

## 在超强磁场中修正的相对论电子压强\*

董爱军<sup>1)2)4)</sup> 高志福<sup>2)†</sup> 杨晓峰<sup>2)</sup> 王娜<sup>2)</sup> 刘畅<sup>1)</sup> 彭秋和<sup>3)</sup>

1) (贵州师范大学物理与电子科学学院, 贵阳 550001)

2) (中国科学院新疆天文台, 乌鲁木齐 830011)

3) (南京大学天文与空间科学学院, 南京 210000)

4) (贵州省射电天文数据处理重点实验室, 贵阳 550001)

(2022年1月13日收到; 2022年10月12日收到修改稿)

当前脉冲星领域一个重要的研究热点是磁星. 本文在朱翠等 (Zhu C, Gao Z F, Li X D, Wang N, Yuan J P, Peng Q H 2016 *Mod. Phys. Lett. A* **31** 1650070) 工作的基础上, 重新研究了磁星超强磁场下 ( $B \gg B_{\text{cr}}$ ,  $B_{\text{cr}}$  是电子的量子临界磁场) 电子朗道能级的稳定性及其对电子压强的影响. 首先, 对弱磁场极限下 ( $B \ll B_{\text{cr}}$ ) 中子星内部电子压强进行必要的回顾; 然后, 通过引入电子朗道能级稳定性系数  $g_\nu$  和 Dirac- $\delta$  函数, 推导出在超强磁场下修正的相对论电子压强  $P_e$  的表达式, 给出表达式适用条件: 物质密度  $\rho \geq 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  和  $B_{\text{cr}} \leq B < 10^{17} \text{ G}$  ( $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ ). 超强磁场通过修正相对论电子的相空间, 提高了电子数密度  $n_e$ , 而  $n_e$  的增加意味着  $P_e$  的增加. 利用修正的电子压强表达式, 讨论了超强磁场下费米子自旋极化现象、电子磁化现象以及超强磁场对物态方程的修正. 最后, 本文的结果与其他类似工作进行对比, 并对未来的工作进行展望. 本文的研究将为磁星以及强磁化白矮星的物态方程和热演化的探索提供极有价值的参考, 将为普通射电脉冲星等离子磁层数值模拟、高磁场脉冲星辐射机制等相关研究提供有用的信息.

关键词: 超强磁场, 朗道能级, 磁星, 磁化

PACS: 05.70.Ce, 71.70.Di, 13.40.Hq, 95.30.Qd

DOI: 10.7498/aps.72.20220092

## 1 引言

磁星是主要由磁场提供辐射能量的一类脉冲星, 属于近些年来被关注的特殊类的致密天体<sup>[1,2]</sup>, 其表面磁场超过电子的临界磁场  $B_{\text{cr}}$  ( $B_{\text{cr}} = 4.41 \times 10^{13} \text{ G}$  ( $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ )), 在这样强的磁场下, 电子朗道能级被强烈地量子化<sup>[3,4]</sup>. 磁星的典型特征之一是 X 射线波段和软  $\gamma$  射线波段有着超过爱丁顿光度的短期爆发; 部分磁星会发射出中等或巨型闪耀, 后者在不到 0.5 s 内能释放出高达  $10^{46} \text{ erg}$  ( $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$ ) 的能量. 软  $\gamma$  射线重复暴和反常 X 射线脉冲星被认为是磁星候选者. 磁星和太阳耀发

常被解释为由剧烈磁重联引起, 但是磁星在宁静状态下 X 射线辐射常被归因于超强磁场的衰减<sup>[3-7]</sup>.

中子星内部处于  $\beta$  平衡中的完全简并的相对论电子气体, 其分布函数  $f(E_e)$  服从费米-狄拉克统计. 当温度  $T \rightarrow 0$  时, 电子化学势  $\mu_e$  称为电子费米能  $E_F^e$ . 电子费米能  $E_F^e$  是致密星物态方程中一个非常重要的物理量. 近年来, 国内外不少作者对致密星环境下的物态方程、中微子辐射和相对论电子进行关注和研究<sup>[8-14]</sup>. 其中, 刘晶晶等<sup>[15-19]</sup> 对包括修正的 Urca 过程、 $\beta$  衰变、电子俘获以及中微子吸收等进行长期的研究, 并取得了丰硕的成果. 高志福等<sup>[20]</sup> 通过引入超强磁场下的 Dirac- $\delta$  函数, 给出了超强磁场下简并的相对论电子压强  $P_e$ . (若

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12041304, U1831120)、新疆维吾尔自治区自然科学基金 (批准号: 2022D01A155)、贵州省科技计划 (批准号: [2019]1241, KY(2020)003) 和中科院高层次人才计划择优支持项目 (批准号: [2019]085) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhifugao@xao.ac.cn

无特殊强调, 本文  $P_e$  单位均为  $\text{dyn}\cdot\text{cm}^{-2}$ ) 的一个特解:

$$P_e \approx 6.266 \times 10^{30} \rho B Y_e / (0.0535 \rho_0 B_{\text{cr}}), \quad (1)$$

其中  $Y_e$  是电子丰度,  $B$  是磁场强度,  $\rho$  是物质密度, 饱和核密度  $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . 方程 (1) 的适用范围为  $\rho \geq 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  和  $B_{\text{cr}} \leq B < 10^{17} \text{ G}$ . 文献 [20] 的主要结论有: 磁场强度越大, 电子压强越大, 磁星的总压强总是各向异性的, 与普通射电脉冲星相比, 磁星可能是密度更大的中子星; 若考虑磁能对物态方程的贡献, 磁星的质量可能更大.

朱翠等 [21] 通过引入电子朗道能级稳定性系数, 研究了磁星内部电子朗道能级的稳定性, 推导出超强磁场下相对论  $E_F^e$  的特解, 并讨论了特解的适用范围. 1965 年, Kubo [22] 给出关于强磁化电子气体的微观状态数  $N_{\text{pha}}$  的计算, 得出在超强磁场中  $E_F^e$  随  $B$  的增加而减低的结论, 彭秋和等 [23] 对这种计算方法有所质疑. 我们发现文献 [22] 人为地引入了一个错误的假设, 即将非相对论电子回旋运动方程的解应用到相对论电子运动中, 给出超强磁场中电子气体在  $z$  轴方向  $p_z \rightarrow p_z + dp_z$  的动量区间能态密度  $N_{\text{pha}}(dp_z) = \frac{eB}{4\pi \hbar^2} \frac{dp_z}{c}$ , 得出  $E_F^e \propto 1/B$  的结论, 其中  $\hbar$  表示被约化的普朗克常数. 在过去的 50 年中, 其他作者反复地引用文献 [22], 这可能导致人们错误地理解强磁化中子星的物理. 当然, 由于地球上缺乏中子星量级的强磁场, 人们无法在实验室中直接验证  $E_F^e$  与  $B$  的关系. 我们认为在超强磁场下处理量子化的电子朗道能级应该引入 Dirac- $\delta$  函数, 如果  $B \geq 10^{17} \text{ G}$ , 窄长的朗道柱面将会简化为一维或二维的线性链, 文献 [20, 21] 中的结论将不再适用.

由于篇幅的局限性, 朱翠等 [21] 没有对超强磁场中电子压强  $P_e$  和磁场强度  $B$ 、物质密度  $\rho$  及电子丰度  $Y_e$  之间关系进行研究, 因此没有给出关于  $P_e$  与  $B$  的表达式, 而这样的表达式无疑对于修正中子星的物态方程至关重要. 第 2 节对中子星内部弱磁场近似下的电子压强进行回顾; 第 3 节推导出超强磁场中修正的电子压强表达式, 并与其他工作进行对比; 第 4 节讨论超强磁场对电子相空间的修正、超强磁场下费米子极化和磁化问题; 第 5 节在相对论平均场模型下给出超强磁场对物态方程影响的相关估算, 讨论中子星内部压强的各向异性; 第 6 节进行总结与展望.

## 2 中子星弱磁场极限下的电子压强

如果中子星内部磁场太弱, 磁场对  $E_F^e$  的影响可以忽略. 在弱磁场极限下  $B \ll B_{\text{cr}}$ ,  $E_F^e$  和  $P_e$  均由  $\rho$  和  $Y_e$  共同决定,  $P_e$  可写成多方形式:  $P_e = K\rho^\Gamma$ , 其中  $K$  和  $\Gamma$  为常数, 在以下两种情况下取值不同.

1) 对于非相对论性电子,  $\rho \ll 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,

$$\Gamma = 5/3, \quad K = 1.036 \times 10^{13} / (A/Z)^{5/3}; \quad (2)$$

2) 对于相对论性电子,  $\rho \geq 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,

$$\Gamma = 4/3, \quad K = 1.235 \times 10^{15} / (A/Z)^{4/3}. \quad (3)$$

这里,  $A$  和  $Z$  分别表示核子数和质子数. 对于  $Z$  和  $A$  都给定的原子核, 电子与质子的丰度相等:  $Y_e = Y_p = Z/A$ ; 对于理想的中子-质子-电子 (n-p-e) 气体,  $Y_e = Y_p = n_e / (n_p + n_n) \approx n_e / n_N$ , 其中  $n_p$ ,  $n_n$  和  $n_N$  分别表示质子数密度、中子数密度和核子数密度. 将电子数密度  $n_e = N_A \rho Y_e$  ( $N_A$  为阿伏伽德罗常数) 代入方程 (2) 和方程 (3) 中, 得到中子星壳层中  $P_e$  随  $n_e$  的关系  $P_e = 2.45 \times 10^{-17} n_e^{4/3}$ , 该式由李新虎等 [24] 文章中的方程 (14) 可以很容易算出.

图 1 给出了弱磁场极限下中子星内部相对论电子的  $P_e$  随  $n_e$  的变化. 可以看出,  $P_e$  随  $n_e$  的增加而增大, 点-虚线 ( $dM/d\rho > 0$ ) 表示星体的质量随着物质密度的增加而增大, 具有这样质量的中子星是稳定的; 实线 ( $dM/d\rho < 0$ ) 表示星体质量随密度的增加而减小,  $dM/d\rho < 0$  这样的中子星不稳定.

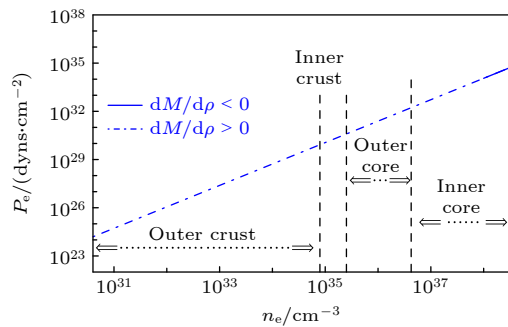


图 1 中子星内部弱磁场极限下相对论电子压强  $P_e$  随电子数密度  $n_e$  的变化

Fig. 1. Relativistic electron pressure  $P_e$  with electron number density  $n_e$  in the limit of weak magnetic field inside a neutron star.

## 3 超强磁场中相对论电子的压强

### 3.1 超强磁场中电子朗道能级稳定性

为了得到超强磁场中修正的电子压强表达式,

需要回顾朱翠等<sup>[21]</sup>的工作. 他们首次引入超强磁场中电子的朗道能级稳定系数  $g_\nu$ , 并假定  $g_\nu$  具有幂率指数的形式:

$$g_\nu = g_0 \nu^\alpha \quad (\nu \geq 1), \quad (4)$$

式中  $\nu = n + 1/2 + \sigma$  是电子占据的朗道能级数,  $n$  是主量子数,  $\sigma = \pm 1/2$  是电子自旋值, 自旋向下 ( $\downarrow$ ) 的电子占据的能级数  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ , 自旋向上 ( $\uparrow$ ) 的电子占据的能级数  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ;  $g_0$  和  $\alpha$  分别表示电子的基态能级稳定性系数和能级稳定性指数. 当  $\nu = 1$  时,  $g_0 = g_1$ , 即基态和第一激发态能级具有相同的稳定性. 为简化起见, 假定  $g_0 = g_1 = 1$ . 由量子力学可知, 占据能级数  $n$  较大的电子具有较高的能量, 容易发生激发跃迁, 从而占据  $\nu$  较低的能级, 并且  $\nu$  越大能级稳定性越低, 即  $g_\nu < g_{\nu-1} < g_{\nu-2}$ , 因此  $\alpha$  为负数. 在超强磁场中, 电子的费米面变成了狭长的朗道柱面. 定义无量纲磁场  $B^* = B/B_{cr}$ , 电子最大的朗道能级数为<sup>[21]</sup>

$$\nu_{\max}(\sigma = 1/2) = \text{Int} \left\{ \frac{1}{2B^*} \left[ \left( \frac{E_F^e}{m_e c^2} \right)^2 - 1 - \left( \frac{p_z}{m_e c} \right)^2 \right] - 1 \right\}, \quad (5)$$

$$\nu_{\max}(\sigma = -1/2) = \text{Int} \left\{ \frac{1}{2B^*} \left[ \left( \frac{E_F^e}{m_e c^2} \right)^2 - 1 - \left( \frac{p_z}{m_e c} \right)^2 \right] \right\}, \quad (6)$$

其中  $\text{Int}[\cdot]$  表示对括号内的值取最大整数,  $\sigma = \pm 1/2$  是电子自旋,  $p_z$  为电子在  $z$  轴方向的动量,  $m_e$  是电子的质量,  $c$  是光速. 不难看出,  $\nu_{\max}$  随磁场增强而减小.

### 3.2 超强磁场中电子能态密度

将电子磁矩假定在一个沿着  $z$  轴方向的强磁场  $B^*$  中, 电子的费米能为

$$(p_z c)^2 + m_e^2 c^4 + 2\nu B^* m_e^2 c^4 \equiv (E_F^e)^2, \quad (7)$$

其中,  $p_z = 0 - E_F^e/c$ . 在弱磁场极限下, 最大的朗道能级数  $\nu_{\max} \rightarrow \infty$ ; 在超强磁场中,  $\nu_{\max}$  由  $p_z^F \geq 0$  或由  $(E_F^e)^2 \geq m_e^2 c^4 (1 + 2\nu B^*)$  限制. 值得注意的是, 非相对论磁场下所引入的连续变量  $p_x$  和  $p_y$  必须用垂直于磁场方向的量子化电子动量  $p_\perp = m_e c (2\nu B^*)^{1/2}$  代替<sup>[20]</sup>. 在六维相空间中, 电子微观状态数为

$$N_{\text{pha}} = \frac{2\pi}{h^3} \int_0^{p_z^F} dp_z g_\nu \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} D_\nu \times \int \delta \left[ \frac{p_\perp}{m_e c} - (2\nu B^*)^{1/2} \right] p_\perp dp_\perp, \quad (8)$$

其中,  $\delta[p_\perp/m_e c - (2\nu B^*)^{1/2}]$  为 Dirac- $\delta$  函数, 物理意义是: 由于朗道能级强量子化, 在第  $n$  个和第  $n+1$  朗道环面之间不存在任何微观量子态.  $D_\nu$  表示自旋简并度, 当  $\nu = 0$  时,  $D_\nu = 1$ ,  $\nu \geq 1$ ,  $D_\nu = 2$ , 则方程 (8) 写为

$$N_{\text{pha}} = \frac{2\pi}{h^3} \left( \frac{m_e c}{h} \right)^3 \int_0^{p_z^F} d \left( \frac{p_z}{m_e c} \right) g_\nu \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}(\sigma=-1/2)} \int \delta \left[ \frac{p_\perp}{m_e c} - (2\nu B^*)^{1/2} \right] \left( \frac{p_\perp}{m_e c} \right) d \left( \frac{p_\perp}{m_e c} \right) + \sum_{\nu=1}^{\nu_{\max}(\sigma=1/2)} \int \delta \left[ \frac{p_\perp}{m_e c} - (2\nu B^*)^{1/2} \right] \left( \frac{p_\perp}{m_e c} \right) d \left( \frac{p_\perp}{m_e c} \right) \right\}. \quad (9)$$

由方程 (5) 和方程 (6) 可知, 当  $p_z = 0$  时, 则有

$$\nu_{\max} \left( \sigma = \frac{1}{2} \right) = \nu_{\max} \left( \sigma = -\frac{1}{2} \right) \approx \text{Int} \left[ \frac{1}{2B^*} \times \left( \frac{E_F^e}{m_e c^2} \right)^2 \right], \quad (10)$$

于是方程 (9) 被化简为

$$N_{\text{pha}} = 2\pi \left( \frac{m_e c}{h} \right)^3 \int_0^{p_z^F} \sqrt{2B^*} g_\nu \left[ \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}(\sigma=-1/2)} \sqrt{\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu_{\max}(\sigma=1/2)} \sqrt{\nu+1} \right] d \left( \frac{p_z}{m_e c} \right). \quad (11)$$

将方程 (10) 代入方程 (11) 后, 则有

$$N_{\text{pha}} = 2^{3/2} \pi \sqrt{B^*} \left( \frac{m_e c}{h} \right)^3 g_0 \int_0^{p_z^F} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} \nu^\alpha (\sqrt{\nu} + \sqrt{\nu+1}) d \left( \frac{p_z}{m_e c} \right), \quad (12)$$

引入比率  $q = I_2/I_1$ , 其中

$$I_1 = \int_0^{\nu_{\max}} \nu^{\alpha+1/2} d\nu, \quad I_2 = \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} \nu^{\alpha+1/2}. \quad (13)$$

当  $\nu_{\max} \geq 6$  时, 比率  $q \approx 1$ , 方程 (11) 中的求和用积分来代替, 具体为

$$\sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} \nu^{\alpha+1/2} \approx \int_0^{\nu_{\max}} \nu^{\alpha+1/2} d\nu = \frac{2}{2\alpha+3} \nu_{\max}^{\alpha+3/2}. \quad (14)$$

引入变量  $t = p_z c / E_F^e$ , 于是方程 (12) 被简化为

$$N_{\text{pha}} = \frac{2^{2-\alpha}}{2\alpha+3} \frac{\pi}{(B^*)^{1+\alpha}} g_0 \lambda_e^{-3} \times \left( \frac{E_F^e}{m_e c^2} \right)^{(2\alpha+4)} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+3/2} dt, \quad (15)$$

式中  $\lambda_e = h/(m_e c)$  表示电子的康普顿波长.

### 3.3 超强磁场中相对论电子的压强

根据泡利不相容原理的要求, 电子能态密度等于电子数密度, 于是得到

$$N_{\text{pha}} = \frac{2^{2(1-\alpha)}}{2\alpha+3} \frac{\pi}{(B^*)^{1+\alpha}} g_0 \lambda_e^{-3} \left( \frac{E_F^e}{m_e c^2} \right)^{2\alpha+4} I(\alpha) = n_e = N_A \rho Y_e, \quad (16)$$

其中,

$$I(\alpha) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+3/2} dt. \quad (17)$$

求解方程 (16) 给出

$$E_F^e = \left[ \frac{2\alpha+3}{2^{2-\alpha} \pi g_0 I(\alpha)} \right]^{\frac{1}{2(\alpha+2)}} \left( \frac{h}{m_e c} \right)^{\frac{3}{2(\alpha+2)}} \times m_e c^2 (B^*)^{\frac{1+\alpha}{2(\alpha+2)}} n_e^{\frac{1}{2(\alpha+2)}}. \quad (18)$$

对于极端相对论的电子, 无量纲的费米动量  $x_e = p_F^e / (m_e c) \gg 1$ , 于是得到

$$E_F^e = m_e c^2 (1+x_e^2)^{1/2} \approx hc (n_e 3\pi^2)^{1/3} = 6.12 \times 10^{-11} n_e^{1/3} \text{ MeV}. \quad (19)$$

即  $E_F^e$  始终是由  $n_e$  确定, 而后者由  $B$ ,  $\rho$  和  $Y_e$  共同决定. 高志福等<sup>[20]</sup> 已经证明: 在平行和垂直于磁场方向电子的最大动量都等于电子的费米动量  $p_F^e$ ,

$$p_{//\max} = p_{\perp\max} = p_F^e = E_F^e / c = h (n_e 3\pi^2)^{1/3}. \quad (20)$$

将电子动量进行体积分, 得到电子压强:

$$P_e = \frac{2}{3h^2} \int_0^{p_F^e} \frac{p^2 c^2 \cdot 4\pi p^2 dp}{(p^2 c^2 + m_e^2 c^2)^{1/2}} = 1.41 \times 10^{24} \varphi(x_e), \quad (21)$$

式中  $\varphi(x_e)$  是多项式,

$$\varphi(x_e) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x_e (1+x_e^2)^{1/2} (2x_e^2/3 - 1) + \ln [x_e + (1+x_e^2)^{1/2}] \right\}. \quad (22)$$

当相对论电子的无量纲动量  $x_e \gg 1$  时, 则  $\varphi(x_e) \rightarrow x_e^4 / 12\pi^2$ , 则方程 (21) 变为

$$P_e \approx 2.13 \times 10^{31} (B/B_{\text{cr}})^{2/3} [\rho Y_e / (0.00565 \rho_0)]^{4/3} = 2.45 \times 10^{-17} (B^*)^{2/3} n_e^{4/3}. \quad (23)$$

方程 (23) 适用于  $\rho \geq 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  和  $B_{\text{cr}} < B < 10^{17} \text{ G}$ . 相比于方程 (1), 方程 (23) 中磁场指数减小了 1/3, 即电子压强随磁场强度增加较缓. 图 2 显示了不同强磁场中  $P_e$  随  $\rho$  的变化, 当  $\rho$  是一个给定值时,  $P_e$  随  $B^*$  的增加而增大; 当给定  $B^*$  时,  $P_e$  随  $\rho$  的增加而增大.

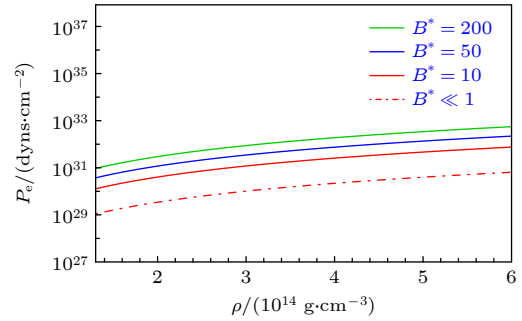


图 2 不同磁场下中子星内部电子压强  $P_e$  随物质密度  $\rho$  的变化

Fig. 2. Relation between electron pressure  $P_e$  and matter density  $\rho$  in neutron stars with different magnetic fields.

中子星壳层以电子简并压为主导, 特别是在年轻的强磁化中子星 (如磁星), 星体壳层中磁化率、热导率、比热等物理量振荡行为可能与费米面附近的电子在强磁场中的活动性有关, 这些行为本质上体现了电子朗道能级的不稳定性, 未来我们将深入地讨论上述问题. 近 30 年来, 强磁场对电子朗道能级的影响早已引起人们广泛的关注, 研究结果已成功应用于依靠电子简并压来抵抗引力的白矮星研究之中<sup>[25-31]</sup>. 下面将以三篇典型性的工作<sup>[25-27]</sup> 为例, 对强磁场中电子气体的压强的计算方法进行简介, 将前人的工作及与本文的工作进行对比.



根据文献 [25–27], 通过引入与本文相同的电子自旋简并度  $D_\nu$ , 弱磁场极限中的电子态密度  $2h^{-3} \int d^3p$  将由强磁场中电子态密度  $2e\nu(h^2c)^{-1} \times \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} D_\nu \int dp_z$  来代替. 在一个沿着  $z$  方向超强磁场  $B^*$  中, 电子能量本征态  $E_\nu$  为 [25]

$$p_z^2 c^2 + m_e^2 c^4 (1 + 2\nu B^*) = E_\nu^2. \quad (24)$$

比较发现方程 (24) 与方程 (7) 一致. 超强磁场中电子数密度  $n_e$  为

$$n_e = \frac{2B^*}{(2\pi)^2 \lambda_e^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} D_\nu x_e(\nu),$$

$$x_F(\nu) = [\varepsilon_F^2 - (1 + 2\nu B^*)]^{1/2}, \quad (25)$$

这里  $x_F(\nu) = p_F(\nu)/m_e c$  表示无量纲电子费米动量,  $\varepsilon_F = E_\nu/m_e c^2$  是无量纲的电子费米能,  $x_F(\nu)$  与方程 (19) 中  $x_e$  的定义完全相同, 但  $x_e$  的表达式中不含能级数  $\nu$ ; 由方程 (25) 得到超强磁场中最大能级数  $\nu_{\max} = (\varepsilon_F^2 - 1)/2B^*$ , 这与方程 (16) 中约等式  $\nu_{\max} \approx \text{Int}(\varepsilon_F^2/2B^*)$  完全一致. 物质密度  $\rho = m_H n_e/Y_e$ , 其中  $m_H$  是氢原子质量. 在零温和超强磁场中电子的能量密度  $\varepsilon_e$  和压强  $P_e$  分别为 [25]

$$\varepsilon_e = \frac{2B^*}{(2\pi)^2 \lambda_e^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} D_\nu \int_0^{x_F(\nu)} E_\nu d\left(\frac{p_z}{m_e c}\right)$$

$$= \frac{2B^* m_e c^2}{(2\pi)^2 \lambda_e^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} D_\nu (1 + 2\nu B^*)$$

$$\times \psi \left[ \frac{x_F(\nu)}{(1 + 2\nu B^*)^{1/2}} \right], \quad (26)$$

$$P_e = n_e^2 \frac{d}{dn_e} \left( \frac{\varepsilon_e}{n_e} \right) = -\varepsilon_e + n_e E_\nu$$

$$= \frac{2B^* m_e c^2}{(2\pi)^2 \lambda_e^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} g_\nu (1 + 2\nu B^*)$$

$$\times \eta \left[ \frac{x_F(\nu)}{(1 + 2\nu B^*)^{1/2}} \right], \quad (27)$$

其中,

$$\psi(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad (28)$$

$$\eta(x) = x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \quad (29)$$

方程 (27) 和方程 (23) 是  $P_e$  在超强磁场中两种不同的表达式. 两者存在相同点和差异性, 相同点包括:

- 1) 电子看成理想的气体, 并且忽略了电子反常磁矩;
- 2) 电子压强都与磁场强度  $B^*$ 、电子数密度  $n_e$  和电子费米能  $E_F^e$  有关, 并且  $n_e$  和  $E_F^e$  都是包含  $B^*$  的复杂函数;
- 3) 给定  $n_e$  和  $E_F^e$ ,  $P_e$  随  $B^*$  的增加而增大;
- 4) 随着磁场的增加, 由方程 (27) 拟合的压强随密度变化曲线会出现不规则的突起或波动, 这是因为在第  $\nu$  个能级电子能态由部分填充到完全填充转变, 或电子由第  $\nu$  个到第  $\nu+1$  个能级跃迁引起, 这种现象被认为与费米面附近的电子在超强磁场中行为有关 [25,26], 其本质上体现了朗道能级不稳定性.

两者的差异性在于: 1) 方程 (27) 是一个包含能级数  $\nu$ 、复杂的求和公式, 并且  $\nu_{\max}$  取值非常小, 通常情况下  $0 \leq \nu_{\max} \leq 3$  [26–28]; 费米面附近的电子主要集中在基态  $\nu = 0$  和第一激发态  $\nu = 1$ , 有意思的是在给定电子费米能和物质密度时,  $B^*$  越强,  $\nu_{\max}$  越小, 并且  $\nu$  值小的能级所对应的电子压强较大; 在超强磁场下, 随着电子能量值的增加, 电子态密度下降到非常小的值, 使得压强梯度变得非常陡峭, 增加了电子的向外简并压, 从而解释了超钱德拉塞卡质量极限的强磁化白矮星; 2) 本文给出的方程 (23) 是一个没有包含能级数  $\nu$ 、简洁的积分表达式, 但在推导过程中要求  $\nu_{\max}$  取值较大, 通常情况下  $\nu_{\max} \geq 6$ , 使得求和变为积分, 在超强磁场下, 电子态密度和电子能量值同时增加, 电子向外简并压也随之增加, 不需要考虑电子压强的梯度, 同样支持强磁化白矮星模型. 产生上述差异性的原因是: 在以往的工作中没有引入电子朗道能级稳定性系数和 Dirac- $\delta$  函数.

图 3 是本文工作与超强磁场中电子数密度和电子压强其他研究的对比. 图 3(a) 显示强磁化白矮星中电子压强  $P_e$  随  $\rho$  的变化 [28]. 白矮星由碳元素  $^{12}\text{C}$  组成, 压强  $P = P_e + P_L$ , 这里  $P_e$  是按照方程 (27) 计算的电子压强,  $P_L$  是晶格压强 (受磁场影响忽略不计); 此外实线、长虚线、短虚线和点线分别表示星体中心磁场  $B^* = 0, 10, 100$  和  $200$  时的拟合曲线. 比较发现: 当  $0 \leq B^* \leq 10$  时, 磁场对白矮星的状态方程和星体结构的影响非常小; 当  $B^* \gg 1$  时 (如  $B^* \geq 100$ ), 强磁场的效应则不能忽略. 图 3(a) 中, 由于  $P_L \ll P_e$ , 因此不需要考虑  $P_L$ . 图 3(a) 还表明在相同的物质密度下,  $P_e$  随  $B^*$  的增加而增大, 且曲线出现多处突起, 说明电子的朗道能级不稳定.

与强磁化白矮星对比, 图 3(b) 给出了中子星内壳层  $n_e$  在不同磁场下随  $\rho$  的变化 [29], 点线、虚线

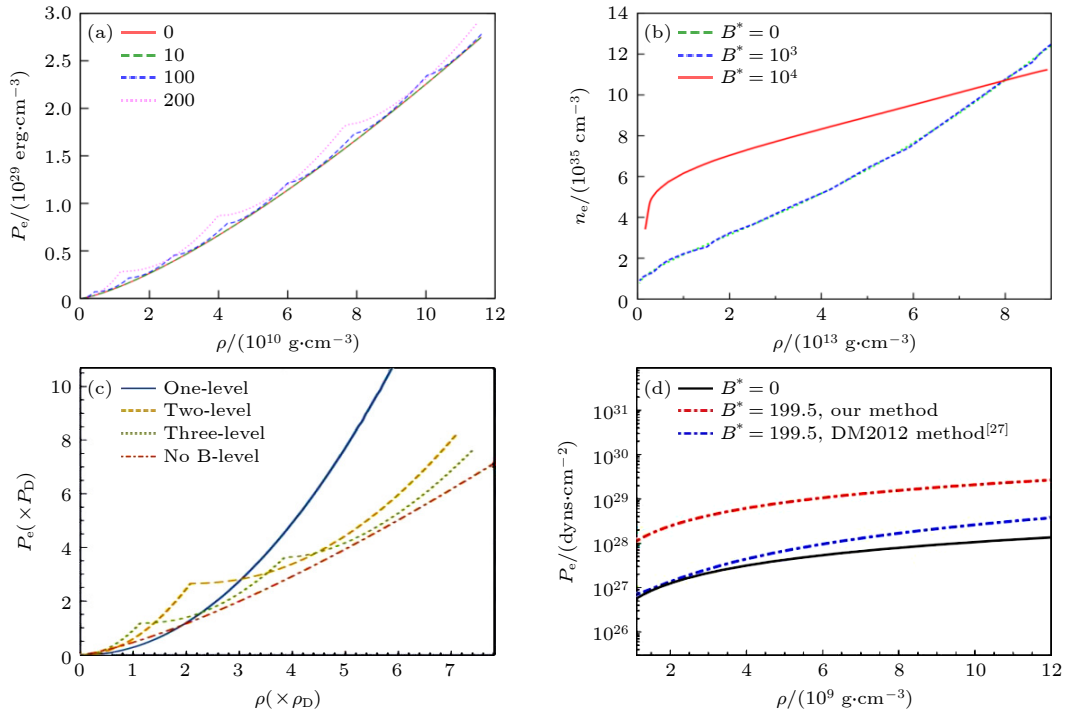


图3 本文与其他强磁场中电子数密度和电子压强研究的对比 (a) 强磁化白矮星中电子压强  $P_e$  随  $\rho$  变化关系; (b) 中子星壳层电子数密度  $n_e$  随  $\rho$  变化关系; (c) 磁化白矮星中 (最大电子费米能量  $E_{\text{Fmax}} = 20m_e c^2$ ) 电子压强  $P_e$  随  $\rho$  变化关系; (d) 两种不同的理论模型下白矮星中电子压强  $P_e$  随  $\rho$  变化关系

Fig. 3. Study of electron number density and electron pressure in strong magnetic fields by other authors and their comparison with this work: (a) Relationship between electron pressure  $P_e$  and  $\rho$  in a strongly magnetized white dwarf (WD); (b) relationship between the electron number density  $n_e$  and  $\rho$  in the crust of a neutron star; (c) electron pressure  $P_e$  as a function of  $\rho$  in a magnetized WD with maximum electron Fermi energy  $E_{\text{Fmax}} = 20m_e c^2$ ; (d) electron pressure  $P_e$  as a function of  $\rho$  in a magnetized WD under two different theoretical models.

和实线分别表示壳层磁场强度  $B^* = 0, 10^3$  和  $10^4$  时的拟合曲线, 后两条曲线由方程 (23) 拟合得到. 对于  $B^* = 10^3$  或更小的场强, 大量的朗道能级被电子填充, 电子数密度与零磁场的结果几乎没有区别. 对于较强磁场, 例如  $B^* = 10^4$ , 电子分布在第 0 个 ( $\nu = 0$ ) 朗道能级或某个质量密度范围内的几个能级, 在这种情况下与零磁场情况相比, 电子数密度显著增强. 而本文的计算给出关系式:  $n'_e = (B^*)^{1/6} n_e$ , 其中  $n'_e$  和  $n_e$  分别为超强磁场下和零磁场下的电子数密度. 这个关系式应用到中子星壳层, 给出的电子数密度变化趋势与图 3(b) 给出的变化趋势基本一致, 因为强磁场通过对晶格能的修正会改变原子核的序列, 提高质子丰度和核子平衡密度, 电子的化学势也得到提升, 相关的工作可以参考作者在 2013 年的工作 [20]. 然而在密度较高时, 在图 3(b) 中没有看到电子丰度的增加, 反而是电子数密度变化随磁场的增加而减低, 这与本文给出的结论相反. 文献 [29] 给出有意思的解释: 在强磁

场下, 在密度较高区域从原子核中流出的中子减少. 在中子星高密度区域, 如外核与内核区, 由于中子简并压主导中子星的物态方程, 文献 [29] 对电子压强不再讨论. 需要强调的是, 文献 [29] 给出  $B^* = 10^4$  这样的强磁场超出本文电子压强表达式的适用范围, 给出的低磁场  $B^* \leq 10^3$  与本文给出的低磁场  $B^* \leq 1$  相差较大.

图 3(c) 展示磁化白矮星中电子压强  $P_e$  随物质密度  $\rho$  的变化 [27], 其中  $P_D = 2.67 \times 10^{27} \text{ dyn}\cdot\text{cm}^{-2}$ ,  $\rho_D = 2.0 \times 10^9 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , 实线、长虚线和短虚线分别表示强磁场下  $\nu_{\text{max}} = 1, 2$  和 3 时的拟合曲线. 具体方法如下: 假定白矮星核心处存在一个最高的电子费米能  $E_{\text{Fmax}} = 20m_e c^2$ , 令  $\nu_{\text{max}} = 1, 2$  和 3, 可以得到核心磁场  $B^* = 199.5, 99.75$  和 66.5 (见文献 [27] 中的表 1). 由于相对论的电子费米能最低值为  $E_\nu = 2m_e c^2$ , 当电子费米能由最低值向最高值转变时, 可以得到一组递增的费米能值, 给定一个费米能, 由方程 (25) 得到电子数密度  $n_e$ , 然后利用

$\rho = m_{\text{H}}n_{\text{e}}/Y_{\text{e}}$  计算出相应的物质密度  $\rho$  ( $Y_{\text{e}} = 0.5$ ), 由方程 (27) 计算出相应的  $P_{\text{e}}$ . 图 3(c) 显示  $B^*$  随  $\nu_{\text{max}}$  的增加而减小, 在相同的密度下,  $P_{\text{e}}$  随  $B^*$  的增加而增大, 这与方程 (23) 给出的变化趋势一致, 不同点在于文献 [27] 采用的  $\nu_{\text{max}}$  比本文采用的  $\nu_{\text{max}}$  要小得多 (至少小 50% 以上).

为了和文献 [27] 的结果进行比较, 图 3(d) 给出两种不同的理论模型下白矮星中电子压强  $P_{\text{e}}$  随物质密度  $\rho$  的变化, 密度范围为  $\rho = 1.2 \times 10^9 - 1.17 \times 10^{10} \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . 黑色实线表示  $B^* = 0$  时  $P_{\text{e}}$  随  $\rho$  的变化, 根据  $P_{\text{e}} = 2.45 \times 10^{-17} n_{\text{e}}^{4/3} = 2.45 \times 10^{-17} (N_{\text{A}}\rho Y_{\text{e}})^{4/3}$  得到  $P_{\text{e}}$  的变化范围为  $6.31 \times 10^{26} - 1.35 \times 10^{28} \text{ dyn}\cdot\text{cm}^{-2}$ , 红色点-虚线表示在  $E_{\text{Fmax}} = 20m_{\text{e}}c^2$  和  $B^* = 199.5$  情况下  $P_{\text{e}}$  随  $\rho$  的变化. 为了简化计算, 取  $\nu_{\text{max}} = 1$ , 由方程 (27) 得到  $P_{\text{e}}$  的变化范围为  $8.46 \times 10^{27} - 3.27 \times 10^{28} \text{ dyn}\cdot\text{cm}^{-2}$ ; 蓝色点-虚线表示在  $B^* = 199.5$  时  $P_{\text{e}}$  随  $\rho$  的变化, 由方程 (23) 得到  $P_{\text{e}}$  的变化范围为  $1.24 \times 10^{28} - 2.56 \times 10^{29} \text{ dyn}\cdot\text{cm}^{-2}$ . 对比 DM2012 模型 [27], 发现在相同的磁场下电子压强随密度增加较快, 所对应的最大电子费米能远大于  $20m_{\text{e}}c^2$ , 这是因为两种不同的理论模型给出电子数密度、电子费米能和电子压强的计算方法存

在着一定的差异.

## 4 超强磁场下量子电动力学现象

### 4.1 超强磁场对电子相空间的修正

超强磁场通过修正相对论电子的相空间, 会导致简并的相对论电子重新分布. 根据泡利不相容原理, 电子将从朗道能级的最低量子能态填充到最高能态. 随着磁场强度  $B$  的增加, 越来越多的电子占据更高的朗道能级, 但随着电子朗道能级数的增加, 电子朗道能级稳定性系数会减小. 在超强磁场中电子数密度的增加意味着电子简并压强的增加.

在中子星内部, 简单的中子衰变和连续的电子俘获同发生, 然而超强磁场可能会使前者的速率大于后者. 由于更多的中子转化为质子, 质子的丰度增加, 根据电中性要求, 电子丰度相应增加, 因此  $n_{\text{e}}$  也会增加; 另外, 由核物理知识可知, 质子的丰度反映核物质的非对称性, 质子丰度的值与核物质的对称能、体积束缚能等参量密切相关 [30–35]; 超强磁场可能会增加核物质的非对称性, 提高质子的丰度, 因此核物质的平均电子数密度也相应地增加. 当然, 这些理论上的可能性有待于实验验证.

表 1 在相对论平均场 TMA 参数模型下  $n_{\text{N}}$ ,  $E_{\text{F}}^{\text{e}}$ ,  $P_{\text{e}}$ ,  $P$  和  $M$  的部分计算值

Table 1. Partial calculations of  $n_{\text{N}}$ ,  $E_{\text{F}}^{\text{e}}$ ,  $P_{\text{e}}$ ,  $P$  and  $M$  in a relativistic mean field model with the TMA parameter set.

$B \ll B^*$					$B > B^*$				
$n_{\text{N}}/\text{fm}^{-3}$	$E_{\text{F}}^{\text{e}}/\text{MeV}$	$P_{\text{e}}/(\text{MeV}\cdot\text{fm}^{-3})$	$P/(\text{MeV}\cdot\text{fm}^{-3})$	$M/M_{\odot}$	$E_{\text{F}}^{\text{e}}/\text{MeV}$	$P_{\text{e}}/(\text{MeV}\cdot\text{fm}^{-3})$	$P/(\text{MeV}\cdot\text{fm}^{-3})$	$M/M_{\odot}$	
0.0013	2.924	$4.9 \times 10^{-10}$	$3.78 \times 10^{-6}$	0.0289	3.351	$8.41 \times 10^{-10}$	$3.79 \times 10^{-6}$	0.0311	
0.0211	23.49	$2.03 \times 10^{-6}$	$6.79 \times 10^{-5}$	0.0593	27.62	$2.88 \times 10^{-6}$	$7.36 \times 10^{-5}$	0.0613	
0.0772	68.58	$1.47 \times 10^{-4}$	0.0021	0.0517	81.06	$2.87 \times 10^{-4}$	0.00258	0.0543	
0.1332	107.89	$9.04 \times 10^{-4}$	0.0143	0.2904	128.65	0.00182	0.0179	0.2932	
0.1554	120.90	0.0014	0.0229	0.4201	145.13	0.00295	0.0725	0.4241	
0.2003	143.58	0.0028	0.0475	0.6884	175.48	0.00632	0.0861	0.6965	
0.2338	158.31	0.0042	0.0724	0.8808	183.72	0.00762	0.0965	0.8912	
0.3206	190.04	0.0087	0.1624	1.2945	251.49	0.0267	0.2105	1.3062	
0.3556	200.78	0.0108	0.2092	1.4236	273.35	0.0372	0.2761	1.4327	
0.4186	218.29	0.0151	0.3065	1.6071	312.72	0.0637	0.4211	1.6223	
0.4746	231.98	0.0193	0.4068	1.7263	347.67	0.0974	0.5816	1.7412	
0.5446	247.31	0.0249	0.5479	1.8312	391.12	0.1561	0.8278	1.8522	
0.6076	259.75	0.0304	0.6880	1.8947	429.70	0.2264	1.0272	1.9132	
0.6846	273.65	0.0374	0.8737	1.9444	456.80	0.2905	1.3092	1.9675	
0.7266	280.73	0.0414	0.9809	1.9621	480.23	0.3551	1.4782	1.9853	
0.8396	298.23	0.0528	1.2845	1.9830	526.73	0.5135	1.9521	2.0061	
0.9156	318.40	0.0655	1.5925	1.9916	586.65	0.7478	2.5316	2.0342	

## 4.2 超强磁场下费米子自旋极化现象

最近,不少工作<sup>[35–39]</sup>对中子星内部零温 ( $T = 0$ ) 和强磁场下费米子系统自旋极化现象进行研究. 本节考虑自然单位制, 费米子数密度为<sup>[36]</sup>

$$n_f = [2\mu'_f B (2\mu'_f B + 2m_f)]^{3/2} \times (2\gamma_f^{3/2} - 1) / (6\pi^2), \quad (30)$$

式中,无量纲变量 ( $\varepsilon(B)$  是单粒子的能量)  $\gamma_f$  的表达式为

$$\gamma_f = [\varepsilon^2(B) - m_f^2] [2\mu'_f B (2\mu'_f B + 2m_f)]^{-1}, \quad (31)$$

此外,  $\mu'_f$  和  $m_f$  分别为费米子磁矩和质量. 通过运算, 得到自旋平行于和反平行于磁场  $B$  方向的粒子数密度分别为

$$\begin{aligned} n_{\uparrow}(B) &= n_f \cdot \gamma_f^{3/2} (2\gamma_f^{3/2} - 1)^{-1}, \\ n_{\downarrow}(B) &= n_{\uparrow}(B) (1 - \gamma_f^{-3/2}). \end{aligned} \quad (32)$$

从方程 (32) 可以看出, 当  $\gamma_f \rightarrow \infty$  时, 对应零磁场下粒子自旋完全非极化场景, 有  $n_{\uparrow} = n_{\downarrow} = n/2$ ; 对于  $\gamma_f \rightarrow 1$ , 对应超强磁场下费米子自旋完全极化场景, 有  $n_{\uparrow} = n$  和  $n_{\downarrow} = 0$ . 由于当  $\gamma_f < 1$  时,  $n_{\downarrow}$  的值变为负值, 因此  $\gamma_f$  的最小值为 1. 对应粒子自旋完全极化场景, 中子星物质所能维持的最大磁场强度即磁场强度饱和值  $B_s$  为

$$B_s = \left\{ \left[ (6\pi^2 n_f)^{2/3} + m_f^2 \right]^{1/2} - m_f \right\} / (2\mu'_f), \quad (33)$$

$m_f$  和  $n_f$  的单位分别为 MeV 和  $\text{fm}^{-3}$  ( $1 \text{ fm}^{-1} = 197 \text{ MeV}$ ). 质子磁矩  $\mu'_p = 2.79\mu'_N$ , 中子反常磁矩  $\mu'_n = -1.91\mu'_N$ , 电子磁矩  $\mu'_e = 1.001\mu'_B$ , 核磁子的值为  $\mu'_N = 5.04 \times 10^{-24} \text{ erg/G}$ , 玻尔磁子的值为  $\mu'_B =$

$9.264 \times 10^{-21} \text{ erg/G}$ . 将  $\mu'_p$ ,  $\mu'_n$ ,  $\mu'_e$  分别代入方程 (33) 中, 得到中子星内部费米子完全极化下饱和磁场强度  $B_s$  随  $n_f$  的变化关系, 如图 4 所示. 这里选择物态方程为相对论平均场 TMA 参数模型 (详细描述见第 5 节), 核物质密度范围  $\rho$  约为  $2.5\rho_0$ — $8.0\rho_0$ . 在图 4(a) 中, 电子数密度  $n_e = n_N Y_e$ , 质子数密度  $n_p = n_N Y_p$ , 为方便计算, 取  $n_e/n_p$  约为  $2 \times 10^{37}$ — $2 \times 10^{38} \text{ cm}^{-3}$ . 在图 4(b) 中, 重子数密度范围为  $2.5 \times 10^{38}$ — $1.2 \times 10^{39} \text{ cm}^{-3}$ . 计算发现, 当电子自旋完全极化时, 中子星内部磁场强度最大值为  $1.51 \times 10^{16}$ — $3.26 \times 10^{16} \text{ G}$ ; 当质子自旋完全极化时, 中子星内部磁场强度最大值  $1.30 \times 10^{18}$ — $5.78 \times 10^{18} \text{ G}$ ; 当中子自旋完全极化时, 中子星磁场强度最大值  $1.00 \times 10^{19}$ — $2.53 \times 10^{19} \text{ G}$ . 电子的内禀磁矩为  $\mu_e = \mu_e \sigma$  ( $|\sigma| = 1$ ), 处于强磁场中电子系统被磁化. 由上述计算可知, 相比于质子与中子的自旋完全极化, 电子的自旋完全极化给出的中子星内部磁场强度最大值 ( $B_s$  约  $10^{16} \text{ G}$ ) 要低得多, 但更符合磁偶极模型对中子星内部磁场的估计<sup>[1–4]</sup>.

## 4.3 超强磁场中电子磁化现象

由 4.2 节可知, 当中子星内部出现电子自旋极化现象时, 自旋平行于和反平行于磁场方向的电子数密度不再相等, 电子系统被磁化, 中子星内部出现一个宏观上的感应磁矩, 感应磁矩就会导致一个感应磁场, 后者的大小取决于电子系统的磁化率  $\chi$  或磁化强度  $M$ . 根据最新研究<sup>[39]</sup>, 磁星内部可能包括化石起源的原始磁场和顺磁磁化产生的感应磁场<sup>[38]</sup>. 后者为磁星提供制动力矩, 影响磁星辐射特性和内部热演化. 电子磁化由两种成分构成:

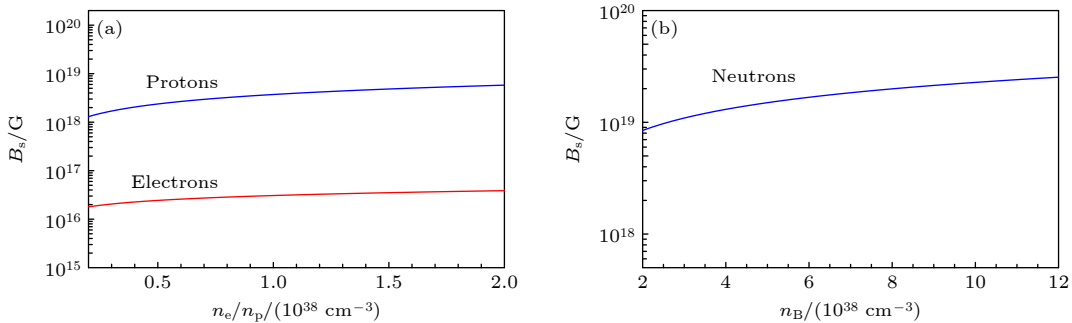


图 4 中子星内部费米子完全极化场景下饱和磁场强度  $B_s$  随粒子数密度  $n$  的变化关系 (a) 质子/电子完全极化下  $B_s$  vs.  $n_e/n_p$ ; (b) 中子完全极化下  $B_s$  vs.  $n_B$  ( $n_B$  为重子数密度)

Fig. 4. Relationship between the saturated magnetic field strength  $B_s$  and the particle number density  $n$  in a fully polarized neutron star fermion matter: (a)  $B_s$  vs.  $n_e/n_p$  in a fully polarized scenario for proton/electron matter system; (b)  $B_s$  vs.  $n_B$  in a fully polarized scenario for the neutron matter system ( $n_B$  is the baryon number density).



一是电子内禀磁矩在外磁场中的顺向分布引起的泡利顺磁部分;二是在外场中电子轨道运动量子化引起的朗道抗磁部分.高志福等<sup>[40]</sup>采用霍尔斯坦-普里马可夫变换等方法,对外磁场中的铁磁体、反铁磁及亚铁磁体的自旋波谱讨论并计算了临界磁场.由电动力学可知,磁化强度  $M = \chi B$  及相对磁导率  $\mu_r = 1/(1-\mu_0\chi)$ ,  $\mu_0$  为真空磁导率,当  $\mu_0\chi \rightarrow 1$  时,磁场变得越强,出现临界磁化现象.强磁场中相对论电子的磁化系数为<sup>[41]</sup>

$$\chi_{\text{para}} = 6\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{\mu_e^2}{hc} (n_e')^{2/3}, \quad \chi_{\text{dia}} = -\frac{1}{3}\chi_{\text{para}}, \quad (34)$$

将  $n_e' = (B^*)^{1/6} n_e$  代入到方程 (34), 得到

$$\chi = \chi_{\text{dia}} + \chi_{\text{para}} = 4\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{\mu_e^2}{hc} \left(\frac{B}{B_{\text{cr}}}\right)^{1/9} n_e^{2/3}. \quad (35)$$

利用方程 (35), 图 5 给出不同强磁场下相对论电子的磁化率  $\chi$  随  $n_e$  的变化, 水平的点-虚线表示临界磁化率 (在高斯单位制下  $\mu_0 = 1$ ). 当  $n_e$  一定时,  $\chi$  随  $B$  的增加而增大, 当  $B$  一定时,  $\chi$  随  $n_e$  的增加而增大. 在中子星高密度区域会出现临界磁化现象, 甚至磁化系数大于 1. 本文不考虑质子和中子磁化现象, 因为核子磁化所需要的磁场更高 ( $B \geq 5 \times 10^{18}$  G), 在这样高的磁场下本文得到的电子压强修正表达式不再成立. 在中子星内部简并电子系统的磁化将扮演重要角色. 对于原生中子星, 在以中微子辐射主导的冷却过程中, 随着温度的降低, 一方面物质分布的层次性使得中子星内部磁化不均匀, 导致新的磁场诱导项产生; 另一方面顺磁化的电子系统相当于减弱了磁场的扩散, 从而出现等效扩散系数等于零的临界情况, 在中子星磁场演化过程中增加了相变可能性. 随着扩散的减弱, 磁化强度会随着磁场的增加发生振荡, 出现 De Haas-

van Alphen 不稳定性, 中子星表现出磁星的活动性, 如耀斑和外暴<sup>[1-5]</sup>.

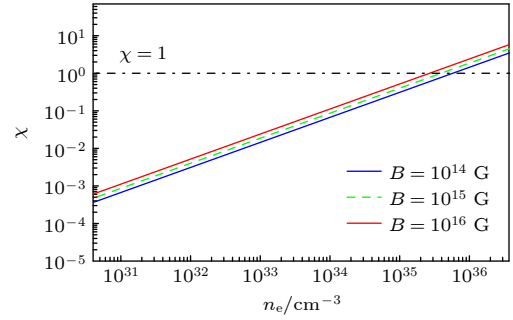


图 5 不同磁场下中子星内部相对论电子的磁化率  $\chi$  与电子数密度  $n_e$  的变化关系

Fig. 5. Relation between the magnetic susceptibility  $\chi$  and number density of relativistic electrons  $n_e$  in neutron stars with different magnetic field strengths.

## 5 超强磁场对物态方程的修正

### 5.1 超强磁场下相对论平均场理论模型

相对论平均场理论 (relativistic mean field theory, RMFT) 已成为研究有限核物质性质的标准方法. TMA 参数组与相对论 Brueckner-Hartree-Fock 理论预测相一致, 能很好地描述中子星状态方程<sup>[42-48]</sup>. 将结合 RMFT 框架下的 TMA 参数组及本文所得到的超强磁场中电子压强的表达式, 求解广义相对论流体静力学平衡方程 (TOV 方程), 研究超强磁场如何影响中子星的物态方程. 主要讨论由核子 (n, p)、轻子 (e,  $\mu$ ) 组成的传统中子星, 记作  $n\text{p}e\mu$  物质. 强子之间的相互作用是由介子 ( $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\rho$ ) 来传递. 核子数密度  $n_N$  为中子数密度  $n_n$  和质子数密度  $n_p$  之和. 强磁场环境下, 总的相互作用拉格朗日密度为<sup>[46,47]</sup>

$$\begin{aligned} L = & \overline{\psi}_N \left( i\gamma_\mu \partial^\mu - g_N \frac{1 + \tau_0}{2} \gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{4} \kappa_N \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_\rho \gamma_\mu \tau \cdot R^\mu - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu - m - g_\sigma \sigma \right) \psi_N \\ & + \overline{\psi}_l \left( i\gamma_\mu \partial^\mu - g_l \gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{4} \kappa_l \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m_l \right) \psi_l + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - U(\sigma) \\ & - \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{4} R^{\mu\nu} \cdot R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \rho^\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (36)$$

其中  $\psi_N$  和  $\psi_l$  分别为核子和轻子的 Dirac 旋量场;  $\sigma_{\mu\nu} = i/2[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ ;  $\kappa_N$  和  $\kappa_l$  分别为核子和轻子的反常磁矩系数,  $\kappa_p = 1.7928\mu_N$ ,  $\kappa_n = -1.9130\mu_N$ ,  $\kappa_e =$

$1.15965 \times 10^{-3} \mu_B$ ,  $\kappa_\mu = 1.16952 \times 10^{-3} \mu_B$ <sup>[48,49]</sup>;  $\tau$  是核子同位旋,  $\tau_0$  是  $\tau$  的第三分量;  $\sigma$ ,  $\omega$  和  $\rho$  分别表示标量介子、矢量介子、等矢量-矢量介子场,  $\omega_{\mu\nu} =$

$\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$  和  $\mathbf{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{R}_\nu - \partial_\nu \mathbf{R}_\mu$  分别表示  $\omega$  和  $\rho$  介子的场张量;  $U(\sigma) = (1/3)g_2\sigma^3 + (1/4)g_3\sigma^4$  是  $\sigma$  介子非线性自相互作用项; 电磁场张量  $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $A^\mu = (0, 0, B_x, 0)$ ;  $m$  和  $m_l$  核子分别表示核子和轻子的质量;  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$  和  $m_\rho$  分别表示  $\sigma$ ,  $\omega$  和  $\rho$  介子的质量;  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$  和  $g_\rho$  分别是  $\sigma$ ,  $\omega$  和  $\rho$  介子与核子之间的耦合常数; 有关 TMA 参数组核物质饱和特性和耦合常数, 请参考文献 [45] 中表 4. 本文采用一种广泛应用的、从表层到中心随密度变化的中子星磁场模型 [44], 具体形式如下:

$$B(\rho/\rho_0) = B_{\text{surf}} + B_{\text{cent}} \{1 - \exp[-\beta(\rho/\rho_0)^\gamma]\}, \quad (37)$$

其中,  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 3$ ,  $B_{\text{surf}}$  和  $B_{\text{cent}}$  分别表示中子星表面和中心磁场. 根据电子极化限制和磁星表面磁场观测, 选取  $B_{\text{cent}} = 1.0 \times 10^{16}$  G 及  $B_{\text{surf}} = 1.0 \times 10^{14}$  G. 在如此强度的变化磁场下反常磁矩对中子星物态方程影响较小, 故而暂不考虑核子和轻子的反常磁矩. 图 6 表示中子星内部磁场  $B$  随密度  $\rho$  的变化关系.

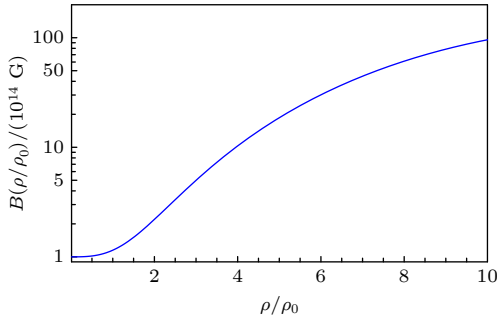


图 6 中子星内部磁场  $B$  随物质密度  $\rho$  的变化关系  
 Fig. 6. Relation of the magnetic field  $B$  and matter density  $\rho$  in a neutron star.

把 (36) 式代入 Euler-Lagrange 方程, 得到核子、轻子和介子在强磁场中运动方程:

$$\left( i\gamma_\mu \partial^\mu - q_N \frac{1 + \tau_0}{2} \gamma_\mu A^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \gamma_\mu \tau R^\mu - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu - m_N - g_\sigma \sigma \right) \psi_N = 0, \quad (38)$$

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - q_l \gamma_\mu A^\mu - m_l) \psi_l = 0,$$

$$m_\sigma^2 \sigma + g_2 \sigma^2 + g_3 \sigma^3 = g_\sigma \rho_S, \quad (39)$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega (n_p + n_n), \quad m_\rho^2 R_{00} = g_\rho (n_p - n_n)/2, \quad (40)$$

其中  $\sigma$ ,  $\omega_0$  和  $R_{00}$  分别是三种介子场的基态值,  $\rho_S = \rho_S^p + \rho_S^n$  为标量场密度; 电中性守恒给出:  $n_p = n_e + n_\mu$ . 中子、质子和轻子的化学势和费米能关系表示为

$$\mu_p = E_F^p + g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho R_{00},$$

$$\mu_n = E_F^n + g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2} g_\rho R_{00}, \quad \mu_e = \mu_\mu = E_F^e. \quad (41)$$

每个组分的费米能与它们的费米动量之间关系为

$$(k_{F,\nu,s}^p)^2 = (E_F^p)^2 - (m^*)^2 - 2eB\nu,$$

$$(k_{F,s}^n)^2 = (E_F^n)^2 - (m^*)^2, \quad (42)$$

$$(k_{F,\nu,s}^e)^2 = (E_F^e)^2 - m_e^2 - 2eB\nu,$$

$$(k_{F,\nu,s}^\mu)^2 = (E_F^\mu)^2 - m_\mu^2 - 2eB\nu, \quad (43)$$

其中  $m^* = m_N - g_\sigma \sigma$  是核子有效质量, 量子数  $s = +1$  和  $-1$  分别表示粒子自旋向上和自旋向下. 核子标量密度  $\rho_S$  分别为

$$\rho_S^n = \frac{m^*}{4\pi^2} \sum_s \left[ k_{F,s}^n E_F^n - (m^*)^2 \times \ln \left( \frac{k_{F,s}^n + E_F^n}{m^*} \right) \right],$$

$$\rho_S^p = \frac{eBm^*}{2\pi^2} \sum_{\nu,s} \ln \left[ \frac{k_{F,\nu,s}^p + E_F^p}{\sqrt{(m^*)^2 + 2eB\nu}} \right]. \quad (44)$$

物质系统中的中子、质子、缪子与电子的粒子数密度与费米动量的关系分别为

$$n_n = \frac{1}{2\pi^2} \sum_s \frac{1}{3} (k_{F,s}^n)^3, \quad n_p = \frac{eB}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} g_\nu k_{F,\nu}^p,$$

$$n_\mu = \frac{eB}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} g_\nu k_{F,\nu}^\mu, \quad n_e = \frac{(k_F^e)^3}{3\pi^2} (B^*)^{1/6}, \quad (45)$$

其中  $k_F^e$  为  $\nu = \nu_{\max}$  时  $k_{F,\nu}^e$  的最大值 [21]. 在本文模型下中子星物质能量密度  $\varepsilon_m$  为

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + U(\sigma) + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 R_{0,0}^2 + \varepsilon_p + \varepsilon_n + \varepsilon_e + \varepsilon_\mu, \quad (46)$$

其中  $\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_e$  和  $\varepsilon_\mu$  分别为质子、中子和电子和缪子的能量密度, 具体形式为

$$\varepsilon_p = \frac{eB}{4\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} D_\nu \left\{ k_{F,\nu}^p E_F^p + \left[ (m^*)^2 + 2eB\nu \right] \ln \left[ \frac{k_{F,\nu}^p + E_F^p}{\sqrt{(m^*)^2 + 2eB\nu}} \right] \right\}, \quad (47)$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{4\pi^2} \sum_s \left\{ k_{F,s}^n (E_F^n)^3 - \frac{1}{4} m^* \left[ m^* k_{F,s}^n E_F^n + \ln \left( \frac{k_{F,s}^n + E_F^n}{m^*} \right) \right] \right\}, \quad (48)$$

$$\varepsilon_l = \frac{eB}{4\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} D_\nu \left[ k_{F,\nu}^l E_F^l + (m_l^2 + 2eB\nu) \ln \left( \frac{k_{F,\nu}^l + E_F^l}{\sqrt{m_l^2 + 2eB\nu}} \right) \right], \quad l = e, \mu. \quad (49)$$

考虑电磁场对能量密度的贡献, 总的能量密度  $\varepsilon$  和热力学压强  $P$  分别为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_m + B^2/(8\pi), \\ P &= \sum_i \mu_i n_i - \varepsilon_m + B^2/(8\pi) \\ &= \mu_n n_N - \varepsilon_m + B^2/(8\pi). \end{aligned} \quad (50)$$

利用中子星结构的 TOV 方程来研究星体的宏观性质, 具体形式为<sup>[50,51]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{[P(r) + \varepsilon(r)] [M(r) + 4\pi r^3 P(r)]}{r [r - 2M(r)]}, \\ \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi \varepsilon(r) r^2, \end{aligned} \quad (51)$$

其中  $M(r)$ ,  $\varepsilon(r)$  和  $P(r)$  分别为以半径为  $r$  的球面内中子星的质量、能量密度和压强. 以物态方程 (51) 作为输入量, 在边界条件  $P(R) = 0$  和  $M(R) = 0$  情况下可以获得 TOV 方程的解. 由于中子星中心的重子数密度由  $n_N = (M/m_N)/(4\pi r^3/3)$  来决定, 得到中子星质量  $M$  与  $n_N$  的变化关系. 表 1 中的第 2—5 列表示在零磁场中的计算值; 第 6—9 列表示在密度依赖的中子星强磁场模型下的计算值. 由表 1 可以看出, 在 TMA 参数模型下, 电子费米能  $E_F^e$ 、电子压强  $P_e$  和压强  $P$  都随星体中心的  $n_N$  的增加而增大, 在相同  $n_N$  的情况下,  $E_F^e$ 、 $P_e$  和压强  $P$  都随着磁场的增加而增大. 当重子数密度  $n_N = 0.9156 \text{ fm}^{-3}$  时, 中子星质量达到最大值, 当  $B \ll B^*$  时,  $M$  的最大值为  $1.9916 M_\odot$  ( $M_\odot$  为太阳质量), 当  $B > B^*$  时,  $M$  的最大值为  $2.034 M_\odot$ , 增加的质量来源于磁场能的贡献. 本文模型能够解释两倍太阳质量的中子星<sup>[52]</sup>, 这表明本文选择的 TMA 参数组比较可靠.

## 5.2 超强磁场下压强的各向异性

5.1 节在球对称空间下求解了 TOV 方程, 忽略了压强的各向异性. 在实际的中子星环境下, 超强磁场会改变空间的球对称性, 在平行于磁场的方向的压强  $P_{//}$  与垂直于磁场方向的压强  $P_\perp$  存在着

一定的差异. 在本文所选择的密度依赖的强磁场模型下 ( $B \leq 10^{16} \text{ G}$ ), 核子的反常磁矩忽略不计. 系统总的能量-动量张量  $T^{\mu\nu}$  由物质部分和电磁场部分所组成, 分别表示为

$$\begin{aligned} T_m^{\mu\nu} &= \varepsilon_m u^\mu u^\nu - P (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \\ &\quad + MB (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu + \mathbf{B}^\mu \mathbf{B}^\nu / B^2), \\ T_f^{\mu\nu} &= B^2 / (4\pi) (u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} / 2) - \mathbf{B}^\mu \mathbf{B}^\nu / (4\pi), \end{aligned} \quad (52)$$

其中磁化张量由  $\mathbf{M} = -\partial \varepsilon_m / \partial B$  来决定, 磁场张量  $\mathbf{B}^\mu \mathbf{B}_\mu = -B^2$ . 方程 (52) 改写为

$$\begin{aligned} T_m^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P - MB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P - MB & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \\ T_f^{\mu\nu} &= \frac{B^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (53)$$

垂直于磁场方向的压强和平行于磁场方向的压强由下列方程决定:

$$P_\perp = P - MB + B^2/(8\pi), \quad P_{//} = P - B^2/(8\pi). \quad (54)$$

将方程 (51) 代入方程 (54) 中, 得到

$$P_\perp = \mu_n n_N - \varepsilon_m - MB + B^2/(4\pi), \quad P_{//} = \mu_n n_N - \varepsilon_m. \quad (55)$$

为了讨论压强的各向异性, 定义两个方向上的压强之差:

$$\Delta P = P_\perp - P_{//} = -MB + B^2/(4\pi). \quad (56)$$

2013 年我们对磁星内部压强的各向异性进行详细地讨论<sup>[20]</sup>, 当  $B \ll 10^{20} \text{ G}$  时, 星体内部磁化方向与外磁场方向相反, 即  $M < 0$ ,  $\Delta P = P_\perp - P_{//} > 0$ , 或  $P_\perp > P_{//}$ , 沿磁场方向磁张压使中子星发生形变, 变成类似地球的旋转椭球星; 若  $B \geq 10^{20} \text{ G}$  时, 会出现中子磁矩顺磁磁化, 则  $M > 0$ , 故  $P_\perp < P_{//}$ . 在相对论平均场模型下计算了重子数密度  $n_N$ 、物质密度  $\rho$ 、磁场强度  $B$ 、电子数密度  $n_e$ 、磁化压

表 2 相对论平均场模型下  $n_N, \rho, B, n_e, |MB|, \Delta P$  和  $P_{//}$  的部分计算值, 这里选择 TMA 参数组和密度依赖的中子星强磁场模型

Table 2. Partial calculations of  $n_N, \rho, B, n_e, |MB|, \Delta P$  and  $P_{//}$  in a relativistic mean field model. TMA parameter set and a density-dependent magnetic field model for a neutron star are selected.

$n_N/\text{fm}^{-3}$	$\rho/(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$	$B/\text{G}$	$n_e/\text{cm}^{-3}$	$ M /\text{G}$	$ MB /(\text{dyn}\cdot\text{cm}^{-2})$	$\Delta P/(\text{dyn}\cdot\text{cm}^{-2})$	$P_{//}/(\text{dyn}\cdot\text{cm}^{-2})$
0.0013	$2.535\times 10^{12}$	$1.000\times 10^{14}$	$1.051\times 10^{32}$	$4.277\times 10^{11}$	$4.277\times 10^{25}$	$8.385\times 10^{26}$	$1.196\times 10^{30}$
0.0211	$3.992\times 10^{13}$	$1.003\times 10^{14}$	$5.689\times 10^{34}$	$2.841\times 10^{13}$	$2.845\times 10^{27}$	$3.641\times 10^{27}$	$3.324\times 10^{31}$
0.0722	$1.014\times 10^{14}$	$1.011\times 10^{14}$	$1.418\times 10^{36}$	$2.428\times 10^{14}$	$2.485\times 10^{28}$	$2.567\times 10^{28}$	$8.147\times 10^{31}$
0.1332	$2.521\times 10^{14}$	$1.073\times 10^{14}$	$5.520\times 10^{36}$	$6.049\times 10^{14}$	$6.964\times 10^{28}$	$7.055\times 10^{28}$	$5.651\times 10^{31}$
0.1554	$2.940\times 10^{14}$	$1.116\times 10^{14}$	$7.781\times 10^{36}$	$7.638\times 10^{14}$	$9.508\times 10^{28}$	$9.607\times 10^{28}$	$2.509\times 10^{34}$
0.2003	$3.789\times 10^{14}$	$1.247\times 10^{14}$	$1.301\times 10^{37}$	$1.089\times 10^{15}$	$1.796\times 10^{29}$	$1.708\times 10^{29}$	$2.719\times 10^{34}$
0.2338	$4.423\times 10^{14}$	$1.393\times 10^{14}$	$1.744\times 10^{37}$	$1.868\times 10^{15}$	$2.604\times 10^{29}$	$2.619\times 10^{29}$	$3.049\times 10^{34}$
0.3206	$6.065\times 10^{14}$	$2.011\times 10^{14}$	$3.017\times 10^{37}$	$5.406\times 10^{15}$	$8.143\times 10^{29}$	$8.175\times 10^{29}$	$6.645\times 10^{34}$
0.3556	$6.727\times 10^{14}$	$2.377\times 10^{14}$	$3.563\times 10^{37}$	$5.406\times 10^{15}$	$1.285\times 10^{30}$	$1.291\times 10^{30}$	$8.716\times 10^{34}$
0.4185	$7.917\times 10^{14}$	$3.237\times 10^{14}$	$4.572\times 10^{37}$	$7.676\times 10^{15}$	$2.485\times 10^{30}$	$2.493\times 10^{30}$	$1.329\times 10^{35}$
0.4746	$8.978\times 10^{14}$	$4.244\times 10^{14}$	$4.580\times 10^{37}$	$1.237\times 10^{16}$	$5.203\times 10^{30}$	$5.217\times 10^{30}$	$1.836\times 10^{35}$
0.5447	$1.031\times 10^{15}$	$5.860\times 10^{14}$	$6.647\times 10^{37}$	$2.249\times 10^{16}$	$1.318\times 10^{31}$	$1.321\times 10^{31}$	$2.613\times 10^{35}$
0.6076	$1.145\times 10^{15}$	$7.685\times 10^{14}$	$7.704\times 10^{37}$	$3.353\times 10^{16}$	$2.577\times 10^{31}$	$2.583\times 10^{31}$	$3.243\times 10^{35}$
0.6846	$1.295\times 10^{15}$	$1.042\times 10^{15}$	$9.012\times 10^{37}$	$5.225\times 10^{16}$	$5.445\times 10^{31}$	$5.453\times 10^{31}$	$4.133\times 10^{35}$
0.7265	$1.375\times 10^{15}$	$1.215\times 10^{15}$	$9.725\times 10^{37}$	$6.533\times 10^{16}$	$7.932\times 10^{31}$	$7.944\times 10^{31}$	$4.675\times 10^{35}$
0.8386	$1.586\times 10^{15}$	$1.763\times 10^{15}$	$1.160\times 10^{38}$	$1.109\times 10^{17}$	$1.955\times 10^{32}$	$1.958\times 10^{32}$	$6.165\times 10^{35}$
0.9156	$1.774\times 10^{15}$	$2.347\times 10^{15}$	$1.342\times 10^{38}$	$1.678\times 10^{17}$	$3.938\times 10^{32}$	$3.943\times 10^{32}$	$7.996\times 10^{35}$

$|MB|$ 、压强差  $\Delta P$  和平行磁场方向的压强  $P_{//}$ , 计算结果列于表 2. 计算发现: 在相同的物质密度下, 反映各向异性的压强比值  $\Delta P/P_{//}$  为  $10^{-5}$ — $10^{-3}$ . 因此, 在本文的磁场模型下, 由于强磁场引起的压强各向异性非常小, 可以忽略不计.

## 6 总结与展望

在我们以往的工作基础上, 通过引入电子朗道能级稳定性系数和 Dirac- $\delta$  函数, 本文推导出在超强磁场下修正的相对论电子压强的表达式; 讨论了超强磁场对电子相空间的修正、超强磁场下费米子自旋极化现象、超强磁场中电子系统磁化现象以及超强磁场对物态方程的修正. 磁星内部可能包括化石起源的原始磁场和顺磁磁化产生的超强感应磁场. 后者提供制动力矩, 影响磁星辐射特性和内部热演化. 彭秋和等 [53] 认为: 磁星的超强磁场可能起源于各向异性的  ${}^3P_2$  中子超流在低温下顺磁所产生的感应磁场, 最大的偶极磁场强度为  $B_d$  为  $3\times 10^{15}$ — $4\times 10^{15}$  G. 本文所得的结论适用于文献 [53] 的磁星模型. 方仁洪等 [54] 从均匀磁场中单个大质

量狄拉克费米子的朗道能级出发, 构造了系统的配分函数, 通过配分函数可以导出包括压强在内的所有的热力学量 (如矢量流、能量-动量-张量等); 与本文不同的是, 方仁洪等 [54] 是在有限温度下的狄拉克费米子系统的热力学 (也可得到温度趋近零时情形); 文献 [54] 与本文的结果大致相同, 但处理问题的方法和侧重点不同, 前者为强磁场, 后者为一般磁场, 得到热力学压强后, 同样可求出狄拉克费米子的物态方程.

由于篇幅有限, 只选择传统的中子星内部的 npe $\mu$  物质系统为代表, 讨论了超强磁场对物态方程的影响, 没有讨论量子电动力学效应对弱相互作用过程和辐射机制的影响, 也无法对超强磁场在中子星其他物质区域的量子电动力学效应逐个进行讨论, 这些将是我们未来研究工作的方向之一. 本文研究为磁星及依靠电子简并压来抵抗引力的强磁化白矮星的物态方程和热演化的研究提供了参考, 可为射电脉冲星等离子体层数值模拟 [55–57]、高磁场脉冲星及磁星的辐射机制、限制中子星引力波的上限 [58,59] 等相关研究提供有用的信息.



参考文献

- [1] Duncan R C, Thompson C 1992 *Astrophys. J.* **392** L9
- [2] Gao Z F, Li X D, Wang N, Yuan J P, Wang P, Peng Q H, Du Y J 2016 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **456** 55
- [3] Gao Z F, Wang N, Shan H, Li, X D, Wang W 2017 *Astrophys. J.* **849** 19
- [4] Kaspi V M, Beloborodov A M 2017 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **55** 261
- [5] Shen J, Wang Y, Zhou T, Ji H 2017 *Astrophys. J.* **835** 43
- [6] Shen J, Ji H, Su Y 2022 *Res. Astron. Astrophys.* **22** 015019
- [7] Mereghetti S, Pons J A, Melatos A 2015 *Space Sci. Rev.* **191** 315
- [8] Zhao X F 2019 *Int. J. Theor. Phys.* **58** 1060
- [9] Zhao X F 2019 *Astrophys. Space Sci.* **364** 38
- [10] Zhao X F 2020 *Chin. J. Phys.* **3** 240
- [11] Rabhi A, Pérez-García M A, Providência C, Vidaña I 2015 *Phys. Rev. C* **91** 045803
- [12] Chatterjee D, Elghozi T, Novak J, Oertel M 2015 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **447** 3785
- [13] Shen J, Zhou T, Ji H, Wiegelmann T, Inhester B, Feng L 2014 *Astrophys. J.* **791** 83
- [14] Farooq F, Nabi J U, Shehzadi R 2021 *Astrophys. Space Sci.* **366** 86
- [15] Liu J J, Liu D M 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 84
- [16] Liu J J, Gu W M 2016 *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **224** 29
- [17] Liu J J, Liu D M 2020 *Astron. Nachr.* **341** 291
- [18] Liu J J, Liu D M 2018 *Res. Astron. Astrophys.* **18** 8
- [19] Liu J J, Liu D M 2021 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **133** 4201
- [20] Gao Z F, Wang N, Peng Q H, Li X D, Du Y J 2013 *Mod. Phys. Lett A* **28** 1350138
- [21] Zhu C, Gao Z F, Li X D, Wang N, Yuan J P, Peng Q H 2016 *Mod. Phys. Lett A* **31** 1650070
- [22] Kubo R 1965 *Statistical Mechanics* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co.) pp278–280
- [23] Peng Q H, Zhang J, Chou C K 2016 *EPJ Web. Conf.* **10** 907003
- [24] Li X H, Gao Z F, Li X D, Xu Y, Wang P, Wang N, Peng Q H 2016 *Int. J. Mod. Phys. D* **25** 165000
- [25] Lai D, Shapiro S L 1991 *Astrophys. J. Lett.* **383** 745
- [26] Haensel P, Potekhin A Y, Yakovlev D G 2007 *Neutron Stars 1: Equation of state and structure* (Berlin: Springer) p326
- [27] Das U, Mukhopadhyay B 2012 *Phys. Rev. D* **86** 042001
- [28] Chatterjee D, Fantina A F, Chamel N, Novak J, Oertel M 2017 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **469** 95
- [29] Nandi R, Bandyopadhyay D 2013 *J. Phy. Conf. Ser.* **420** 012144
- [30] Das U, Mukhopadhyay B 2015 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **05** 045
- [31] Bera P, Bhattacharya D 2014 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **445** 3951
- [32] Dong J M, Lombardo U, Zhang H F, Zuo W 2016 *Astrophys. J.* **817** 6
- [33] Dong J M, Shang X L 2020 *Phys. Rev. C* **101** 014305
- [34] Dong J M 2021 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **500** 1505
- [35] Bordbar G H, Karami, M K 2022 *Eur. Phys. J. C* **82** 74
- [36] Herrera L 2020 *Phys. Rev. D* **101** 104024
- [37] Shulman G A 1991 *Sov. Phys. Astron.* **35** 50
- [38] Mandal S, Chakrabarty S 2002 arXiv: astro-ph/0209015
- [39] Huang Z P, Yan Z, Shen Z Q, Tong H, Lin L, Yuan J P, Liu J, Zhao R S, Ge M Y, Wang R, 2021 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **505** 1311
- [40] Gao Z F 2007 *M. S. Thesis (Urumqi: Xinjiang University)* (in Chinese) [高志福 2007 硕士学位论文 (乌鲁木齐: 新疆大学)]
- [41] Wang Z J, Lü G L, Zhu C H, Zhang J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 049702 (in Chinese) [王兆军, 吕国梁, 朱春花, 张军 2011 物理学报 **60** 049702]
- [42] Geng L, Toki H, Meng J 2005 *Prog. Theor. Phys.* **113** 785
- [43] Singh D, Saxena G 2012 *Int. J. Mod. Phys. E* **21** 1250076
- [44] Zhao S Y, Liu C Z, Huang X L, Wang Y B, Xu Y 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 222601 (in Chinese) [赵诗艺, 刘承志, 黄修林, 王夷博, 许妍 2021 物理学报 **70** 222601]
- [45] Gao Z F, Shan H, Wang W, Wang N 2017 *Astron. Nachr.* **338** 1066
- [46] Wei F X, Mao G J, Ko C M, Kisslinger L S, Stöcker H, Greiner W 2006 *J. Phys. G: Nucl. Part.* **32** 47
- [47] Ángeles Pérez-García M, Providência C, Rabhi A 2011 *Phys. Rev. C* **84** 045803
- [48] Dong J M, Zuo W, Gu J 2013 *Phys. Rev. C* **87** 103010
- [49] Bandyopadhyay D, Chakrabarty S, Pal S 1997 *Phys. Rev. L* **79** 2176
- [50] Landau L D, Lifshitz E M, Pitaevskii L P (translated by Zhou Q) 1963 *Electrodynamics of Continuous Media* (Beijing: People's Education Press) pp179–182 (in Chinese) [朗道 著 (周奇 译) 1963 连续媒介电动力学 (北京: 人民教育出版社) 第 179—182页]
- [51] Tolman R C 1939 *Phys. Rev.* **55** 364
- [52] Demorest P B, Pennucci T, Ransom S M, Roberts M S E, Hessels J W T 2016 *Nature* **4** 67
- [53] Peng Q H, Tong H 2007 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **378** 159
- [54] Fang R H, Dong R D, Hou D F, Sun B D 2021 *Chin. Phys. Lett.* **38** 091201
- [55] Yuen R, Melrose D B, Samsuddin M A, Tu Z Y, Han X H 2016 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **459** 603
- [56] Yuen R 2019 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **486** 2011
- [57] Han X H, Yuen R 2021 *Res. Astron. Astrophys.* **21** 228
- [58] Cheng Q, Zhang S N, Yu Y W, Zheng X P 2018 *Phys. Rev. D* **97** 103012
- [59] Antoniadis J, Freire P C C, Wex N, Tauris T M, Lynch R S, van Kerkwijk M H, Kramer M, Bassa C, Dhillon V S, Driebe T, Hessels J W T, Kaspi V M, Kondratiev V I, Langer N, Marsh T R, McLaughlin M A, Pennucci T T, Ransom S M, Stairs I H, van Leeuwen J, Verbiest J P W, Whelan D G 2013 *Science* **340** 448

# Modified pressure of relativistic electrons in a superhigh magnetic field\*

Dong Ai-Jun<sup>1)2)4)</sup> Gao Zhi-Fu<sup>2)†</sup> Yang Xiao-Feng<sup>2)</sup> Wang Na<sup>2)</sup>  
Liu Chang<sup>1)</sup> Peng Qiu-He<sup>3)</sup>

1) (*School of Physics and Electronic Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China*)

2) (*Xinjiang Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Urumqi 830011, China*)

3) (*School of Astronomy & Space Science, Nanjing University, Nanjing 210000, China*)

4) (*Guizhou Provincial Key Laboratory of Radio Data Processing, Guiyang 550001, China*)

( Received 13 January 2022; revised manuscript received 12 October 2022 )

## Abstract

Magnetar is a kind of pulsar powered by magnetic field energy. The study of magnetars is an important hotspot in the field of pulsars. In this paper, according to the work of Zhu Cui, et al. (Zhu C, Gao Z F, Li X D, Wang N, Yuan J P, Peng Q H 2016 *Mod. Phys. Lett. A* **31** 1650070), we reinvestigate the Landau-level stability of electrons in a superhigh magnetic field (SMF),  $B \gg B_{\text{cr}}$  ( $B_{\text{cr}}$  is a quantum critical magnetic field with a value of  $4.414 \times 10^{13}$  G), and its influence on the pressure of electrons in magnetar. First, we briefly review the pressure of electrons in neutron star (NS) with a weak-magnetic field limit ( $B \ll B_{\text{cr}}$ ). Then, we introduce an electron Landau level stability coefficient  $g_\nu$  and a Dirac- $\delta$  function to deduce a modified pressure formula for the degenerate and relativistic electrons in an SMF in an application range of matter density  $\rho \geq 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  and  $B_{\text{cr}} \ll B < 10^{17}$  G. By modifying the phase space of relativistic electrons, the SMF can enhance the electron number density  $n_e$ , and reduce the maximum of electron Landau level number  $\nu_{\text{max}}$ , which results in a redistribution of electrons. As  $B$  increases, more and more electrons will occupy higher Landau levels, and the electron Landau level stability coefficient  $g_\nu$  will decrease with the augment of Landau energy-level number  $\nu$ . By modifying the phase space of relativistic electrons, the electron number density  $n_e$  increases with the MF strength increasing, leading the electron pressure  $P_e$  to increase. Utilizing the modified expression of electron pressure, we discuss the phenomena of Fermion spin polarization and electron magnetization in the SMF, and the modification of the equation of state by the SMF. We calculate the baryon number density, magnetization pressure, and the difference between pressures in the direction parallel to and perpendicular to the magnetic field in the frame of the relativistic mean field model. Moreover, we find that the pressure anisotropy due to the strong magnetic field is very small and can be ignored in the present model. We compare our results with the results from other similar studies, and examine their similarities and dissimilarities. The similarities include 1) the abnormal magnetic moments of electrons and the interaction between them are ignored; 2) the electron pressure relate to magnetic field intensity  $B$ , electron number density  $n_e$  and electron Fermi energy  $E_F^c$ , and the latter two are complex functions containing  $B$ ; 3) with  $n_e$  and  $E_F^c$  fixed,  $P_e$  increases with  $B$  rising; 4) as  $B$  increases, the pressure-density curves fitted by the results from other similar studies have irregular protrusions

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12041304, U1831120), the Natural Science Foundation of Xinjiang Uygur Autonomous Region, China (Grant No. 2022D01A155), the Natural Science Foundation of Guizhou, China (Grant Nos. [2019]1241, KY(2020)003), and the High Level Talent Program support project of Chinese Academy of Sciences, China (Grant No. [2019]085).

† Corresponding author. E-mail: zhifugao@xao.ac.cn

or fluctuations, which are caused by the transformation of electron energy state from partial filling to complete filling at the  $\nu$ -level or the transition of electrons from the  $\nu$  to the  $(\nu+1)$ -level. This phenomenon is believed to relate to the behavior of electrons near the Fermi surface in a strong magnetic field, which essentially reflects the Landau level instability. Finally, the future research direction is prospected. The present results provide a reference for future studies of the equation of state and emission mechanism of high- $B$  pulsar, magnetar and strongly magnetized white dwarf.

**Keywords:** superhigh magnetic field, Landau level, magnetars, magnetization

**PACS:** 05.70.Ce, 71.70.Di, 13.40.Hq, 95.30.Qd

**DOI:** [10.7498/aps.72.20220092](https://doi.org/10.7498/aps.72.20220092)



## 在超强磁场中修正的相对论电子压强

董爱军 高志福 杨晓峰 王娜 刘畅 彭秋和

### Modified pressure of relativistic electrons in a superhigh magnetic field

Dong Ai-Jun Gao Zhi-Fu Yang Xiao-Feng Wang Na Liu Chang Peng Qiu-He

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 030502 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20220092

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20220092>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 超强磁场下中子星壳层的电导率和磁星环向磁场欧姆衰变

Conductivity of neutron star crust under superhigh magnetic fields and Ohmic decay of toroidal magnetic field of magnetar

物理学报. 2019, 68(18): 180401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190760>

#### 基于准粒子模型的原生磁星研究

Proto-magnetars within quasiparticle model

物理学报. 2022, 71(22): 222101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220795>

#### 外场作用下铁电/铁磁双层膜的极化磁化性质

Polarization and magnetization properties of ferroelectric/ferromagnetic layer films under external field

物理学报. 2019, 68(3): 037501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181879>

#### 强磁场对中子星转动惯量与表面引力红移的影响

Effects of strong magnetic field on moment of inertia and surface gravitational redshift in neutron star

物理学报. 2021, 70(22): 222601 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211051>

#### S波段低磁场高效率相对论返波管振荡器研究

S-band high-efficiency relativistic backward waveoscillator with low magnetic field

物理学报. 2019, 68(19): 194101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182155>

#### 三维电磁扩散场数值模拟及磁化效应的影响

Three-dimensional numerical simulation of electromagnetic diffusion problem and magnetization effects

物理学报. 2019, 68(3): 030201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181567>