneous field and the chirping increases the yield by a few times. These numerical results can be understood by the Wentzel-Kramer-Brillouin (WKB) approximation and the structure of turning points. Finally the possible applicable prospects of the electron-positron pair production by the frequency chirping are presented briefly.

**Keywords:** electron-positron pair production, frequency chirping, strong field, quantum kinetic method

**PACS:** 12.20.-m, 11.15.Tk, 32.80.-t

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220148

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11875007, 11935008).

† Corresponding author. E-mail: [bsxie@bnu.edu.cn](mailto:bsxie@bnu.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [wangli@brc.ac.cn](mailto:wangli@brc.ac.cn)