基于物理信息神经网络的光斑质心计算*

方波浪 王建国† 冯国斌

(西北核技术研究所, 西安 710024)

(2022年4月11日收到; 2022年6月12日收到修改稿)

为了实现强噪声干扰下的远场光斑质心高精度计算,研究了一种基于物理信息神经网络的质心定位方法——质心物理信息神经网络(centroid-PINN),该方法利用 U-Net 神经网络优化质心计算误差损失.为了验证该方法,利用模拟产生不同强度的两种类型噪声(斜坡噪声和白噪声)干扰下的高斯光斑训练网络.通过两种类型的光斑(高斯光斑和类 Sinc 函数光斑)测试神经网络,均得到了较高的质心定位精度.相比传统质心定位计算方法,centroid-PINN 无需根据噪声水平设置参数,特别是能够处理斜坡噪声的干扰,获得高精度定位结果.成果可用于高性能激光光斑质心参数测量设备的研制,对于夏克-哈特曼波前测量装置的研制也有一定的借鉴意义.

关键词:测量,质心计算,神经网络,自适应光学 **PACS**: 06.20.Dk, 06.90.+v, 07.05.Mh, 95.75.Qr

DOI: 10.7498/aps.71.20220670

1 引 言

光斑质心计算在激光参数测量、自适应光学、 光通信等领域具有重要的应用^[1-4].例如,在激光 远场光斑测量中,需要根据远场光斑分布获得光斑 质心,评价激光指向稳定性.同时,质心是计算光 斑其他特征参数(环围半径、光斑尺寸等)的基础; 在自适应光学中,夏克-哈特曼技术是一种常用的 波前测量技术.在该技术中,子孔径光斑的质心高 精度探测是关键的环节之一.

干扰对于光斑质心计算精度有显著的影响^[5-11]. 光斑质心采用重心法 (center of gravity, CoG) 计 算, 计算准确性受噪声、背景照明、光斑调制、离散 采样、截断误差等因素影响.在远场光斑测量中, 广泛存在多种类型的噪声,并且有的噪声随信号产 生, 难以通过实验手段完全消除.在 ISO-11146 中, 为了降低边缘噪声的影响, 规定采用加窗质心计算 方法.同时,针对不同类型的噪声给出了相应的消除方法.常用的光斑质心计算方法还包括:阈值法(threshold center of gravity, TCoG)、加权法(windowing center of gravity, WCoG)、迭代加权重心算法(iteratively windowing center of gravity, IWCoG)、强度加权算法(intensity weighted centroiding, IWC)、拟合法、模板滤波法(matched filter, MF)、相关法(correlation, Cor)等^[8,12–18].还有许多预处理方法,如空间卷积波法、频域滤波法、流式质心算法(stream center of gravity, SCoG)、高斯噪声估计等^[11,17,19],期望去除噪声的影响.然而,这些方法大多需要根据待测目标进行参数调整,计算精度与所采用的参数相关,对于使用者的经验要求较高.

人工神经网络有望解决光斑质心高精度计算难题.近年来,人工智能得到了飞速发展,解决了许多难题,如图像识别、语音识别、语义分析、翻译、医学诊断等,受到了广泛关注,具有巨大的研究应用潜力^[20].

^{*} 激光与物质相互作用国家重点实验室专项基金 (批准号: SKLLIM1909) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: wanguiuc@mail.xjtu.edu.cn

^{© 2022} 中国物理学会 Chinese Physical Society

在质心计算/自适应光学中也取得了许多进展.例 如, Montera 等^[21,22]利用全连接神经网络, 将光斑 直接映射至质心,对于拉长畸变的光斑,获得了较 高的计算精度; Li 等^[23] 给出了 SHWFS-neural network (SHNN) 网络, 将质心计算转化为分类问 题,在信噪比很低的情况下,获得了准确度很高的 结果. 全连接神经网络方法属于回归问题, 训练较 难收敛. 所以, 采用了较小的神经网络. 而较小的网 络表达能力有限,因此对于不同朝向的变形光斑需 要训练不同的神经网络. SHNN将质心计算转变为 分类问题,有效解决了极端噪声的干扰.但该方法 的计算精度最高不超过单像素.综合考虑,这些方 法对质心计算的物理约束利用较少.针对物理问题, Raissi 等^[24]提出了物理信息神经网络 (physics informed neural network, PINN), 该论文目前已被 引用超过 2000 次. PINN的主要思想为采用神经网 络优化控制方程的残差,使得神经网络在可解释性 方面迈出了一大步, 解决了许多物理问题.

因此,借鉴 PINN 的思想,给出了一种用于光 斑质心计算的 PINN 网络,称为质心物理信息神经 网络 (centroid-PINN). centroid-PINN 利用损失 函数将质心物理约束引入神经网络,通过优化网络 参数降低原始光斑与预测光斑的质心误差,实现强 噪声干扰下的光斑质心高精度预测.本文将质心计 算物理过程引入神经网络,实现了强噪声下的畸变 光斑的质心高精度智能预测.本文算法采用 Python 实现,神经网络基于 Tensorflow 框架.为了便于复 现本文计算结果,文中所采用的程序将在论文录用 后在网络上公开.

2 质心物理信息神经网络

实际光斑强度 *I*_{raw}为无噪声光斑强度 *I*_o与噪声 强度 *n* 的叠加,表示为

$$I_{\rm raw} = I_{\rm o} + n. \tag{1}$$

基于深度学习的质心计算问题可以被表述为 利用神经网络对含噪声光斑 *I*_{raw} 进行处理,得到光 斑*Î*,使得利用*Î* 与 *I*。计算得到相同的质心.

神经网络对光斑的预处理过程可以表示为

$$\hat{I} = \mathcal{F}\left(I_{\text{raw}};\Theta\right),\tag{2}$$

其中 *O* 为网络参数. 网络训练的目标是获得质心 计算误差最小的网络参数, 即

$$\Theta^{*} = \arg\min_{\Theta} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}\left(f_{c}\left(\mathcal{F}\left(I_{raw};\Theta\right)\right), f_{c}\left(I_{o}\right)\right), (3)$$

其中, *f*_c为光斑质心计算函数. 质心采用一阶矩定 义计算:

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}} = f_{\mathrm{c}}\left(I\right) \equiv rac{\sum \boldsymbol{x}_{i}I_{i}}{\sum I_{i} + \varepsilon},$$
 (4)

其中, *x*表示坐标,包括横纵坐标 (*x*, *y*),对应质心的水平竖直位置; *I*为光强; *i*表示坐标索引; *ε*为数值小量,取 10⁻¹⁵.考虑到 *I*可能出现全零情况,因此实际计算时需要向分母中增加一个小量. *L*(·,·)表示损失函数.考虑到质心距离符合欧拉距离表征,采用 2 范数作为损失函数,表示为

$$\mathcal{L} = \|x_{\rm o} - x_{\rm p}\|_2 + \|y_{\rm o} - y_{\rm p}\|_2, \tag{5}$$

式中, 下标 p 表示经神经网络处理后的光斑计算得 到的质心, 下标 o 表示无噪声光斑的质心.

相比于 SHNN, centroid-PINN 在使用网络方 面具有很高的自由度.可用神经网络有很多种,例 如全连接网络、深度卷积神经网络、U-Net等. U-Net 为全卷积网络, 被广泛用于图像区域划分、降 噪、识别等领域[25]. 质心计算的困难主要来源于噪 声干扰. 所以, 本文采用 U-Net 对噪声光斑进行预 处理. 如图1所示, 网络的主体采用 U-Net 网络, 将无噪声原始光斑施加噪声后再采用神经网络处 理得到预测光斑,分别利用无噪声光斑和预测光斑 计算质心,将二者的质心间横纵坐标距离作为损失 函数,利用反向传播算法优化网络参数. U-Net 为 包括压缩路径和扩展路径的对称 U 形结构. 压缩 路径用于编码, 扩展路径用于简码. 本文采用的 U-Net 网络包含 2 个编码/解码层、1 个瓶颈层以及同 一级的编码层和解码层之间的连接. 编码层包含 2个卷积层和1个最大池化层.卷积层用于特征提 取, 卷积核的尺寸为 3×3. 最大池化层用于降采样. 每经过一次降采样,特征图尺寸减小为原来的一 半.为了减少信息损失,每个模块较上个模块的特 征向量长度增大1倍,依次为16,32,64. 解码层包 含1个上采样层和2个卷积层. 解码层中, 前一层 特征图上采样与同层的压缩层的特征向量拼接后 组成卷积层的输入. 通过卷积层完成特征向量长度 的缩短及尺寸的加倍,从而实现图像的匀化和主要 信息提取. 最终需要光斑灰度图像计算质心, 因此 网络的输出特征向量长度为1.



图 1 网络结构 Fig. 1. Network architecture.

采用模拟方式产生训练及测试用的光斑图像. 经大气传输的远场长时间平均光斑符合高斯分布, 因此采用

$$I = \exp\left[-\frac{\left(x - x_0\right)^2}{2\sigma_x^2}\right] \exp\left[-\frac{\left(y - y_0\right)^2}{2\sigma_y^2}\right] \quad (6)$$

生成光斑. 其中, x_0 和 y_0 分别为质心横纵坐标, σ_x 和 σ_y 表示高斯函数水平竖直方向的标准差. 由于每经一次降采样,特征尺寸减半,所以 U-Net 的网络输入尺寸需根据瓶颈层的特征尺寸及降采样次数计算.本文选用的输入尺寸为 256×256.为了便于设置参数,考虑到通常要求远场光斑测量区域为光斑直径的 3 倍,因此,图像的长宽坐标范围设置为-3—3.利用随机数修改光斑参数产生不同形貌的光斑.其中 $x_0, y_0 \in [-2, 2]$ 表示光斑的质心位置在-2—2之间变化, $\sigma_x, \sigma_y \in [0.4, 0.8]$ 用于调整高斯光斑的直径.共生成 10000 张高斯光斑图片,随机选取其中的 80% 作为训练数据, 20% 作为测试数据.

在输入网络前对光斑进行预处理.第一步:由 于质心计算仅利用光强相对强度,以及神经网络的 激活函数输出范围为-1—1,所以将光斑强度归一 化至 0—1.第二步:为了模拟实际光斑,向原始光 斑图像中实时添加噪声形成网络输入.典型的噪声 类型包括白噪声、斜坡噪声、横向及纵向高斯噪声 等^[17].针对经长距离传输的远场光斑,横向及纵向 高斯噪声较为少见,因此仅考虑前两种类型噪声 干扰.白噪声的标准差范围为 0—0.3,模拟最大 30% 的噪声干扰. 斜坡噪声的最大强度范围为 0—1, 斜率范围为-0.5—0.5. 第3步: 再次将光斑 强度归--化至 0—1 之间.

在得到预测光斑后,利用 (4) 式分别计算预测 的光斑和无噪声光斑的质心,再使用 (5) 式计算损 失函数. 计算质心的关键在于获得质心坐标在图像 中的相对位置. 因此,将光斑图像的长宽坐标分别 设为-1—1. 图像的大小为 256×256, 对应一个像 素的尺寸约为 0.008. 最后采用反向传播算法优化 网络参数. 采用的优化器为 Adam, 学习率设置为 0.0001.

为了进一步验证网络的泛化能力,采用训练后 的网络预测了与高斯形貌不同的光斑的质心.考虑 平顶光斑远场衍射理想光斑,采用如下函数产生 类 Sinc 光斑:

$$I = \left[\frac{\mathbf{J}_1\left(ar\right)}{r}\right]^2,\tag{7}$$

$$r = \left(\frac{(x - x_0)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\sigma_y^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$
 (8)

其中, J₁为一阶贝塞尔函数, r为坐标点与质心距离. 采用均匀分布随机数修改其中的参数改变光斑特征. $a \in [0.5, 1.5]$, 其余参数范围与 (6) 式相同.

3 结果与分析

3.1 训练过程

共对所有数据训练 20 个周期. 训练中依次从

总体样本中抽取小批量样本,批量的大小为 32. 典 型的损失函数变化如图2所示.曲线显示:经1个 周期的训练,损失函数明显下降.经过训练,训练 集上的损失函数下降了约4个数量级,测试集上的 损失函数值约为 10-4. 测试集的损失函数值整体小 于训练集的损失函数,原因是当前采用的损失函数 为所有样本的损失函数之和, 而测试集的样本少. 多次重复执行训练过程,得到的损失函数变化情况 略有不同. 这是由于优化神经网络时采用的随机数 作为种子. 但是, 通常损失函数能够在一个周期内 明显下降. Centroid-PINN 利用损失函数将质心计 算物理过程融入神经网络,使得神经网络在训练时 能够更好地针对质心计算提取所需的图像特征.因 而网络较容易收敛, 在较少的迭代周期内即达到收 敛. 需要指出的是, 如果采用较大的学习率, 可能 出现振荡情况. 振荡的可能原因是个别光斑恰好通 过当前网络参数前向传播后得到近似全零图像.但 继续训练, 损失函数将再次降低. 该结果表明网络 在当前参数设置下易于收敛.



图 2 训练过程中损失函数变化情况 Fig. 2. Loss in training process.



3.2 高斯光斑测试

从高斯光斑测试集中随机选取光斑图像,采用 已训练的网络预测光斑质心,结果如图3所示. 图 3(a) 中, 第一行为 3 个典型的输入光斑图像; 第 二行为对应的无噪声原始光斑; 第三行为采用第一 行光斑作为输入得到的预测图像, 输入光斑图像中 显示出较明显的背景干扰,并且光斑尺寸各异、位 置随机、存在沿水平竖直方向的拉伸变形.结果显 示: 在预测光斑图像中, 仅在与原始光斑位置相同 处的强度较大, 在噪声处几乎无响应, 说明网络对 于真实光斑的响应较强.进一步,分别使用重心算 法 (CoG) 和阈值重心算法 (T_mCoG) 计算原始输 入光斑的质心,采用 CoG 计算预测图像光斑质心. 为了便于实现, T_mCoG 的阈值固定为 0.1. 结果如 图 3(b) 所示. 图中显示了 10 个批次的计算结果, 每个数据点为 32 幅图像的平均值. CoG 与 T_mCoG 的计算偏差基本相同,约0.5.对比图像尺寸为1, 因此对于存在当前噪声干扰的光斑,传统质心算法 无法准确获得光斑质心. 主要原因是传统质心算法 易受噪声干扰,特别是无法应对斜坡噪声干扰.而 利用神经网络预测的精度为约 0.008, 约为 1 个像 素. 表明利用当前的神经网络可以有效预测斜坡和 白噪声干扰下的高斯光斑质心位置. 对比网络输出 的光斑与原始光斑,虽然二者存在较大差异,但是 网络在光斑处的响应远高于其他位置处,表明网络 有效提取了高精度计算质心的特征,因而获得了较 高的质心定位精度. 在传统降噪应用中, 要求网络 的输出与原始图像相一致. Centroid-PINN 不同于 传统的降噪, Centroid-PINN 的约束为网络输出的 光斑与原始光斑形所计算得到的质心相同.



图 3 高斯光斑典型结果 (a) 典型光斑, 第一行为输入光斑, 第二行为原始的无噪声光斑, 第三行为预测光斑; (b) 质心误差 Fig. 3. Typical results of gauss spots: (a) Typical spots, first row is input spots, second row is true spot, third row is predicted spot; (b) centroid estimation error.

3.3 泛化测试

为了检验该网络的泛化能力,使用上述训练后 的网络预测了噪声干扰下的类 Sinc 光斑的质心, 结果如图 4 所示.图 4(a) 是典型的输入光斑、原始 光斑和预测光斑. 输入光斑为含噪声光斑. 原始光 斑为无噪声光斑. 预测光斑为经神经网络处理后的 光斑.为了更明显的显示衍射光斑图案,灰度值采 用了自然对数坐标. 输入光斑不仅包含各种类型的 噪声干扰、改变了尺寸、拉伸变化,而且增加了原 训练数据集中不存在的旋转变换. 与高斯光斑算例 相似,在预测光斑中,仅在与原始光斑的主光斑位 置处出现较强响应. 图像边缘处显示出十分低的响 应是由于目前采用的 U-Net 在卷积计算时采用了 边缘补零的方法,采用边缘对称方法可以改善这一 现象. 质心计算误差结果如图 4(b) 所示. 由神经网 络预测的质心误差小于 0.008, 即神经网络的预测 精度达到了亚像素级别.相比而言,传统质心算法 的计算误差约 0.09、未能得到准确的质心位置.因

此,神经网络预测的精度依旧远高于传统质心算法 方法.

3.4 不同噪声水平的影响分析

为了检验 Centroid-PINN 的性能,利用高斯 光斑分别计算了两种噪声对质心定位精度的影响, 结果如图 5 所示.图 5(a),(b)分别显示了仅有高 斯噪声和仅有斜坡噪声的计算结果.横坐标表示不 同的噪声强度.每一个数据点均为 32 幅图像计算 的平均结果.结果显示:Centroid-PINN 预测的质 心误差小于 0.01,约为 1 个像素;而传统方法预测 的结果偏差较大,未能准确获得质心位置.表明神 经网络可以在两种噪声单独干扰下有效地排除噪 声干扰,识别光斑.特别是对于斜坡噪声,随着噪 声强度的增大,神经网络预测精度进一步提升.该 现象可以解释为随着斜坡噪声的强度增大,噪声的 特征更为明显,因此神经网络更容易排除该噪声的 干扰.



图 4 类 Sinc 光斑计算结果 (a) 典型光斑, 第一行为输入光斑, 第二行为原始光斑, 第三行为网络输出光斑; (b) 质心误差 Fig. 4. Typical results of sinc-like spots: (a) Typical spots, first row is input spots, second row is true spot, third row is predicted spot; (b) centroid estimation error.





Fig. 5. Influence of noise intensity on centroid computation: (a) White noise; (b) ramp noise.

4 结 论

针对噪声干扰下的畸变光斑质心高精度计算, 提出了基于神经网络的质心预测方法,称为 centroid-PINN. Centroid-PINN 利用 U-Net 神经网 络预处理光斑图像,将质心计算误差作为损失函数 优化网络参数.采用模拟手段验证了该方法.结果 表明:在白噪声和斜坡噪声干扰下,centroid-PINN 对于畸变的高斯光斑和 Sinc 光斑的质心计算精度 远高于传统方法,可达亚像素级别.相比于传统的 神经网络方法,centroid-PINN 具有更明确的物理 意义,更易于训练.相比传统质心计算方法,centroid-PINN 能够智能化消除特定类型噪声的干扰,有效 解决了噪声干扰下的质心高精度定位难题.进一 步,噪声的类型丰富多样,本文仅对两种典型噪声 的干扰展开了研究,后续工作中还可以分析其他噪 声的干扰,以及多种噪声的叠加干扰.

参考文献

- [1] Booth M J 2014 Light Sci. Appl. 3 165
- [2] Ji N 2017 Nat. Methods 14 374
- [3] Feng G B 2014 Ph. D. Dissertation (Xi'an: Xidian University) (in Chinese) [冯国斌 2014 博士学位论文 (西安: 西安电子科技 大学)]
- [4] Andrews L C, Phillips R L 2005 Laser Beam Propagation

Through Random Media (Bellingham, Wash: SPIE Press) p4
[5] Ma X, Rao C, Zheng H 2009 Opt. Express 17 8525

- [6] Li Z Q, Li X Y, Gao Z Y, Jia Q W 2021 High Power Laser Particle Beams 33 081001 (in Chinese) [李自强, 李新阳, 高泽 宇, 贾启旺 2021 强激光与粒子束 33 081001]
- [7] Guo Y, Zhong L, Min L, Wang J, Wu Y, Chen K, Wei K, Rao C 2020 OEA 5 200082
- [8] Thomas S, Fusco T, Tokovinin A, Nicolle M, Michau V, Rousset G 2006 Mon. Not. R. Astron. Soc. 371 323
- [9] Lardière O, Conan R, Clare R, Bradley C, Hubin N 2010 Proc. SPIE 7736 773627
- [10] Akondi V, Steven S, Dubra A 2019 Opt. Lett. 44 4167
- [11]~ Xu L, Wang J, Yao K, Yang L2021~Opt.~Lett.~46~4196
- [12]~ Gilles L, Ellerbroek B L 2008 Opt.~Lett. 33 1159
- [13] Leroux C, Dainty C 2010 Opt. Express 18 1197
- [14]~ Vyas A, Roopashree M B, Prasad B R 2010 IJCA 1 32
- [15] Vargas J, Restrepo R, Estrada J C, Sorzano C O S, Du Y Z, Carazo J M 2012 Appl. Opt. 51 7362
- [16] Ding W, Gong D, Zhang Y, He Y 2014 International Conference on Intelligent Computing and Signal Processing Hangzhou, China, Oct. 19–23, 2014 p774
- [17] Li J, Gong Y, Hu X R, Li C C 2014 Chin. J. Laser 41 0316002 (in Chinese) [李晶, 巩岩, 呼新荣, 李春才 2014 中国激 光 41 0316002]
- [18] Zhang Y Y, Hao X L, Chen J W 2015 *Opt. Techn.* 41 59 (in Chinese) [张艳艳, 郝晓龙, 陈洁伟 2015 光学技术 41 59]
- [19] Kong F, Polo M C, Lambert A 2017 Appl. Opt. 56 6466
- [20] LeCun Y, Bengio Y, Hinton G 2015 *Nature* **521** 436
- [21] Montera D A, Welsh B M, Roggemann M C, Ruck D W 1996 *Appl. Opt.* **35** 5747
- [22] Mello A T, Kanaan A, Guzman D, Guesalaga A 2014 MNRAS 440 2781
- [23] Li Z, Li X 2018 Opt. Express 26 31675
- [24] Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E 2019 J. Comput. Phys. 378 686
- [25] Ronneberger O, Fischer P, Brox T 2015 arXiv: 1505.04597

Calculation of spot entroid based on physical informed neural networks^{*}

Fang Bo-Lang Wang Jian-Guo[†] Feng Guo-Bin

(Northwest Institute Nuclear Technology, Xi'an 710024, China) (Received 11 April 2022; revised manuscript received 12 June 2022)

Abstract

To determine the centroid of far-field laser beam spot with high precision and accuracy under intense noise contamination, a positioning algorithm named centroid-PINN is proposed, which is based on physical information neural network. A U-Net neural network is utilized to optimize the centroid estimation error. In order to demonstrate this new method, Gaussian spots polluted by two kinds of noises, i.e. ramp noise and white noise, are generated by simulation to train the neural network. The neural network is tested by two kinds of spots, i.e. Gaussian spot and Sinc-like spot. Both are predicted with high accuracy. Compared with traditional centroid method, the centroid-PINN needs no parameter tuning, especially can cope with ramp noise interference with high accuracy. This work will be conducive to developing the far-field laser beam spot measurement device, and can also serve as a reference for developing the Shack-Hartmann wavefront sensor.

Keywords: measurement, centroid computation, neural network, adaptive optics

PACS: 06.20.Dk, 06.90.+v, 07.05.Mh, 95.75.Qr

DOI: 10.7498/aps.71.20220670

^{*} Project supported by the State Key Laboratory of Laser and Matter Interaction Special Fund, China (Grant No. SKLLIM1909).

 $[\]dagger$ Corresponding author. E-mail: wanguiuc@mail.xjtu.edu.cn

物理学报Acta Physica Sinica





Institute of Physics, CAS

基于物理信息神经网络的光斑质心计算

方波浪 王建国 冯国斌

Calculation of spot entroid based on physical informed neural networks Fang Bo-Lang Wang Jian-Guo Feng Guo-Bin

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 200601 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220670 在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20220670 当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

识别Z玻色子喷注的卷积神经网络方法

Tag Z boson jets via convolutional neural networks 物理学报. 2021, 70(6): 061301 https://doi.org/10.7498/aps.70.20201557

利用神经网络识别高分子链在表面的吸附相变

Recognition of adsorption phase transition of polymer on surface by neural network 物理学报. 2019, 68(20): 200701 https://doi.org/10.7498/aps.68.20190643

基于深度学习的光学表面杂质检测

Deep-learning-assisted micro impurity detection on an optical surface 物理学报. 2021, 70(16): 168702 https://doi.org/10.7498/aps.70.20210403

双层结构突触仿生忆阻器的时空信息传递及稳定性

Spatiotemporal signal processing and device stability based on bi-layer biomimetic memristor 物理学报. 2021, 70(17): 178504 https://doi.org/10.7498/aps.70.20210274

基于深度残差网络的高精度自然转捩模拟方法

High-order natural transition simulation method based on deep residual network 物理学报. 2020, 69(20): 204701 https://doi.org/10.7498/aps.69.20200563

基于瀑布型多重网格加速的复指数波前复原算法

Complex exponential reconstruction algorithm accelerated by cascadic multigrid method 物理学报. 2019, 68(10): 104209 https://doi.org/10.7498/aps.68.20182137