



三态噪声激励下分数阶耦合系统的随机共振现象

彭皓 任芮彬 钟扬帆 蔚涛

Stochastic resonance of fractional-order coupled system excited by trichotomous noise

Peng Hao Ren Rui-Bin Zhong Yang-Fan Yu Tao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 030502 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20211272

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211272>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

分数阶双稳系统中的非周期振动共振

A periodic vibrational resonance in the fractional-order bistable system

物理学报. 2018, 67(5): 054501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172046>

循环噪声驱动下非对称双稳系统的驻留时间分布函数研究

Residence-times distribution function in asymmetric bistable system driven by noise recycling

物理学报. 2020, 69(12): 120501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20201752>

一种随机共振增强正弦信号的二次多项式接收方法

A quadratic polynomial receiving scheme for sine signals enhanced by stochastic resonance

物理学报. 2019, 68(21): 210501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190952>

不同频率涨落驱动下全局耦合谐振子的集体动力学行为

Collective behaviors of globally coupled harmonic oscillators driven by different frequency fluctuations

物理学报. 2021, 70(13): 130501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210157>

四稳系统的双重随机共振特性

Double stochastic resonance characteristics of quad-stable system

物理学报. 2021, 70(4): 040501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201346>

腔光子-自旋波量子耦合系统中各向异性奇异点的实验研究

Observation of the anisotropic exceptional point in cavity magnonics system

物理学报. 2020, 69(4): 047103 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191632>

三态噪声激励下分数阶耦合系统的 随机共振现象*

彭皓¹⁾ 任芮彬¹⁾ 钟扬帆²⁾ 蔚涛^{2)†}

1) (西南交通大学数学学院, 成都 610064)

2) (四川大学数学学院, 成都 610064)

(2021年7月8日收到; 2021年9月10日收到修改稿)

为了刻画在黏弹性介质中具有质量涨落的耦合粒子的运动行为, 本文提出了相应模型, 即三态噪声激励下的分数阶耦合系统. 利用 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换, 发现了粒子间的统计同步性, 并得到了系统输出幅值增益的解析表达. 在此基础上, 针对模型涉及的关键要素, 即耦合系统、分数阶系统和三态噪声, 着重分析了耦合系数、系统阶数和噪声稳态转移概率对系统输出幅值增益的广义随机共振现象的影响, 并给出了合理解释. 具体地说, 1) 随着耦合系数的增大, 共振现象将先增强后减弱, 直至收敛. 该现象表明适当的耦合作用能够促进系统共振现象的产生, 体现了研究耦合系统的重要性. 2) 随着系统阶数的增大, 共振现象将逐渐减弱. 当系统阶数取值为 1, 即系统退化为整数阶系统时, 其输出幅值增益的峰值最小, 该现象说明分数阶系统能比传统整数阶系统得到更大的输出幅值增益. 3) 噪声稳态转移概率对系统输出幅值增益的影响会随着与之相关的其他参数的变化而变化. 在一定参数条件下, 三态噪声不仅能够使系统输出幅值获得比双态噪声激励时更大的增益, 还能改变系统的共振类型. 最后, 通过数值仿真验证了上述结果的正确性.

关键词: 随机共振, 分数阶系统, 耦合系统, 三态噪声

PACS: 05.45.Xt, 05.40.-a, 05.40.Ca

DOI: 10.7498/aps.71.20211272

1 引言

随机共振 (SR)^[1] 是一种重要的非线性现象, 过去的几十年中得到了学者们的广泛关注. 该现象表明, 适当的噪声可以增强系统对微弱信号的响应, 颠覆了人们以往对噪声只具有破坏性的认识, 引发了相关研究热潮^[2-7]. SR 的发生需要 3 个基本条件: 1) 系统的非线性性; 2) 微弱相干信号; 3) 噪声. 因此, 早期研究^[8-13] 主要集中于受加性白噪声驱动的非线性系统. 然而, 大量近期研究^[14-22] 表明, 受乘性色噪声驱动的线性系统也可以产生 SR, 在这类系统中, 系统的非线性是由乘性噪声提供的.

考虑黏弹性介质中的 Brown 运动时, 环境分子会随机吸附或脱离于 Brown 粒子, 使 Brown 粒子质量发生随机涨落. 为此, 可通过在 Langevin 方程中引入乘性噪声 $\xi(t)$ ——“质量涨落噪声”来描述该质量涨落^[23]:

$$(m + \xi(t)) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega x(t) = A_0 \cos(\Omega t) + \eta(t), \quad (1)$$

其中, m 表示 Brown 粒子的质量, $\xi(t)$ 表示粒子质量的随机涨落, $x(t)$ 表示 Brown 粒子的位置, γ 与 ω 分别代表系统的阻尼系数和固有频率, $A_0 \cos(\Omega t)$ 和 $\eta(t)$ 分别代表系统受到的外部驱动力与内部噪声. 在早期研究^[24-27] 中, Brown 粒子的质量涨落往往被建模成双态噪声^[28]. 这种做法固然能简化

* 国家自然科学基金青年基金 (批准号: 11501385) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: scuyutao@163.com

对模型的求解,但却将 Brown 粒子的质量限制在了两种状态上.事实上,真实粒子的质量往往存在 3 种状态:增加、减小或不变.如红细胞可将氧气输送至人体各部的原理是:在氧含量高的区域,红细胞易于加载氧分子;而在氧含量低的区域,红细胞更容易卸载氧分子.如果将一个红细胞及其携带的氧分子视作一个整体 (Brown 粒子),则在大多数时候,该粒子的质量变化微弱,不足以引起其运动行为的显著改变,此时可认为粒子的质量保持不变;但当人体行为模式发生较大变化时,如开始或结束剧烈运动,该粒子的质量也将随着大量氧分子的加载或卸载而显著增加或减少.为此,本文考虑将粒子质量涨落建模为三态噪声^[29–32].一方面,如上所述,三态噪声能更好地描述客观实际,使得相关研究工作具有更好的实际意义;另一方面,在极限条件下,三态噪声可演变为双态噪声或高斯白噪声,从而使得该研究具有较大理论价值^[33–35].

当 Brown 粒子处于黏弹性介质中时,其运动行为不仅与系统当前状态有关,还与系统的历史状态有关.因此,学者们提出将 Langevin 方程中的阻尼项由整数阶扩展为分数阶,利用分数阶微积分的记忆性来体现系统的历史状态对 Brown 粒子运动行为的影响^[20,36–39].分数阶阻尼项的表达式如下:

$$\gamma \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \gamma \int_0^t \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \dot{x}(u) du, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2)$$

式中, α 代表分数阶的阶数,积分核函数 $h_D(t) = t^{-\alpha} / [\Gamma(1-\alpha)]$ 表明该分数阶阻尼项服从幂律记忆性,这与自然界中大量具有记忆性的材料和过程的性质相符.因此,具有质量涨落的分数阶系统可表示为

$$(m + \xi(t)) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + m\omega^2 x(t) = A_0 \cos(\Omega t) + \eta^H(t), \quad (3)$$

式中, $\eta^H(t)$ 是依据涨落耗散定理确定的与分数阶阻尼项相关的内噪声.

事实上,在黏弹性介质中往往存在着大量相互关联的 Brown 粒子,其耦合作用能为系统带来丰富的动力学行为.已有工作将对 SR 的研究与耦合系统相结合,得到了大量有意义的结果^[20,40–44].如蔚涛等^[20]针对双态噪声激励下的耦合系统的 SR 现象进行了研究,发现粒子间的耦合作用对系统的共振行为有着显著影响.具体表现为,耦合作用不仅能影响系统共振强度的大小,还能影响系统共振

的类型 (单峰共振和双峰共振).

鉴于此,为了推广前述工作,本文对三态噪声激励下的分数阶耦合系统的 SR 现象进行了分析.需要说明的是,本文提及的 SR 现象是指 Berdichevsky 和 Gitterman^[14]提出的广义随机共振现象 (GSR),即系统输出的某些函数 (如矩、自相关函数和功率谱等) 随着系统参数发生非单调变化的现象.本文的结构安排如下.第 2 节给出系统模型,即三态噪声激励下的分数阶耦合系统,并解释了相关参数的含义.第 3 节利用 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换,得到了统计同步性及系统输出幅值增益的解析表达.第 4 节基于所得的解析表达,分析了耦合系数、系统阶数和噪声稳态转移概率对系统 GSR 现象的影响,并给出了合理解释.第 5 节通过数值仿真验证了上述结论的正确性.第 6 节是对全文得到的一系列结果的讨论与总结.

2 模型

为考察黏弹性介质中的耦合 Brown 运动,引入如下带质量涨落的分数阶耦合 Langevin 方程,用以刻画三态噪声激励下的分数阶耦合系统:

$$\begin{cases} (m + \xi_1) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \gamma \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} + m\omega^2 x_1 \\ = \varepsilon(x_2 - x_1) + A_0 \cos(\Omega t) + \eta_1^H(t), \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} (m + \xi_2) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \gamma \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} + m\omega^2 x_2 \\ = \varepsilon(x_1 - x_2) + A_0 \cos(\Omega t) + \eta_2^H(t), \end{cases} \quad (4b)$$

其中,下标 1,2 用于区分不同粒子.

将粒子的质量涨落建模为对称三态噪声 ξ_i ($i = 1, 2$),其幅值在 $-a, 0, a$ 中取值,其稳态概率为

$$P_s(-a) = P_s(a) = q, \quad P_s(0) = 1 - 2q, \quad (5)$$

其中, $0 < q \leq 1/2$. ξ_i ($i = 1, 2$) 满足如下统计特性:

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_i(s) \rangle = 2qa^2 e^{-\lambda|t-s|}, \quad (6)$$

其中, $\langle \cdot \rangle$ 表示取统计平均.噪声幅值 a 代表 Brown 粒子质量增加或减少的量,由于减少的量不能超过粒子本身的质量,且环境分子在不同 Brown 粒子上的吸附和脱离行为之间没有关系,故对于对称三态噪声,假设噪声幅值 $a < m$,并且 ξ_1 与 ξ_2 相互独立.

对于任意固定的时刻 t , $\eta_i^H(t)$ ($i = 1, 2$) 为零均值的随机变量,即 $\langle \eta_i^H(t) \rangle = 0$,且与 $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2$) 产生的机制完全无关,故其与 $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2$) 相互独

立. 因此, 在本文后续推导中, 所有包含 $\langle \eta_i^H(t) \rangle$ 的项均为 0, 表明该加性噪声对线性系统中的共振行为不产生任何影响, 故可将其略去不表, 以达到简

化演算过程的目的.

在该模型中, $x_i (i = 1, 2)$ 是 $\xi_j (j = 1, 2)$ 的泛函, 从而由 Shapiro-Loginov 定理^[45]可知:

$$\left\{ \begin{aligned} \left\langle \xi_j \frac{d^n x_i}{dt^n} \right\rangle &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \langle \xi_j x_i \rangle, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \\ \left\langle \xi_j^2 \frac{dx_i}{dt} \right\rangle &= \frac{d}{dt} \langle \xi_j^2 x_i \rangle + \lambda \langle \xi_j^2 x_i \rangle - 2qa^2 \lambda \langle x_i \rangle, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \\ \left\langle \xi_j^2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right\rangle &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi_j^2 x_i \rangle - 4qa^2 \lambda \frac{d}{dt} \langle x_i \rangle - 2qa^2 \lambda^2 \langle x_i \rangle, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \\ \left\langle \xi_1 \xi_2 \frac{dx_i}{dt} \right\rangle &= \left\langle \xi_1^2 \xi_2 \frac{dx_i}{dt} \right\rangle = \left\langle \xi_1 \xi_2^2 \frac{dx_i}{dt} \right\rangle = \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right) \langle \xi_1 \xi_2 x_i \rangle, \quad i = 1, 2, \\ \left\langle \xi_1 \xi_2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right\rangle &= \left\langle \xi_1^2 \xi_2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right\rangle = \left\langle \xi_1 \xi_2^2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right\rangle = \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1 \xi_2 x_i \rangle, \quad i = 1, 2, \\ \left\langle \xi_1^2 \xi_2^2 \frac{dx_i}{dt} \right\rangle &= \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right) \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_i \rangle - 8q^2 a^4 \lambda \langle x_i \rangle, \quad i = 1, 2, \\ \left\langle \xi_1^2 \xi_2^2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right\rangle &= \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_i \rangle - 16q^2 a^4 \lambda \frac{d}{dt} \langle x_i \rangle - 16q^2 a^4 \lambda^2 \langle x_i \rangle, \quad i = 1, 2, \\ \left\langle \xi_j \frac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha} \right\rangle &= e^{-\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_j x_i \rangle e^{\lambda t}), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \\ \left\langle \xi_j^2 \frac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha} \right\rangle &= e^{-\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [(\langle \xi_j^2 x_i \rangle - 2qa^2 \langle x_i \rangle) e^{\lambda t}] + 2qa^2 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \langle x_i \rangle, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \\ \left\langle \xi_1 \xi_2 \frac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha} \right\rangle &= e^{-2\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1 \xi_2 \rangle e^{2\lambda t}) = \left\langle \xi_1^2 \xi_2 \frac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha} \right\rangle = \left\langle \xi_1 \xi_2^2 \frac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha} \right\rangle, \quad i = 1, 2, \\ \left\langle \xi_1^2 \xi_2^2 \frac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha} \right\rangle &= e^{-2\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [(\langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_i \rangle - 4q^2 a^4 \langle x_i \rangle) e^{2\lambda t}] + 4q^2 a^4 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \langle x_i \rangle, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

(7) 式中的各公式在后续的理论推导中将发挥重要作用.

3 理论结果

3.1 同步性

接下来, 通过计算 $\langle x_1 - x_2 \rangle$ 来分析两个粒子运动轨迹间的统计同步性.

首先, 将方程 (1a) 和方程 (1b) 作差可得

$$\left(m \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} + m\omega^2 + 2\varepsilon \right) (x_1 - x_2) + \left(\xi_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \xi_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) = 0. \quad (8)$$

对方程 (8) 两端同时取平均并利用方程 (7) 可得

$$\left(m \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} + m\omega^2 + 2\varepsilon \right) \langle x_1 - x_2 \rangle + \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 \rangle = 0. \quad (9)$$

将方程 (8) 乘以 $\xi_1 + \xi_2$ 并取平均可得

$$\begin{aligned}
 & \left[m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 + m\omega^2 + 2\varepsilon \right] (\langle \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 \rangle + \langle \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2 \rangle) \\
 & + \gamma e^{-\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [(\langle \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 \rangle + \langle \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2 \rangle) e^{\lambda t}] + \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2 x_2 \rangle \\
 & + \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi_1^2 x_1 - \xi_2^2 x_2 \rangle - 4qa^2 \lambda \left(\frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{2} \right) \langle x_1 - x_2 \rangle = 0.
 \end{aligned} \quad (10)$$

将方程 (8) 乘以 $\xi_1 \xi_2$ 并取平均可得

$$\begin{aligned}
 & \left[m \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 + m\omega^2 + 2\varepsilon \right] \langle \xi_1 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2 x_2 \rangle + \gamma e^{-2\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [(\langle \xi_1 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2 x_2 \rangle) e^{2\lambda t}] \\
 & + \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2^2 x_2 \rangle = 0.
 \end{aligned} \quad (11)$$

将方程 (4a) 和方程 (4b) 分别乘以 ξ_1 与 ξ_2 后作差并取均值可得

$$\begin{aligned}
 & \left[m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 + m\omega^2 + \varepsilon \right] \langle \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 \rangle + \gamma e^{-\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 \rangle e^{\lambda t}) + \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi_1^2 x_1 - \xi_2^2 x_2 \rangle \\
 & - 4qa^2 \lambda \left(\frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{2} \right) \langle x_1 - x_2 \rangle + \varepsilon \langle \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2 \rangle = 0.
 \end{aligned} \quad (12)$$

将方程 (4a) 和方程 (4b) 分别乘以 ξ_1^2 与 ξ_2^2 后作差并取均值可得

$$\begin{aligned}
 & \left[m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 + m\omega^2 + \varepsilon \right] \langle \xi_1^2 x_1 - \xi_2^2 x_2 \rangle \\
 & + \gamma \left[e^{-\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1^2 x_1 - \xi_2^2 x_2 \rangle - 2qa^2 \langle x_1 - x_2 \rangle) e^{\lambda t} + 2qa^2 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \langle x_1 - x_2 \rangle \right] \\
 & + a^2 \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 \rangle - 4mqa^2 \lambda \left(\frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{2} \right) \langle x_1 - x_2 \rangle - \varepsilon \langle \xi_1^2 x_2 - \xi_2^2 x_1 \rangle = 0.
 \end{aligned} \quad (13)$$

将方程 (8) 乘以 $\xi_1^2 + \xi_2^2$ 后取均值可得

$$\begin{aligned}
 & \left[m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 + m\omega^2 + 2\varepsilon \right] (\langle \xi_1^2 x_1 - \xi_2^2 x_2 \rangle + \langle \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 x_2 \rangle) \\
 & + \gamma \left\{ e^{-\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [(\langle \xi_1^2 x_1 - \xi_2^2 x_2 \rangle + \langle \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 x_2 \rangle - 4qa^2 \langle x_1 - x_2 \rangle) e^{\lambda t}] + 4qa^2 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \langle x_1 - x_2 \rangle \right\} \\
 & - 8mqa^2 \lambda \left(\frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{2} \right) \langle x_1 - x_2 \rangle + a^2 \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 \rangle + \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2 x_2 \rangle = 0.
 \end{aligned} \quad (14)$$

将方程 (4a) 和方程 (4b) 分别乘以 $\xi_1^2 \xi_2$ 与 $\xi_1 \xi_2^2$ 后作差并取均值可得

$$\begin{aligned}
 & \left[m \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 + m\omega^2 + \varepsilon \right] \langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2^2 x_2 \rangle + \gamma e^{-2\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2^2 x_2 \rangle e^{2\lambda t}) \\
 & + a^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2 x_2 \rangle + \varepsilon \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2 x_2 \rangle = 0.
 \end{aligned} \quad (15)$$

将方程 (4a) 和方程 (4b) 分别乘以 $\xi_1 \xi_2^2$ 与 $\xi_1^2 \xi_2$ 后作差并取均值可得

$$\begin{aligned}
 & \left[m \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 + m\omega^2 + \varepsilon \right] \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2 x_2 \rangle + \gamma e^{-2\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2 x_2 \rangle e^{2\lambda t}) \\
 & + \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2^2 x_2 \rangle - 16q^2 a^4 \lambda \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \langle x_1 - x_2 \rangle + \varepsilon \langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2^2 x_2 \rangle = 0.
 \end{aligned} \quad (16)$$

将方程 (8) 乘以 $\xi_1^2 \xi_2^2$ 后取均值可得

$$\begin{aligned} & \left[m \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 + m\omega^2 + 2\varepsilon \right] \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2^2 x_2 \rangle - 16mq^2 a^4 \lambda \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \langle x_1 - x_2 \rangle \\ & + \gamma \left[e^{-2\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2^2 x_2 \rangle - 4q^2 a^4 \langle x_1 - x_2 \rangle) e^{2\lambda t} + 4q^2 a^4 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \langle x_1 - x_2 \rangle \right] \\ & + a^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2 x_2 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

综上, 得到了一个包含以下 9 个变量的封闭线性方程组 (方程 (9)—方程 (17)):

$$\begin{cases} z_1 = \langle x_1 - x_2 \rangle, & z_2 = \langle \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 \rangle, & z_3 = \langle \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2 \rangle, \\ z_4 = \langle \xi_1 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2 x_2 \rangle, & z_5 = \langle \xi_1^2 x_1 - \xi_2^2 x_2 \rangle, & z_6 = \langle \xi_1^2 x_2 - \xi_2^2 x_1 \rangle, \\ z_7 = \langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2^2 x_2 \rangle, & z_8 = \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2 x_2 \rangle, & z_9 = \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2^2 x_2 \rangle. \end{cases} \quad (18)$$

根据常微分方程中的 Picard 存在唯一性定理, 该封闭线性方程组有唯一解. 经过长时间演化之后, 初值的影响将逐渐消失. 因而, 不失一般性, 本文假设系统具有零初始条件. 进而, 作 Laplace 变换后可得

$$\begin{cases} b_{11}Z_1 + b_{12}Z_2 = 0, & b_{21}Z_1 + b_{22}Z_2 + b_{23}Z_3 + b_{24}Z_4 + b_{25}Z_5 = 0, & b_{34}Z_4 + b_{37}Z_7 = 0, \\ b_{41}Z_1 + b_{42}Z_2 + b_{43}Z_3 + b_{45}Z_5 = 0, & b_{51}Z_1 + b_{52}Z_2 + b_{55}Z_5 + b_{56}Z_6 = 0, \\ b_{61}Z_1 + b_{62}Z_2 + b_{65}Z_5 + b_{66}Z_6 + b_{68}Z_8 = 0, & b_{74}Z_4 + b_{77}Z_7 + b_{78}Z_8 = 0, \\ b_{81}Z_1 + b_{87}Z_7 + b_{88}Z_8 + b_{89}Z_9 = 0, & b_{91}Z_1 + b_{98}Z_8 + b_{99}Z_9 = 0, \end{cases} \quad (19)$$

其中, $Z_i(s) = L(z_i) = \int_0^\infty z_i(t)e^{-st}dt$, $i = 1, 2, 3, \dots, 9$.

$$\begin{cases} b_{11} = ms^2 + \gamma s^\alpha + m\omega^2 + 2\varepsilon, & b_{12} = (s + \lambda)^2, \\ b_{21} = -4qa^2\lambda(s + \frac{\lambda}{2}), & b_{22} = m(s + \lambda)^2 + \gamma(s + \lambda)^\alpha + m\omega^2 + 2\varepsilon, \\ b_{23} = b_{22}, & b_{24} = (s + 2\lambda)^2, & b_{25} = b_{12}, \\ b_{34} = m(s + 2\lambda)^2 + \gamma(s + 2\lambda)^\alpha + m\omega^2 + 2\varepsilon, & b_{37} = b_{24}, \\ b_{41} = b_{21}, & b_{42} = m(s + \lambda)^2 + \gamma(s + \lambda)^\alpha + m\omega^2 + \varepsilon, & b_{43} = \varepsilon, & b_{45} = b_{12}, \\ b_{51} = -4mq a^2\lambda(s + \frac{\lambda}{2}) - 2qa^2\gamma(s + \lambda)^\alpha + 2qa^2\gamma s^\alpha, \\ b_{52} = a^2(s + \lambda)^2, & b_{55} = b_{42}, & b_{56} = -\varepsilon, \\ b_{61} = 2b_{51}, & b_{62} = b_{52}, & b_{65} = b_{66} = b_{22}, & b_{68} = b_{24}, \\ b_{74} = a^2(s + 2\lambda)^2, & b_{77} = m(s + 2\lambda)^2 + \gamma(s + 2\lambda)^\alpha + m\omega^2 + \varepsilon, & b_{78} = b_{43}, \\ b_{81} = -16q^2 a^4\lambda(s + \lambda), & b_{87} = b_{43}, & b_{88} = b_{77}, & b_{89} = b_{24}, \\ b_{91} = -16mq^2 a^4\lambda(s + \lambda) - 4q^2 a^4\gamma(s + 2\lambda)^\alpha + 4q^2 a^4\gamma s^\alpha, & b_{98} = b_{74}, & b_{99} = b_{34}. \end{cases} \quad (20)$$

求解方程组 (19), 可得 $Z_i(s) (i = 1, 2, 3, \dots, 9)$ 的值为

$$Z_i(s) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 9. \quad (21)$$

对 (21) 式作 Laplace 逆变换可得相应的时域解如下:

$$\begin{cases} \langle x_1 - x_2 \rangle = 0, & \langle \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 \rangle = 0, & \langle \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2 \rangle = 0, \\ \langle \xi_1 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2 x_2 \rangle = 0, & \langle \xi_1^2 x_1 - \xi_2^2 x_2 \rangle = 0, & \langle \xi_1^2 x_2 - \xi_2^2 x_1 \rangle = 0, \\ \langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 - \xi_1 \xi_2^2 x_2 \rangle = 0, & \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2 x_2 \rangle = 0, & \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_1 - \xi_1^2 \xi_2^2 x_2 \rangle = 0. \end{cases} \quad (22)$$

解 (22) 可进一步等价表示为

$$\begin{cases} \langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle, & \langle \xi_1 x_1 \rangle = \langle \xi_2 x_2 \rangle, & \langle \xi_2 x_1 \rangle = \langle \xi_1 x_2 \rangle, \\ \langle \xi_1 \xi_2 x_1 \rangle = \langle \xi_1 \xi_2 x_2 \rangle, & \langle \xi_1^2 x_1 \rangle = \langle \xi_2^2 x_2 \rangle, & \langle \xi_1^2 x_2 \rangle = \langle \xi_2^2 x_1 \rangle, \\ \langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 \rangle = \langle \xi_1 \xi_2^2 x_2 \rangle, & \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 \rangle = \langle \xi_1^2 \xi_2 x_2 \rangle, & \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_1 \rangle = \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_2 \rangle. \end{cases} \quad (23)$$

从 (23) 式可以看出: 两个粒子的行为在统计意义上是完全同步的. 这表明本文的系统也同样满足蔚涛等^[26]提出的“统计同步性”, 也即, 系统的平均场行为与单粒子行为具有统计一致性. 在本文的后续工作中, 即通过研究单粒子行为来研究系统的平均场行为.

3.2 输出幅值增益

本节利用 3.1 节所得结果推导一阶矩 $\langle x_i \rangle$ 及系统输出幅值增益 G 的表达式.

对方程 (4a) 取平均并利用 (7) 式可得

$$\left(m \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} + m\omega^2 \right) \langle x_1 \rangle + \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi_1 x_1 \rangle = A_0 \cos(\Omega t). \quad (24)$$

将方程 (4a) 乘以 ξ_1 后取平均并利用 (7) 式可得

$$\begin{aligned} & \left[m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 + m\omega^2 + \varepsilon \right] \langle \xi_1 x_1 \rangle + \gamma e^{-\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1 x_1 \rangle e^{\lambda t}) \\ & + \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi_1^2 x_1 \rangle - 4qa^2 \lambda \left(\frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{2} \right) \langle x_1 \rangle + \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi_1^2 x_1 \rangle - \varepsilon \langle \xi_2 x_1 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

将方程 (4a) 乘以 ξ_2 后取平均并利用 (7) 式可得

$$\left[m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 + m\omega^2 + \varepsilon \right] \langle \xi_2 x_1 \rangle + \gamma e^{-\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_2 x_1 \rangle e^{\lambda t}) - \varepsilon \langle \xi_1 x_1 \rangle + \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1 \xi_2 x_1 \rangle = 0. \quad (26)$$

将方程 (4a) 乘以 $\xi_1 \xi_2$ 后取平均并利用 (7) 式可得

$$\left[m \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 + m\omega^2 \right] \langle \xi_1 \xi_2 x_1 \rangle + \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 \rangle + \gamma e^{-2\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1 \xi_2 x_1 \rangle e^{2\lambda t}) = 0. \quad (27)$$

将方程 (4a) 乘以 ξ_1^2 后取平均并利用 (7) 式可得

$$\begin{aligned} & \left[m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 + m\omega^2 + \varepsilon \right] \langle \xi_1^2 x_1 \rangle - 4mq a^2 \lambda \left(\frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{2} \right) \langle x_1 \rangle + \gamma \left[e^{-\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1^2 x_1 \rangle e^{\lambda t}) \right. \\ & \left. - 2qa^2 \langle x_1 \rangle e^{\lambda t} + 2qa^2 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \langle x_1 \rangle \right] + a^2 \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi_1 x_1 \rangle - \varepsilon \langle \xi_2^2 x_1 \rangle = 2qa^2 A_0 \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (28)$$

将方程 (4a) 乘以 ξ_2^2 后取平均并利用 (7) 式可得

$$\begin{aligned} & \left[m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 + m\omega^2 + \varepsilon \right] \langle \xi_2^2 x_1 \rangle - 4mq a^2 \lambda \left(\frac{d}{dt} + \frac{\lambda}{2} \right) \langle x_1 \rangle + \gamma \left[e^{-\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_2^2 x_1 \rangle e^{\lambda t}) \right. \\ & \left. - 2qa^2 \langle x_1 \rangle e^{\lambda t} + 2qa^2 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \langle x_1 \rangle \right] + \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 \rangle - \varepsilon \langle \xi_1^2 x_1 \rangle = 2qa^2 A_0 \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (29)$$

将方程 (4a) 乘以 $\xi_1^2 \xi_2$ 后取平均并利用 (7) 式可得

$$\left[m \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 + m\omega^2 + \varepsilon \right] \langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 \rangle + \gamma e^{-2\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 \rangle e^{2\lambda t}) + a^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1 \xi_2 x_1 \rangle - \varepsilon \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 \rangle = 0. \quad (30)$$

将方程 (4a) 乘以 $\xi_1 \xi_2^2$ 后取平均并利用 (7) 式可得

$$\begin{aligned} & \left[m \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 + m\omega^2 + \varepsilon \right] \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 \rangle + \gamma e^{-2\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 \rangle e^{2\lambda t}) \\ & + \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_1 \rangle - \varepsilon \langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 \rangle - 16q^2 a^4 \lambda \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \langle x_1 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

将方程 (4a) 乘以 $\xi_1^2 \xi_2^2$ 后取平均并利用 (7) 式可得

$$\begin{aligned} & \left[m \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 + m\omega^2 \right] \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_1 \rangle + a^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right)^2 \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 \rangle - 16q^2 a^4 m \lambda \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \langle x_1 \rangle \\ & + \gamma \left[e^{-2\lambda t} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (\langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_1 \rangle - 4q^2 a^4 \langle x_1 \rangle) e^{2\lambda t} + 4q^2 a^4 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \langle x_1 \rangle \right] = 4q^2 a^4 A_0 \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (32)$$

综上, 得到了一个包含以下 9 个变量的封闭线性方程组 (方程 (24)—方程 (32)):

$$\begin{cases} y_1 = \langle x_1 \rangle, & y_2 = \langle \xi_1 x_1 \rangle, & y_3 = \langle \xi_2 x_1 \rangle, & y_4 = \langle \xi_1 \xi_2 x_1 \rangle, & y_5 = \langle \xi_1^2 x_1 \rangle, \\ y_6 = \langle \xi_2^2 x_1 \rangle, & y_7 = \langle \xi_1^2 \xi_2 x_1 \rangle, & y_8 = \langle \xi_1 \xi_2^2 x_1 \rangle, & y_9 = \langle \xi_1^2 \xi_2^2 x_1 \rangle. \end{cases} \quad (33)$$

对封闭方程组 (33) 作 Laplace 变换可得

$$\begin{cases} c_{11} Y_1 + c_{12} Y_2 = A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, & c_{21} Y_1 + c_{22} Y_2 + c_{23} Y_3 + c_{25} Y_5 = 0, \\ c_{32} Y_2 + c_{33} Y_3 + c_{34} Y_4 = 0, & c_{44} Y_4 + c_{47} Y_7 = 0, \\ c_{51} Y_1 + c_{52} Y_2 + c_{55} Y_5 + c_{56} Y_6 = 2qa^2 A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, \\ c_{61} Y_1 + c_{65} Y_5 + c_{66} Y_6 + c_{68} Y_8 = 2qa^2 A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, \\ c_{74} Y_4 + c_{77} Y_7 + c_{78} Y_8 = 0, \\ c_{81} Y_1 + c_{87} Y_7 + c_{88} Y_8 + c_{89} Y_9 = 0, \\ c_{91} Y_1 + c_{98} Y_8 + c_{99} Y_9 = 4q^2 a^4 A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, \end{cases} \quad (34)$$

其中, $Y_i(s) = L(y_i) = \int_0^\infty y_i(t) e^{-st} dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 9.$

$$c_{11} = ms^2 + \gamma s^\alpha + m\omega^2, \quad c_{12} = (s + \lambda)^2,$$

$$c_{21} = -4qa^2 \lambda \left(s + \frac{\lambda}{2} \right), \quad c_{22} = m(s + \lambda)^2 + \gamma(s + \lambda)^\alpha + m\omega^2 + \varepsilon, \quad c_{23} = -\varepsilon, \quad c_{25} = c_{12},$$

$$c_{32} = c_{23}, \quad c_{33} = c_{22}, \quad c_{34} = (s + 2\lambda)^2,$$

$$c_{44} = m(s + 2\lambda)^2 + \gamma(s + 2\lambda)^\alpha + m\omega^2, \quad c_{47} = c_{34},$$

$$c_{51} = -4mq a^2 \lambda \left(s + \frac{\lambda}{2} \right) - 2qa^2 \gamma(s + \lambda)^\alpha + 2qa^2 \gamma s^\alpha, \quad c_{52} = a^2(s + \lambda)^2, \quad c_{55} = c_{22}, \quad c_{56} = c_{23},$$

$$c_{61} = c_{51}, \quad c_{65} = c_{23}, \quad c_{66} = c_{22}, \quad c_{68} = c_{34},$$

$$c_{74} = a^2(s + 2\lambda)^2, \quad c_{77} = m(s + 2\lambda)^2 + \gamma(s + 2\lambda)^\alpha + m\omega^2 + \varepsilon, \quad c_{78} = c_{23},$$

$$c_{81} = -16q^2 a^4 \lambda(s + \lambda), \quad c_{87} = c_{23}, \quad c_{88} = c_{77}, \quad c_{89} = c_{34},$$

$$c_{91} = -16mq^2 a^4 \lambda(s + \lambda) - 4q^2 a^4 \gamma(s + 2\lambda)^\alpha + 4q^2 a^4 \gamma s^\alpha, \quad c_{98} = c_{74}, \quad c_{99} = c_{44}.$$

求解方程组 (34) 可得 $Y_i(s) (i = 1, 2, 3, \dots, 9)$ 的解析表达式. 特别地,

$$Y_1(s) = H_1(s) A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, \quad (35)$$

其中,

$$H_1(s) = \frac{g(s)}{f(s)},$$

$$g(s) = (-2qa^2c_{12}^2c_{22}^2 + 2qa^2c_{12}^2c_{22}c_{23} + c_{12}c_{22}^2c_{52} - c_{22}^4 + 2c_{22}^2c_{23}^2 - c_{23}^4)(c_{23}^2c_{44}^2 - c_{34}^2c_{74}^2 + 2c_{34}c_{44}c_{74}c_{77} - c_{44}^2c_{77}^2) + 4q^2a^4c_{12}c_{23}c_{34}^2(c_{12}c_{22}c_{34}c_{74} - c_{12}c_{22}c_{44}c_{77} + c_{22}^2c_{23}c_{34} - c_{23}^3c_{34}),$$

$$f(s) = (c_{11}c_{12}c_{22}^2c_{52} - c_{11}c_{22}^4 + 2c_{11}c_{22}^2c_{23}^2 - c_{11}c_{23}^4 - c_{12}^2c_{22}^2c_{51} + c_{12}^2c_{22}c_{23}c_{51} + c_{12}c_{21}c_{22}^3 - c_{12}c_{21}c_{22}c_{23}^2) \times (c_{23}^2c_{44}^2 - c_{34}^2c_{74}^2 + 2c_{34}c_{44}c_{74}c_{77} - c_{44}^2c_{77}^2) + c_{12}^2c_{22}c_{23}c_{34}(c_{34}^2c_{74}c_{91} - c_{34}c_{44}c_{74}c_{81} - c_{34}c_{44}c_{77}c_{91} + c_{44}^2c_{77}c_{81}) + c_{12}c_{23}^2c_{34}^2(c_{22}^2c_{34}c_{91} - c_{22}^2c_{44}c_{81} - c_{23}^2c_{34}c_{91} + c_{23}^2c_{44}c_{81}). \quad (36)$$

对 (35) 式作 Laplace 逆变换可得 $\langle x_1 \rangle$ 的解析表达式如下:

$$\langle x_1 \rangle = A_0 \int_0^t h_1(t - \tau) \cos(\Omega\tau) d\tau, \quad (37)$$

其中, $h_1(t)$ 是 $H_1(s)$ 作 Laplace 逆变换的结果.

另一方面, 也可通过线性时不变系统的响应理论对 $\langle x_1 \rangle$ 进行求解. 方程组 (34) 可看作一个线性时不变系统, 因而, 其输出应该是与输入信号同频的余弦信号, 仅在幅值和相位上有所差别. 据此, $\langle x_1 \rangle$ 可表示为

$$\langle x_1 \rangle = A \cos(\Omega t + \phi), \quad (38)$$

其中 A 和 ϕ 分别代表 $\langle x_1 \rangle$ 的幅值和相位, 和 (35) 式对比可得

$$A = A_0 |H_1(j\Omega)|, \quad \phi = \arg[H_1(j\Omega)], \quad (39)$$

其中, j 代表虚数单位, 满足 $j^2 = -1$. 最终, 根据输出幅值增益的定义可得

$$G = \frac{A}{A_0} = |H_1(j\Omega)|, \quad (40)$$

其中, $H_1(s)$ 的具体表达式见 (36) 式.

特别地, 当 $q = 0.5$ 时, 三态噪声将退化为双态噪声. 在这种情况下, (33) 式和 (34) 式中的变量将满足以下关系:

$$y_5 = y_6 = a^2 y_1, \quad y_7 = a^2 y_3,$$

$$y_8 = a^2 y_2, \quad y_9 = a^4 y_1,$$

$$c_{21} = -a^2 \lambda (2s + \lambda),$$

$$c_{51} = -a^2 \lambda (2ms + m\lambda - \gamma),$$

$$c_{81} = -4a^4 \lambda (s + \lambda),$$

$$c_{91} = -a^4 \lambda (4ms + 4m\lambda - 2\gamma). \quad (41)$$

将 (41) 式中的关系式代入方程组 (34) 的前 4 个方程中容易发现, 方程组 (34) 将退化为蔚涛

等 [27] 已发表论文中的方程组. 因而, 当 $q = 0.5$ 时, 本文的研究结果可涵盖蔚涛等 [27] 之前的研究结果.

4 系统输出幅值增益的 GSR 现象

本节将利用 (40) 式对系统输出幅值增益的 GSR 现象进行讨论, 以分析参数对该现象的影响.

4.1 系统输出幅值增益随噪声稳态转移概率 q 变化的 GSR

图 1 为随 q 变化的 GSR 在 α - ε 平面的相图, 反映了 GSR 现象出现与否的参数范围. 在本文的相图中, 不同的灰度代表系统处于不同的共振状态, 具体地说:

- 1) 黑色区域 (i) 代表系统输出幅值增益未出现 GSR 现象;
- 2) 灰色区域 (ii) 代表系统输出幅值增益出现单峰共振现象;
- 3) 白色区域 (iii) 代表系统输出幅值增益出现双峰共振现象.

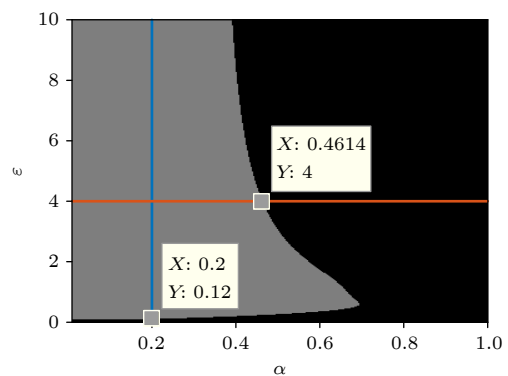


图 1 随 q 变化的 GSR 在 α - ε 平面的相图, 其中 $m = 1$, $\gamma = 0.1$, $\omega = 1$, $\Omega = 1.4$, $\lambda = 0.1$, $a = 0.7$

Fig. 1. Phase diagram for GSR versus q in the α - ε plane, with $m = 1$, $\gamma = 0.1$, $\omega = 1$, $\Omega = 1.4$, $\lambda = 0.1$, $a = 0.7$.

如图 1 所示, 在这一组参数设定下, 耦合系数和系统阶数均对系统输出幅值增益的共振现象有显著影响. 当系统阶数较小时, 系统输出幅值增益出现了单峰共振现象. 而当系统阶数较大时, 系统输出幅值增益没能出现共振现象. 与之相反, 当耦合系数较小时, 系统输出幅值增益没能出现共振现象. 当耦合系数足够大时, 系统输出幅值增益出现了单峰共振现象. 为了解释上述现象, 不失一般性, 在分别选择 $\varepsilon = 4$ 和 $\alpha = 0.2$ 的条件下, 进一步分析了耦合系数和系统阶数对系统 GSR 现象的影响, 结果如图 2 所示.

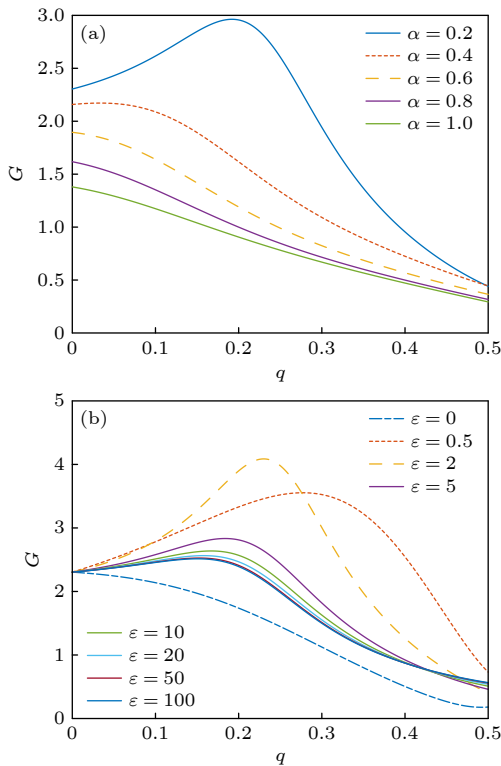


图 2 系统输出幅值增益随噪声稳态转移概率 q 变化的 GSR 现象, 其中 $m = 1, \gamma = 0.1, \omega = 1, \Omega = 1.4, \lambda = 0.1, a = 0.7$ (a) $\varepsilon = 4$; (b) $\alpha = 0.2$
 Fig. 2. The OAG versus q with $m = 1, \gamma = 0.1, \omega = 1, \Omega = 1.4, \lambda = 0.1, a = 0.7$: (a) $\varepsilon = 4$; (b) $\alpha = 0.2$.

图 2(a) 给出了系统输出幅值增益在不同系统阶数的条件下, 随着三态噪声稳态转移概率变化而发生的变化情况. 可以看出, 当系统阶数由 0.2 增大到 0.4 时, 系统 GSR 现象随之减弱. 当系统阶数由 0.4 进一步增大到 1 时, 系统 GSR 现象逐渐消失. 该现象与图 1 反映的结果一致. 为了解释这个现象, 本文分析了分数阶阻尼项的频率特征, 结果如图 3^[27] 所示. 可以看出, 随着系统阶数的增加,

输出信号中的高频成分能量增强, 低频成分能量相应减弱. 根据绝热近似原理, 低频信号较高频信号更容易达到 SR 现象产生的条件.

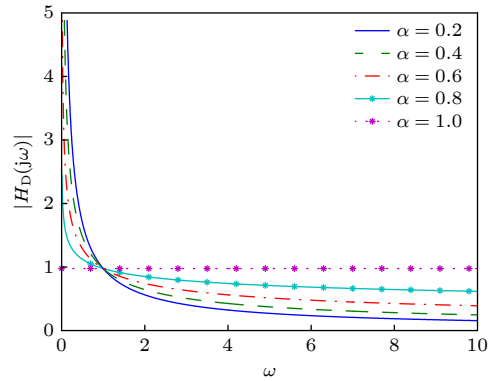


图 3 分数阶阻尼项的频率特征
 Fig. 3. Frequency characteristics of the fractional damping term.

图 2(b) 给出了系统输出幅值增益在不同耦合系数的条件下, 随着三态噪声稳态转移概率变化而发生的变化情况. 能够发现, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统退化为非耦合系统, 系统输出幅值增益没能产生 GSR 现象. 随着耦合系数的增大, 系统输出幅值增益开始出现广义共振现象. 具体地说, 当耦合系数由 0.5 增大到 2 时, 系统的共振现象随之增强. 当耦合系数进一步由 2 逐渐增大到 100 时, 系统的共振现象逐渐减弱, 直至收敛. 这是因为粒子间适当的耦合作用能够为系统提供产生共振现象所需的非线性条件. 当耦合作用过大时, 两个粒子将被强大的耦合力连接成一个刚性的整体, 从而使系统的非线性减弱, 进而减弱系统的共振现象.

从图 2 还可以看出, 系统输出幅值增益的共振峰均出现在 q 小于 0.5 时, 并在 q 等于 0.5 时取得最小值. 由于三态噪声将在 q 等于 0.5 时退化为双态噪声, 上述结果说明了在这一组参数条件下, 三态噪声与双态噪声相比, 能为系统输出创造更高的增益.

4.2 系统输出幅值增益随耦合系数 ε 变化的 GSR

从图 4 可以看出, 噪声稳态转移概率和系统阶数均对系统输出幅值增益随耦合系数变化的 GSR 行为有着显著的影响, 即随着 q 的增大, 系统将由双峰共振演变为单峰共振. 并且, 当噪声稳态转移概率较大时, 随着系统阶数的增大, 系统也将

由双峰共振演变为单峰共振. 不失一般性, 在分别选择 $q = 0.3$ 和 $\alpha = 0.1$ 的条件下, 进一步分析了系统阶数和噪声稳态转移概率对系统 GSR 现象的影响, 结果如图 5 所示.

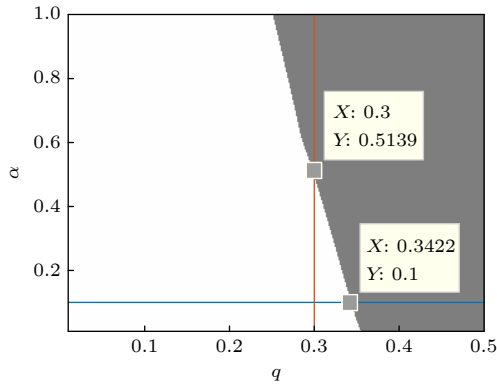


图 4 随 ε 变化的 GSR 现象在 q - α 平面的相图, 其中 $m = 1, \gamma = 0.1, \omega = 1, \Omega = 1.6, \lambda = 0.1, a = 0.4$
 Fig. 4. Phase diagram for GSR versus ε in the q - α plane, with $m = 1, \gamma = 0.1, \omega = 1, \Omega = 1.6, \lambda = 0.1, a = 0.4$.

图 5(a) 给出了系统输出幅值增益在不同系统阶数的条件下, 随耦合系数的变化情况. 不难发现, 当系统阶数取值为 0.2 时, 系统输出幅值增益随耦合系数的变化产生双峰共振. 随着系统阶数的增大, 系统输出幅值增益逐渐由双峰共振演变为单峰共振, 且共振峰逐渐降低. 特别地, 当系统阶数取值为 1, 即系统退化为整数阶系统时, 其输出幅值增益的峰值最小, 该现象说明分数阶系统能比传统整数阶系统得到更大的输出幅值增益.

图 5(b) 给出了系统输出幅值增益在不同噪声稳态转移概率的条件下, 随耦合系数变化而变化的情况. 可以看出, 当噪声稳态转移概率取值为 0 时, 系统输出幅值增益没能产生广义共振现象. 原因是此时三态噪声退化为常数, 随机系统也相应地退化为确定性系统. 粒子 x_1 和 x_2 的运动行为完全一致, 致使系统中的耦合项 $\varepsilon(x_1 - x_2)$ 和 $\varepsilon(x_2 - x_1)$ 消失, 进而消除了系统产生共振现象所必须的非线性条件. 当噪声稳态转移概率取值为 0.25 时, 系统输

出幅值增益出现双峰共振. 当噪声稳态转移概率进一步增大到 0.5, 即三态噪声退化为双态噪声时, 系统输出幅值增益出现单峰共振, 且共振峰的高度明显提高. 该结果表明, 在这一组参数条件下, 双态噪声能使系统输出幅值获得较三态噪声激励时更大的增益.

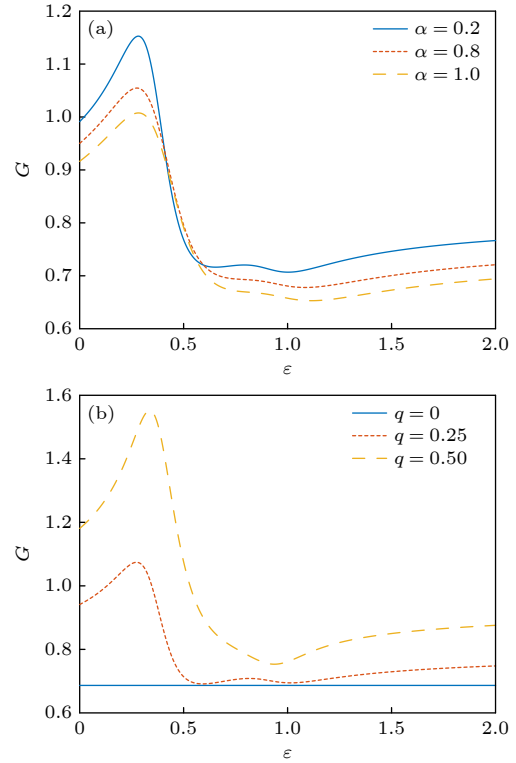


图 5 系统输出幅值增益随耦合系数 ε 变化的 GSR 现象, 其中 $m = 1, \gamma = 0.1, \omega = 1, \Omega = 1.6, \lambda = 0.1, a = 0.4$
 (a) $q = 0.3$; (b) $\alpha = 0.1$
 Fig. 5. The OAG versus ε with $m = 1, \gamma = 0.1, \omega = 1, \Omega = 1.6, \lambda = 0.1, a = 0.4$: (a) $q = 0.3$; (b) $\alpha = 0.1$.

5 数值仿真验证

为验证理论结果的正确性, 下面通过数值仿真模拟模型 (2) 式所刻画的振子运动. 对于充分小的仿真时间间隔 Δt , 该模型在离散时间下的一阶近似表达式为

$$\begin{cases} x_i(t_n) = y_i(t_{n-1}) \Delta t^\alpha - \text{memo}(x_i, \alpha), \\ y_i(t_n) = \frac{\left[-\gamma y_i(t_{n-1}) - m\omega^2 x_i(t_{n-1}) + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^2 x_k(t_{n-1}) - 2x_i(t_{n-1}) \right) + A_0 \cos(\Omega t_{n-1}) \right] \Delta t^{2-\alpha}}{m + \xi_i(t_n)} - \text{memo}(y_i, 2 - \alpha), \end{cases} \quad (42)$$

其中,

$$\begin{cases} \text{memo}(x_i, \alpha) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_i(t_{n-k}), \\ \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}. \end{cases} \quad (43)$$

在给定系统参数条件下, 取仿真时长 $t = 300$, 采样间隔 $\Delta t = 10^{-2}$, 可得系统输出信号时域图和频域图如图 6 所示.

图 6(a) 为系统输出信号时域图, 可以看出, 受噪声的影响, 系统输出具有较大的随机性. 此时, 从时域图上已经无法判断出是否有正弦响应信号存在. 因此, 通过对时域输出信号进行傅里叶变换, 得到了与之对应的频域输出信号, 如图 6(b) 所示. 从图 6(b) 可清楚地看到, 系统输出在外部驱动频率 ($\Omega = 0.4\pi$) 处出现了明显的尖峰, 表明系统输出响应中含有与外部驱动信号 ($A_0 \cos(\Omega t)$) 同频的正弦信号. 其峰值 (2.149) 代表系统对外部驱动

信号的响应幅值, 噪声的存在使得该响应幅值与其真值之间存在随机偏差. 为此, 下面采用 Monte-Carlo 方法来消除该随机偏差.

在图 6 的参数条件下, 重复进行 N 次仿真实验, 取 N 次结果的平均值作为系统稳态响应振幅的仿真值, 以 (40) 式确定的理论结果为参考值, 可得仿真误差随仿真次数的变化, 如图 7 所示.

图 7(a) 为仿真与理论结果对比图. 可以看出, 仿真结果始终在理论结果的附近随机波动, 表明仿真结果与理论结果之前确实存在随机偏差. 随着仿真次数 N 的增加, 随机波动的幅度逐渐减小. 为更加清楚地反映该随机偏差的收敛情况, 进一步给出了相应的绝对随机偏差随仿真次数 N 的变化图 (图 7(b)). 图 7(b) 表明, 随着仿真次数 N 的增加, 噪声带来的随机偏差将逐渐收敛. 特别地, 若以 $\delta_0 = 10^{-3}$ 为可接受的偏差门限, 则当 $N \geq 2881$ 时, 即可满足该门限需求. 一般地, 噪声强度越大或者偏差门限越小, 则所需的仿真次数 N 越大.

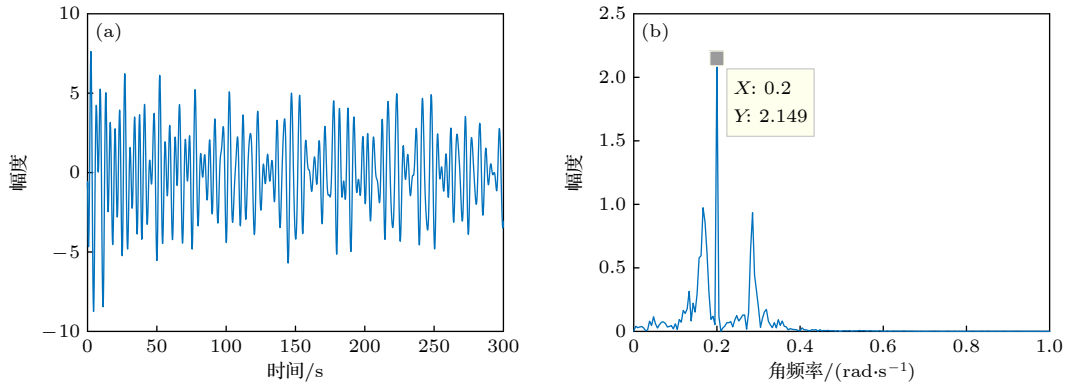


图 6 系统输出信号 (a) 时域图; (b) 频域图. $m=1, \gamma=0.1, \alpha=0.5, \varepsilon=1, \omega=1, \Omega=0.4\pi, a=0.2, \lambda=0.1, q=0.3$

Fig. 6. System output signal: (a) Time domain diagram; (b) frequency domain diagram. $m = 1, \gamma = 0.1, \alpha = 0.5, \varepsilon = 1, \omega = 1, \Omega = 0.4\pi, a = 0.2, \lambda = 0.1, q = 0.3$.

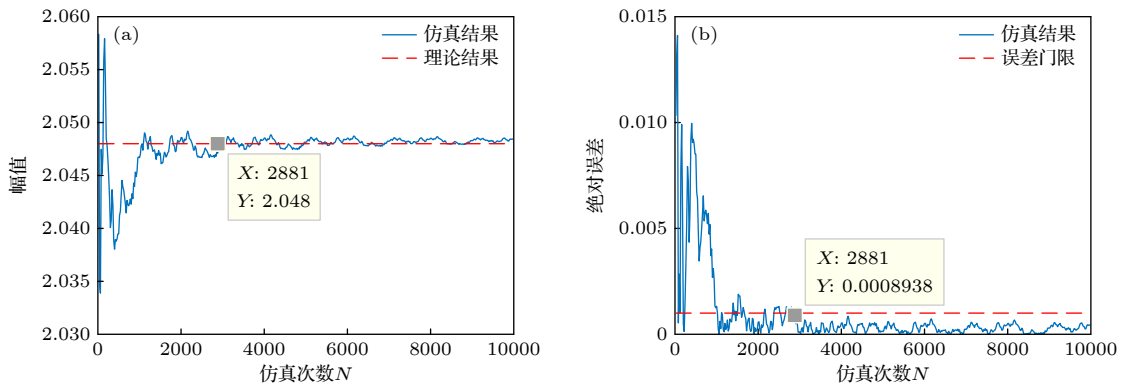


图 7 仿真误差图 (a) 仿真与理论对比图; (b) 仿真误差与仿真次数关系图

Fig. 7. Simulation error graph: (a) Comparison between simulation and theory; (b) relationship between simulation error and simulation times.

6 结 论

本文研究了三态噪声激励下的分数阶耦合系统的 GSR 现象. 通过对模型进行一系列理论推导, 发现了粒子间的统计同步性, 并进一步得到了系统输出幅值增益的解析表达. 为了体现本文提出的模型是对前人工作的延续和推广, 针对模型涉及的关键要素, 即耦合系统、分数阶系统和三态噪声, 重点分析了耦合系数、系统阶数和噪声稳态转移概率对系统输出幅值增益的 GSR 现象的影响. 具体结论如下: 1) 耦合系数对 GSR 现象的影响. 随着耦合系数的增大, GSR 现象先增强后减弱, 直至收敛. 该现象表明适当的耦合作用能够促进系统共振现象的产生. 其原因是适当的耦合作用增强了系统产生 GSR 所需的非线性条件. 当耦合作用过大时, 两个粒子将被强大的耦合力连接成一个刚性的整体, 从而使系统的非线性减弱, 进而减弱系统的共振现象. 2) 系统阶数对 GSR 现象的影响. 随着系统阶数的增大, GSR 现象将逐渐减弱. 从分数阶阻尼项的频率特征可以看出, 随着系统阶数的增加, 输出信号中的高频成分能量增强, 低频成分能量相应减弱. 根据绝热近似原理, 低频信号较高频信号更容易达到 SR 现象产生的条件. 特别地, 当系统阶数取值为 1, 即系统退化为整数阶系统时, 其输出幅值增益的峰值最小, 该现象说明分数阶系统能比传统整数阶系统得到更大的输出幅值增益. 此外, 不同的系统阶数还能诱导系统出现不同类型的 GSR, 即单峰共振和双峰共振. 3) 噪声稳态转移概率对 GSR 现象的影响. 噪声稳态转移概率对系统输出幅值增益的影响会随着与之相关的其他参数的变化而变化. 在一定参数条件下, 三态噪声不仅能够使系统输出幅值获得比双态噪声激励时更大的增益, 还能改变系统的共振类型. 综上所述, 耦合系数、系统阶数和噪声稳态转移概率均对系统输出幅值增益的 GSR 现象有显著影响, 体现了对三态噪声激励下的分数阶耦合系统的动力学行为进行理论研究的重要意义.

参考文献

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
 [2] Wiesenfeld K, Moss F 1995 *Nature* **373** 33
 [3] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223

[4] Hänggi P 2002 *Chem. Phys. Chem.* **3** 285
 [5] Zhang W, Xiang B R 2006 *Talanta* **70** 267
 [6] Chen H, Varshney P K, Kay S M, Michels J H 2007 *IEEE Trans. Signal Process.* **55** 3172
 [7] Soika E, Mankin R, Ainsaar A 2010 *Phys. Rev. E* **81** 011141
 [8] Gang H, Ditzinger T, Ning C Z, Haken H 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 807
 [9] Pikovsky A, Zaikin A, Ma D L C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 050601
 [10] Tessone C J, Mirasso C R, Toral R, Gunton J D 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 194101
 [11] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Wu Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 30 (in Chinese) [冷永刚, 王太勇, 郭焱, 吴振勇 2007 物理学报 **56** 30]
 [12] Lin M, Huang Y M, Fang L M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2041 (in Chinese) [林敏, 黄咏梅, 方利民 2008 物理学报 **57** 2041]
 [13] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张莉, 刘立, 曹力 2010 物理学报 **59** 1494]
 [14] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
 [15] Yu T, Zhang L, Luo M K 2013 *Phys. Scr.* **88** 045008
 [16] Zhong S C, Ma H, Peng H, Zhang L 2015 *Nonlinear Dyn.* **82** 535
 [17] Yang B, Zhang X, Zhang L 2016 *Phys. Rev. E* **94** 022119
 [18] Lin L F, Yu L, Wang H Q 2017 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **43** 171
 [19] Zhang L, Lai L, Peng H 2018 *Phys. Rev. E* **97** 012147
 [20] Yu T, Zhang L, Ji Y D, Lai L 2019 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **72** 26
 [21] Lin L F, Wang H Q 2019 *Nonlinear Dyn.* **98** 801
 [22] Jiang L, Lai L, Yu T, Luo M K 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 130501 (in Chinese) [姜磊, 赖莉, 蔚涛, 罗懋康 2021 物理学报 **70** 130501]
 [23] Ausloos M, Lambiotte R 2006 *Phys. Rev. E* **73** 011105
 [24] Gitterman M, Klyatskin V I 2010 *Phys. Rev. E* **81** 051139
 [25] Gitterman M, Shapiro I 2011 *J. Stat. Phys.* **144** 139
 [26] Yu T, Zhang L, Luo M K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 120504 (in Chinese) [蔚涛, 张路, 罗懋康 2013 物理学报 **62** 120504]
 [27] Yu T, Luo M K, Hua Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 210503 (in Chinese) [蔚涛, 罗懋康, 华云 2013 物理学报 **62** 210503]
 [28] Broeck C V D 1983 *J. Stat. Phys.* **31** 467
 [29] Zhong S C, Wei K, Gao S L, Ma H 2015 *J. Stat. Phys.* **159** 195
 [30] Mankin R, Ainsaar A, Reiter E 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1374
 [31] Lang R L, Yang L, Qin H L, Di G H 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1423
 [32] Peng H, Ren R B, Li P F, Yu T 2020 *Phys. Scr.* **95** 075214
 [33] Xu P F, Jin Y F 2020 *Chaos, Solitons Fractals* **138** 109857
 [34] Jin Y F, Wang H Q 2020 *Chaos, Solitons Fractals* **133** 109633
 [35] Jin Y F, Niu S Y 2016 *Int. J. Mod. Phys. B* **30** 1650102
 [36] Bagley R L, Torvik P J 1984 *Appl. Mech.* **51** 294
 [37] Lutz L 2001 *Phys. Rev. E* **64** 051106
 [38] He G T, Tian Y, Wang Y 2013 *J. Stat. Mech.* **9** 26
 [39] Jiang L, Lai L, Yu T, Luo M K 2021 *J. Stat. Mech.* **2021** 063208
 [40] Cubero D 2008 *Phys. Rev. E* **77** 021112
 [41] Tang Y, Zou W, Lu J, Kurths J 2012 *Phys. Rev. E* **85** 046207
 [42] Atsumi Y, Hata S, Nakao H 2013 *Phys. Rev. E* **2013** 88
 [43] Oyarzabal R S, Szezech Jr J D, Batista A M 2017 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **54** 62
 [44] Zhang L, Xu L, Yu T, Lai L, Zhong S C 2021 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **93** 105499
 [45] Shapiro V E, Loginov V M 1978 *Phys. A* **91** 563

Stochastic resonance of fractional-order coupled system excited by trichotomous noise^{*}

Peng Hao¹⁾ Ren Rui-Bin¹⁾ Zhong Yang-Fan²⁾ Yu Tao^{2)†}

1) (*College of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610064, China*)

2) (*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

(Received 8 July 2021; revised manuscript received 10 September 2021)

Abstract

In order to describe the motion behavior of coupled particles with mass fluctuations in a viscous medium, we propose a corresponding model, namely a fractional-order coupled system excited by trichotomous noise. By using the Shapiro-Loginov formula and the Laplace transform, we find the statistical synchronization of the system, then obtain analytical expression of the system output amplitude gain. On this basis, this paper focuses on the key points, which are the coupled system, the fractional order system and the trichotomous noise, analyzes the influences of coupling coefficient, system order and noise steady-state probability on the generalized stochastic resonance phenomenon of system's output amplitude gain, and gives some reasonable explanations. Specifically, first, as the coupling coefficient increases, the generalized stochastic resonance phenomenon of the output amplitude gain of the system first increases and then weakens until it converges. This phenomenon shows that the appropriate coupling strength can promote the generation of system resonance, thereby reflecting the importance of studying coupled systems. Second, with the order of the system increases, the generalized stochastic resonance phenomenon of the system's output amplitude gain weakens gradually. When the system order value is 1, that is, when the system degenerates into an integer order system, the peak value of its output amplitude gain is smallest. This phenomenon shows that the fractional order system can obtain a larger output amplitude gain than the traditional integer order system. Third, the effect of the steady-state probability of noise on the output amplitude gain of the system changes with other related parameters. Under certain parameter conditions, trichotomous noise can not only make the output amplitude of the system larger than that of the system excited by dichotomous noise, but also change the resonance type of the system. Finally, the correctness of the above results is verified by numerical simulation.

Keywords: stochastic resonance, fractional system, coupled system, trichotomous noise

PACS: 05.45.Xt, 05.40.-a, 05.40.Ca

DOI: [10.7498/aps.71.20211272](https://doi.org/10.7498/aps.71.20211272)

* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No.11501385).

† Corresponding author. E-mail: scuyutao@163.com