物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

自旋轨道耦合量子点系统中的量子相干

王志梅 王虹 薛乃涛 成高艳

Quantum coherence in spin–orbit coupled quantum dots system

Wang Zhi-Mei Wang Hong Xue Nai-Tao Cheng Gao-Yan

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 078502 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20212111

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20212111

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

物 理 学 报 *Acta Phys. Sin.* Vol. 71, No. 7 (2022) 078502

自旋轨道耦合量子点系统中的量子相干*

王志梅[1)2)†] 王虹[3)] 薛乃涛[1)] 成高艳[1)]

1) (太原师范学院物理系, 晋中 030619)

2) (太原师范学院, 计算物理与应用物理研究所, 晋中 030619)

3) (华中科技大学, 武汉国家光电实验中心, 武汉 430074)

(2021 年 11 月 16 日收到; 2022 年 1 月 13 日收到修改稿)

研究了自旋轨道耦合量子点中的量子相干效应. 运用输运电子的全计数统计方法计算系统的平均电流、散粒噪声和偏斜, 发现体系存在自旋轨道耦合作用时, 散粒噪声值随自旋轨道耦合常数的增加而减小. 更重要的是, 电流、噪声和偏斜随磁通周期性波动, 并且波动周期不受自旋轨道耦合强度大小、自旋极化率以及动力学耦合不对称的影响.

关键词: 量子相干, 自旋轨道耦合, 全计数统计

PACS: 85.75.–d, 75.70.Tj **DOI:** 10.7498/aps.71.20212111

1 引 言

量子点是一种通过适当的偏置金属栅极, 将电子限制在二维电子气体小区域内的半导体器件. 量子点输运[1,2]为观察自旋相关和强相关系统的基本物理现象奠定了基础, 如近藤效应[3–5]、库仑效应和自旋阻塞效应[6–8]等. 介观纳米结构的量子输运揭示了许多与量子干涉、离散能级和多体关联相关的特性. 根据所研究的具体系统, 已经发展了一些理论方法, 如 Landauer-Buttiker 理论和非平衡格林函数方法[9], 这两种方法在探究声子非弹性散射和处理多电子库仑相互作用下的介观系统等方面的问题时并不具有广泛性. 在某些特定情况下, 解决这些问题的一种比较简单的办法是运用率方程方法. 然而, 这种方法要求偏置电压大、温度为零, 这极大地限制了其适用性[10–13]. 因为量子输运在本质上其实是一个随机的过程, 原则上, 通过探究相应的分布函数可以充分理解其随机过程, 而一阶和二阶累积矩完全足以描述分布函数为高斯分布的一些物理量[14]. 然而, 电流或电导的分布一般来说不是高斯分布. 这就需要所有的电流累积量 (即全计数统计) 包括在内[15–17], 以便完全展现出所有阶电荷输运之间的相关性. 特别是, 由于单个电子隧穿技术高度敏感片上检测技术的发展, 所有转移粒子数量的统计累积现在已经可以通过实验进行提取[18]. 正常态电子的全计数统计已经在理论[19,20]和实验[21–33]中得到了解决. 介观系统中电流波动的研究使我们能够获得电子相关信息, 而高阶矩能够更全面地描述输运特性. 全计数统计可以给定系统所有传输特性的完整信息[34]. 目前, 全计数统计方法已在很多体系中进行了探究, 如正常超导体混合结构[35,36]、超导弱链接[37]、隧道结[38]、混沌腔[39]、纠缠电子[40]和自旋相关系统[41]、库仑阻塞系统等. 另外, 全计数统计的实验测量方案已被提出[42,43].

在两个隧穿的事件之间, 量子点态会经历量子

* 国家自然科学基金 (批准号: 11747057) 和山西省高等学校科技创新项目 (批准号: 2020L0526) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: 120705547@qq.com

相干演化. 与隧穿速率相比, 快速的相干演化可以很容易地支配系统的整体动力学[44]. 介观系统是量子相干和退相干极好的探测平台, 这是基础物理学和量子器件实现的最重要和最具挑战性的问题之一.Aharonov-Bohm 干涉仪[45,46]是探测相干的标准介观工具, 它的振幅是一种很好的相干性量度. 介观量子相干之所以重要, 是因为它为处理量子自由度的技术开拓了广阔的前景[47].

介观物理学的发展为传输和处理信息的装置中使用电子自旋提供了理论支持. 1990 年, Datta 和 Das 描述了如何运用电场进行调制电流, 并展示了场相关的自旋轨道耦合在这一机制中所起的重要作用. Rashba 自旋轨道耦合作用激发了很多的预测、发现和创新概念. 通过在空间中移动电子来操控自旋方向, 运用自旋方向来控制电子轨迹, 发现了一些新的拓扑材料类别.Rashba 自旋轨道耦合作用是由限制势的反演不对称性造成的. 二维电子气中的 Rashba 耦合强度可以通过改变栅极场实现高达 50% 的改变[48–52]. 这一发现再次激发了材料学家和物理学家进一步深入探究反相不对称结构材料的想法. 自旋电子学已经是固态物理中的一个重要研究领域, 而实验研究方面的进展为介观系统中自旋偏置诱导输运的探究开辟了新的可能性. 例如, 自旋偏压可以通过控制铁磁和非磁电极偏压接触处的自旋积累来实现[53–55].

自旋极化电流的产生和控制是半导体自旋电子学探究的一个关键课题[56], 因此, 大量的理论和实验方面的研究都投入在介观系统中, 其中最主要的技术之一是自旋注入, 它主要依靠光学技术和磁性材料或磁场的使用. 然而, 光学自旋注入技术很难与电子器件集成, 通过铁磁体与非磁性半导体结自旋注入的效率通常很小[57,58], 针对这些, 最近的一些工作将与自旋相关的输运放置在一些环形或双通道结构. Aharonov-Bohm 环[59]、Stern-Gerlach 环[60]、Aharonov-Casher 环[61]、Aharonov-Bohm 干涉仪[62]及双通道半导体器件[63], 这些环形导体或双通道器件通常用于研究介观系统中的量子相干效应. Rashba 自旋轨道作用可以避免使用任何磁性材料或场. 由于二维电子系统中电场的反演不对称性所产生的 Rashba 效应, 自旋向上的电子与自旋向下的电子在通过上臂和下臂时会获得不同的相位, 从而产生有趣的与自旋相关的相干现象.

目前, 关于自旋轨道耦合诱导的量子相干相关方面的研究尚少, 本文将运用量子主方程方法重点研究自旋轨道耦合量子点系统中的量子相干效应.

2 理论模型与方法

2.1 理论模型

考虑自旋轨道耦合的量子点系统, 其哈密顿量可写为

$$H = H_{\rm D} + H_{\rm leads} + H_{\rm T}, \tag{1}$$

其中 $H_{\rm D} = \sum_{\sigma j} \varepsilon_j d_{j\sigma}^{\dagger} d_{j\sigma} + \sum_{\sigma\sigma'} U n_{1\sigma} n_{2\sigma'} + H_{\rm SO}$ 为量子点哈密顿量; 电极哈密顿量为 $H_{\rm leads} = \sum_{\alpha,k,\sigma} \varepsilon_{\alpha k} a_{\alpha k\sigma}^{\dagger} a_{\alpha k\sigma} (\alpha = {\rm L, R})$; 量子点和电极间的隧穿耦合哈密顿量为 $H_{\rm T} = \sum_{\alpha kj} (t_{\alpha jk} p_{\alpha j} a_{\alpha k\sigma}^{\dagger} d_{j\sigma}$ $+{\rm H.c.})$, $p_{\alpha j} (p_{\alpha j}{}^{*} = p_{j\alpha})$是第$j$个量子点到$\alpha$电极电子跃迁时磁通诱导的相位, 当系统具有反平行磁通时 ($\varPhi_1 = \zeta\varPhi_0$和$\varPhi_2 = -\varPhi_1$, $\varPhi_0 = ch/e$是磁通量子单位, ζ是无量纲磁通数), 这里假定两磁通方向与电极-量子点所在的平面垂直, 相位可表示为 $p_{\rm L1} = {\rm e}^{-{\rm i}\pi\zeta}$, $p_{\rm L2} = {\rm e}^{{\rm i}\pi\zeta}$, $p_{\rm R1} = {\rm e}^{-{\rm i}\pi\zeta}$ 和 $p_{\rm R2} = {\rm e}^{{\rm i}\pi\zeta}$, H_{SO}为自旋轨道耦合哈密顿量, 对应的二次量子化的形式为

$$H_{\rm SO} = \alpha_{\rm SO} \left[(1-{\rm i}) d_{2\uparrow}^{\dagger} d_{1\downarrow} - (1+{\rm i}) d_{2\downarrow}^{\dagger} d_{1\uparrow} + {\rm H.c.} \right], \tag{2}$$

其中$\alpha_{\rm SO}$为自旋轨道耦合常数, $d_{j\sigma}^{\dagger}$ ($d_{j\sigma}$) 是电子在第 j个量子点的产生 (湮灭) 算符, $n_{j\sigma} = d_{j\sigma}^{\dagger} d_{j\sigma}$ ($j = 1, 2$) 是粒子数算符, 自旋算符$\sigma = \uparrow, \downarrow$, U是电子间库仑作用, $\varepsilon_{\alpha k}$为波失k相应能量, $a_{\alpha k\sigma}^{\dagger}$ ($a_{\alpha k\sigma}$) 分别为左右电极电子产生 (湮灭) 算符, $t_{\alpha jk}$为电极和能级间的耦合常数. 跃迁率$\varGamma_{\alpha j\sigma} = 2\pi {\rm g}_{\alpha\sigma} |t_{\alpha j}|^2$ (${\rm g}_{\alpha\sigma}$ 是态密度), $\varGamma_{\rm L\uparrow(\downarrow)} = \varGamma_{\rm L} (1 \pm p)$, $\varGamma_{\rm R\uparrow(\downarrow)} = \varGamma_{\rm R} (1 \pm p)$ (发射与收集电极平行); $\varGamma_{\rm L\uparrow(\downarrow)} = \varGamma_{\rm L} (1 \pm p)$, $\varGamma_{\rm R\uparrow(\downarrow)} = \varGamma_R (1 \mp p)$(发射与收集电极反平行). $p = \dfrac{(g_{\uparrow} - g_{\downarrow})}{(g_{\uparrow} + g_{\downarrow})}$ 表示极化率. 本文讨论自旋轨道耦合量子点系统, 这里假定同一量子点上的双占据态因为无穷大的库仑力而不允许存在, 这样, 共有 9 个有效的占据态可作为基矢, 分别为$|0,0\rangle$, $|0,\sigma\rangle$, $|\sigma,0\rangle$, $|\sigma,\sigma'\rangle$, 这里自旋$\sigma\,(\sigma') = \uparrow, \downarrow$, 体系对应的能量本征值和本征态为

$$E_{0,0}=0, |\psi_{00}\rangle=|0,0\rangle;\ \ E_{\sigma,\sigma'}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+U, |\psi_{\sigma\sigma'}\rangle=|\sigma,\sigma'\rangle;$$
$$E_6=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+8\alpha_{\rm so}^2}/2,\ \ |\psi_6\rangle=a_1|\uparrow,0\rangle+c_1|0,\downarrow\rangle;$$
$$E_7=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+8\alpha_{\rm so}^2}/2,\ \ |\psi_7\rangle=b_2|\downarrow,0\rangle+c_2|0,\uparrow\rangle;$$
$$E_8=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+8\alpha_{\rm so}^2}/2,\ \ |\psi_8\rangle=a_3|\uparrow,0\rangle+c_3|0,\downarrow\rangle;$$
$$E_9=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+8\alpha_{\rm so}^2}/2,\ \ |\psi_9\rangle=b_4|\downarrow,0\rangle+c_4|0,\uparrow\rangle.$$

归一化系数

$$a_1=\sqrt{2}\,(-1+{\rm i})\left(\varDelta-\sqrt{\varDelta^2+8\alpha_{\rm so}^2}\right)\bigg/\left[2\sqrt{\left(\varDelta-\sqrt{\varDelta^2+8\alpha_{\rm so}^2}\right)^2+8\alpha_{\rm so}^2}\,\right],$$
$$a_3=\sqrt{2}\,(-1+{\rm i})\left(\varDelta+\sqrt{\varDelta^2+8\alpha_{\rm so}^2}\right)\bigg/\left[2\sqrt{\left(\varDelta+\sqrt{\varDelta^2+8\alpha_{\rm so}^2}\right)^2+8\alpha_{\rm so}^2}\,\right],$$
$$b_2=\sqrt{2}\,(1+{\rm i})\left(\varDelta-\sqrt{\varDelta^2+8\alpha_{\rm so}^2}\right)\bigg/\left[2\sqrt{\left(\varDelta-\sqrt{\varDelta^2+8\alpha_{\rm so}^2}\right)^2+8\alpha_{\rm so}^2}\,\right],$$
$$b_4=\sqrt{2}\,(1+{\rm i})\left(\varDelta+\sqrt{\varDelta^2+8\alpha_{\rm so}^2}\right)\bigg/\left[2\sqrt{\left(\varDelta+\sqrt{\varDelta^2+8\alpha_{\rm so}^2}\right)^2+8\alpha_{\rm so}^2}\,\right],$$
$$c_1=c_2=2\sqrt{2}\alpha_{\rm so}\Big/\sqrt{\left(\varDelta-\sqrt{\varDelta^2+8\alpha_{\rm so}^2}\right)^2+8\alpha_{\rm so}^2},$$
$$c_3=c_4=2\sqrt{2}\alpha_{\rm so}\Big/\sqrt{\left(\varDelta+\sqrt{\varDelta^2+8\alpha_{\rm so}^2}\right)^2+8\alpha_{\rm so}^2},\tag{3}$$

其中$\varDelta=\varepsilon_1-\varepsilon_2$为能级差. 以上述的 9 个本征态为基矢, 可以获得量子点系统主方程的矩阵元 (见附录).

2.2 量子主方程方法

将电极与量子点之间的弱耦合哈密顿量$H_{\rm T}$作为微扰, 系统的量子主方程为

$$\frac{\partial\boldsymbol{\rho}^{(n)}(t)}{\partial t}=-{\rm i}L\boldsymbol{\rho}^{(n)}(t)-\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{\alpha j\sigma}\left[d_{j\sigma}^{\dagger}A_{\alpha j\sigma}^{(-)}\boldsymbol{\rho}^{(n)}(t)+\boldsymbol{\rho}^{(n)}(t)A_{\alpha j\sigma}^{(+)}d_{j\sigma}^{\dagger}+{\rm H.c.}\right]$$
$$-\sum_{\sigma j}\left[A_{{\rm L}j\sigma}^{(-)}\boldsymbol{\rho}^{(n)}(t)d_{j\sigma}^{\dagger}+A_{{\rm R}j\sigma}^{(-)}\boldsymbol{\rho}^{(n-1)}(t)d_{j\sigma}^{\dagger}+{\rm d}_{j\sigma}^{\dagger}\boldsymbol{\rho}^{(n)}(t)A_{{\rm L}j\sigma}^{(+)}+d_{j\sigma}^{\dagger}\boldsymbol{\rho}^{(n+1)}(t)A_{{\rm R}j\sigma}^{(+)}+{\rm H.c.}\right]\Bigg\},\tag{4}$$

其中$\boldsymbol{\rho}^{(n)}(t)$为隧穿到收集电极上$n$个电子的约化密度矩阵, L为 Liouvillian 超算符并且定义为$L(t)\hat{O}=[H_D(t),\hat{O}]$, 谱函数$A_{\alpha j\sigma}^{(+)}=\sum_i 2\pi g_\alpha t_{\alpha j}^* p_{\alpha j}^* t_{\alpha i}p_{\alpha i}n_\alpha^{(+)}d_{i\sigma}$, $A_{\alpha j\sigma}^{(-)}=\sum_i 2\pi\, g_\alpha t_{\alpha j}p_{\alpha j}t_{\alpha i}^* p_{\alpha i}^* n_\alpha^{(-)}d_{i\sigma}$. $n_\alpha^{(+)}=f_\alpha$, $n_\alpha^{(-)}=1-f_\alpha$, 费米分布$f_\alpha=1/\left[1+{\rm e}^{(\varepsilon-\mu_\alpha)/(KT)}\right]$.

为了更加有效地计算量子主方程, 这里引入累积生成函数$F(\chi)=-\ln\sum_n P(n,t){\rm e}^{{\rm i}n\chi}$, 其中$\chi$表示计数场, $P(n,t)$为转移粒子数概率分布. 累积生成函数$F(\chi)$起到了一个非常关键的作用, 它与约化密度矩阵的关系是${\rm e}^{-F(\chi)}={\rm Tr}\left[\sum_n\boldsymbol{\rho}^{(n)}(t)\,{\rm e}^{{\rm i}n\chi}\right]$.

粒子数分辨的量子主方程 (4) 可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^{(n)}=A\boldsymbol{\rho}^{(n)}+B\boldsymbol{\rho}^{(n+1)}+C\boldsymbol{\rho}^{(n-1)}.\tag{5}$$

$S(\chi,t)=\sum_n\boldsymbol{\rho}^{(n)}(t){\rm e}^{{\rm i}n\chi}$, $\dot{S}=L_\chi S$, $L_\chi=A+{\rm e}^{-{\rm i}\chi}B+{\rm e}^{{\rm i}\chi}C$, 进行傅里叶变换可以得到$L_\chi$的准确形式.

在低频限制下, $F(\chi)=-\lambda(\chi)t$, $\lambda(\chi)$是L_χ的本征值, 而且当$\chi\to0$, $\lambda(\chi)\to0$, 这样, 经过一系列的推导可获得

$$\lambda(\chi)=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}C_k\frac{({\rm i}\chi)^k}{k!}.\tag{6}$$

将方程 (6) 代入久期方程$|L_\chi-\lambda(\chi)I|=0$, 然后

将 $(\mathrm{i}\chi)^k$ 展开获得第 k 阶累积矩

$$C_k = -\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^k F(\chi)|_{\chi\to 0} \qquad (7)$$

平均电流 $\langle I\rangle = eC_1/t$ 与第一阶累积矩有关, 散粒噪声 $2e^2C_2/t$ 和第二阶累积矩有关, 偏斜与第三阶累积矩 C_3 有关, 描述分布的不对称性[64].

通常情况下, 散粒噪声可以用 $F_\mathrm{a}=C_2/C_1$ 来描述, $F_\mathrm{a}>1$ 对应的是超泊松散粒噪声, 而 $F_\mathrm{a}<1$ 对应的则是次泊松散粒噪声. 偏斜度用 $S_\mathrm{k}=C_3/C_1$ 表示.

本文以系统的 9 个本征态为基矢, 运用量子主方程的方法求解电流、散粒噪声和偏斜, 考虑量子点体系的非对角元项, 可获得一个 33×33 的矩阵, 具体的矩阵元表达式见附录.

3 结果分析与讨论

本文运用全计数统计的方法探索自旋轨道耦合量子点系统中的量子相干效应. 因为量子点密度矩阵元的表达式比较复杂, 无法直接给出累积矩的表达式, 本文将给出数值化的结果分析. 全文提到的所有量的单位都是 meV.

平均电流 $\langle I\rangle$, 散粒噪声 F_a 以及偏斜 S_k 运用全计数统计的方法可以获得. 磁通数 ζ 反映在非对角元上, 两体相互作用与非对角元密切相关[65,66]. 从系统哈密顿量可知自旋轨道耦合项连接了两体作用, 进而可以诱导量子相干.

从图 1 可以看到, 平均电流 $\langle I\rangle$(图 1(a)), 散粒噪声 F_a(图 1(b)) 和偏斜 S_k(图 1(c)) 随磁通 ζ 周期性波动, 振荡周期为 0.5.黑色实线、红色虚线和蓝色点线分别为不同自旋轨道作用 ($\alpha_\mathrm{SO}=0.3, 0.6, 0.9$) 下电流, 噪声和偏斜的波动图. 从图 1(a) 和图 1(b) 可以看到, $\alpha_\mathrm{SO}=0.3$ 时, 电流波动图的峰值为 $\langle I\rangle=0.74$, 噪声波动图的峰值为 $F_\mathrm{a}=3.17$; $\alpha_\mathrm{SO}=0.6$ 时, 电流波动图的峰值为 $\langle I\rangle=0.81$, 噪声峰值为 $F_\mathrm{a}=2.56$; $\alpha_\mathrm{SO}=0.9$ 时, 电流波动图的峰值为 $\langle I\rangle=0.87$, 噪声峰值为 $F_\mathrm{a}=2.08$. 很明显, 随着自旋轨道耦合常数的增加, 电流在增大, 而散粒噪声的值在减小. 这是由自旋轨道耦合作用诱导的自旋反演引起的. 自旋轨道耦合为电子的隧穿提供了一个新路径. 隧穿进发射电极的电子隧穿出量子点到达收集电极将改变它的自旋极化, 而且根据隧穿率公式 $\Gamma_{\mathrm{L}\uparrow(\downarrow)}=\Gamma_\mathrm{L}(1\pm p)$ 及 $\Gamma_{\mathrm{R}\uparrow(\downarrow)}=\Gamma_\mathrm{R}(1\pm p)$ 可以看出, 自旋向上的电子隧穿比自旋向下的电子隧穿快, 由于这种隧穿的不平衡, 散粒噪声值将减小[3]. 散粒噪声和偏斜的波谷值随自旋轨道耦合强度的增加有下降的趋势, 这是由动力学自旋阻塞引起的. 但是, 可以发现自旋轨道耦合常数的大小并不影响振荡周期. 另外, 从图 1(c) 可以看到偏斜 S_k 的值是从负值变到正值.

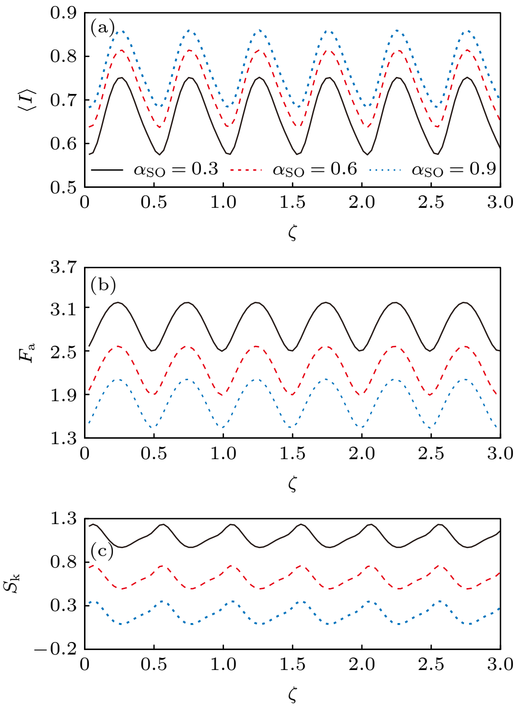

图 1 自旋轨道耦合常数 α_SO 不同时, (a) 平均电流 $\langle I\rangle$, (b) 散粒噪声 F_a 和 (c) 偏斜 S_k 随磁通 ζ 振荡图. $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=3, \Gamma_\mathrm{L}=\Gamma_\mathrm{R}=0.01, p=0.1$

Fig. 1. (a) Average current $\langle I\rangle$, (b) shot noise F_a and (c) skewness S_k fluctuation diagram in different spin-orbit coupling strength α_SO. $\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=3, \Gamma_\mathrm{L}=\Gamma_\mathrm{R}=0.01$, $p=0.1$.

图 2 描述的是非对称动力耦合中的量子相干. 黑色实线、红色虚线和蓝色点线分别为 $\Gamma_R=\Gamma_\mathrm{L}$, $\Gamma_\mathrm{R}=0.6\Gamma_\mathrm{L}$ 和 $\Gamma_\mathrm{L}=0.6\Gamma_\mathrm{R}$ 下电流、噪声和偏斜随磁通 ζ 的波动图. 可以看到, 量子点与电极的耦合不对称不影响振荡周期, 振荡周期依然为 0.5. 但是, 波动图中一个周期内多了一个小波谷, 当 $\Gamma_\mathrm{R}=0.6\Gamma_\mathrm{L}$, 新增的噪声波谷值 $F_\mathrm{a}=3.32$, 当 $\Gamma_\mathrm{L}=0.6\Gamma_\mathrm{R}$, 新增的噪声波谷值 $F_\mathrm{a}=3.43$, 这是因为 $\Gamma_\mathrm{R}/\Gamma_\mathrm{L}$ 的增加可能导致 $\Gamma_{1L}>\Gamma_{2\mathrm{L}}$, $\Gamma_{1\mathrm{R}}\gg\Gamma_{2\mathrm{R}}$, 有效的快慢通道被发展产生了聚束效应. 另外, 从图 2(c) 可以看到偏斜 S_k 的值在 $\dfrac{2n+1}{2}T\,(n=0,1,2\cdots)$ 处会出现一个小波峰.

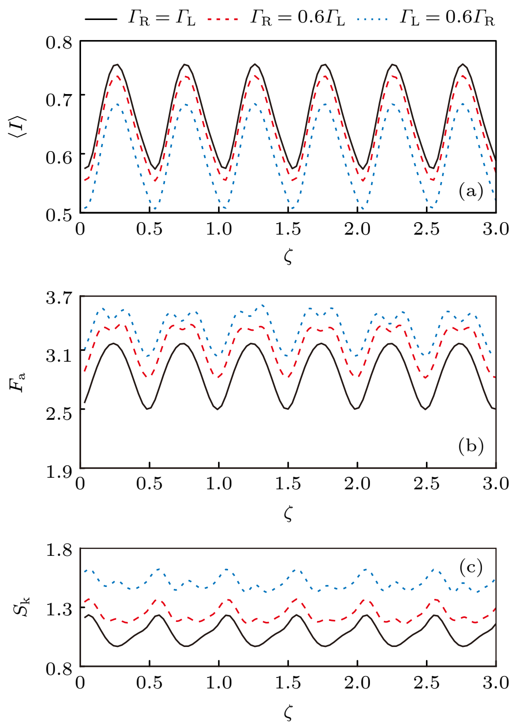

图 2 非对称动力耦合下, (a) 平均电流 $\langle I\rangle$, (b) 散粒噪声 F_a 和 (c) 偏斜 S_k 随磁通 ζ 振荡图. $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=3$, $\alpha_{SO}=0.3$, $p=0.1$

Fig. 2. (a) Average current $\langle I\rangle$, (b) shot noise F_a and (c) skewness S_k fluctuation diagram for asymmetric dot-electrode coupling. $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=3$, $\alpha_{SO}=0.3$, $p=0.1$.

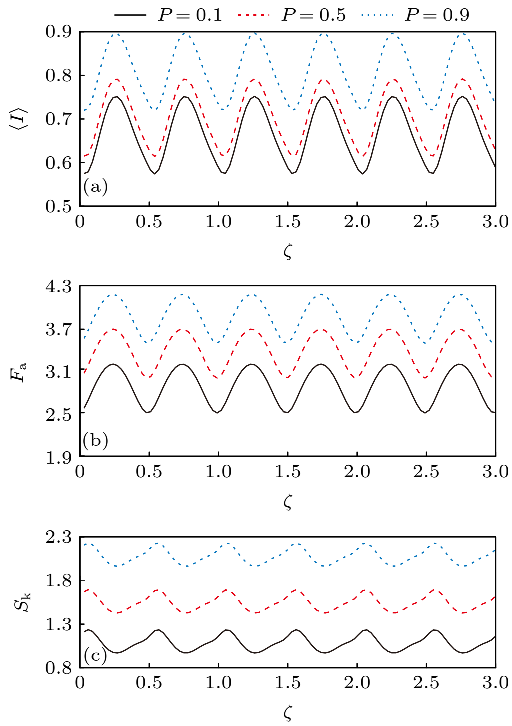

图 3 自旋极化率 p 不同时, (a) 平均电流 $\langle I\rangle$, (b) 散粒噪声 F_a 和 (c) 偏斜 S_k 随磁通 ζ 振荡图. $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=3$, $\alpha_{SO}=0.3$, $\Gamma_L=\Gamma_R=0.01$

Fig. 3. (a) Average current $\langle I\rangle$, (b) shot noise F_a and (c) skewness S_k with magnetic flux oscillation with different spin polarization p. $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=3$, $\alpha_{SO}=0.3$, $\Gamma_L=\Gamma_R=0.01$.

图 3 给出了不同自旋极化率下的量子相干, 黑色实线、红色虚线和蓝色点线分别为 $p=0.1$, $p=0.5$ 和 $p=0.9$ 情况下电流、噪声和偏斜随磁通 ζ 的波动图. 振荡周期不随自旋极化率的变化而改变, 周期仍然为 0.5. 但是, 很明显, 随着自旋极化率 p 的增大, 散粒噪声 F_a 的值在明显增大, 这从图 3(b) 可以看出, 当极化率 $p=0.1$, 噪声峰值 $F_a=3.17$; 当极化率 $p=0.5$, 噪声峰值 $F_a=3.69$; 当极化率 $p=0.9$, 噪声峰值 $F_a=4.19$. 极化率的增大使得自旋向上电子的隧穿率增加, 而自旋向下电子的隧穿率减小, 这可以根据

$$\frac{\Gamma_L^{\uparrow}}{\Gamma_L^{\downarrow}}=\frac{1+p}{1-p},\qquad \frac{\Gamma_R^{\uparrow}}{\Gamma_R^{\downarrow}}=\frac{1+p}{1-p}$$

来解释 $(p>0)$, 并且在文献 [3] 中可以直观地看到隧穿率与自旋极化率的这个关系, 这诱导了自旋向上电子与自旋向下电子隧穿过程的竞争, 导致自旋聚束效应和明显的超泊松噪声.

4 结 论

本文采用量子主方程方法研究了量子点体系中自旋轨道耦合作用引起的量子相干效应. 研究发现, 当存在自旋轨道作用时, 电流、散粒噪声和偏斜随磁通周期性波动. 自旋轨道作用诱导量子相干产生, 但是自旋轨道耦合的大小不影响振荡周期. 此外, 动力学耦合不对称和自旋极化率的变化均不影响振荡周期. 动力学耦合不对称会使波动图多一个波谷, 这与快慢输运通道的竞争有关. 而自旋极化率的增加会使波动图的峰值增大, 超泊松行为明显, 这是因为自旋向上的电子与自旋向下的电子在隧穿过程中竞争而引起的自旋聚束效应. 通过测量累积矩可以探索系统中的自旋轨道耦合强度, 这将对与自旋有关的器件设计有很重要的科学意义. 由于本文主要研究零频累积矩, 接下来的工作将主要通过全计数统计方法计算有限频累积矩, 这将对整个系统的输运特性有更全面和深入的认识及了解.

附录

系统主方程矩阵元如下. 其中对角元项为

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{11}^{(n)} = {} & \langle\psi_{00}|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_{00}\rangle = -\frac{1}{2}(a_1g_1\varGamma_{\rm L11}^{\uparrow} + m_1a_3\varGamma_{\rm L11}^{\uparrow} + h_3c_2\varGamma_{\rm L22}^{\uparrow} + n_3c_4\varGamma_{\rm L22}^{\uparrow} + h_2b_2\varGamma_{\rm L11}^{\downarrow} + n_2b_4\varGamma_{\rm L11}^{\downarrow} \\
& + g_4c_1\varGamma_{\rm L22}^{\downarrow} + m_4c_3\varGamma_{\rm L22}^{\downarrow})\rho_{00}^{(n)} + \frac{1}{2}[(g_1h_3^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\uparrow} + g_4h_2^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\downarrow})\rho_{76}^{(n-1)} \\
& + (m_1g_1^*\varGamma_{\rm R11}^{\uparrow} + m_4g_4^*\varGamma_{\rm R22}^{\downarrow})\rho_{68}^{(n-1)} + (g_1n_3^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\uparrow} + g_4n_2^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\downarrow})\rho_{96}^{(n-1)} \\
& + (m_1m_1^*\varGamma_{\rm R11}^{\uparrow} + m_4m_4^*\varGamma_{\rm R22}^{\downarrow})\rho_{88}^{(n-1)} + (m_1h_3^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\uparrow} + m_4h_2^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\downarrow})\rho_{78}^{(n-1)} \\
& + (h_3h_3^*\varGamma_{\rm R22}^{\uparrow} + h_2h_2^*\varGamma_{\rm R11}^{\downarrow})\rho_{77}^{(n-1)} + (m_1n_3^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\uparrow} + m_4n_2^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\downarrow})\rho_{98}^{(n-1)} \\
& + (h_3n_3^*\varGamma_{\rm R22}^{\uparrow} + h_2n_2^*\varGamma_{\rm R11}^{\downarrow})\rho_{97}^{(n-1)} + (h_3g_1^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\uparrow} + h_2g_4^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\downarrow})\rho_{67}^{(n-1)} \\
& + (n_3h_3^*\varGamma_{\rm R22}^{\uparrow} + n_2h_2^*\varGamma_{\rm R11}^{\downarrow})\rho_{79}^{(n-1)} + (h_3m_1^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\uparrow} + h_2m_4^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\downarrow})\rho_{87}^{(n-1)} \\
& + (g_1g_1^*\varGamma_{\rm R11}^{\uparrow} + g_4g_4^*\varGamma_{\rm R22}^{\downarrow})\rho_{66}^{(n-1)} + (n_3g_1^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\uparrow} + n_2g_4^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\downarrow})\rho_{69}^{(n-1)} \\
& + (g_1m_1^*\varGamma_{\rm R11}^{\uparrow} + g_4m_4^*\varGamma_{\rm R22}^{\downarrow})\rho_{86}^{(n-1)} + (n_3m_1^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\uparrow} + n_2m_4^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\downarrow})\rho_{89}^{(n-1)} \\
& + (n_3n_3^*\varGamma_{\rm R22}^{\uparrow} + n_2n_2^*\varGamma_{\rm R11}^{\downarrow})\rho_{99}^{(n-1)}] + {\rm H.c.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{22}^{(n)} = {} & \langle\psi_{\uparrow\uparrow}|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_{\uparrow\uparrow}\rangle = -\frac{1}{2}(h_3^*c_2^*\varGamma_{\rm R11}^{\uparrow} + n_3^*c_4^*\varGamma_{\rm R11}^{\uparrow} + g_1^*a_1^*\varGamma_{\rm R22}^{\uparrow} + m_1^*a_3^*\varGamma_{\rm R22}^{\uparrow})\rho_{22}^{(n)} \\
& + \frac{1}{2}[(h_3^*b_2^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\uparrow} + n_3^*b_4^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\uparrow})\rho_{42}^{(n)} + (g_1^*c_1^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\uparrow} + m_1^*c_3^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\uparrow})\rho_{32}^{(n)} \\
& + h_3^*h_3\varGamma_{\rm L11}^{\uparrow}\rho_{77}^{(n)} + h_3^*n_3\varGamma_{\rm L11}^{\uparrow}\rho_{79}^{(n)} - h_3^*g_1{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm L12}^{\uparrow}\rho_{76}^{(n)} - h_3^*m_1{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm L12}^{\uparrow}\rho_{78}^{(n)} \\
& - g_1^*h_3{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm L21}^{\uparrow}\rho_{67}^{(n)} - g_1^*n_3{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm L21}^{\uparrow}\rho_{69}^{(n)} + g_1^*g_1\varGamma_{\rm L22}^{\uparrow}\rho_{66}^{(n)} + g_1^*m_1\varGamma_{\rm L22}^{\uparrow}\rho_{68}^{(n)} \\
& + n_3^*h_3\varGamma_{\rm L11}^{\uparrow}\rho_{97}^{(n)} + n_3^*n_3\varGamma_{\rm L11}^{\uparrow}\rho_{99}^{(n)} - n_3^*g_1{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm L12}^{\uparrow}\rho_{96}^{(n)} - n_3^*m_1{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm L12}^{\uparrow}\rho_{98}^{(n)} \\
& - m_1^*h_3{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm L21}^{\uparrow}\rho_{87}^{(n)} - m_1^*n_3{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm L21}^{\uparrow}\rho_{89}^{(n)} + m_1^*g_1\varGamma_{\rm L22}^{\uparrow}\rho_{86}^{(n)} + m_1^*m_1\varGamma_{\rm L22}^{\uparrow}\rho_{88}^{(n)}] + {\rm H.c.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{33}^{(n)} = {} & \langle\psi_{\uparrow\downarrow}|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_{\uparrow\downarrow}\rangle = -\frac{1}{2}(g_4^*c_1^*\varGamma_{\rm R11}^{\uparrow} + m_4^*c_3^*\varGamma_{\rm R11}^{\uparrow} + g_1^*a_1^*\varGamma_{\rm R22}^{\downarrow} + m_1^*a_3^*\varGamma_{\rm R22}^{\downarrow})\rho_{33}^{(n)} \\
& + \frac{1}{2}[(g_4^*a_1^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\uparrow} + m_4^*a_3^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\uparrow})\rho_{23}^{(n)} + (g_1^*c_1^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\downarrow} + m_1^*c_3^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\downarrow})\rho_{53}^{(n)} \\
& + (g_4^*g_4\varGamma_{\rm L11}^{\uparrow} + g_1^*g_1\varGamma_{\rm L22}^{\downarrow})\rho_{66}^{(n)} + (g_4^*m_4\varGamma_{\rm L11}^{\uparrow} + g_1^*m_1\varGamma_{\rm L22}^{\downarrow})\rho_{68}^{(n)} \\
& + (m_4^*g_4\varGamma_{\rm L11}^{\uparrow} + m_1^*g_1\varGamma_{\rm L22}^{\downarrow})\rho_{86}^{(n)} + (m_4^*m_4\varGamma_{\rm L11}^{\uparrow} + m_1^*m_1\varGamma_{\rm L22}^{\downarrow})\rho_{88}^{(n)}] + {\rm H.c.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{44}^{(n)} = {} & \langle\psi_{\downarrow\uparrow}|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_{\downarrow\uparrow}\rangle = -\frac{1}{2}(h_3^*c_2^*\varGamma_{\rm R11}^{\downarrow} + n_3^*c_4^*\varGamma_{\rm R11}^{\downarrow} + h_2^*b_2^*\varGamma_{\rm R22}^{\uparrow} + n_2^*b_4^*\varGamma_{\rm R22}^{\uparrow})\rho_{44}^{(n)} \\
& + \frac{1}{2}[(h_3^*b_2^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\downarrow} + n_3^*b_4^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\downarrow})\rho_{54}^{(n)} + (h_2^*c_2^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\uparrow} + n_2^*c_4^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\uparrow})\rho_{24}^{(n)} \\
& + (h_3^*h_3\varGamma_{\rm L11}^{\downarrow} + h_2^*h_2\varGamma_{\rm L22}^{\uparrow})\rho_{77}^{(n)} + (h_3^*n_3\varGamma_{\rm L11}^{\downarrow} + h_2^*n_2\varGamma_{\rm L22}^{\uparrow})\rho_{79}^{(n)} \\
& + (n_3^*h_3\varGamma_{\rm L11}^{\downarrow} + n_2^*h_2\varGamma_{\rm L22}^{\uparrow})\rho_{97}^{(n)} + (n_3^*n_3\varGamma_{\rm L11}^{\downarrow} + n_2^*n_2\varGamma_{\rm L22}^{\uparrow})\rho_{99}^{(n)}] + {\rm H.c.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{55}^{(n)} = {} & \langle\psi_{\downarrow\downarrow}|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_{\downarrow\downarrow}\rangle = -\frac{1}{2}(g_4^*c_1^*\varGamma_{\rm R11}^{\downarrow} + m_3^*c_3^*\varGamma_{\rm R11}^{\downarrow} + h_2^*b_2^*\varGamma_{\rm R22}^{\downarrow} + n_2^*b_4^*\varGamma_{\rm R22}^{\downarrow})\rho_{55}^{(n)} \\
& + \frac{1}{2}[(g_4^*a_1^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\downarrow} + m_4^*a_3^*{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R12}^{\downarrow})\rho_{35}^{(n)} + (h_2^*c_2^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\downarrow} + n_2^*c_4^*{\rm e}^{-2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm R21}^{\downarrow})\rho_{45}^{(n)} \\
& + g_4^*g_4\varGamma_{\rm L11}^{\downarrow}\rho_{66}^{(n)} + g_4^*m_4\varGamma_{\rm L11}^{\downarrow}\rho_{68}^{(n)} - g_4^*h_2{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm L12}^{\downarrow}\rho_{67}^{(n)} - g_4^*n_2{\rm e}^{2{\rm i}\pi\zeta}\varGamma_{\rm L12}^{\downarrow}\rho_{69}^{(n)}
\end{aligned}
$$

$$+ m_4^* g_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\rho_{86}^{(n)} + m_4^* m_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\rho_{88}^{(n)} - m_4^* h_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{87}^{(n)} - m_4^* n_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{89}^{(n)}$$
$$+ -h_2^* g_4 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{76}^{(n)} - h_2^* m_4 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{78}^{(n)} + h_2^* h_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{77}^{(n)} + h_2^* n_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{79}^{(n)}$$
$$- n_2^* g_4 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{96}^{(n)} - n_2^* m_4 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{98}^{(n)} + n_2^* h_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{97}^{(n)} + n_2^* n_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{99}^{(n)}] + \mathrm{H.c.}$$

$$\dot\rho_{66}^{(n)} = \langle\psi_6|\,\dot\rho^{(n)}\,|\psi_6\rangle = -\frac{1}{2}[(a_1^* g_1^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow} + c_1^* g_4^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow} + a_1 g_1 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + a_1 g_1 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow} + c_1 g_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_1 g_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow})\rho_{66}^{(n)}$$
$$+ (a_1^* m_1^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow} + c_1^* m_4^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{86}^{(n)} + (a_1^* h_3^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow} + c_1^* h_2^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{76}^{(n)} + (a_1 m_1 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}$$
$$+ a_1 m_1 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow} + c_1 m_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_1 m_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow})\rho_{68}^{(n)} + (a_1^* n_3^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow} + c_1^* n_2^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{96}^{(n)}$$
$$- (a_1 h_3 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow} + c_1 h_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow})\rho_{67}^{(n)}] + \frac{1}{2}[(a_1 n_3 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow} + c_1 n_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow})\rho_{69}^{(n)}$$
$$+ (a_1^* a_1 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_1^* c_1 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{00}^{(n)} - a_1 c_1^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\rho_{32}^{(n-1)} + a_1 a_1^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)}$$
$$- a_1 c_1^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}\rho_{53}^{(n-1)} + (a_1 a_1^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow} + c_1 c_1^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow})\rho_{33}^{(n-1)}$$
$$- c_1 a_1^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\rho_{23}^{(n-1)} + c_1 c_1^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)} - c_1 a_1^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}\rho_{35}^{(n-1)}] + \mathrm{H.c.}$$

$$g_1 = \frac{c_3}{a_1c_3 - a_3c_1},\quad g_4 = \frac{-a_3}{a_1c_3 - a_3c_1},\quad h_2 = \frac{c_4}{b_2c_4 - b_4c_2},\quad h_3 = \frac{-b_4}{b_2c_4 - b_4c_2},$$
$$m_1 = \frac{-c_1}{a_1c_3 - a_3c_1},\quad m_4 = \frac{a_1}{a_1c_3 - a_3c_1}, n_2 = \frac{-c_2}{b_2c_4 - b_4c_2}, n_3 = \frac{b_2}{b_2c_4 - b_4c_2}.$$

$$\dot\rho_{77}^{(n)} = \langle\psi_7|\,\dot\rho^{(n)}\,|\psi_7\rangle = -\frac{1}{2}[(b_2^* h_2^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + c_2^* h_3^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow} + b_2 h_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + b_2 h_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow} + c_2 h_3 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_2 h_3 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow})\rho_{77}^{(n)}$$
$$+ (b_2^* n_2^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + c_2^* n_3^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow})_{97}^{(n)} + (b_2^* g_4^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} + c_2^* g_1^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{67}^{(n)} + (b_2 n_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}$$
$$+ b_2 n_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow} + c_2 n_3 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_2 n_3 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow})\rho_{79}^{(n)} - (b_2 g_4 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow} + c_2 g_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow})\rho_{76}^{(n)}$$
$$- (b_2 m_4 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow} + c_2 m_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow})\rho_{78}^{(n)} + (b_2^* m_4^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} + c_2^* m_1^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{87}^{(n)}]$$
$$+ \frac{1}{2}[(b_2^* b_2 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + c_2^* c_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow})\rho_{00}^{(n)} + (b_2 b_2^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow} + c_2 c_2^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow})\rho_{44}^{(n-1)} - b_2 c_2^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}\rho_{45}^{(n-1)}$$
$$- b_2 c_2^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\rho_{24}^{(n-1)} + b_2 b_2^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)} + c_2 c_2^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)} - c_2 b_2^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\rho_{42}^{(n-1)}$$
$$- c_2 b_2^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}\rho_{54}^{(n-1)}] + \mathrm{H.c.}$$

$$\dot\rho_{88}^{(n)} = \langle\psi_8|\,\dot\rho^{(n)}\,|\psi_8\rangle = -\frac{1}{2}[(a_3^* m_1^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow} + c_3^* m_4^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow} + a_3 m_1 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + a_3 m_1 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow} + c_3 m_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_3 m_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow})\rho_{88}^{(n)}$$
$$+ (a_3^* h_3^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow} + c_3^* h_2^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{78}^{(n)} + (a_3^* n_3^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow} + c_3^* n_2^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{98}^{(n)}$$
$$- (a_3 h_3 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow} + c_3 h_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow})\rho_{87}^{(n)} - (a_3 n_3 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow} + c_3 n_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow})\rho_{89}^{(n)}$$
$$+ (a_3^* g_1^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow} + c_3^* g_4^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{68}^{(n)} + (a_3 g_1 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + a_3 g_1 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow} + c_3 g_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_3 g_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow})\rho_{86}^{(n)}]$$
$$+ \frac{1}{2}[(a_3^* a_3 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_3^* c_3 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{00}^{(n)} - a_3 c_3^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\rho_{32}^{(n-1)} + a_3 a_3^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)}$$
$$- a_3 c_3^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}\rho_{53}^{(n-1)} + (a_3 a_3^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow} + c_3 c_3^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow})\rho_{33}^{(n-1)} - c_3 a_3^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\rho_{23}^{(n-1)}$$
$$+ c_3 c_3^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)} - c_3 a_3^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}\rho_{35}^{(n-1)}] + \mathrm{H.c.}$$

$$\dot\rho_{99}^{(n)} = \langle\psi_9|\,\dot\rho^{(n)}\,|\psi_9\rangle = -\frac{1}{2}[(b_4^* h_2^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + c_4^* h_3^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow})\rho_{79}^{(n)} + (b_4 h_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + b_4 h_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow} + c_4 h_3 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}$$
$$+ c_4 h_3 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow})\rho_{97}^{(n)} + (b_4^* n_2^* \varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + c_4^* n_3^* \varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow} + b_4 n_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + b_4 n_2 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow} + c_4 n_3 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}$$
$$+ c_4 n_3 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow})\rho_{99}^{(n)} + (b_4^* g_4^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} + c_4^* g_1^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{69}^{(n)} + (b_4^* m_4^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}$$
$$+ c_4^* m_1^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{89}^{(n)} - (b_4 g_4 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow} + c_4 g_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow})\rho_{96}^{(n)} - (b_4 m_4 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}$$
$$+ c_4 m_1 \mathrm{e}^{2i\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow})\rho_{98}^{(n)}] + \frac{1}{2}[(b_4^* b_4 \varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + c_4^* c_4 \varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow})\rho_{00}^{(n)} - b_4 c_4^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\rho_{24}^{(n-1)}$$

$$
\begin{aligned}
&+(b_4b_4^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}}+c_4c_4^*\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R11}})\rho^{(n-1)}_{44}-b_4c_4^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R21}}\rho^{(n-1)}_{45}+b_4b_4^*\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R22}}\rho^{(n-1)}_{55}\\
&+c_4c_4^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}\rho^{(n-1)}_{22}-c_4b_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}}\rho^{(n-1)}_{42}-c_4b_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R12}}\rho^{(n-1)}_{54}]+\mathrm{H.c.}
\end{aligned}
$$

非对角元项为

$$
\begin{aligned}
\dot\rho^{(n)}_{23}=\ &\langle\psi_{\uparrow\uparrow}|\,\dot\rho^{(n)}\,|\psi_{\uparrow\downarrow}\rangle=-\frac{1}{2}[(h_3^*c_2^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}+n_3^*c_4^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}+g_1^*a_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}}+m_1^*a_3^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}})\rho^{(n)}_{23}-(h_3^*b_2^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}}\\
&+n_3^*b_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}})\rho^{(n)}_{43}-(g_1^*c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R21}}+m_1^*c_3^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R21}})\rho^{(n)}_{33}+(g_4c_1\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}\\
&+m_4c_3\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}+g_1a_1\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R22}}+m_1a_3\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R22}})\rho^{(n)}_{23}-(g_4a_1\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}}+m_4a_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}})\rho^{(n)}_{22}\\
&-(g_1c_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R21}}+m_1c_3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R21}})\rho^{(n)}_{25}]+\frac{1}{2}[h_3^*g_4\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}\rho^{(n)}_{76}+h_3^*m_4\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}\rho^{(n)}_{78}\\
&+n_3^*g_4\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}\rho^{(n)}_{96}+n_3^*m_4\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}\rho^{(n)}_{98}-g_1^*g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}}\rho^{(n)}_{66}-g_1^*m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}}\rho^{(n)}_{68}\\
&-m_1^*g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}}\rho^{(n)}_{86}-m_1^*m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}}\rho^{(n)}_{88}+g_4h_3^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}\rho^{(n)}_{76}+m_4h_3^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}\rho^{(n)}_{78}\\
&+g_4n_3^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}\rho^{(n)}_{96}+m_4n_3^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}\rho^{(n)}_{98}-g_4g_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}\rho^{(n)}_{66}-m_4g_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}\rho^{(n)}_{68}\\
&-g_4m_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}\rho^{(n)}_{86}-m_4m_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}\rho^{(n)}_{88}]\\
\dot\rho^{(n)}_{67}=\ &\langle\psi_6|\,\dot\rho^{(n)}\,|\psi_7\rangle=-\frac{1}{2}[(a_1^*g_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}+c_2h_3\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}+c_1^*g_4^*\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R22}}+c_2h_3\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L11}}+b_2h_2\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}+b_2h_2\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L22}})\rho^{(n)}_{67}\\
&+(a_1^*m_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}+c_1^*m_4^*\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R22}})\rho^{(n)}_{87}+(a_1^*h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}}+c_1^*h_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R21}})\rho^{(n)}_{77}+(c_2n_3\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}\\
&+c_2n_3\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L11}}+b_2n_2\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}+b_2n_2\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L22}})\rho^{(n)}_{69}-(c_2g_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}+b_2g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L21}})\rho^{(n)}_{66}\\
&-(c_2m_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}+b_2m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L21}})\rho^{(n)}_{68}+(a_1^*n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}}+c_1^*n_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R21}})\rho^{(n)}_{97}\\
&+(b_2h_2\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R11}}+c_2h_3\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}}+c_1^*g_4^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}+c_1^*g_4^*\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L11}}+a_1^*g_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}+a_1^*g_1^*\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L22}})\rho^{(n)}_{67}\\
&+(b_2n_2\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R11}}+c_2n_3\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}})\rho^{(n)}_{69}+(b_2g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R12}}+c_2g_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R21}})\rho^{(n)}_{66}+(c_1^*m_4^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L11}}\\
&+c_1^*m_4^*\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L11}}+a_1^*m_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}+a_1^*m_1^*\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L22}})\rho^{(n)}_{87}-(c_1^*h_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L12}}+a_1^*h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}})\rho^{(n)}_{77}\\
&-(c_1^*n_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L12}}\rho^{(n)}_{97}+a_1^*n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}})\rho^{(n)}_{97}+(b_2m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R12}}+c_2m_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R21}})\rho^{(n)}_{68}]\\
&+\frac{1}{2}[c_2c_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}\rho^{(n-1)}_{32}-c_2a_1^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}}\rho^{(n-1)}_{22}+c_2c_1^*\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R11}}\rho^{(n-1)}_{54}+b_2a_1^*\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R22}}\rho^{(n-1)}_{35}\\
&-(c_2a_1^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R12}}+b_2c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R21}})\rho^{(n-1)}_{34}+b_2a_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}}\rho^{(n-1)}_{24}-b_2c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R21}}\rho^{(n-1)}_{55}\\
&+(a_1^*c_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}+c_1^*b_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L21}})\rho^{(n)}_{00}+c_1^*c_2\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}\rho^{(n-1)}_{32}-(c_1^*b_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}}\\
&+a_1^*c_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R21}})\rho^{(n-1)}_{34}+c_1^*c_2\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R11}}\rho^{(n-1)}_{54}-c_1^*b_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R12}}\rho^{(n-1)}_{55}-a_1^*c_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R21}}\rho^{(n-1)}_{22}\\
&+a_1^*b_2\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}}\rho^{(n-1)}_{24}+a_1^*b_2\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R22}}\rho^{(n-1)}_{35}+(b_2c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{L12}}+c_2a_1^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}})\rho^{(n)}_{00}].\\
\dot\rho^{(n)}_{24}=\ &\langle\psi_{\uparrow\uparrow}|\,\dot\rho^{(n)}\,|\psi_{\downarrow\uparrow}\rangle=-\frac{1}{2}[(h_3^*c_2^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}+n_3^*c_4^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R11}}+g_1^*a_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}}+m_1^*a_3^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}})\rho^{(n)}_{24}-(h_3^*b_2^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}}\\
&+n_3^*b_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R12}})\rho^{(n)}_{44}-(g_1^*c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R21}}+m_1^*c_3^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R21}})\rho^{(n)}_{34}+(h_3c_2\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R11}}\\
&+n_3c_4\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R11}}+h_2b_2\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}}+n_2b_4\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R22}})\rho^{(n)}_{24}-(h_3b_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R12}}+n_3b_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\downarrow}_{\mathrm{R12}})\rho^{(n)}_{25}\\
&-(h_2c_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R21}}+n_2c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{R21}})\rho^{(n)}_{22}]+\frac{1}{2}[-h_3^*h_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}\rho^{(n)}_{77}\\
&-h_3^*n_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}\rho^{(n)}_{79}-n_3^*h_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}\rho^{(n)}_{97}-n_3^*n_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L12}}\rho^{(n)}_{99}\\
&+g_1^*h_2\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}\rho^{(n)}_{67}+g_1^*n_2\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}\rho^{(n)}_{69}+m_1^*h_2\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}\rho^{(n)}_{87}+m_1^*n_2\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}\rho^{(n)}_{89}\\
&-h_2h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}}\rho^{(n)}_{77}-n_2h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}}\rho^{(n)}_{79}-h_2n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}}\rho^{(n)}_{97}-n_2n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L21}}\rho^{(n)}_{99}\\
&+\Big(h_2g_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}\rho^{(n)}_{67}+n_2g_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}\rho^{(n)}_{69}+h_2m_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}\rho^{(n)}_{87}+n_2m_1^*\varGamma^{\uparrow}_{\mathrm{L22}}\rho^{(n)}_{89}\Big)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{68}^{(n)} = {} & \langle\psi_6|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_8\rangle = -\frac{1}{2}[(a_1^*g_1^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+c_1^*g_4^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}+c_3m_4\varGamma_{L11}^{\uparrow}+c_3m_4\varGamma_{L11}^{\downarrow}+a_3m_1\varGamma_{L22}^{\uparrow}+a_3m_1\varGamma_{L22}^{\downarrow})\rho_{68}^{(n)} \\
& +(a_1^*m_1^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+c_1^*m_4^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{88}^{(n)}+(a_1^*h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}+c_1^*h_2^*e^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{78}^{(n)}+(c_3g_4\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow} \\
& +c_3g_4\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}+a_3g_1\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}+a_3g_1\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{66}^{(n)}+(a_1^*n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}+c_1^*n_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{98}^{(n)} \\
& -(c_3h_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}+a_3h_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{67}^{(n)}+(a_3m_1\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+c_3m_4\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}+c_1^*g_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} \\
& +c_1^*g_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}+a_1^*g_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}+a_1^*g_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{68}^{(n)}+(a_3g_1\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+c_3g_4\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{66}^{(n)} \\
& +(a_3h_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}+c_3h_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{67}^{(n)}+(c_1^*m_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}+c_1^*m_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}+a_1^*m_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} \\
& +a_1^*m_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{88}^{(n)}+(a_3n_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}+c_3n_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{69}^{(n)}-(c_1^*h_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow} \\
& +a_1^*h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{78}^{(n)}]+\frac{1}{2}[(c_3n_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}+a_3n_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{69}^{(n)}+c_3c_1^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)} \\
& -c_3a_1^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}\rho_{35}^{(n-1)}+(a_1^*a_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}+c_1^*c_3\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{00}^{(n)}-a_3c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\rho_{32}^{(n-1)} \\
& +a_3a_1^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)}-a_3c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}\rho_{53}^{(n-1)}+(a_3a_1^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}+c_3c_1^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow})\rho_{33}^{(n-1)} \\
& -c_3a_1^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\rho_{23}^{(n-1)}+(c_1^*n_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}+a_1^*n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{98}^{(n)}+c_1^*c_3\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)} \\
& -a_1^*c_3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}\rho_{35}^{(n-1)}+(a_3a_1^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}+c_3c_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{00}^{(n)}-c_1^*a_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\rho_{32}^{(n-1)} \\
& +a_1^*a_3\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)}-c_1^*a_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}\rho_{53}^{(n-1)}+\left(a_1^*a_3\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}+c_1^*c_3\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}\right)\rho_{33}^{(n-1)} \\
& -a_1^*c_3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\rho_{23}^{(n-1)}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{25}^{(n)} = {} & \langle\psi_{\uparrow\uparrow}|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_{\downarrow\downarrow}\rangle = -\frac{1}{2}[(h_3^*c_2^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+n_3^*c_4^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+g_1^*a_1^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}+m_1^*a_3^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}+g_4c_1\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} \\
& +m_3c_3\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}+h_2b_2\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}+n_2b_4\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{25}^{(n)}-(h_3^*b_2^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow} \\
& +n_3^*b_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow})\rho_{45}^{(n)}-(g_1^*c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}+m_1^*c_3^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{35}^{(n)}+(g_4c_1\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} \\
& +(g_4a_1\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}+m_4a_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow})\rho_{23}^{(n)}-(h_2c_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}+n_2c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{24}^{(n)}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{69}^{(n)} = {} & \langle\psi_6|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_9\rangle = -\frac{1}{2}[(a_1^*g_1^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+c_1^*g_4^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}+c_4n_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}+c_4n_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}+b_4n_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}+b_4n_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{69}^{(n)} \\
& +(c_4h_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}+c_4h_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}+b_4h_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}+b_4h_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{67}^{(n)}+(a_1^*m_1^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+c_1^*m_4^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{89}^{(n)} \\
& +(a_1^*h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}+c_1^*h_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{79}^{(n)}+(a_1^*n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}+c_1^*n_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{99}^{(n)} \\
& -(c_4g_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow}+b_4g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{66}^{(n)}-(c_4m_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow}+b_4m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{68}^{(n)} \\
& +(c_1^*g_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}+c_1^*g_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}+a_1^*g_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}+a_1^*g_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}+b_4n_2\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}+c_4n_3\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow})\rho_{69}^{(n)} \\
& +(b_4h_2\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}+c_4h_3\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow})\rho_{67}^{(n)}+(b_4g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}+c_4g_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{66}^{(n)}+(c_1^*m_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} \\
& +c_1^*m_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}+a_1^*m_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}+a_1^*m_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{89}^{(n)}+(b_4m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}+c_4m_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{68}^{(n)} \\
& -(c_1^*h_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}+a_1^*h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{79}^{(n)}]+\frac{1}{2}[c_4c_1^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}\rho_{32}^{(n-1)}-c_4a_1^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)} \\
& +c_4c_1^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}\rho_{54}^{(n-1)}-(c_4a_1^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}+b_4c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{34}^{(n-1)}+b_4a_1^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}\rho_{24}^{(n-1)} \\
& -b_4c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)}+b_4a_1^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}\rho_{35}^{(n-1)}+(a_1^*c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow}+c_1^*b_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{00}^{(n)} \\
& +(c_1^*n_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{97}^{(n)}+a_1^*n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{99}^{(n)}+(b_4c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}+c_4a_1^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{00}^{(n)} \\
& +c_1^*c_4\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}\rho_{32}^{(n-1)}-(c_1^*b_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}+a_1^*c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{34}^{(n-1)}+c_1^*c_4\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}\rho_{54}^{(n-1)} \\
& -c_1^*b_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)}-a_1^*c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)}+a_1^*b_4\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}\rho_{24}^{(n-1)}+a_1^*b_4\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}\rho_{35}^{(n-1)}]
\end{aligned}
$$

$$\dot{\rho}_{32}^{(n)}=\left(\dot{\rho}_{23}^{(n)}\right)^*,\ \dot{\rho}_{42}^{(n)}=\left(\dot{\rho}_{24}^{(n)}\right)^*,\ \dot{\rho}_{52}^{(n)}=\left(\dot{\rho}_{25}^{(n)}\right)^*,$$

$$\dot{\rho}_{43}^{(n)}=\left(\dot{\rho}_{34}^{(n)}\right)^*,\ \dot{\rho}_{53}^{(n)}=\left(\dot{\rho}_{35}^{(n)}\right)^*,\ \dot{\rho}_{54}^{(n)}=\left(\dot{\rho}_{45}^{(n)}\right)^*.$$

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{34}^{(n)}=&\left\langle\psi_{\uparrow\downarrow}\right|\dot{\rho}^{(n)}\left|\psi_{\downarrow\uparrow}\right\rangle=-\frac{1}{2}[(g_4^*c_1^*\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+m_4^*c_3^*\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+g_1^*a_1^*\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}+m_1^*a_3^*\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{34}^{(n)}\\
&-(g_4^*a_1^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}+m_4^*a_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow})\rho_{24}^{(n)}-(g_1^*c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}+m_1^*c_3^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{54}^{(n)}\\
&+(h_3c_2\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}+n_3c_4\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}+h_2b_2\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}+n_2b_4\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow})\rho_{34}^{(n)}-(h_2c_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\\
&+n_2c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{32}^{(n)}-(h_3b_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}+n_3b_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow})\rho_{35}^{(n)}]+\frac{1}{2}[-(g_4^*h_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow}\\
&+g_1^*h_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{67}^{(n)}-(g_4^*n_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow}+g_1^*n_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{69}^{(n)}-(m_4^*h_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow}\\
&+m_1^*h_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{87}^{(n)}-(m_4^*n_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow}+m_1^*n_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{89}^{(n)}\\
&-(h_2g_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow}+h_3g_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow})\rho_{67}^{(n)}-(n_2g_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow}+n_3g_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow})\rho_{69}^{(n)}\\
&-(h_2m_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow}+h_3m_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow})\rho_{87}^{(n)}-(n_2m_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow}+n_3m_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow})\rho_{89}^{(n)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{78}^{(n)}=&\left\langle\psi_7\right|\dot{\rho}^{(n)}\left|\psi_8\right\rangle=-\frac{1}{2}[(b_2^*h_2^*\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}+c_2^*h_3^*\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}+c_3m_4\Gamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}+c_3m_4\Gamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}+a_3m_1\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}+a_3m_1\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{78}^{(n)}\\
&+(b_2^*n_2^*\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}+c_2^*n_3^*\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow})\rho_{98}^{(n)}+(b_2^*g_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}+c_2^*g_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{68}^{(n)}+(c_3g_4\Gamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}\\
&+c_3g_4\Gamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}+a_3g_1\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}+a_3g_1\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{76}^{(n)}+(b_2^*m_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}+c_2^*m_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{88}^{(n)}\\
&-(c_3h_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}+a_3h_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{77}^{(n)}+(a_3m_1\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+c_3m_4\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}+c_2^*h_3^*\Gamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}+c_2^*h_3^*\Gamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\\
&+b_2^*h_2^*\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}+b_2^*h_2^*\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{78}^{(n)}+(a_3h_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}+c_3h_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{77}^{(n)}+(a_3n_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\\
&+c_3n_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{79}^{(n)}+(a_3g_1\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+c_3g_4\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{76}^{(n)}+(c_2^*n_3^*\Gamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow}+c_2^*n_3^*\Gamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}+b_2^*n_2^*\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow}\\
&+b_2^*n_2^*\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{98}^{(n)}-(c_2^*g_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow}+b_2^*g_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{68}^{(n)}-(c_2^*m_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow}\\
&+b_2^*m_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{88}^{(n)}]+\frac{1}{2}[(c_3n_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}+a_3n_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{79}^{(n)}c_3c_2^*\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}\rho_{23}^{(n-1)}\\
&-(c_3b_2^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}+a_3c_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{43}^{(n-1)}+c_3c_2^*\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}\rho_{45}^{(n-1)}-c_3b_2^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)}\\
&-a_3c_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)}+a_3b_2^*\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}\rho_{42}^{(n-1)}+a_3b_2^*\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}\rho_{53}^{(n-1)}+(b_2^*c_3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\\
&+c_2^*a_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{00}^{(n)}+c_2^*c_3\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}\rho_{23}^{(n-1)}-(b_2^*c_3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}+c_2^*a_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow})\rho_{43}^{(n-1)}\\
&+c_2^*c_3\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}\rho_{45}^{(n-1)}-b_2^*c_3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)}-c_2^*a_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)}+b_2^*a_3\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}\rho_{42}^{(n-1)}\\
&+b_2^*a_3\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}\rho_{53}^{(n-1)}+(c_3b_2^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}+a_3c_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow})\rho_{00}^{(n)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{35}^{(n)}=&\left\langle\psi_{\uparrow\downarrow}\right|\dot{\rho}^{(n)}\left|\psi_{\downarrow\downarrow}\right\rangle=-\frac{1}{2}[(g_4^*c_1^*\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+m_4^*c_3^*\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}+g_1^*a_1^*\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}+m_1^*a_3^*\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{35}^{(n)}-(g_4^*a_1^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\\
&+m_4^*a_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow})\rho_{25}^{(n)}-(g_1^*c_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}+m_1^*c_3^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{55}^{(n)}+(g_4c_1\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}\\
&+m_4c_3\Gamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}+h_2b_2\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}+n_2b_4\Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{35}^{(n)}-(h_2c_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}+n_2c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{34}^{(n)}\\
&-(g_4a_1\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}+m_4a_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow})\rho_{33}^{(n)}]+\frac{1}{2}[-g_1^*g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{66}^{(n)}\\
&-g_1^*m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{68}^{(n)}+g_1^*h_2\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{67}^{(n)}+g_1^*n_2\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{69}^{(n)}-m_1^*g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{86}^{(n)}\\
&-m_1^*m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{88}^{(n)}+m_1^*h_2\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{87}^{(n)}+m_1^*n_2\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{89}^{(n)}-g_4g_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{66}^{(n)}\\
&-m_4g_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{68}^{(n)}+h_2g_1^*\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{67}^{(n)}+n_2g_1^*\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{69}^{(n)}-g_4m_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{86}^{(n)}\\
&-m_4m_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{88}^{(n)}+h_2m_1^*\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{87}^{(n)}+n_2m_1^*\Gamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow}\rho_{89}^{(n)}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{79}^{(n)} = {} & \langle\psi_7|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_9\rangle = -\frac{1}{2}[(b_2^*h_2^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + c_2^*h_3^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow} + c_4n_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_4n_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + b_4n_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + b_4n_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{79}^{(n)} \\
& + (b_2^*n_2^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + c_2^*n_3^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow})\rho_{99}^{(n)} + (b_2^*g_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} + c_2^*g_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{69}^{(n)} + (c_4h_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} \\
& + c_4h_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + b_4h_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + b_4h_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{77}^{(n)} + (b_2^*m_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} + c_2^*m_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{89}^{(n)} \\
& - (c_4g_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow} + b_4g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{76}^{(n)} + (b_4n_2\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + c_4n_3\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow} + c_2^*h_3^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} \\
& + c_2^*h_3^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + b_2^*h_2^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + b_2^*h_2^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{79}^{(n)} + (b_4g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} + c_4g_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{76}^{(n)} \\
& + (b_4m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} + c_4m_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{78}^{(n)} + (b_4h_2\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + c_4h_3\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow})\rho_{77}^{(n)} + (c_2^*n_3^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} \\
& + c_2^*n_3^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + b_2^*n_2^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + b_2^*n_2^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{99}^{(n)} - (c_2^*g_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow} + b_2^*g_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{69}^{(n)} \\
& - (c_2^*m_1^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow} + b_2^*m_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{89}^{(n)}] + \frac{1}{2}[(c_4m_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow} + b_4m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{78}^{(n)} \\
& + (b_2^*b_4\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + c_2^*c_4\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow})\rho_{00}^{(n)} - b_4c_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\rho_{24}^{(n-1)} + b_4b_2^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)} \\
& + c_4c_2^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)} - b_4c_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}\rho_{45}^{(n-1)} - c_4b_2^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\rho_{42}^{(n-1)} - c_4b_2^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}\rho_{54}^{(n-1)} \\
& + (b_4b_2^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow} + c_4c_2^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow})\rho_{44}^{(n-1)} + (b_4b_2^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + c_4c_2^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow})\rho_{00}^{(n)} - c_2^*b_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\rho_{24}^{(n-1)} \\
& - c_2^*b_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow}\rho_{45}^{(n-1)} + b_2^*b_4\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)} + c_2^*c_4\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)} - b_2^*c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow}\rho_{42}^{(n-1)} \\
& - b_2^*c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}\rho_{54}^{(n-1)} + (b_2^*b_4\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow} + c_2^*c_4\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow})\rho_{44}^{(n-1)}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{45}^{(n)} = {} & \langle\psi_{\downarrow\uparrow}|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_{\downarrow\downarrow}\rangle = -\frac{1}{2}[(h_3^*c_2^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + n_3^*c_4^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + h_2^*b_2^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow} + n_2^*b_4^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow})\rho_{45}^{(n)} - (h_3^*b_2^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} \\
& + n_3^*b_4^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow})\rho_{55}^{(n)} - (h_2^*c_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow} + n_2^*c_4^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{25}^{(n)} + (g_4c_1\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} \\
& + m_4c_3\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + h_2b_2\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow} + n_2b_4\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{45}^{(n)} - (h_2c_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow} + n_2c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{44}^{(n)} \\
& - (g_4a_1\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} + m_4a_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow})\rho_{43}^{(n)}] + \frac{1}{2}[h_3^*g_4\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\rho_{76}^{(n)} + h_3^*m_4\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\rho_{78}^{(n)} \\
& - h_3^*h_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{77}^{(n)} - h_3^*n_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{79}^{(n)} + n_3^*g_4\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\rho_{96}^{(n)} + n_3^*m_4\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\rho_{98}^{(n)} \\
& - n_3^*h_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{97}^{(n)} - n_3^*n_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{99}^{(n)} + g_4h_3^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\rho_{76}^{(n)} + m_4h_3^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\rho_{78}^{(n)} \\
& - h_2h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{77}^{(n)} - n_2h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{79}^{(n)} + g_4n_3^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\rho_{96}^{(n)} + m_4n_3^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow}\rho_{98}^{(n)} \\
& - h_2n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{97}^{(n)} - n_2n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow}\rho_{99}^{(n)}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_{89}^{(n)} = {} & \langle\psi_8|\,\dot{\rho}^{(n)}\,|\psi_9\rangle = -\frac{1}{2}[(a_3^*m_1^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow} + c_3^*m_4^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow} + c_4n_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_4n_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + b_4n_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + b_4n_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{89}^{(n)} \\
& + (c_4h_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_4h_3\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + b_4h_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + b_4h_2\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{87}^{(n)} + (a_3^*g_1^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow} + c_3^*g_4^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow})\rho_{69}^{(n)} \\
& + (a_3^*h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow} + c_3^*h_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{79}^{(n)} + (a_3^*n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow} + c_3^*n_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow})\rho_{99}^{(n)} \\
& - (c_4g_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow} + b_4g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{86}^{(n)} - (c_4m_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow} + b_4m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{88}^{(n)} \\
& + (b_4n_2\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + c_4n_3\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow} + c_3^*m_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_3^*m_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + a_3^*m_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + a_3^*m_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{89}^{(n)} \\
& + (c_3^*g_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\uparrow} + c_3^*g_4^*\varGamma_{\mathrm{L}11}^{\downarrow} + a_3^*g_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\uparrow} + a_3^*g_1^*\varGamma_{\mathrm{L}22}^{\downarrow})\rho_{69}^{(n)} + (b_4h_2\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} + c_4h_3\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow})\rho_{87}^{(n)} \\
& + (b_4g_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} + c_4g_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{86}^{(n)} + (b_4m_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} + c_4m_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{88}^{(n)} \\
& - (c_3^*h_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow} + a_3^*h_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{79}^{(n)} - (c_3^*n_2^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow}\rho_{97}^{(n)} + a_3^*n_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow})\rho_{99}^{(n)}] \\
& + \frac{1}{2}[c_4c_3^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}\rho_{32}^{(n-1)} - c_4a_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}\rho_{22}^{(n-1)} + c_4c_3^*\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow}\rho_{54}^{(n-1)} - (c_4a_3^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} \\
& + b_4c_3^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow})\rho_{34}^{(n-1)} + b_4a_3^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow}\rho_{24}^{(n-1)} - b_4c_3^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}\rho_{55}^{(n-1)} + b_4a_3^*\varGamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow}\rho_{35}^{(n-1)} \\
& + (a_3^*c_4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}12}^{\uparrow} + c_3^*b_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{L}21}^{\downarrow})\rho_{00}^{(n)} + c_3^*c_4\varGamma_{\mathrm{R}11}^{\uparrow}\rho_{32}^{(n-1)} - (c_3^*b_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta}\varGamma_{\mathrm{R}12}^{\uparrow}
\end{aligned}
$$

$$+ a_3^* c_4 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta} \Gamma_{\mathrm{R}21}^{\downarrow}) \rho_{34}^{(n-1)} + c_3^* c_4 \Gamma_{\mathrm{R}11}^{\downarrow} \rho_{54}^{(n-1)} - c_3^* b_4 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta} \Gamma_{\mathrm{R}12}^{\downarrow} \rho_{55}^{(n-1)} - a_3^* c_4 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta} \Gamma_{\mathrm{R}21}^{\uparrow} \rho_{22}^{(n-1)}$$

$$+ a_3^* b_4 \Gamma_{\mathrm{R}22}^{\uparrow} \rho_{24}^{(n-1)} + a_3^* b_4 \Gamma_{\mathrm{R}22}^{\downarrow} \rho_{35}^{(n-1)} + (b_4 c_3^* \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\zeta} \Gamma_{\mathrm{L}12}^{\downarrow} + c_4 a_3^* \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\zeta} \Gamma_{\mathrm{L}21}^{\uparrow}) \rho_{00}^{(n)}]$$

$$\dot{\rho}_{76}^{(n)} = \left(\dot{\rho}_{67}^{(n)}\right)^*, \dot{\rho}_{86}^{(n)} = \left(\dot{\rho}_{68}^{(n)}\right)^*, \dot{\rho}_{96}^{(n)} = \left(\dot{\rho}_{69}^{(n)}\right)^*,$$

$$\dot{\rho}_{87}^{(n)} = \left(\dot{\rho}_{78}^{(n)}\right)^*, \dot{\rho}_{97}^{(n)} = \left(\dot{\rho}_{79}^{(n)}\right)^*, \dot{\rho}_{98}^{(n)} = \left(\dot{\rho}_{89}^{(n)}\right)^*.$$

参考文献

[1] Lucignano P, Jouault B, Tagliacozzo A 2004 *Phys. Rev. B* **69** 4
[2] Kouwenhoven L P, Austing D G, Tarucha S 2001 *Rep. Prog. Phys.* **64** 6
[3] Souza F M, Egues J C, Jauho A P 2007 *Phys. Rev. B* **75** 165303
[4] Świrkowicz R, Wilczyński M, Wawrzyniak M, Barnaś J 2006 *Phys. Rev. B* **73** 193312
[5] Martinek J, Sindel M, Borda L, Barnaś J, Bulla R, König J, Schön G, Maekawa S, von Delft J 2005 *Phys. Rev. B* **72** 121302(R)
[6] Elste F, Timm C 2006 *Phys. Rev. B* **73** 235305
[7] Weymann I, Barnaś J, König J, Martinek J, Schön G 2005 *Phys. Rev. B* **72** 113301
[8] Cottet A, Belzig W, Bruder C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 206801
[9] Datta S, Houten H V 1996 *Phys. Today* **49** 5
[10] Nazarov Y V 1993 *Physica B* **189** 57
[11] Gurvitz S A, Lipkin H J, Prager Y S 1996 *Phys. Lett. A* **212** 91
[12] Gurvitz S A, Prager Y S 1996 *Phys. Rev. B* **53** 15932
[13] Li X Q, Luo J Y, Yang Y G 2005 *Phys. Rev. B* **71** 205304
[14] Kampen N G V 1983 *Phys. Today* **36** 278
[15] Fu B, Zhang L, Wei Y D, Wang J 2017 *Phys. Rev. B* **96** 115410
[16] Kilgour M, Agarwalla B K, Segal D 2019 *J. Chem. Phys.* **150** 8
[17] Bagrets D A, Nazarov Y V 2003 *Phys. Rev. B* **67** 085316
[18] Luo J Y, Shen Y, He X L, Li X Q, Yan Y J 2011 *Phys. Lett. A* **376** 59
[19] Levitov L S, Lesovik G B 1993 *JETP Lett.* **58** 230
[20] Blanter Y M, Büttiker M 2000 *Phys. Rep.* **336** 1
[21] Timofeev A V, Meschke M, Peltonen J T, Heikkila T T, Pekola J P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 207001
[22] Sukhorukov E V, Jordan A N, Gustavsson S, Leturcq R, Ihn T, Ensslin K 2007 *Nat. Phys.* **3** 243
[23] Gershon G, Bomze Y, Sukhorukov E V, Reznikov M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 016803
[24] Flindt C, Fricke C, Hohls F, Novotný T, Netočný K, Brandes T, Haug R J 2009 *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **106** 10116
[25] Gabelli J, Reulet B 2009 *Phys. Rev. B* **80** 161203(R)
[26] GustavssonS, Leturcq R, Studer M, Shorubalko I, Ihn T, Ensslin K, Driscoll D C, Gossard A C 2009 *Surf. Sci. Rep.* **64** 191
[27] Masne Q L, Pothier H, Birge N O, Urbina C, Esteve D 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 067002
[28] Ubbelohde N, Fricke C, Flindt C, Hohls F, Haug R J 2012 *Nat. Commun.* **3** 612
[29] Reulet B, Senzier J, Prober D E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 196601
[30] Bomze Y, Gershon G, Shovkun D, Levitov L S, Reznikov M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 176601
[31] Gustavsson S, Leturcq R, Simovic B, Schleser R, Ihn T, Studerus P, Ensslin K, Driscoll D C, Gossard A C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 076605
[32] Fujisawa T, Hayashi T, Tomita R, Hirayama Y 2006 *Science* **312** 1634
[33] Maisi V F, Kambly D, Flindt C, Pekola J P 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 036801
[34] Braggio A, Köenig J, Fazio R 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 026805
[35] Muzykantskii B A, Khmelnitskii D E 1994 *Phys. Rev. B* **50** 3982
[36] Belzig W, Nazarov Y V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 067006
[37] Belzig W, Nazarov Y V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 197006
[38] Shelankov A, Rammer J 2003 *Europhys. Lett.* **63** 485
[39] Bulashenko O M 2005 *J. Stat. Mech.* **15** 8
[40] Taddei F, Fazio R 2002 *Phys. Rev. B* **65** 075317
[41] Kindermann M 2005 *Phys. Rev. B* **71** 165332
[42] Ankerhold J, Grabert H 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 186601
[43] Tobiska J, Nazarov Y V 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 106801
[44] Stegmann P, König J, Weiss S 2018 *Phys. Rev. B* **98** 035409
[45] Aharonov Y, Bohm D 1959 *Phys. Rev.* **115** 485
[46] Aikawa H, Kobayashi K, Sano A, Katsumoto S, Iye Y 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 176802
[47] Xu G, Broholm C, Soh Y A, Aeppli G, Ditusa J F, Chen Y, Kenzelmann M, Frost C D, Ito T, Oka K 2007 *Science* **317** 5841
[48] Xu W, Guo Y 2005 *Phys. Lett. A* **340** 281
[49] Wolf S A, Awschalom D D, Buhrman R A, Daughton J M, Molnar S V, Roukes M L, Chtchelkanova A Y, Treger D M 2001 *Science* **294** 1488
[50] Zutic I, Fabian J, Sarma S D 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 323
[51] Datta S, Das S 1990 *Appl. Phys. Lett.* **56** 665
[52] Miller J B, Zumbühl D M, Marcus C M, Lyanda-Geller Y B, Gossard A C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 076807
[53] Manchon A, Koo H C, Nitta J, Frolov S M, Duine R A 2015 *Nat. Mater.* **14** 9
[54] Sheng L, Sheng D N, Ting C S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 016602
[55] Ogloblya O V, Kuznetsova G M 2013 *Physica B* **424** 47
[56] Chi F, Li S S 2006 *J. Appl. Phys.* **100** 11
[57] Žutić I, Fabian J, Sarma S D 2001 *Appl. Phys. Lett.* **79** 1558
[58] Schmidt G, Ferrand D, Molenkamp L W, Filip A T, Wees B J V 2000 *Phys. Rev. B* **62** 8
[59] Wu M W, Zhou J, Shi Q W 2004 *Appl. Phys. Lett.* **85** 1012
[60] Ohe J I, Yamamoto M, Ohtsuki T, Nitta J 2004 *Phys. Rev. B* **72** 041308
[61] Souma S, Nikolić B K 2004 *Phys. Rev. B* **70** 195346
[62] Sun Q F, Wang J, Guo H 2005 *Phys. Rev. B* **71** 165310
[63] Sun Q F, Xie X C 2005 *Phys. Rev. B* **71** 155321
[64] Belzig W 2005 *Phys. Rev. B* **71** 161301
[65] Streltsov A, Adesso G, Plenio M B 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 041003
[66] Hu M L, Hu X, Wang J, Yi P, Zhang Y R, Fan H 2018 *Phys. Rep.* **1** 762

Quantum coherence in spin-orbit coupled quantum dots system*

Wang Zhi-Mei [1)2)†] Wang Hong [3)] Xue Nai-Tao [1)] Cheng Gao-Yan [1)]

1) (*Department of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong* 030619, *China*)

2) (*Institute of Computational and Applied Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong* 030619, *China*)

3) (*Wuhan National Laboratory for Optoelectronics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074, *China*)

(Received 16 November 2021; revised manuscript received 13 January 2022)

Abstract

In this paper, the quantum coherence effect in spin-orbit coupled quantum dots system is studied. The average current, shot noise and skewness of the system are calculated by using the full counting statistics approach of the transport system. It is found that the shot noise decreases with the spin-orbit coupling increasing. More importantly, the current, noise and skewness fluctuate periodically with the magnetic flux. And the oscillation period is not affected by the strength of spin-orbit coupling, spin polarization and dynamic coupling asymmetry.

Keywords: quantum phase coherence, spin-orbit coupling, full counting statistics

PACS: 85.75.–d,75.70.Tj **DOI:** 10.7498/aps.71.20212111

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11747057) and the Scientific and Technologial Innovation Programs of Higher Education Institutions in Shanxi Province, China (Grant No. 2020L0526).

† Corresponding author. E-mail: 120705547@qq.com