



含记忆阻尼函数的周期势系统随机共振

许鹏飞 公徐路 李毅伟 靳艳飞

Stochastic resonance in periodic potential system with memory damping function

Xu Peng-Fei Gong Xu-Lu Li Yi-Wei Jin Yan-Fei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 080501 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20211732

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211732>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

三态噪声激励下分数阶耦合系统的随机共振现象

Stochastic resonance of fractional-order coupled system excited by trichotomous noise

物理学报. 2022, 71(3): 030502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211272>

一种随机共振增强正弦信号的二次多项式接收方法

A quadratic polynomial receiving scheme for sine signals enhanced by stochastic resonance

物理学报. 2019, 68(21): 210501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190952>

循环噪声驱动下非对称双稳系统的驻留时间分布函数研究

Residence-times distribution function in asymmetric bistable system driven by noise recycling

物理学报. 2020, 69(12): 120501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20201752>

基于随机放电神经网络的彩色图像感知研究

Color image perception based on stochastic spiking neural network

物理学报. 2022, 71(7): 070501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211982>

四稳系统的双重随机共振特性

Double stochastic resonance characteristics of quad-stable system

物理学报. 2021, 70(4): 040501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201346>

不同频率涨落驱动下全局耦合谐振子的集体动力学行为

Collective behaviors of globally coupled harmonic oscillators driven by different frequency fluctuations

物理学报. 2021, 70(13): 130501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210157>

含记忆阻尼函数的周期势系统随机共振*

许鹏飞¹⁾ 公徐路²⁾ 李毅伟¹⁾ 靳艳飞^{3)†}

1) (山西农业大学数学系, 太谷 030801)

2) (山西农业大学软件学院, 太谷 030801)

3) (北京理工大学力学系, 北京 100081)

(2021年9月17日收到; 2021年12月22日收到修改稿)

研究了外部周期信号和内部噪声共同激励下, 含记忆阻尼函数的周期势系统的随机共振. 针对具有多稳态特征的周期势系统, 推导出适用于一般多稳态模型的系统响应振幅和功率谱放大因子. 研究表明, 功率谱放大因子随温度的变化曲线出现单峰, 说明含记忆阻尼函数的周期势系统存在随机共振现象, 并且系统的记忆特性和稳态点数量对共振行为有着显著影响. 此外, 利用随机能量法进一步分析了系统的随机共振现象, 发现共振效应随着记忆时间的增加先减弱再增强. 在适当的温度条件下, 存在最优记忆时间可以最大化外部周期力对系统所做的功.

关键词: 随机共振, 周期势系统, 广义 Langevin 方程

PACS: 05.40.-a, 05.10.Gg, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.71.20211732

1 引言

随机共振的概念由 Benzi 等^[1] 在研究古气象冰川期问题时提出, 其理论发展及应用已经在不同科学系统中取得显著成果^[2-4], 但较少涉及含记忆阻尼的动力系统. 该系统描述了一类处于无序介质或复杂环境下的 non-Markovian 过程^[5-8], 例如处于生物细胞、湍流、生长表面、渗透媒介、黏性材料等背景中的粒子就展示出偏离 Brown 运动的反常扩散行为, 它的运动速度所产生的记忆效应归因于空间和时间上的非局域特性. 针对这类含记忆效应的随机系统, 广义 Langevin 方程 (generalized Langevin equation, GLE) 是研究其动力学行为的主要手段之一^[9-14]. 特别地, GLE 中的阻尼项取决于随时间变化的记忆核函数, 其中记忆核的类型主要包括了幂函数型^[9]、不同形式的指数函数型^[10-12] 以

及 Dirac delta 函数与指数函数的混合型^[13,14] 等. 在随机模型中, 外部噪声主要源于系统所处的环境或实验内的噪声发生器, 而 GLE 中的内部噪声通过涨落耗散关系依赖于系统的记忆阻尼核函数^[15], 即内部噪声和耗散产生于同一随机源, 从而使系统处于平衡状态. 在 GLE 刻画的动力模型中, 噪声诱导行为以及记忆性对动力学现象的影响已经在不同学科领域内受到研究者的关注, 例如反常扩散^[9-11]、信息熵^[16]、平均首次穿越时间^[17]、随机共振^[18-22] 等. 其中, 在含不同记忆阻尼函数的线性系统中, 文献^[18-20] 基于 GLE 分别详细讨论了时滞、固有频率涨落噪声及 Mittag-Leffler 噪声作用下的随机共振现象. 在携有指数型记忆核的双稳态系统中, Hasegawa^[21] 和 Srokowski^[22] 均通过 GLE 计算了系统的功率谱放大因子, 并分析了不同条件下记忆效应对随机共振的影响. 在非对称三稳态系

* 山西省优秀博士来晋工作奖励资金科研项目 (批准号: SXBYKY2021081)、山西农业大学博士科研启动项目 (批准号: 2021BQ12)、山西农业大学青年科技创新基金 (批准号: 2019019, 2020QC04) 和北京理工大学研究生教研教改项目资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jinyf@bit.edu.cn

统中, 研究表明记忆时间抑制相干共振, 却增强随机共振^[13]. 由于广义 Langevin 系统存在着显著的 non-Markovian 性质, 故导致它的动力学特性复杂多变, 分析困难. 然而, 在 GLE 描述的周期势系统中, 尚未出现关于随机共振现象的研究, 尤其记忆效应对共振行为的影响.

另一方面, 具有多稳态特征的周期势模型已在物理、化学、生物、工程等领域内展示出了广泛的应用, 如 Josephson 隧道结^[23] 和分子马达^[24] 等. 周期势系统中噪声诱导动力学的研究也呈现出丰硕的成果, 例如: 噪声诱导的粒子输运^[25]、棘轮效应^[26]、稳定性^[27]、相干共振^[28] 等. 此外, Saikia^[29] 在二阶欠阻尼的周期势动力系统中引入随机能量法作为衡量随机共振的特征指标, 发现随机共振出现在驱动信号的高频区域内, 且两个动力学状态的稳定性与随机共振效应依赖于系统的阻尼参数和信号幅值. Reenbohn 等^[30] 研究了欠阻尼倾斜周期势中的随机共振, 并基于两个具有不同振幅和相位的动力学状态解释了共振行为的发生. Nicolis^[3] 将随机共振理论拓展至过阻尼多稳态模型中, 解释了系统在初始状态与最终状态的跃迁过程中可以同时存在任意数量的中间稳定状态, 发现适当数量的稳定状态可使周期势系统响应最大化. 在 Gaussian 白噪声和输入信号共同作用的周期势模型中, 通过矩方法^[31] 和仿真实验^[32] 详细分析了随机共振现象. 周期势系统的随机共振还在多种形式的噪声激励下得到研究, 例如多值噪声^[28]、Lévy 噪声^[33]、高斯色噪声^[34] 等. 但上述研究都是依据经典的 Langevin 方程进行, 且多稳态特征导致理论分析尤其缺乏, 主要局限在数值和实验方面的研究.

本文研究了外部周期信号驱动下含记忆阻尼函数的周期势系统的随机共振. 首先介绍了 GLE 描述的含记忆阻尼函数的二阶动力学模型. 然后, 在多稳态情形下, 率先推导了系统功率谱放大因子的解析表达式, 并进一步计算了系统的输入能量. 最后, 从这两个角度研究了周期势模型的随机共振现象, 详细分析了记忆效应和多稳态特征对共振行为影响.

2 系 统

本文考虑的模型描述了单位质量的粒子在周期势 $U(x)$ 中的运动, 其中系统含有依赖于时间变化的记忆阻尼函数, 且受到内部噪声和外部周期信

号的共同作用. 该数学模型通过广义 Langevin 方程表示为如下形式^[11]:

$$\ddot{x}(t) + \int_0^t \dot{x}(t')\gamma(t-t')dt' + \frac{dU(x)}{dx} = \zeta(t) + \varepsilon_0 \cos(\omega t), \quad (1)$$

其中 $x(t)$ 代表粒子运动的位移; 参数 ε_0 和 ω 分别表示外部周期信号的振幅和频率. 特别地, 内部噪声 $\zeta(t)$ 的均值为零, 其自相关函数与系统的记忆阻尼核 $\gamma(t)$ 之间满足涨落耗散理论^[15], 即

$$\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = k_B T \gamma(|t-t'|), \quad (2)$$

这里 k_B 是 Boltzmann 常数, T 是环境的绝对温度. 记忆核函数 $\gamma(t)$ 是由一个 Dirac delta 函数和一个含记忆时间 τ_c 的指数型函数构成^[13,14]:

$$\gamma(t) = 2\gamma_0\delta(t) + \frac{\Gamma}{\tau_c} \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right). \quad (3)$$

从记忆核函数方程 (3) 中容易发现方程 (2) 中的内部噪声 $\zeta(t)$ 可看作两个相互独立的噪声项之和, 即 Delta 关联的高斯白噪声和指数关联的色噪声. 因此, 系统 (1) 式具有短时间的 Markovian 特征和相对长时间的 non-Markovian 特征, 其中记忆效应由方程 (3) 中随时间演化而指数衰减的函数项来刻画, 这里参数 Γ 代表系统的记忆强度. 含此类记忆核的广义 Langevin 方程广泛应用于研究复杂环境下非线性系统的物理现象, 典型案例包括在具有均匀静磁场的平面上, 受双谱方式约束的带电粒子的轨道磁矩^[11]; 过阻尼双稳态模型中的随机共振现象^[35]; 带电粒子在黑体辐射中的弹道扩散行为^[36]. 当记忆性不存在时 ($\Gamma = 0$), 系统 (1) 式退化成了一个传统的高斯白噪声激励的二阶动力系统模型.

针对系统 (1) 式引入新变量 $y(t)$ 和 $z(t)$ 进行变换, 则原系统等价地描述为具有 Markovian 特性的 Langevin 方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -\gamma_0 y(t) - \Gamma[x(t) - z(t)]/\tau_c \\ \quad - \frac{dU(x)}{dx} + \sqrt{2T\gamma_0}\zeta_1(t) + \varepsilon_0 \cos(\omega t), \\ \dot{z}(t) = [x(t) - z(t)]/\tau_c + \sqrt{2T/\Gamma}\zeta_2(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中噪声项 $\zeta_1(t)$ 和 $\zeta_2(t)$ 是两个不关联的高斯白噪声, 满足统计性质: $\langle \zeta_i(t) \rangle = 0$, $\langle \zeta_i(t)\zeta_j(t') \rangle = \delta_{i,j}\delta(t-t')$ ($i, j = 1, 2$). 特别地, 方程组 (4) 中的新变量 $z(t)$ 具有如下形式:

$$z(t) = \frac{1}{\tau_c} \int_0^t x(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_c}\right) dt' + x(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) + \sqrt{\frac{2T}{\Gamma}} \int_0^t \zeta_2(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_c}\right) dt'. \quad (5)$$

令 $\rho(x, y, z, t)$ 表示方程 (1) 在 t 时刻处于状态 (x, y, z) 的概率密度函数, 则获得其满足的 Fokker-Planck 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [y\rho(x, y, z, t)] - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[-\gamma_0 y - \frac{\Gamma}{\tau_c}(x-z) - \frac{dU(x)}{dx} + \varepsilon_0 \cos(\omega t) \right] \rho(x, y, z, t) \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\tau_c}(x-z)\rho(x, y, z, t) \right] + T\gamma_0 \frac{\partial^2 \rho(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{T}{\Gamma} \frac{\partial^2 \rho(x, y, z, t)}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

对于 (6) 式中不含外部周期信号的情形 ($\varepsilon_0 = 0$), 在细致平衡条件下, 获得平稳概率密度函数 $\rho_{st}(x, y, z)$ 的解析表达式:

$$\begin{aligned} \rho_{st}(x, y, z) \\ = N \exp \left\{ -\frac{1}{T} \left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\tau_c}(x-z)^2 + U(x) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 N 表示全概率归一化的常数.

当系统 (1) 式受外部周期信号 $\varepsilon_0 \cos(\omega t)$ 作用时, 假定其振幅 ε_0 充分小以致能够进行小参数展开计算, 且信号为阈下激励. 同时, 限制频率 $\omega \ll 1$, 使得系统在一个信号周期内有足够长的时间达到局域平衡态, 即满足绝热驱动. 从而可获得 Fokker-Planck 方程 (6) 的准稳态解 [37], 其中广义势函数结合方程 (7) 整理为如下形式:

$$\tilde{U}(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\tau_c}(x-z)^2 + U(x) - \varepsilon_0 x \cos(\omega t). \quad (8)$$

本文考虑系统 (1) 为周期势系统, 即势函数 $U(x) = -\cos(m_0 x)$, 从而确定性系统 (4) 存在多个稳定平衡点 $s_n(x_{sn}, 0, x_{sn})$ 和不稳定平衡点是 $u_n(x_{un}, 0, x_{un})$, 其中 $x_{sn} = 2n\pi/m_0$, $x_{un} = (2n+1)\pi/m_0$, m_0 和 n 均为正整数. 如图 1(a) 所示, 随着 m_0 的变化, 势阱的宽度发生变化, 设置 m_0 的值可改变给定位移区间内稳态点的个数. 图 1(b) 给出了离散状

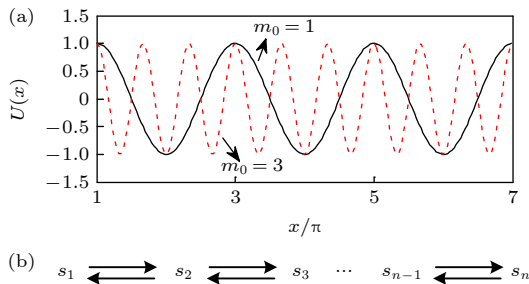


图 1 (a) 周期势函数; (b) 离散的多稳态过程

Fig. 1. (a) Periodic potential; (b) discrete multi-stable process.

态下该周期势系统在 n 个稳定状态之间跃迁的示意图. 可见, 周期势系统在两端状态之间的噪声诱导跃迁过程中同时存在多个中间稳定状态, 有必要进一步研究稳态点数量、温度及记忆效应对系统输出响应的影响.

3 随机共振

本节首先依据线性响应理论推导系统关于外部周期信号的响应振幅及功率谱放大因子的解析表达式; 再利用随机能量法进一步计算系统的输入能量; 然后, 从这两个方面分别验证周期势模型 (1) 式中随机共振现象的产生, 详细讨论记忆效应、温度及系统的多稳态特征对共振行为的影响.

3.1 功率谱放大因子

在绝热近似条件下 [2], 系统在每个稳定状态的吸引域内达到局域平衡所需的时间远小于系统在不同吸引域之间整体平衡需要的时间, 即单个稳态点处的局域平衡时间可以忽略, 故连续系统 (4) 式可近似转化为一类离散的多稳态 Markov 过程. 如图 1(b) 所示, 系统在稳定状态 s_i 处的吸引域内的概率 φ_i 可通过方程 (6) 中的概率密度函数表示为

$$\varphi_i(t) = \int_{x_{u_{i-1}}}^{x_{u_i}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, z, t) dz dy dx,$$

其满足概率交换的主方程:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1(t) = -\tilde{\alpha}_{1,2}\varphi_1(t) + \tilde{\alpha}_{2,1}\varphi_2(t), \\ \dot{\varphi}_i(t) = \tilde{\alpha}_{i-1,i}\varphi_{i-1}(t) - (\tilde{\alpha}_{i,i-1} + \tilde{\alpha}_{i,i+1})\varphi_i(t) \\ \quad + \tilde{\alpha}_{i+1,i}\varphi_{i+1}(t), \quad (2 \leq i \leq n-1), \\ \dot{\varphi}_n(t) = \tilde{\alpha}_{n-1,n}\varphi_{n-1}(t) - \tilde{\alpha}_{n,n-1}\varphi_n(t), \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\tilde{\alpha}_{i,i\pm 1}$ 表示系统从稳定状态 s_i 到相邻稳定状态 $s_{i\pm 1}$ 的概率跃迁速率, 借助方程 (4)、方程 (6) 及广

放大因子 $\eta_1 = [R/\varepsilon_0]^2$ ^[40] 的解析表达式:

$$\eta_1 = \frac{4\pi^2}{m_0^2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n i\omega(E_k^2 + \omega^2)^{-1} F_k \Theta_{k,i} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n iE_k(E_k^2 + \omega^2)^{-1} F_k \Theta_{k,i} \right]^2 \right\}. \quad (18)$$

功率谱放大因子 (18) 式适用于一般的周期势模型, 其依赖于周期势中连续平衡点的个数, 与位置无关. 在真实环境中, 受噪声和信号激励的多稳态系统, 其运动轨迹通常局限在一定的范围内, 如图 1(b) 所示的多稳态模型. 为分析多稳态特征及固定区间内稳态点数量对随机共振的影响, 本节主要考虑周期势系统 (1) 式的有限稳态点情形.

根据方程 (15) 和方程 (18), 图 2 展示了记忆时间 τ_c 对周期势模型的功率谱放大因子 η_1 和响应振幅 r_i 的影响. 在图 2(a) 中, η_1 随温度 T 的变化出现了显著的共振峰, 标志着随机共振现象的发生. 随着 τ_c 的增大, η_1 的峰值逐渐升高, 共振效应增强, 且共振峰位置向 T 减小的方向移动, 即噪声表现出对系统响应的建设性角色得到增强. 因此, 在周期势系统 (1) 中, 记忆时间对关于外部周期信号的输出响应具有积极的增强作用, 而相反的情形发生在含记忆阻尼的双稳态系统中^[35], 其中记忆性抑制了随机共振. 该现象可通过图 2(b) 得到解释, 对于固定的稳态点个数 $n = 30$ 和不同的 τ_c 值, 绘制了各个稳态点对应响应振幅 r_i 的变化曲线. 在两个边界的稳定状态处 (s_1 和 s_n), 响应振幅得到最大化, 并且朝向中间的稳定状态对称性减弱, 最终达到最小值. 这是由于处于中间状态的系统会等可能地跃迁到两个相邻的稳态点处, 而在边界的稳态点处跃迁是不对称的. 另外, 各个稳态点的响应振幅均随着 τ_c 的增加而增大, 即在适当的记忆时间作用下, 外部的弱周期信号在该周期势系统中得到进一步放大. 系统的记忆性是在复杂无序的非均匀环境下粒子运动所引发的, 不同的介质能够使历史速度产生不同的记忆时间, 而在类似于该周期势的多稳态系统中利用记忆效应将有助于增强随机共振行为.

为分析随机共振和验证理论结果的有效性, 数值计算了系统 (1) 的功率谱密度, 如图 3 所示, 其中选择 10^3 条样本轨迹, 采样频率 $F_s = 100$ Hz 以及数据长度 $N = 10^7$. 从图 3(a) 中看到, 功率谱密度在适中的温度值 ($T = 3$) 处呈现出显著的峰值,

且峰值对应的频率值 ($f = 0.00101$) 近似等于外部周期信号的驱动频率 ω , 而在一定的低温 ($T = 0.4$) 和高温 ($T = 50$) 下峰结构均减弱甚至消失. 这说明存在最优温度可使得系统出现随机共振现象, 从而导致噪声背景下的信号功率谱明显增加. 由于周期势系统具有无穷多个平衡点, 所以需要足够大的最优温度才能确保粒子连续地穿越势垒, 出现与驱动频率相一致的共振同步现象. 此外, 在给定的温度下, 图 3(b) 揭示了功率谱密度的峰值随着记忆时间 τ_c 的增加而逐渐升高, 表明记忆阻尼的存在可优化周期势系统的信号放大性能, 增强随机共振效应, 这与图 2 中的理论结果相一致.

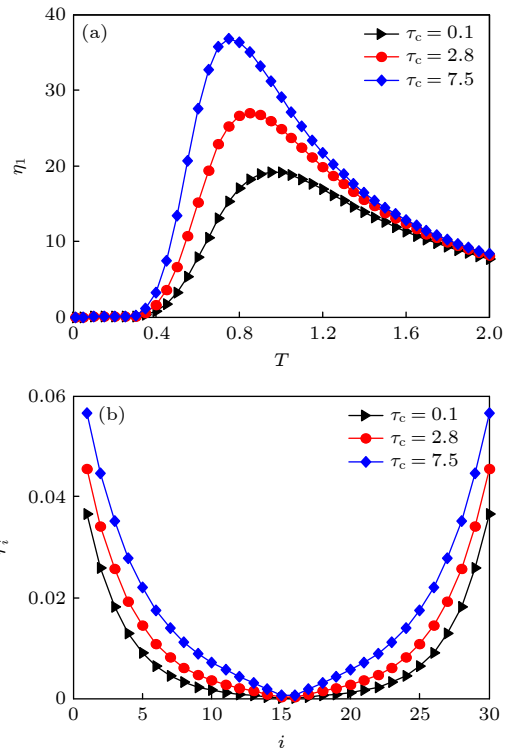


图 2 记忆时间 τ_c 对随机共振的影响 (a) 功率谱放大因子 η_1 随温度 T 的变化曲线 ($n = 6$); (b) 第 i 个稳态点对应的响应振幅 r_i 的变化曲线. 其他参数取值为 $\Gamma = 4$, $\gamma_0 = 1$, $\omega = 0.001$ 和 $m_0 = 1$

Fig. 2. The effects of memory time τ_c on stochastic resonance: (a) Spectral amplification η_1 versus temperature T ; (b) amplitude of the response r_i versus i . Other parameter values are chosen as $\Gamma = 4$, $\gamma_0 = 1$, $\omega = 0.001$ and $m_0 = 1$.

在图 4 中, 分析了周期势函数的稳态点个数 n 对功率谱放大因子 η_1 以及响应振幅 r_1 和 r_2 的影响. 从图 4(a) 中可观察到, 曲线 $\eta_1 - T$ 的峰值随着 n 的增加显著上升, 且共振峰位置向 T 增加的方向移动. 可见, 稳态点数量的增多能够明显增强

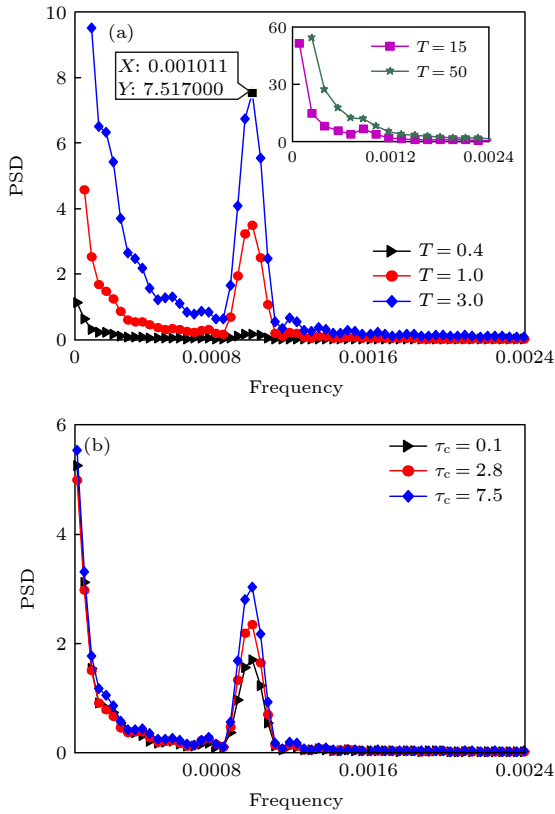


图 3 功率谱密度 (PSD) 作为频率的函数曲线 (a) 不同的温度 T 和 $\tau_c = 1$; (b) 不同的记忆时间 τ_c 和 $T = 0.75$. 其他参数取值为 $\Gamma = 4$, $\gamma_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 0.3$, $\omega = 0.001$ 和 $m_0 = 1$

Fig. 3. Power spectrum density (PSD) of the system as a function of frequency with different values of (a) temperature T ($\tau_c = 1$); (b) memory time τ_c ($T = 0.75$). Other parameter values are chosen as $\Gamma = 4$, $\gamma_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 0.3$, $\omega = 0.001$ and $m_0 = 1$.

随机共振现象. 由于多稳态系统中两个边界稳态点之间的距离随着 n 的增加而变大, 即粒子运动的位移区间长度 $2n\pi$ 变大, 因此系统在两个最外侧势阱之间可产生更大幅度的阱间响应, 同时需要足够大的温度, 这与图 3(a) 中的分析一致. 故在多稳态系统中, 通过适当增加稳定状态的数量, 随机共振现象将能够在较大的噪声强度处发生并显著增强, 从而有效提升强噪声环境中弱信号的探测能力. 在图 4(b) 中, 绘制了边界稳态点 s_1 对应的最大响应振幅 r_1 随温度的变化曲线, 其峰值随着 n 的增加而下降, 相反于图 4(a) 中功率谱放大因子的变化趋势. 这是由于在给定的激励条件下, 随着两个边界稳态点之间的距离变大, 粒子到达最外侧势阱的概率逐渐减小, 响应振幅减弱. 但在图 4(c) 中, 稳态状态 s_2 对应的响应振幅 r_2 , 其峰值随 n 的增加先上升, 再下降, 即存在最优稳态点个数使得响应振

幅最大化. 这表明在噪声和外部周期力的共同作用下, 多稳态系统在不同稳定状态之间的运动出现了更加复杂的动力学现象. 值得注意的是, 对于固定的稳定状态数, 功率谱放大因子和所有响应振幅均在一致的温度值处达到局部最大值, 如图 4 中标记的峰值. 故在给定的多稳态系统中, 两者均可用于衡量随机共振现象.

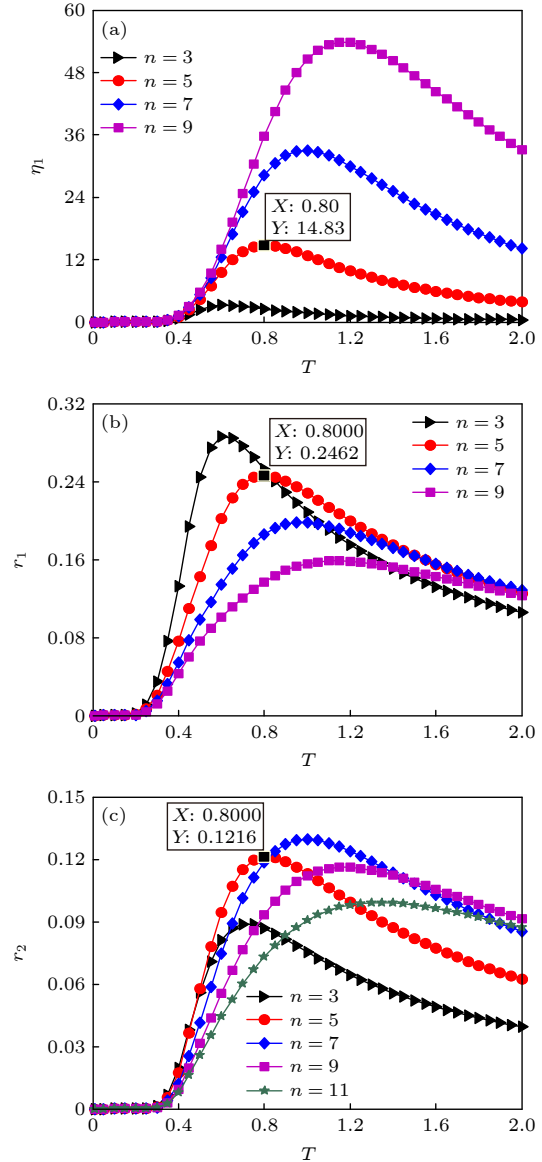


图 4 稳态点个数 n 对随机共振的影响 (a) 功率谱放大因子 η_1 随温度 T 的变化曲线; (b) 响应振幅 r_1 随 T 的变化曲线; (c) 响应振幅 r_2 随 T 的变化曲线. 其他参数取值为 $\tau_c = 3$, $\Gamma = 5$, $\gamma_0 = 1$, $\omega = 0.001$ 和 $m_0 = 1$

Fig. 4. The effects of the number of stable steady states n on stochastic resonance: (a) Spectral amplification η_1 versus temperature T ; (b) amplitude of the response r_1 versus T ; (c) amplitude of the response r_2 versus T . Other parameter values are chosen as $\tau_c = 3$, $\Gamma = 5$, $\gamma_0 = 1$, $\omega = 0.001$ and $m_0 = 1$.

考虑粒子在有限的范围内运动时, 稳态点数量对系统响应的影响. 在周期势 $U(x) = -\cos(m_0x)$ 中选择固定的位移区间, 即 $x \in [(2i-1)\pi/m_0, (2i+2n-1)\pi/m_0]$, 其中 i 是任意整数, 区间长度为 $2L\pi$ ($L = n/m_0$). 如图 1(a) 所示, 通过设置 m_0 的值可控制固定区间内系统稳态点的个数, 且势垒高度保持不变. 图 5 描述了在给定的区间范围内系统的功率谱放大因子 η_1 随区间内稳态点个数 n 的变化情况. 从图 5(a) 中观察到, 对于固定的区间长度 L , η_1 随区间内稳态点个数的增加展示了一个非单调的变化趋势. 此结果揭示了在粒子运动的区间范围内, 存在最优的稳态数量使得共振强度达到最佳, 优化系统关于驱动信号的输出响应. 随着 L 的增加, η_1 的峰值依次升高且位置向 n 增大的方向移动, 即粒子运动的有限区间长度与其内部的稳态点数量对增强系统响应的作用表现出正相关关系. 在实际环境中, 受噪声或外部信号驱动的系统, 其

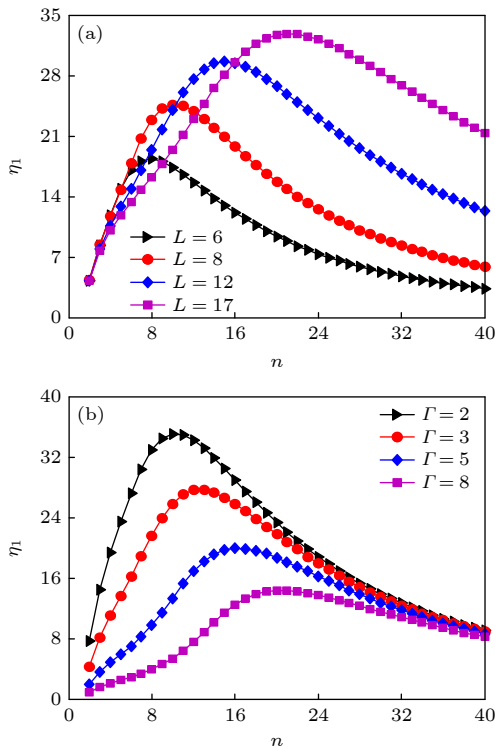


图 5 功率谱放大因子 η_1 作为区间内稳态点个数 n 的函数曲线 (a) 不同的区间长度 L 和 $\Gamma = 3$; (b) 不同的记忆强度 Γ 和固定的长度 $L = 10$. 其他参数取值为 $\tau_c = 4$, $\gamma_0 = 1$, $\omega = 0.002$ 和 $T = 0.8$

Fig. 5. Spectral amplification η_1 versus the number of stable steady states n with different values of (a) interval length L ($\Gamma = 3$) and (b) memory strength Γ ($L = 10$). Other parameter values are chosen as $\tau_c = 4$, $\gamma_0 = 1$, $\omega = 0.002$ and $T = 0.8$.

运动通常局限在一定的区间内, 考虑选取最优的稳态数量将有利于增强系统对外部弱信号的响应强度. 此外, 在固定的区间长度下 ($L = 10$), 图 5(b) 展示了记忆强度 Γ 对功率谱放大因子的影响. 随着 Γ 的增加, η_1 - n 曲线的峰值下降且形状趋于平缓, 即随机共振效应减弱, 而共振区域变宽, 同时峰值对应的稳态点数量也增多. 因此, 系统关于外部周期信号的响应不仅依赖于多稳态势函数, 而且与记忆性密切相关. 增大的记忆强度对共振行为呈现抑制作用, 但在合适数量的多稳态系统中共振现象又能得到增强. 在无序的媒介或复杂的环境中, 记忆强度反映了介质分子对粒子运动产生的记忆效应, 合理协调记忆强度和多稳态势函数的关系有助于提升系统的输出.

3.2 输入能量

周期势系统 (1) 具有无穷多个平衡点, 当粒子呈现出更加复杂的运动行为时, 可导致系统不满足如图 1(b) 所示的多个稳态之间的跃迁情形, 此时研究随机共振需借助系统的输入能量进行衡量. 在随机涨落的环境中, 分析外部周期力对系统做的功, 其随温度或噪声强度的变化可反映出能量在不同状态之间的转换.

依据随机能量公式 [29], 外部周期信号在一个周期内 $\tau_\omega = 2\pi/\omega$ 对系统所做的功或输入能量 W 可计算为

$$W_0(t_0, t_0 + \tau_\omega) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau_\omega} \frac{\partial U_e(x, t)}{\partial t} dt, \quad (19)$$

其中有效势函数 $U_e(x, t) = U(x) - \varepsilon_0 x \cos(\omega t)$, $U(x)$ 为图 1(a) 中的周期势函数.

在给定的初始条件下, 单一轨迹中 N_1 个信号周期的平均输入能量为

$$\bar{W} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=0}^{N_1} W_0[i\tau_\omega, (i+1)\tau_\omega]. \quad (20)$$

采用四阶 Runge-Kutta 算法对原系统进行离散化, 其中信号的周期个数设置为 $N_1 = 10^4$, 时间步长 $dt = 0.01$. 在 10^3 条不同初始条件的样本轨迹下, 对相应的平均输入能量方程 (20) 进行平均, 最终得到所有样本轨迹的平均输入能量 $\langle \bar{W} \rangle$.

根据方程 (20), 在不同的环境温度 T 下, 图 6 展示了单一轨迹的平均输入能量 \bar{W} 随初始位置 $x(0)$ 的变化情况. 在图 6(a) 中, 当温度较低时 (如

$T = 0.001$), 平均输入能量的值仅分布在两条线附近, 即 $\bar{W} = 0.092$ 和 $\bar{W} = 1.214$. 这种现象说明广义 Langevin 方程描述的周期势系统 (1) 存在两个不同的稳定状态: $\bar{W} = 0.092$ 对应的动力学状态称为相内状态, $\bar{W} = 1.214$ 对应的动力学状态称为相外状态^[30]. 为进一步理解这两个状态, 图 6(a) 中的插图画出了两个不同初值的输出信号的时间历程. 从图中可以看出, 初值 $x(0) = 0.16\pi$ 的输出信号振幅小, 对应相内状态, 且与输入信号间的相位差近似为 $\phi_1 = -0.086\pi$; 初值 $x(0) = 0.83\pi$ 的输出信号振幅大, 对应相外状态, 且与输入信号间的相位差近似为 $\phi_2 = -0.565\pi$. 然而, 如图 6(b) 所示, 当温度增加到 0.003 时, 位于 $\bar{W} = 1.214$ 线上的点逐渐向 $\bar{W} = 0.092$ 靠近, 即系统从输入能量大的相外状态开始向输入能量小的相内状态进行转移. 该现象暗示了粒子在这两个稳定的动力学状态之间可能存在着连续的跃迁行为, 同时为随机共振现象的发生提供了条件. 从图 6(c) 中看到, 随着温度的继续增加 ($T = 0.009$), 位于 $\bar{W} = 1.214$ 线上的点已经大范围的向 $\bar{W} = 0.092$ 附近移动. 当温度增加到

0.018 时, 如图 6(d) 所示, 此时的相外状态已完全转变为相内状态, 系统的输入能量达到最小值. 如果温度进一步增加, 系统又将开始从相内状态向相外状态进行转移, 特别地, 在给定的温度或噪声强度处, 若系统能够在两个稳定状态之间的转移达到一个最佳效应, 则意味着随机能量共振现象的出现.

通过对所有样本轨迹的平均输入能量 \bar{W} 进行平均得到 $\langle \bar{W} \rangle$. 在不同的记忆强度 Γ 下, 图 7 分别给出了 $\langle \bar{W} \rangle$ 和对应的平均输出信号与输入信号间的相位差 $\bar{\phi}$ 随温度 T 的变化情况. 从图 7(a) 中看到, 当 $\Gamma = 0.02$ 时, $\langle \bar{W} \rangle$ 随着 T 的增加先快速下降至谷底, 再逐渐上升到峰值, 最后呈现单调递减的趋势. 也就是说, $\langle \bar{W} \rangle$ 在 $T = 0.02$ 处达到了最小值, 这是由于系统的相外状态完全转变成了相内状态, 如图 6(d) 所示. 而 $\langle \bar{W} \rangle$ 在 $T = 0.22$ 处达到了最大值, 意味着随机共振现象发生. 由此可见, 在温度的变化过程中, 外部周期信号对系统所做的功先后得到抑制和增强, 且在随机共振背景下所做的功达到最大. 当温度进一步升高时, 破坏了系统的有序输出, 外部周期信号对系统所做的功减弱. 随着

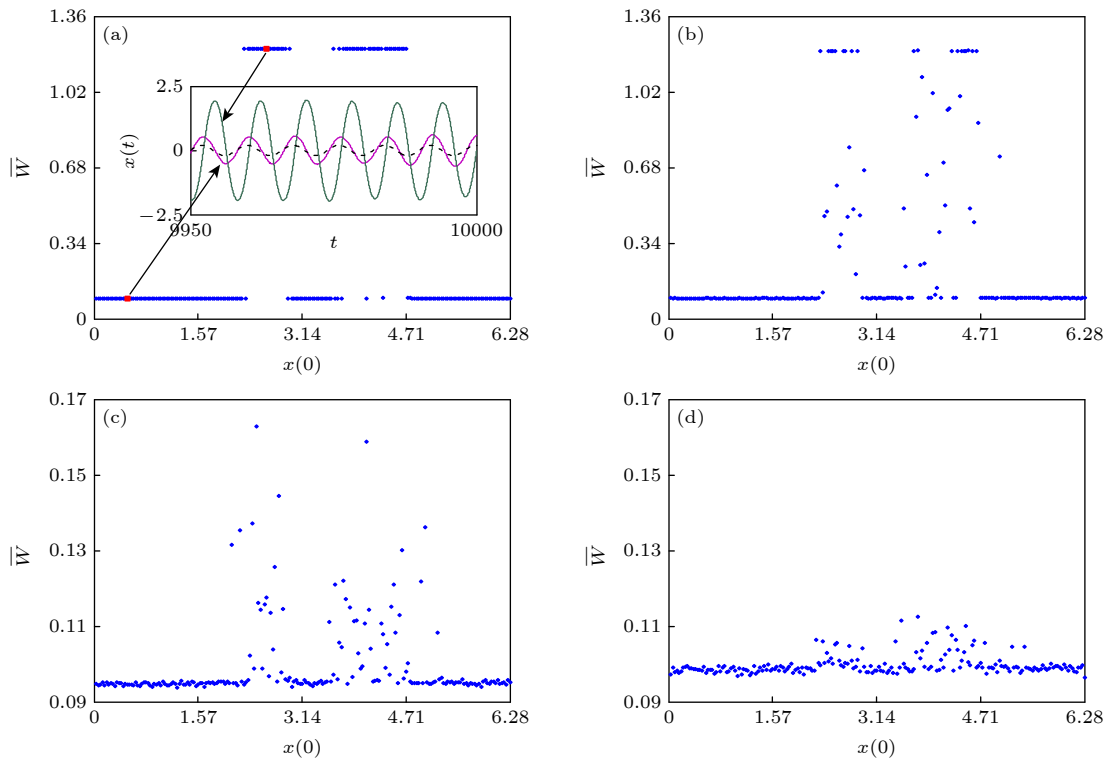


图 6 平均输入能量 \bar{W} 作为初始位置 $x(0)$ 的函数随不同温度 T 的变化情况, 黑色线代表系统的输入信号 $\varepsilon_0 \cos(\omega t)$: (a) $T = 0.001$; (b) $T = 0.003$; (c) $T = 0.009$; (d) $T = 0.018$. 其他参数取值为 $\tau_c = 2.3$, $\gamma_0 = 0.12$, $\Gamma = 0.02$ 和 $\omega = \pi/4$

Fig. 6. Average input energy \bar{W} averaged over an entire trajectory with initial position $x(0)$ for different values of temperature T , where the black line denotes the input signal $\varepsilon_0 \cos(\omega t)$: (a) $T = 0.001$; (b) $T = 0.003$; (c) $T = 0.009$; (d) $T = 0.018$. Other parameter values are chosen as $\tau_c = 2.3$, $\gamma_0 = 0.12$, $\Gamma = 0.02$ and $\omega = \pi/4$.

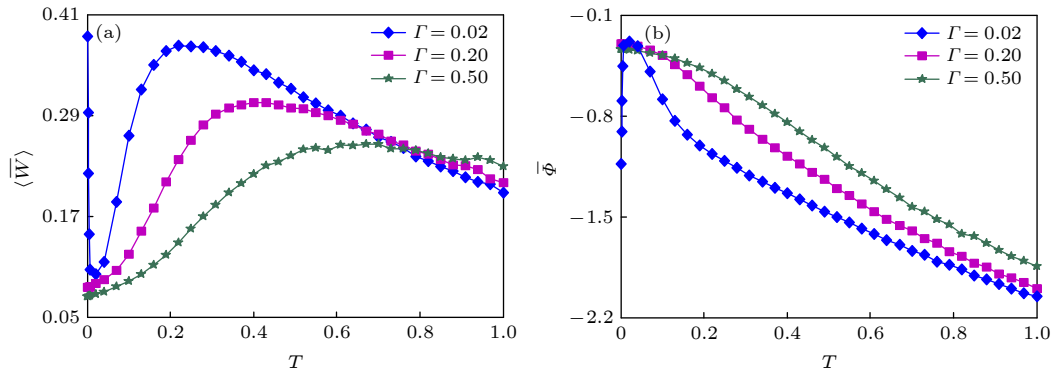


图 7 记忆强度 Γ 对输入能量的影响 (a) 平均输入能量 $\langle \bar{W} \rangle$ 随温度 T 的变化曲线; (b) 相位差 $\bar{\phi}$ 随 T 的变化曲线. 其他参数取值为 $\tau_c = 2.3$, $\gamma_0 = 0.12$ 和 $\omega = \pi/4$

Fig. 7. The effects of memory strength Γ on input energy: (a) Average input energy $\langle \bar{W} \rangle$ versus temperature T ; (b) phase lag $\bar{\phi}$ versus T . Other parameter values are chosen as $\tau_c = 2.3$, $\gamma_0 = 0.12$ and $\omega = \pi/4$.

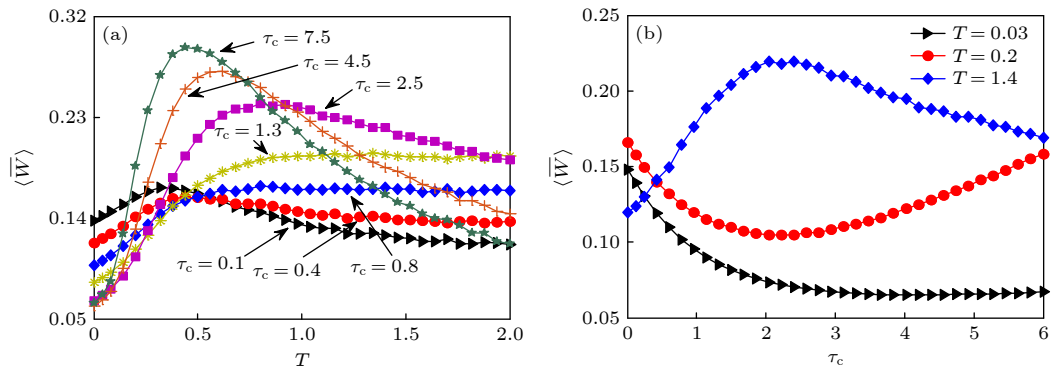


图 8 记忆时间 τ_c 对输入能量的影响 (a) $\langle \bar{W} \rangle$ 随 T 的变化曲线; (b) $\langle \bar{W} \rangle$ 随 τ_c 的变化曲线. 其他参数取值为 $\Gamma = 0.7$, $\gamma_0 = 0.12$ 和 $\omega = \pi/4$

Fig. 8. The effects of memory time τ_c on input energy: (a) $\langle \bar{W} \rangle$ versus T ; (b) $\langle \bar{W} \rangle$ versus τ_c . Other parameter values are chosen as $\Gamma = 0.7$, $\gamma_0 = 0.12$ and $\omega = \pi/4$.

Γ 的增大, $\langle \bar{W} \rangle$ 的最小值消失, 峰值降低. 这说明在较低的温度下较大的记忆强度导致系统处于相内状态, 随着温度的增加又开始出现相内与相外两个状态之间的转变, 发生随机共振行为. 增加的记忆强度使得共振效应减弱和共振区域变宽, 这与图 5(b) 中功率谱放大因子的变化一致. 另一方面, 基于线性响应理论, 得到如图 7(b) 所示的平均输出信号与输入信号之间的相位差 $\bar{\phi}$. 当 $\Gamma = 0.02$ 时, $\bar{\phi}$ 随着 T 的增加展示了一个非单调的变化行为, 即在 $T = 0.02$ 处存在最大值. 然而, 当 Γ 增大时, $\bar{\phi}$ 随着 T 的变化单调递减, 最大值消失. 通过对比图 7(a) 与图 7(b) 发现, 当平均输出信号与输入信号间的相位差达到最大值时, 平均输入能量在相同的温度处达到最小值; 当相位差的最大值不存在时, 平均输入能量的最小值也对应消失.

图 8 分析了记忆时间 τ_c 对平均输入能量 $\langle \bar{W} \rangle$

的影响. 从图 8(a) 中发现, 当 τ_c 从 0.1 增加到 0.4 时, $\langle \bar{W} \rangle$ - T 曲线的峰值呈现下降趋势, 峰的位置向温度 T 增大的方向移动. 结果说明较短的记忆时间能够减弱周期势系统 (1) 的输出响应, 对随机共振效应起到抑制作用, 从而降低外部周期信号对系统所做的功. 这不同于记忆时间在如图 1(b) 所示的多稳态系统中对输出响应的作用, 在图 2(a) 中该记忆时间对共振行为呈现增强作用. 所以, 若粒子在周期势中出现不同于图 1(b) 所示的跃迁行为, 即产生了更加复杂无序的运动现象, 则记忆时间对共振行为的影响也会产生差异性. 当 τ_c 继续增加, 且处于范围 $0.8 \leq \tau_c \leq 1.3$ 时, $\langle \bar{W} \rangle$ - T 曲线的峰形状趋于平缓, 共振区域变宽. 然而, 当 τ_c 继续增大到 2.5 时, $\langle \bar{W} \rangle$ - T 曲线重新出现了显著的共振峰. 特别地, 随着 τ_c 的进一步增大, 其峰值明显上升, 共振区域变窄, 同时共振峰的位置向温度 T 减

小的方向移动,但在无记忆阻尼的周期势系统中^[34],色噪声相关时间的增大却导致输入能量的共振区域变宽,诱导共振的最优温度增加.所以,较长的记忆时间有利于提升系统对外部周期信号的输出响应强度,且能够增强噪声在共振行为中的角色.显然,不同长短的记忆时间在温度变化过程中对系统的平均输入能量具有显著差异性.为了直观地分析,图 8(b) 给出了 $\langle \bar{W} \rangle$ 作为记忆时间的函数随不同温度的变化曲线.当温度变得足够低时(比如: $T = 0.03$), $\langle \bar{W} \rangle$ 是 τ_c 的单调递减函数,故在低温状态下,记忆时间的增加将引起外部周期信号对系统输入能量的减少.当 T 增加到 0.2 时, $\langle \bar{W} \rangle$ 随着 τ_c 的增加先下降,再上升,即在 $\tau_c = 2.04$ 处系统的平均输入能量达到最小值,从而抑制随机共振效应.但是,当温度上升到一定高度时 ($T = 1.4$), $\langle \bar{W} \rangle$ 作为 τ_c 的函数展示了一个类似共振的非单调变化行为,称为记忆时间诱导的共振.因此,在给定的较高温度状态下,存在着最优的记忆时间能够使得外部周期信号对系统的输入能量达到最大值.针对周期势系统 (1) 关于外部驱动信号的输出响应,图 8 中的结果揭示了记忆时间对它的影响密切依赖于粒子所处的环境温度.

4 结 论

针对广义 Langevin 方程描述的含记忆阻尼的周期势系统,主要研究了该系统在外部周期力作用下的随机共振.由于系统的多稳态特征和 non-Markovian 性质导致理论分析困难,故引入变量变换将原始的 non-Markovian 模型等价转化为多维 Markovian 系统.根据线性响应理论,推导出了适用于一般多稳态模型的功率谱放大因子,揭示了记忆效应和多稳态特征对随机共振的影响,并得到数值结果的验证.分析表明,记忆时间的延长和稳态数量的增多均对共振行为有增强作用,但诱导共振产生的温度变化不同.对于固定的系统位移区间,存在最优稳态点数量使得共振效应最佳,同时记忆强度对系统输出响应的影响依赖于稳定状态的个数.然而,当周期势系统呈现出更加复杂的运动行为时,通过输入能量发现,记忆时间对随机共振起着先减弱再增强的作用,即在适当温度范围内,合理控制记忆时间可优化外部周期力对系统所做的功.

本文获得的解析结果为周期势系统中共振现象的研究及应用提供理论指导作用.具有记忆阻尼的随机动力系统多用于描述粒子在复杂无序的非均匀环境中运动,接下来可进一步考虑外部噪声及与内部噪声的互关联性对共振行为的影响.由于周期势系统的多稳态特征,上述随机共振理论可有效应用于机械故障诊断中微弱信号的检测.

参考文献

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [2] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [3] Nicolis C 2010 *Phys. Rev. E* **82** 011139
- [4] Qiao Z J, Lei Y G, Li N P 2019 *Mech. Syst. Sig. Process.* **122** 502
- [5] Goychuk I, Pöschel T 2020 *New J. Phys.* **22** 113018
- [6] Mokshin A V, Yulmetyev R M, Hänggi P 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 200601
- [7] Despósito M A, Pallavicini C, Levi V, Bruno L 2011 *Physica A* **390** 1026
- [8] Tolić-Nørrelykke I M, Munteanu E L, Thon G, Oddershede L, Berg-Sørensen K 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 078102
- [9] Viñales A D, Despósito M A 2006 *Phys. Rev. E* **73** 016111
- [10] Bao J D, Zhuo Y Z 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 138104
- [11] Goychuk I 2010 *Chem. Phys.* **375** 450
- [12] Wang K G, Masoliver J 1996 *Physica A* **231** 615
- [13] Xu P F, Jin Y F 2020 *Chaos, Solitons & Fractals* **138** 109857
- [14] Kumar N 2012 *Phys. Rev. E* **85** 011114
- [15] Kubo R, Toda M, Hashitsume N 1985 *Statistical Physics II: Non-equilibrium Statistical Mechanics* (Berlin: Springer-Verlag) p31
- [16] Goswami G, Mukherjee B, Bag B C 2005 *Chem. Phys.* **312** 47
- [17] Hohenegger C, Durr R, Senter D M 2017 *J. Non-Newton. Fluid* **242** 48
- [18] Zhong S C, Zhang L, Wang H Q, Ma H, Luo M K 2017 *Nonlinear Dyn.* **89** 1327
- [19] Xie W X, Li D P, Xu P F, Cai L, Jin Y F 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 100502 (in Chinese) [谢文贤, 李东平, 许鹏飞, 蔡力, 靳艳飞 2014 物理学报 **63** 100502]
- [20] He G T, Guo D L, Tian Y, Li T J, Luo M K 2017 *Physica A* **484** 91
- [21] Hasegawa H 2013 *Physica A* **392** 2532
- [22] Srokowski T 2013 *Eur. Phys. J. B* **86** 239
- [23] Coffey W T, Kalmykov Y P, Massawe E S 1993 *Phys. Rev. E* **48** 77
- [24] Elston T C, Peskin C S 2000 *SIAM J. Appl. Math.* **60** 842
- [25] Hänggi P, Bartussek R, Talkner P, Lúczka J 1996 *Europhys. Lett.* **35** 315
- [26] Reenbohn W L, Mahato M C 2015 *Phys. Rev. E* **91** 052151
- [27] Li J H 2010 *J. Phys. Condens. Mater.* **22** 115702
- [28] Jin Y F, Ma Z M, Xiao S M 2017 *Chaos, Solitons & Fractals* **103** 470
- [29] Saikia S 2014 *Physica A* **416** 411
- [30] Reenbohn W L, Pohlong S S, Mahato M C 2012 *Phys. Rev. E* **85** 031144
- [31] Xie Y, Liu R N 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 120501 (in Chinese) [谢勇, 刘若男 2017 物理学报 **66** 120501]
- [32] Sawkmie I S, Mahato M C 2019 *Commun. Nonlinear Sci.*

Numer. Simul. **78** 104859[33] Liu R N, Kang Y M 2018 *Phys. Lett. A* **382** 1656[34] Liu K H, Jin Y F 2013 *Physica A* **392** 5283[35] Neiman A, Sung W 1996 *Phys. Lett. A* **223** 341[36] Bao J D, Bai Z W 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1845[37] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 802 (inChinese) [康艳梅, 徐健学, 谢勇 2003 物理学报 **52** 802][38] Nicolis C 2012 *Phys. Rev. E* **86** 011133[39] Dykman M I, Haken H, Hu G, Luchinsky D G, Mannella R, Meclintock P V E, Ning C Z, Stein N D, Stocks N G 1993 *Phys. Lett. A* **180** 332[40] Jin Y F 2012 *Physica A* **391** 1928

Stochastic resonance in periodic potential system with memory damping function*

Xu Peng-Fei¹⁾ Gong Xu-Lu²⁾ Li Yi-Wei¹⁾ Jin Yan-Fei^{3)†}

1) (*Department of Mathematics, Shanxi Agricultural University, Taigu 030801, China*)

2) (*School of Software, Shanxi Agricultural University, Taigu 030801, China*)

3) (*Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

(Received 17 September 2021; revised manuscript received 22 December 2021)

Abstract

The stochastic dynamical system with memory effects describes a non-Markovian process that can happen in some complex systems or disordered media, such as viscoelastic media and living cell. Its velocity yields the memory effects because of the nonlocality in time, giving rise to a generalized Langevin equation for describing the dynamics of the system. In particular, the friction term in generalized Langevin equation is given by the time-dependent memory kernel. Besides, the research of stochastic resonance in periodic potential models emerges as an important subject because such systems have potential applications in diverse areas of natural sciences. However, the analysis of the influence of memory on stochastic resonance has not been reported so far in periodic potential model. In this paper, the phenomenon of stochastic resonance is investigated in the periodic potential system with friction memory kernel driven by an external periodic signal and internal noise. The generalized Langevin equation is converted into the three-dimensional Markovian Langevin equations. Analytical expression for the spectral amplification, together with the amplitude of the response, is derived in the periodic potential with an arbitrary number of simultaneously stable steady states, which can be applied to the general multi-stable dynamical model. The obtained results indicate that the curve of spectral amplification versus temperature exhibits a pronounced peak. Obviously, this typical phenomenon is a signature of stochastic resonance. The stochastic resonance effect is enhanced with the increase of the memory time or the number of stable steady states. For a certain range of the particle motion, the existence of an optimal number of stable steady states for which the output of the system can be maximized is established. Moreover, the phenomenon of stochastic resonance is studied according to the stochastic energetics. The average input energy per period is calculated over all the trajectories for quantifying stochastic resonance. It is found that the stochastic resonance effect is first weakened and then enhanced with increasing memory time. Specifically, under appropriate temperature conditions, there is an optimal memory time, which can maximize the work done by the external periodic force on the system.

Keywords: stochastic resonance, periodic potential system, generalized Langevin equation

PACS: 05.40.-a, 05.10.Gg, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.71.20211732

* Project supported by the Excellent Talents Coming to Shanxi Reward Scientific Research Project, China (Grant No. SXBYKY2021081), the Starting Foundation of Scientific Research for the Doctor of Shanxi Agricultural University, China (Grant No. 2021BQ12), the Science and Technology Innovation Foundation for Young Scientists of Shanxi Agricultural University, China (Grant Nos. 2019019, 2020QC04), and the Teaching Reform Project for Postgraduate of Beijing Institute of Technology, China.

† Corresponding author. E-mail: jinyf@bit.edu.cn