

# 高斯色噪声激励下非对称双稳耦合网络系统的随机共振\*

王烨花 何美娟†

(兰州交通大学数理学院, 兰州 730070)

(2022年5月9日收到; 2022年6月3日收到修改稿)

研究了高斯色噪声和周期信号共同作用下非对称双稳耦合网络系统的协同效应. 此系统是由大量振荡器组成的网络模型, 个体与个体之间的相互运作、变化产生出复杂的非线性行为模式. 为了进行深入研究, 首先, 运用平均场理论、统一色噪声近似理论和等效非线性化等方法对原始  $N$  维系统进行降维近似. 其次, 借助役使原理得到简化模型的郎之万方程, 进一步根据两态模型理论推导出信噪比的理论表达式, 基于此发现系统产生了尺度随机共振现象. 最后, 分析了高斯色噪声、系统参数和周期信号等对非对称耦合网络系统随机共振行为的影响. 结果表明, 高斯色噪声自关联时间和噪声强度的增大, 能够促进尺度随机共振现象; 选取合适的耦合系数能使系统随机共振效应达到最佳. 此外, 还比较了高斯色噪声和高斯白噪声分别驱动下系统的随机共振问题, 发现高斯色噪声更有利于增强随机共振现象.

**关键词:** 随机共振, 非对称双稳耦合网络系统, 信噪比, 高斯色噪声

**PACS:** 05.10.Gg, 05.40.-a

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220909

## 1 引言

1981年, 学者 Benzi 等<sup>[1]</sup>模拟地球大约以10万年的冰川期和相对温暖期之间交替标志着随机共振的出现. 此概念被引入后, 掀起了科学家研究随机共振的热潮. McNamara 等<sup>[2]</sup>在1989年将绝热近似理论运用于双稳系统两态模型的研究; 之后, 著名学者 Dykman 等<sup>[3]</sup>利用线性响应理论描述了过阻尼双稳系统的随机共振现象; Zhou 等<sup>[4]</sup>提出了驻留时间分布理论. 随着随机共振理论和方法的逐渐成熟, 其被广泛应用于各个领域, 如基因调控<sup>[5]</sup>、化学突触<sup>[6]</sup>、故障诊断<sup>[7]</sup>等, 且随机共振在越来越多的系统中被发现. 靳艳飞和李贝<sup>[8]</sup>在分段非线性模型中发现存在传统和真实两种随机共振现象; 张晓燕等<sup>[9]</sup>在噪声诱导的双稳系统中发现不

仅产生了单随机共振, 还出现了多重随机共振; Hänggi 等<sup>[10]</sup>研究过阻尼系统时证实高斯色噪声会削弱随机共振效应; 焦尚彬等<sup>[11]</sup>探究了 $\alpha$ 稳定噪声与时滞项结合下单稳系统的共振问题, 仿真表明时滞项不影响随机共振的产生. 随机共振的发生不仅与系统、噪声有紧密联系, 还和信号密不可分. Zhang 和 Zheng<sup>[12]</sup>研究了周期矩形信号和高斯色噪声共同作用下的时滞双稳系统, 发现系统产生了多重随机共振现象. 杨建华等<sup>[13]</sup>讨论了受二进制非周期信号和周期方波信号激励的分数阶双稳系统的非周期振动共振问题, 并将其应用于检测微弱信号. 俞莹丹等<sup>[14]</sup>对正弦信号和高斯白噪声协同作用下四稳系统进行分析, 证实系统存在着双重随机共振现象.

在随机共振的研究过程中, 大多是针对单个变量的一维系统, 而在实际现实中, 事物之间往往是

\* 甘肃省科技计划 (批准号: 21JR1RA238) 和国家自然科学基金 (批准号: 11602184) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hemeijuan@mail.lzjtu.cn

相互关联的,表现出复杂的动力行为,并不是孤立、单一的.因此,更能描述实际问题的耦合网络系统受到越来越多的关注和研究.如马圣楠<sup>[15]</sup>讨论了耦合网络的捕食系统的复杂行为,对生态学的发展具有重要的意义;何传磊<sup>[16]</sup>研究了轨道交通网络,分析网络之间的耦合协调度以提高交通网络的安全性;刘小强<sup>[17]</sup>分析了耦合时滞和电磁感应共同作用下神经元网络的随机共振行为,在医学领域为提高患者感知能力提供了一种思路;孙中奎等<sup>[18]</sup>对高斯白噪声作用下非对称双稳耦合网络系统进行探索.然而,对于网络系统动力学行为的研究,大多数成果集中在高斯白噪声上.由于高斯白噪声的产生需要提供无穷大的功率,这是无法实现的,属于一个理想情形.具有有限功率的高斯色噪声更符合实际需要,且能够更好地阐述客观实际,会使相关研究更具现实意义,故研究具有关联时间的高斯色噪声诱导下耦合网络系统的动力学现象虽然复杂,却更有必要.

本文研究了高斯色噪声与周期信号共同作用下非对称双稳耦合网络系统的随机共振 (stochastic resonance, SR) 现象.考虑到原系统的复杂性和非线性,首先对原始模型进行降维处理,之后求得简化模型的郎之万方程,在绝热近似条件下,计算出信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) 的理论表达式,并发现系统存在尺度随机共振现象;最后分别讨论系统随机共振行为随着高斯色噪声自关联时间、噪声强度、耦合系数、非对称性系数、周期信号幅值等参数变化而不同的演化情况.

## 2 非对称双稳耦合网络系统

本文考虑一组由  $N$  个相互作用的双稳态振荡器组成的模型<sup>[19]</sup>,其中每一个  $x_i$  都是单自由度的,同时受到高斯色噪声和周期信号的共同作用,可用如下随机微分方程表示:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i - x_i^3 + r + \frac{\theta}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - x_i) + \eta_i(t) + S(t), \quad (1)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $r$  是非对称性系数;  $N$  是系统尺度;  $\theta$  定义为振荡器之间相互作用的耦合参数;  $\eta_i(t)$  是自关联时间为  $\tau$ 、噪声强度为  $D$  的高斯色噪

声,且满足性质

$$\langle \eta_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \frac{2D}{\tau} \delta_{ij} \exp \left[ -\frac{|t-t'|}{\tau} \right]$$

周期信号  $S(t) = A \cos(\omega t)$ ,  $A$  是信号幅值,  $\omega$  是信号频率.

将系统 (1) 看作一个整体,定义  $x_i$  的全局变量

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad k \text{ 阶波动矩}$$

$$M_k(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i(t) - X(t)]^k,$$

对于 (1) 式分别运用平均场理论<sup>[20]</sup>和 Itô 随机微分法则<sup>[21]</sup>降维可得关于  $X$  与  $M_k(t)$  的随机微分方程为

$$\dot{X} = X - M_3 - 3M_2X - 3M_1X^2 - X^3 + r + \eta(t) + S(t), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{M}_k}{k} = & -M_{k+2} - 3M_{k+1}X + (1 - 3X^2 - \theta) M_k \\ & + (M_3 + 3M_2X) M_{k-1} + M_{k-1}\Gamma(t) \\ & + D(k-1)(1-1/N) M_{k-2}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\eta(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i(t),$$

$\eta(t)$  是高斯色噪声,且满足

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \frac{2D}{N\tau} \exp \left[ -\frac{|t-t'|}{\tau} \right];$$

$\Gamma(t)$  是高斯色噪声,

$$\Gamma(t) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i(t) + \eta_i(t),$$

同时满足性质

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(t) \Gamma(t') \rangle = \frac{2D}{N\tau} \exp \left[ -\frac{|t-t'|}{\tau} \right].$$

由于方程 (2) 和方程 (3) 具有 non-Markovian, 基于统一色噪声近似原理<sup>[22,23]</sup>, 简化可得如下模型:

$$\dot{X} = \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-1} - c'(X)} c(X) + \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-1} - c'(X)} \xi(t), \quad (4)$$

$$\frac{\dot{M}_k}{k} = \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-1} - kd'(X)} d(X) + \frac{\tau^{-1}}{k\tau^{-1} - k^2d'(X)} \zeta(t), \quad (5)$$

其中  $c(X) = X - M_3 - 3M_2X - 3M_1X^2 - X^3 + r + S(t)$ ;  $c'(X)$  是关于  $X$  的导数;  $\xi(t)$  为高斯白噪声,

且满足性质

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t'); \\ d(X) &= -M_{k+2} + (M_3 + 3M_2X)M_{k-1} \\ &\quad + D(k-1)(1-1/N)M_{k-2} \\ &\quad + (1-3X^2-\theta)M_k - 3M_{k+1}X; \end{aligned}$$

$d'(X)$  是关于  $X$  的导数;  $\zeta(t)$  为高斯白噪声, 且满足  $\langle \zeta(t) \rangle = 0, \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ .

进一步, 对 (4) 式与 (5) 式的非线性函数进行等效线性化, 令

$$f(X) = \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-1} - c'(X)}, \quad g(X) = \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-1} - kd'(X)},$$

将 (4) 式和 (5) 式在  $X = 0$  处泰勒展开, 得到近似模型:

$$\dot{X} = l_1c(X) + l_1\xi(t), \quad (6)$$

$$\frac{\dot{M}_k}{k} = d(X) + \frac{1}{k}\zeta(t), \quad (7)$$

其中  $f(X) \approx l_1 + l_2X, l_1 = f(0) = \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-1}-1}, l_2 = f'(0) = 0, g(X) \approx l_3 + l_4X, l_3 = g(0) = 1, l_4 = g'(0) = 0$ .

定义波动累积量

$$K_n = M_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} K_{n-k}M_k,$$

依据  $K_n$  与  $M_n$  的关系, 可得  $X$  和  $K_2$  的随机微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= l_1[X - K_3 - 3K_2X \\ &\quad - 3K_1X^2 - X^3 + r + S(t)] + l_1\xi(t), \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{K}_2}{2} &= -K_4 - 3K_2^2 - 3K_3X + (1-3X^2-\theta)K_2 \\ &\quad + D\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{2}\zeta(t), \quad (9) \end{aligned}$$

运用高斯近似<sup>[24]</sup>和役使原理<sup>[25]</sup>, 化简 (8) 式与 (9) 式得到 Langevin 方程:

$$\dot{X} = -V'(X) + l_1\xi(t) + l_1S(t), \quad (10)$$

其中

$$V(X) = -\frac{a}{2}l_1X^2 + \frac{b}{4}l_1X^4 - rl_1X.$$

令  $V'(X) = 0$ , 计算得到方程 (10) 的两个稳定点为

$$\begin{aligned} X_1 &= 2\sqrt{\frac{a}{3b}} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos\left(r\sqrt{\frac{27b}{4a^3}}\right)\right], \\ X_2 &= -2\sqrt{\frac{a}{3b}} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos\left(r\sqrt{\frac{27b}{4a^3}}\right) - \frac{\pi}{3}\right], \end{aligned}$$

一个不稳定点为

$$X_3 = -2\sqrt{\frac{a}{3b}} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos\left(r\sqrt{\frac{27b}{4a^3}}\right) + \frac{\pi}{3}\right],$$

式中系数为

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{2}(\theta-1) - \frac{1}{2}\left[(\theta-1)^2 + 12D\right]^{\frac{1}{2}}, \\ b &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\theta-1)\left[(\theta-1)^2 + 12D\right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

### 3 信噪比

随机共振是一种噪声对于微弱信号起到协助并促进输出作用的非线性现象. 目前, 衡量随机共振的测度指标主要有信噪比、信噪比增益、驻留时间分布、互相关系数、统计复杂度等. 对于信噪比这一指标倾向于体现出输入或输出信号的特性, 故本文采用信噪比来反映系统发生随机共振的效果. 信噪比 SNR 定义为功率谱中信号特征频率处的幅值与噪声之间的比值, 公式如下:

$$\text{SNR} = \frac{\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega+\Delta\omega} S_S(\omega) d\omega}{S_N(\omega)},$$

式中,  $S_S(\omega)$  和  $S_N(\omega)$  分别表示信号和噪声功率谱密度.

接下来推导系统 (10) 的信噪比表达式.

利用 Novikov 定理<sup>[26]</sup>等经典理论, 得到方程 (10) 的近似 FPK 方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(X,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial X} \left( \tilde{A}(X)p(X,t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \tilde{B}(X)p(X,t) \right), \quad (11) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A}(X) &= l_1\bar{A}(X) = l_1[aX - bX^3 + r + A \cos(\omega t)], \\ \tilde{B}(X) &= l_1^2\bar{B}(X) = l_1^2\frac{2D}{N}. \end{aligned}$$

令  $\frac{\partial p(X,t)}{\partial t} = 0$ , 解得稳态概率密度为

$$p_s(X) = N' \exp\left[-\frac{\bar{\Phi}}{l_1 \cdot D/N}\right], \quad (12)$$

其中广义势函数  $\bar{\Phi} = l_1\frac{D}{N} \ln \tilde{B}(X) - \int \bar{A}(X)dX$ .

根据平均首通时间的概念和最速下降法<sup>[27,28]</sup>, 可得粒子分别由  $X_1$  和  $X_2$  所在势阱的逃逸速率  $\tilde{w}_{\pm}$  为

$$\tilde{w}_{\pm} = \frac{|V''(X_3)V''(X_{1,2})|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \times \exp\left\{-\frac{\bar{\Phi}(X_3) - \bar{\Phi}(X_{1,2})}{l_1 \cdot D/N}\right\}. \quad (13)$$

运用两态模型理论<sup>[29]</sup>, 关于  $\tilde{w}_{\pm}$  小参数  $A \cos(\omega t)$  展开取到  $A$  的一次项为

$$\tilde{w}_+ = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1 A \cos(\omega t), \quad \tilde{w}_- = \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_2 A \cos(\omega t). \quad (14)$$

在绝热近似条件<sup>[30]</sup>下, 两势阱的总概率量  $n_{\pm}$  满足如下方程:

$$\dot{n}_+ = -\dot{n}_- = \tilde{w}_-(t)n_- - \tilde{w}_+(t)n_+.$$

由于绝热近似要求振幅  $A \ll 1$ , 略掉  $A$  的二次项之后, 得到信噪比表达式为

$$\text{SNR} = \frac{A\pi^2 l_1^2 (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_1)^2}{4\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2)}, \quad (15)$$

其中

$$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{w}_+|_{A \cos(\omega t)=0}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \tilde{w}_-|_{A \cos(\omega t)=0},$$

$$\tilde{\beta}_1 = \left. \frac{d\tilde{w}_+}{dS(t)} \right|_{A \cos(\omega t)=0}, \quad \tilde{\beta}_2 = \left. \frac{d\tilde{w}_-}{dS(t)} \right|_{A \cos(\omega t)=0}.$$

## 4 随机共振

接下来, 基于信噪比理论表达式 (15) 对高斯色噪声和周期信号共同作用下耦合网络系统随机共振行为随色噪声参数、系统参数和周期信号等参数的变化情况进行详细讨论.

### 4.1 随机共振的产生

信噪比 SNR 作为高斯色噪声强度  $D$  的函数, 其演化情形如图 1 所示, 其他参数固定为  $N = 3$ ,  $\theta = 2$ ,  $\tau = 0.15$ ,  $A = 0.01$ ,  $r = 0.01$  时, 从图 1 可

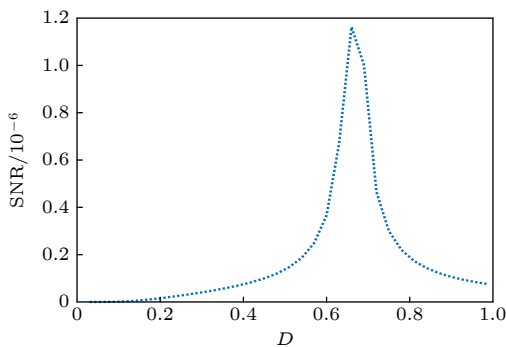


图 1 SNR 关于噪声强度  $D$  的演化图

Fig. 1. Evolution of SNR with noise intensity  $D$ .

以发现, 随着噪声强度  $D$  从 0 逐渐增大到 1, SNR 曲线先逐渐增大后减小, 出现了单峰状态, 由此表明系统产生了随机共振现象.

### 4.2 高斯色噪声对随机共振的影响

本小节研究高斯色噪声自关联时间  $\tau$  和噪声强度  $D$  对系统 (10) 随机共振响应的影响. 图 2 描述了 SNR 作为系统尺度  $N$  的函数随着自关联时间  $\tau$  变化的演化情况. 从图 2 可以得出, 当其他参数选取为  $\theta = 3$ ,  $D = 0.3$ ,  $A = 0.01$ ,  $r = 0.02$  时, 每一条 SNR 曲线随着  $N$  的增加都呈现出非单调的演化趋势, 即在某个  $N$  值处产生明显的峰值, 意味着系统出现了尺度随机共振现象; 进一步, 随着  $\tau$  从 0.05 逐渐增大到 0.4, 可以发现 SNR 曲线的峰值逐渐增大, 且位置向右发生偏移, 峰值对应的系统尺度  $N$  也从 4 变化到 6, 说明  $\tau$  的增大能够促进尺度随机共振的产生.

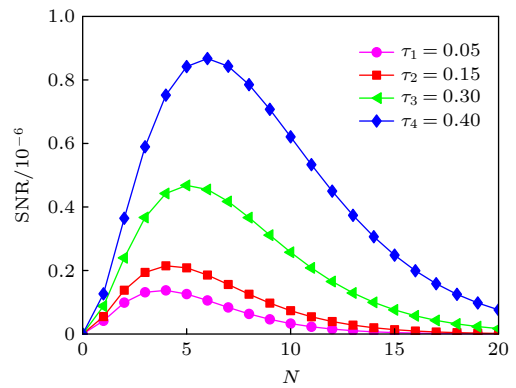


图 2 SNR 作为系统尺度  $N$  的函数关于不同自关联时间  $\tau$  的关系图

Fig. 2. Relationship of SNR as a function of system scale  $N$  with different correlation time  $\tau$ .

图 3 给出了 SNR 在不同系统尺度  $N$  的条件下, 随着输入噪声强度  $D$  的改变而产生的不同输出情况. 从图 3(a) 可以观察到, 针对每一个噪声强度  $D$ , SNR 曲线伴随着  $N$  的增加都呈现出单峰状, 说明原始系统出现了 SR 现象. 当其他参数为  $\theta = 3$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $A = 0.01$ ,  $r = 0.02$  时, 随着  $D$  从 0.17 变化到 0.5, SNR 的峰值逐渐增大, 峰值所对应的  $N$  值向右移动, 表明噪声强度  $D$  的增大能够增强 SR 现象.

为了比较高斯色噪声与高斯白噪声对于非对称耦合网络系统 SR 行为的影响, 取定参数为  $\theta = 4$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $A = 0.01$ ,  $r = 0.03$  时图 3(b) 给出两种噪声分别诱导下系统 SNR 的演化图形, 其中粉色曲



线表示高斯色噪声作用下 SNR 的演化图, 蓝色曲线表示高斯白噪声作用下 SNR 的演化图, 从图 3(b) 可以看到  $D = 0.3$ ,  $D = 0.5$  时, 高斯色噪声驱动下系统输出 SNR 数值均比高斯白噪声驱动下系统输出的 SNR 数值要大. 由此表明, 在同一噪声强度  $D$  下高斯色噪声能够增强尺度随机共振现象.

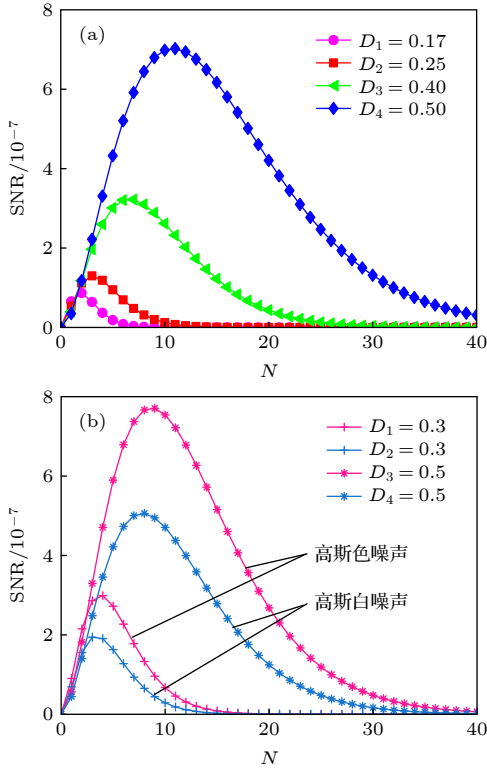


图 3 噪声强度  $D$  对输出信噪比 SNR 的影响 (a) SNR 作为系统尺度  $N$  的函数关于  $D$  变化的曲线; (b) 分别由高斯色噪声、高斯白噪声驱动下系统输出 SNR 的对比  
Fig. 3. The influence of noise intensity  $D$  on the output SNR: (a) Curve of SNR as a function of the system scale  $N$  with the change of  $D$ ; (b) comparison of system output SNR driven by Gaussian colored noises and Gaussian white noises respectively.

### 4.3 系统参数对随机共振的影响

为了进一步考虑系统参数的改变对随机共振动力学行为的影响, 下面给出了耦合系数、非对称性系数和系统尺度的 SNR 演化趋势图, 结果如图 4—图 6 所示.

图 4(a) 描述了系统输出 SNR 在不同系统尺度  $N$  条件下, 随着耦合系数  $\theta$  变化而发生的不同输出情况. 可以看出, 对给定的  $\theta$  值, 每条 SNR 曲线都呈现出开始随着  $D$  的增加而增加, 之后随着  $D$  的增大而减小的非单调演化趋势, 表明系统出现 SR 现象. 另外, 给定  $D = 0.3$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $A = 0.01$ ,  $r = 0.02$ , 当

$\theta$  从 1.85 逐渐增大到 2.5 时, SNR 曲线的峰值逐渐变大, 且输出 SNR 的最大值所需  $N$  向  $N$  增加的方向移动, 也就是说,  $\theta$  的增加可促进系统 SR 的产生; 但是当  $\theta$  再逐渐增大至 28 时, 观察到 SNR 曲线的峰值却在减小, 且 SNR 的最大值所对应的  $N$  向  $N$  减小的方向移动, 即较大的  $\theta$  抑制了系统产生 SR. 换言之, 选取合适的耦合系数  $\theta$  能够使系统 SR 效应达到最佳效果.

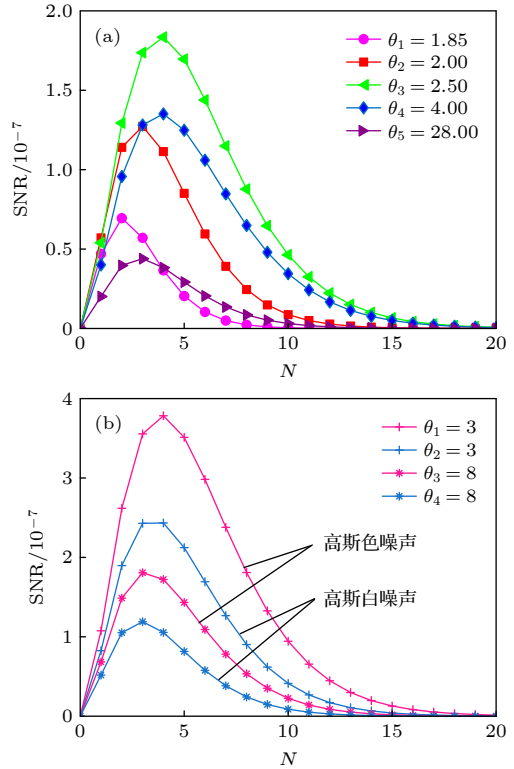


图 4 耦合系数  $\theta$  对输出信噪比 SNR 的影响 (a) SNR 作为系统尺度  $N$  的函数关于  $\theta$  的变化曲线; (b) 分别由高斯色噪声、高斯白噪声驱动下系统输出 SNR 的对比  
Fig. 4. The influence of coupling coefficient  $\theta$  on the output SNR: (a) Curve of SNR as a function of the system scale  $N$  with the change of  $\theta$ ; (b) comparison of system output SNR driven by Gaussian colored noises and Gaussian white noises respectively.

图 4(b) 分析了耦合系数对高斯色噪声和高斯白噪声分别诱导下系统 SR 行为的影响. 固定其他参数为  $D = 0.3$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $A = 0.01$ ,  $r = 0.03$ , 无论耦合系数  $\theta = 3$  还是  $\theta = 8$ , 高斯色噪声激励下耦合网络系统输出 SNR 曲线数值均高于高斯白噪声下 SNR 值. 由此表明, 在相同耦合系数  $\theta$  下, 高斯色噪声能加强尺度随机共振现象.

图 5 讨论了 SNR 作为系统尺度  $N$  的函数随着非对称性系数  $r$  变化的演化趋势. 可以观察到, 随

着  $N$  的增大, 每条 SNR 曲线都出现了共振峰, 即系统出现了 SR 现象. 当  $\theta = 3$ ,  $D = 0.3$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $A = 0.01$  时, 随着  $r$  从 0.03 变化到 0.1 时, SNR 曲线峰值的高度明显上升. 又注意到, 在  $r = 0.03$  和  $r = 0.05$  时 SNR 峰值对应系统尺度  $N = 4$ , 而  $r = 0.07$  与  $r = 0.1$  处峰值对应的  $N = 3$  保持不变, 换句话说, 非对称性系数  $r$  对高斯色噪声作用下系统尺度随机共振的影响是缓慢变化的.

系统信噪比 SNR 在不同噪声强度  $D$  条件下, 随着系统尺度  $N$  变化而发生的不同输出情况如图 6 所示. 可以观察到, 当  $N$  分别取 4, 8, 12 和 16 时, 每条 SNR 曲线都出现了单峰, 说明系统产生了 SR 现象. 详细地说, 选取参数为  $\theta = 2$ ,  $r = 0.02$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $A = 0.01$  时, 随着  $N$  从 4 逐渐增加到 16, 系统输出 SNR 与  $N$  的增大成正比, 当  $N$  取到 16 时, 随机共振的效果更显著, 这一结果表明增大系统尺度  $N$  能够促进系统的 SR 现象.

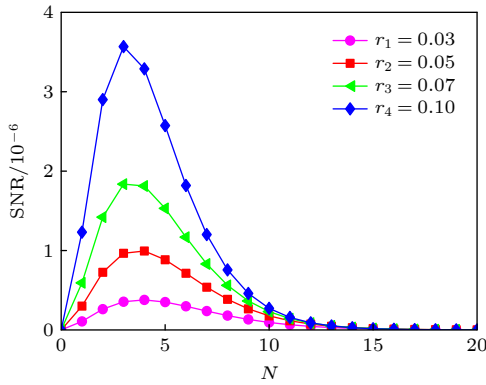


图 5 SNR 作为系统尺度  $N$  的函数关于不同非对称性系数  $r$  的关系图  
Fig. 5. Relationship of SNR as a function of system scale  $N$  with different asymmetric coefficient  $r$ .

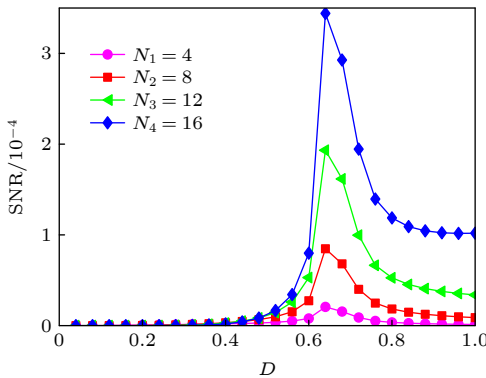


图 6 SNR 作为噪声强度  $D$  的函数关于不同系统尺度  $N$  的关系图  
Fig. 6. Relationship of SNR as a function of noise intensity  $D$  with different system scale  $N$ .

#### 4.4 周期信号对系统随机共振的影响

本节讨论余弦信号  $S(t) = A \cos(\omega t)$  对耦合网络系统随机共振行为的影响. 图 7 给出了信噪比 SNR 作为系统尺度  $N$  的函数, 当周期信号振幅  $A$  变化时的演化趋势. 从图 7 中可以得到, 每条 SNR 曲线都有先增加后减小的变化趋势, 都存在局部最大值, 说明系统出现了 SR 现象. 具体来看, 当给定其他参数为  $\theta = 3$ ,  $D = 0.3$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $r = 0.02$  时,  $A$  从 0.02 逐步增大到 0.15 时, SNR 曲线的峰值高度随之变高. 这表明, 信号振幅  $A$  的增大能够使系统 SR 效应更加强烈.

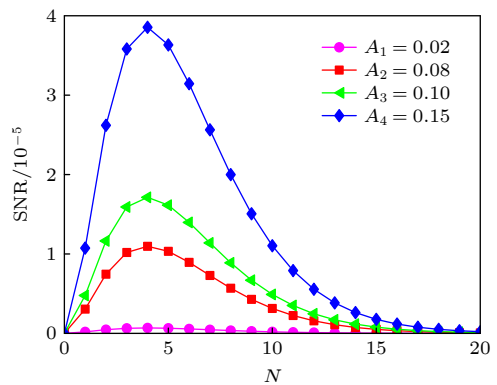


图 7 SNR 作为系统尺度  $N$  的函数关于不同周期信号振幅  $A$  的关系图  
Fig. 7. Relationship of SNR as a function of system scale  $N$  with different periodic signal amplitude  $A$ .

## 5 结 论

本文研究了高斯色噪声与周期信号共同驱动下非对称双稳耦合网络系统的随机共振现象. 由于采用的模型是  $N$  维系统, 直接研究比较困难且具有较强的非线性, 故先运用平均场理论和统一色噪声近似原理将高斯色噪声诱导下的 non-Markovian 模型进行降维近似, 再通过等效线性化得到简化模型, 之后根据高斯近似和役使原理化简得到等价的 Langevin 方程, 最后在绝热近似条件下, 利用经典随机共振理论, 推导出包含所有参数的输出信噪比函数关系式.

结果表明, 在一定的参数范围内, 系统出现了随机共振现象. 高斯色噪声自关联时间、噪声强度的增加能够促进尺度随机共振的产生; 非对称性参数的增大, 抑制了随机共振效果; 而选取合适的耦合系数使系统的输出响应达到最大. 另外, 信号幅

值的改变不会影响系统产生随机共振的尺度. 此外, 还对比分析了在其他参数一致的前提下, 高斯色噪声和高斯白噪声分别激励下系统的随机共振行为. 研究发现, 高斯色噪声作用下耦合网络系统输出信噪比的数值更大, 高斯色噪声较高斯白噪声更有利于增强系统随机共振现象.

## 参考文献

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [2] Mc Namara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
- [3] Dykman M I, Luchinsky D G, Mammella R, McClintock P V E, Stein N D, Stocks N G 1993 *J. Stat. Phys.* **70** 463
- [4] Zhou T, Moss F, Jung P 1990 *Phys. Rev. A* **42** 3161
- [5] Wu J 2018 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Northwestern Polytechnical University) (in Chinese) [武娟 2018 博士学位论文 (西安: 西北工业大学)]
- [6] Qu L H, Du L, Cao Z L, Hu H W, Deng Z C 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 230501 (in Chinese) [曲良辉, 都琳, 曹子露, 胡海威, 邓子辰 2020 物理学报 **69** 230501]
- [7] Qiao Y R, Chen J L, Hou W 2021 *Electron. Meas. Technol.* **44** 88 (in Chinese) [乔岩茹, 陈健龙, 侯文 2021 电子测量技术 **44** 88]
- [8] Jin Y F, Li B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 210501 (in Chinese) [靳艳飞, 李贝 2014 物理学报 **63** 210501]
- [9] Zhang X Y, Xu W, Zhou B C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060514 (in Chinese) [张晓燕, 徐伟, 周丙常 2011 物理学报 **60** 060514]
- [10] Hänggi P, Jung P, Zerbe C, Moss F 1993 *J. Stat. Phys.* **70** 25
- [11] Jiao S B, Li J, Zhang Q, Xie G 2016 *J. Syst. Phys. Simul.* **28** 139 (in Chinese) [焦尚彬, 李佳, 张青, 谢国 2016 系统仿真学报 **28** 139]
- [12] Zhang X Y, Zheng X Y 2019 *Indian J. Phys.* **93** 1051
- [13] Yang J H, Ma Q, Wu C J, Liu H G 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 054501 (in Chinese) [杨建华, 马强, 吴呈锦, 刘后广 2018 物理学报 **67** 054501]
- [14] Yu Y D, Lin M, Huang Y M, Xu M 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 040501 (in Chinese) [俞莹丹, 林敏, 黄咏梅, 徐明 2021 物理学报 **70** 040501]
- [15] Ma S N 2019 *M. S. Thesis* (Beijing: North China Electric Power University) (in Chinese) [马圣楠 2019 硕士学位论文 (北京: 华北电力大学)]
- [16] He C L 2020 *M. S. Thesis* (Chengdu: Southwest Jiaotong University) (in Chinese) [何传磊 2020 硕士学位论文 (成都: 西南交通大学)]
- [17] Liu X Q 2019 *M. S. Thesis* (Xi'an: Shanxi Normal University) (in Chinese) [刘小强 2019 硕士学位论文 (西安: 陕西师范大学)]
- [18] Sun Z K, Lu P J, Xu W 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 92 (in Chinese) [孙中奎, 鲁捧菊, 徐伟 2014 物理学报 **63** 92]
- [19] Kometsani K, Shimizu H 1975 *J. Stat. Phys.* **13** 473
- [20] Pikovsky A S, Rateitschak K, Kurth S 1994 *Z. Phys. B* **95** 541
- [21] Zhu W Q 2017 *Introduction to Stochastic Dynamics* (Beijing: Science Press) pp73–75 (in Chinese) [朱位秋 2017 随机动力学引论 (北京: 科学出版社) 第 73–75 页]
- [22] Yan H Y, Shi Y M, Su J, Li S 2016 *J. Xi'an. Jiaotong Univ.* **50** 141 (in Chinese) [严惠云, 师义民, 苏剑, 李爽 2016 西安交通大学学报 **50** 141]
- [23] Li C, Da-Jin W, Sheng-Zhi K 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3228
- [24] Cubero D 2008 *Phys. Rev. E* **77** 021112
- [25] Wu D J, Cao L, Chen L H 1990 *Principles and Applications in Synergistics* (Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press) pp67–93 (in Chinese) [吴大进, 曹力, 陈立华 1990 协同学原理和应用 (武汉: 华中理工大学出版社) 第 67–93 页]
- [26] Novikov E A 1965 *Sov. Phys. JETP* **20** 1290
- [27] Ning L J, Xu W, Yang X L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 25 (in Chinese) [宁丽娟, 徐伟, 杨晓丽 2007 物理学报 **56** 25]
- [28] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) pp131–135 (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社) 第 131–135 页]
- [29] Mc Namara B, Wiesenfeld K 1989 *Physical Review A* **39** 4854
- [30] Wu X H 2010 *M. S. Thesis* (Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics) (in Chinese) [吴志会 2010 硕士学位论文 (南京: 南京航空航天大学)]

# Stochastic resonance in asymmetric bistable coupled network systems driven by Gaussian colored noise<sup>\*</sup>

Wang Ye-Hua    He Mei-Juan<sup>†</sup>

(*School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China*)

( Received 9 May 2022; revised manuscript received 3 June 2022 )

## Abstract

In this work studied is the synergistic effect of asymmetric bistable coupled network systems under the action of Gaussian colored noise and periodic signal. The system is a network model consisting of a large number of oscillators. The interaction and change between individuals produce complex nonlinear behavior patterns. For further research, firstly, the original N-dimensional system is reduced and approximated by using the mean field theory, the unified colored noise approximation theory and the equivalent nonlinearization method. Secondly, the Langevin equation of simplified model is obtained through the slaving principle by using the two-state model theory to derive the theoretical expression of signal-to-noise ratio. It is found that the system produces the phenomenon of scale stochastic resonance. Finally, the effects of Gaussian color noise parameters, system parameters and periodic signal parameters on the stochastic resonance behavior of asymmetric coupled network systems are discussed. The results show that the increase of Gaussian colored noise correlation time and noise intensity can promote the scale stochastic resonance phenomenon; selecting appropriate coupling coefficient can achieve the optimal stochastic resonance effect. And the stochastic resonance phenomenon of the system driven by the Gaussian colored noise and the Gaussian white noise, respectively, are analyzed and compared with each other. Research result shows that Gaussian colored noise is more conducive to enhancing stochastic resonance phenomenon.

**Keywords:** stochastic resonance, asymmetric bistable coupled network systems, signal-to-noise ratio, Gaussian colored noise

**PACS:** 05.10.Gg, 05.40.-a

**DOI:** [10.7498/aps.71.20220909](https://doi.org/10.7498/aps.71.20220909)

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Science and Technology Project of Gansu Province, China (Grant No. 21JR1RA238) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11602184).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [hemeijuan@mail.lzjtu.cn](mailto:hemeijuan@mail.lzjtu.cn)





## 高斯色噪声激励下非对称双稳耦合网络系统的随机共振

王烨花 何美娟

### Stochastic resonance in asymmetric bistable coupled network systems driven by Gaussian colored noise

Wang Ye-Hua He Mei-Juan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 190501 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220909

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220909>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 循环噪声驱动下非对称双稳系统的驻留时间分布函数研究

Residence-times distribution function in asymmetric bistable system driven by noise recycling

物理学报. 2020, 69(12): 120501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20201752>

#### 三态噪声激励下分数阶耦合系统的随机共振现象

Stochastic resonance of fractional-order coupled system excited by trichotomous noise

物理学报. 2022, 71(3): 030502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211272>

#### 含记忆阻尼函数的周期势系统随机共振

Stochastic resonance in periodic potential system with memory damping function

物理学报. 2022, 71(8): 080501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211732>

#### 基于随机放电神经网络的彩色图像感知研究

Color image perception based on stochastic spiking neural network

物理学报. 2022, 71(7): 070501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211982>

#### 一种随机共振增强正弦信号的二次多项式接收方法

A quadratic polynomial receiving scheme for sine signals enhanced by stochastic resonance

物理学报. 2019, 68(21): 210501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190952>

#### 不同频率涨落驱动下全局耦合谐振子的集体动力学行为

Collective behaviors of globally coupled harmonic oscillators driven by different frequency fluctuations

物理学报. 2021, 70(13): 130501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210157>