

基于传输矩阵法的任意变厚度环型 压电超声换能器*

董宜雷 陈诚 林书玉†

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 陕西省超声重点实验室, 西安 710119)

(2022年11月3日收到; 2022年11月26日收到修改稿)

变厚度环型径向振动压电超声换能器可以实现阻抗变换、能量集中, 具有辐射面积大、全指向性等优点, 在功率超声、水声等领域被广泛应用. 由于求解复杂变厚度金属圆环径向振动的波动方程比较困难, 本文使用传输矩阵法将变厚度金属圆环的径向振动转化为 N 个等厚度金属圆环径向振动的叠加, 得到了任意变厚度金属薄圆环径向振动的等效电路图、共振频率方程和位移放大系数表达式, 分析了锥型、幂函数型、指数型、悬链线型金属圆环的位移放大系数与几何尺寸的关系. 在此基础上, 推导了由任意变厚度金属圆环和等厚度压电圆环复合而成的压电超声换能器径向振动的等效电路和共振频率方程. 为了验证理论结果的正确性, 使用有限元软件进行仿真, 所得一阶、二阶的共振频率和位移放大系数的数值解与理论解符合较好. 本研究给出了任意变厚度金属圆环径向振动的普适解, 为设计和优化径向压电超声换能器提供了理论指导.

关键词: 环型压电超声换能器, 径向振动, 传输矩阵法, 等效电路**PACS:** 43.38.+n, 43.30.+m**DOI:** 10.7498/aps.72.20222110

1 引言

径向振动压电超声换能器具有辐射面积大、沿半径方向有全指向性、接收灵敏度高、结构简单且性能稳定等优点^[1-4], 在超声医学成像^[5,6]、超声化学反应^[7,8]、超声污水处理^[9,10]、水声通信^[11,12]等领域被广泛应用. 径向复合压电超声换能器由金属圆环和压电陶瓷圆环复合而成, 金属圆环可以增加压电陶瓷的散热, 提高其功率容量. 为了增大径向复合压电超声换能器输出端的位移幅值, 实现能量集中, 输出端金属圆环多采用变厚度金属圆环. 变厚度金属圆环可置于压电陶瓷环内以实现向内聚能, 也可置于压电陶瓷外从而实现大面积声能辐射. 径向复合压电超声换能器根据金属圆环轴向厚度沿半径变化的函数关系被分成锥型、指数型、幂函数

型、阶梯型等^[13-16].

对于变厚度环型压电超声换能器的设计和振动分析, 通常使用有限元分析法^[17]和等效电路法^[18,19]. 等效电路法通过力电类比原理将力学量类比为电学量从而把振动问题简化. 传统理论研究变厚度环型压电超声换能器通常需求解变厚度金属薄圆环径向振动的波动方程. 基于变厚度径向振动的波动方程, 许龙等^[20,21]研究了幂函数型环型聚能器的径向振动和阶梯圆环压电超声换能器的径向振动; 刘世清等^[22]研究了线性变厚度环型聚能器的径向振动; 王晓宇和林书玉^[23]研究了线性变厚度径向变幅器的耦合振动. 但是对于复杂函数变厚度如指数型、悬链线型环型压电超声换能器, 波动方程求解比较困难. 传输矩阵法可以将连续结构分解成一系列微元结构, 一对微元之间通过传输矩阵衔接, 从而将复杂问题简单化. 基于此, 本文提出了用传

* 国家自然科学基金 (批准号: 11674206, 11874253, 12174240) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: sylin@snnu.edu.cn

输矩阵法^[24]将任意变厚度金属圆环的径向振动等效近似为 N 个等厚度圆环径向振动叠加的分析方法, 得到了任意变厚度金属圆环径向振动的共振频率方程和位移放大系数表达式, 以及任意变厚度环型压电超声换能器的共振频率方程. 研究了锥型变厚度、幂函数型变厚度、指数型变厚度、悬链线型变厚度金属圆环的共振频率和位移放大系数与几何尺寸的关系, 以及不同尺寸下锥型变厚度环型压电换能器径向一阶、二阶共振频率和反共振频率.

2 变厚度金属薄圆环径向振动分析

如图 1 所示, 变厚度环型压电超声换能器由变厚度金属内圆环和等厚度压电陶瓷外圆环组成, 变厚度金属圆环的内环半径为 R_b 、外环半径为 R_a 、内环半径处轴向厚度为 h_b 、外环半径处轴向厚度为 h_a , 等厚度压电陶瓷圆环的轴向厚度为 h_a 、内环半径为 R_a 、外环半径为 R_c . 假设变厚度环型压电超声换能器的轴向厚度尺寸远小于径向尺寸, 忽略

其纵向振动所带来的耦合效应, 此时环型压电超声换能器做纯径向振动. 环型压电超声换能器的径向振动由金属内圆环径向振动和压电陶瓷外圆环径向振动复合而成, 因此需要分别研究变厚度金属圆环的径向振动和等厚度压电陶瓷圆环的径向振动.

2.1 变厚度金属薄圆环径向振动的等效电路

根据轴向厚度沿半径的变化函数, 变厚度金属薄圆环可以分成锥型、阶梯型、幂函数型等. 为了求解任意变厚度金属薄圆环径向振动的等效电路, 本文采用传输矩阵法, 将变厚度金属薄圆环沿半径方向等分成 N 个径向厚度为 Δr 的薄圆环. 当 N 足够大、薄圆环的径向厚度 Δr 的值足够小时, 薄圆环可以看成是轴向厚度不变的等厚度薄圆环. 此时, 变厚度金属薄圆环径向振动的等效电路可以由 N 个等厚度金属薄圆环径向振动的等效电路串联而成.

根据文献 [25] 可知, 等厚度金属薄圆环径向振动的等效电路如图 2 所示, 图中

$$Z_{11} = j \frac{2Z_2}{\pi k R_2 [J_1(kR_1)Y_1(kR_2) - J_1(kR_2)Y_1(kR_1)]} \times \left[\frac{J_1(kR_2)Y_0(kR_1) - J_0(kR_1)Y_1(kR_2) - J_1(kR_1)Y_0(kR_1) + J_0(kR_1)Y_1(kR_1)}{J_1(kR_1)Y_0(kR_1) - J_0(kR_1)Y_1(kR_1)} \right] + j \frac{2Z_1(1-\nu)}{\pi(kR_1)^2 [J_1(kR_1)Y_0(kR_1) - J_0(kR_1)Y_1(kR_1)]}, \quad (1)$$

$$Z_{12} = j \frac{2Z_2}{\pi k R_2 [J_1(kR_1)Y_1(kR_2) - J_1(kR_2)Y_1(kR_1)]} \times \left[\frac{J_1(kR_1)Y_0(kR_2) - J_0(kR_2)Y_1(kR_1) - J_1(kR_2)Y_0(kR_2) + J_0(kR_2)Y_1(kR_2)}{J_1(kR_2)Y_0(kR_2) - J_0(kR_2)Y_1(kR_2)} \right] - j \frac{2Z_2(1-\nu)}{\pi(kR_2)^2 [J_1(kR_2)Y_0(kR_2) - J_0(kR_2)Y_1(kR_2)]}, \quad (2)$$

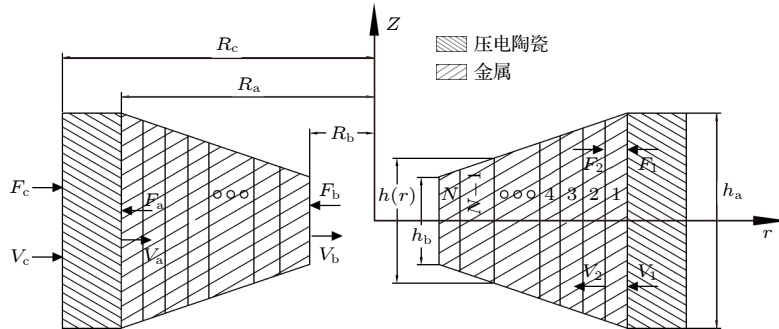


图 1 变厚度环型压电超声换能器的纵向截面示意图

Fig. 1. Schematic diagram of longitudinal section of variable thickness annular piezoelectric ultrasonic transducer.

$$Z_{13} = j \frac{2Z_2}{\pi k R_2 [J_1(kR_1)Y_1(kR_2) - J_1(kR_2)Y_1(kR_1)]}, \quad (3)$$

其中 $Z_1 = \rho c S_1$, $Z_2 = \rho c S_2$, $S_1 = 2\pi R_1 h_1$, $S_2 = 2\pi R_2 h_1$, R_1 , R_2 , h_1 分别是金属薄圆环的外半径、内半径和轴向厚度, ρ 是金属薄圆环的密度, ν 是金属薄圆环的泊松比, c 是金属薄圆环内的声速, k 是波数, J 是贝塞尔函数, Y 是诺依曼函数.

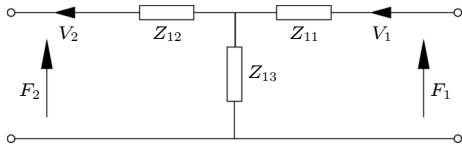


图 2 等厚度金属薄圆环径向振动的等效电路图

Fig. 2. Equivalent circuit of metal thin circular annular in radial vibration.

图 2 中 F_1 , V_1 , F_2 , V_2 分别是第一个薄圆环输入端与输出端的径向受力和径向振动速度. 根据等厚度金属薄圆环径向振动的机械等效电路图和基尔霍夫定律可得:

$$\begin{cases} F_1 = (Z_{11} + Z_{13})V_1 - Z_{13}V_2, \\ F_2 = -(Z_{12} + Z_{13})V_2 + Z_{13}V_1. \end{cases} \quad (4)$$

将输入端的力学参量 F_1 和径向振动速度 V_1 移到等号左边, 输出端的力学参数 F_2 和径向振动速度 V_2 移到等号右边, (4) 式可以改写为

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} F_2 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_{11}}{Z_{13}} & Z_{11} + Z_{12} + \frac{Z_{11}Z_{12}}{Z_{13}} \\ \frac{1}{Z_{13}} & 1 + \frac{Z_{12}}{Z_{13}} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

由于变厚度金属薄圆环的径向应力 F 和径向振动速度 V 连续, 所以第 2 个薄圆环输入端的径向应力和径向振动速度等于第 1 个薄圆环输出端的力学参数 F_2 和径向振动速度 V_2 . 类比第 1 个薄圆环输入输出端 F , V 之间的关系, 第 2 个薄圆环输入端参数 F_2 和 V_2 可以由输出端参数 F_3 和 V_3 表示为

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} F_3 \\ V_3 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

进而第 1 个薄圆环输入端的力参数 F_1 和振动速度 V_1 可以由第 2 个薄圆环输出端参数 F_3 和 V_3 表示为

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} F_3 \\ V_3 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

以此类推, 若将变厚度金属薄圆环分成 N 个等厚度薄圆环串联, 则第 1 个薄圆环输入端参数 F_1 , V_1 可以由第 N 个金属薄圆环输出端力参数 F_{N+1} 和振动速度 V_{N+1} 表示为

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \cdots \mathbf{M}_i \cdots \mathbf{M}_N \begin{bmatrix} F_{N+1} \\ V_{N+1} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_{i1}}{Z_{i3}} & Z_{i1} + Z_{i2} + \frac{Z_{i1}Z_{i2}}{Z_{i3}} \\ \frac{1}{Z_{i3}} & 1 + \frac{Z_{i2}}{Z_{i3}} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \cdots \mathbf{M}_i \cdots \mathbf{M}_N = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

由于 $F_1 = F_a$, $V_1 = V_a$, $F_{N+1} = F_b$, $V_{N+1} = V_b$, 则 (9) 式可以改写为

$$\begin{bmatrix} F_a \\ V_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_b \\ V_b \end{bmatrix}. \quad (12)$$

将变厚度金属薄圆环内外半径处的力学参量 F_a , F_b 移至等号左边, 径向振动速度 V_a , V_b 移动到等号右边, (12) 式可以改写为

$$\begin{cases} F_a = Z_{n11}V_a + Z_{n12}V_b, \\ F_b = Z_{n21}V_a + Z_{n22}V_b, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $Z_{n11} = \frac{M_{11}}{M_{21}}$, $Z_{n12} = M_{12} - \frac{M_{11}M_{22}}{M_{21}}$, $Z_{n21} = 1/M_{21}$, $Z_{n22} = -M_{22}/M_{21}$.

根据电力类比原理以及非互易的二端口等效网络知识, 由 (13) 式可得到变厚度金属薄圆环径向振动的等效电路图如图 3 所示.

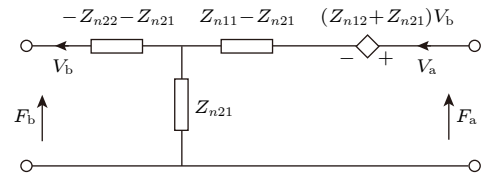


图 3 变厚度金属薄圆环径向振动的等效电路图

Fig. 3. Equivalent circuit diagram of metal thin annular with variable thickness in radial vibration.

当变厚度金属薄圆环的输出端自由, 即 $F_b = 0$ 时, 变厚度金属薄圆环径向振动的共振频率方程为

$$Z_{in} = \frac{Z_{n11}Z_{n22} - Z_{n12}Z_{n21}}{Z_{n22}} = 0. \quad (14)$$

此时, 变厚度金属薄圆环的位移放大系数为

$$M^* = \left| \frac{1}{M_{22}} \right|. \quad (15)$$

2.2 变厚度金属薄圆环径向振动性能分析

根据任意变厚度金属薄圆环径向振动的等效电路图, 得到其共振频率方程和位移放大系数表达式. 选取 $N=100$, 使用数值计算软件 MATLAB 根据 (14) 式和 (15) 式分别计算①锥型金属圆环、②幂函数型金属圆环、③指数型金属圆环和④悬链线型金属圆环径向振动的共振频率和位移放大系数. 锥型金属圆环的厚度随半径以线性函数规律变化, 幂函数型金属圆环的厚度随半径以幂函数 $h(r) = m/r^n$ 规律变化, 指数型金属圆环的厚度随半径以指数函数 $h(r) = ae^{-\beta r}$ 规律变化, 悬链线型金属圆环的厚度随半径以悬链线函数 $h(r) = h_a \cosh[\gamma(R_a - r)]$ 规律变化. 金属圆环的尺寸参数是: 内环半径 $R_b = 25 \text{ mm}$, 外环半径 $R_a = 50 \text{ mm}$, 外环半径处厚度 $h_a = 10 \text{ mm}$, 内环半径处厚度 h_b 的取值范围为 1—10 mm. 选取金属圆环的材料为铝, 其材料参数为: 密度 $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, 杨氏模量 $E = 70 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.33$. 为了与理论计算结果进行对比, 使用有限元软件 COMSOL6.0 对上述材料尺寸的金属圆环进行仿真模拟. 4 种变厚度金属圆环的一阶、二阶径向共振频率和位移放大系数的理论解和数值解如表 1 和表 2 所示. 表 1 和表 2 中 f 和 f^* 分别表示变厚度金属圆环径向振动共振频率的理论解和数值解, M^* , M^{**} 分别表示变厚度金属圆环位移放大系数的理论解和数值解,

相对误差计算方法为: $\Delta_f = |(f - f^*)/f^*|$, $\Delta_{M^*} = |(M^* - M^{**})/M^{**}|$.

4 种变厚度金属圆环 (①锥型金属圆环、②幂函数型金属圆环、③指数型金属圆环、④悬链线型金属圆环) 径向一阶、二阶共振频率和位移放大系数随内外环厚度比 h_a/h_b 的变化曲线如图 4 和图 5 所示, 其中-T 为理论结果, -FEM 为有限元仿真结果.

由图 4 可知, 4 种变厚度金属圆环的一阶共振频率随 h_a/h_b 的增大而减小, 当内环半径处的厚度 h_b 减小时, 金属圆环等效半径增大, 共振频率减小. 二阶共振频率随着 h_a/h_b 的增大而增大, 径向二阶共振频率受金属圆环等效质量影响较大, 当内环半径处厚度 h_b 减小时, 金属圆环等效质量减小, 共振频率向高频偏移. 另外, 4 种变厚度金属圆环一阶共振频率的数值解几乎在理论解随 h_a/h_b 的变化曲线上, 二阶共振频率的数值解随 h_a/h_b 的变化趋势与理论解一致, 且相对误差在 2% 以内, 这表明传输矩阵法可以用来研究任意变厚度金属圆环的径向振动. 由于径向二阶的声波波长比一阶小, 耦合振动效应较为明显, 使得径向二阶共振频率的相对误差大于径向一阶.

由图 5 可知, 4 种变厚度金属圆环 (①锥型金属圆环、②幂函数型金属圆环、③指数型金属圆环和④悬链线型金属圆环) 一阶共振、二阶共振的位移放大系数随 h_a/h_b 的增大而增大, 这表明内环半径处的厚度 h_b 越小, 环型聚能器向内聚能的效果越好. 整体来看, 一阶共振的位移放大系数从大到小依次是锥型、幂函数型、指数型、悬链线型, 二阶共

表 1 变厚度金属圆环径向一阶、二阶共振频率

Table 1. Radial first and second order resonance frequencies of metal rings with variable thickness.

	h_b/mm	h_a/mm	f_{r1}/Hz	f_{r1}^*/Hz	$\Delta_{f_{r1}}/\%$	f_{r2}/Hz	f_{r2}^*/Hz	$\Delta_{f_{r2}}/\%$
锥型	6	10	21894	21892	0.01	112380	110790	1.44
幂函数型	5	10	21679	21679	0	113330	111720	1.44
指数型	4	10	21401	21399	0.01	112770	111480	1.16
悬链线型	3	10	20968	20957	0.05	109700	108890	0.74

表 2 变厚度金属圆环径向一阶、二阶共振位移放大系数

Table 2. Radial first and second order resonance displacement amplification coefficients of metal rings with variable thickness.

	h_b/mm	h_a/mm	M_{r1}^*	M_{r1}^{**}	$\Delta_{M_{r1}^*}/\%$	M_{r2}^*	M_{r2}^{**}	$\Delta_{M_{r2}^*}/\%$
锥型	6	10	1.1985	1.1987	0.02	1.8304	1.8160	0.79
幂函数型	5	10	1.1997	1.2000	0.02	1.9876	1.9670	1.04
指数型	4	10	1.1992	1.1995	0.02	2.2501	2.2135	1.16
悬链线型	3	10	1.1959	1.1956	0.02	2.8118	2.7359	2.77

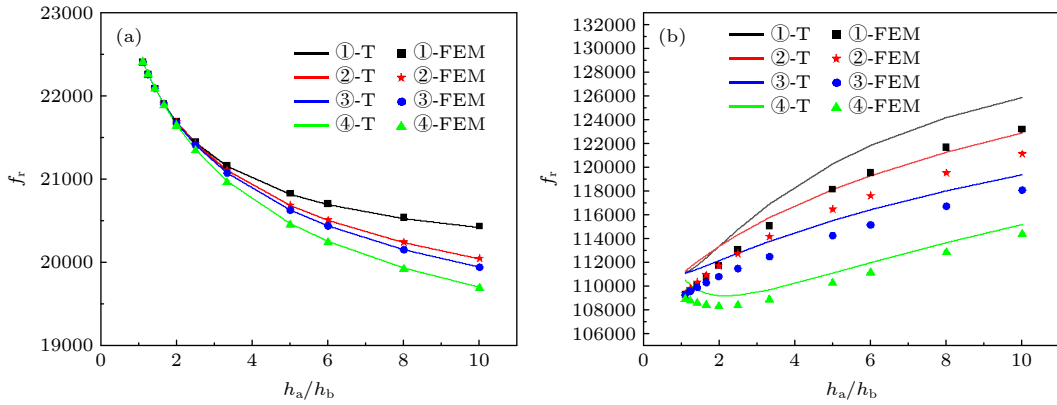


图 4 4 种变厚度金属圆环一阶、二阶径向共振频率与 h_a/h_b 的关系 (a) 一阶径向共振; (b) 二阶径向共振

Fig. 4. The relationship between the first and second order radial resonance frequencies of four kinds of variable thickness metal rings and thickness ratio h_a/h_b : (a) First-order radial resonance; (b) second-order radial resonance.

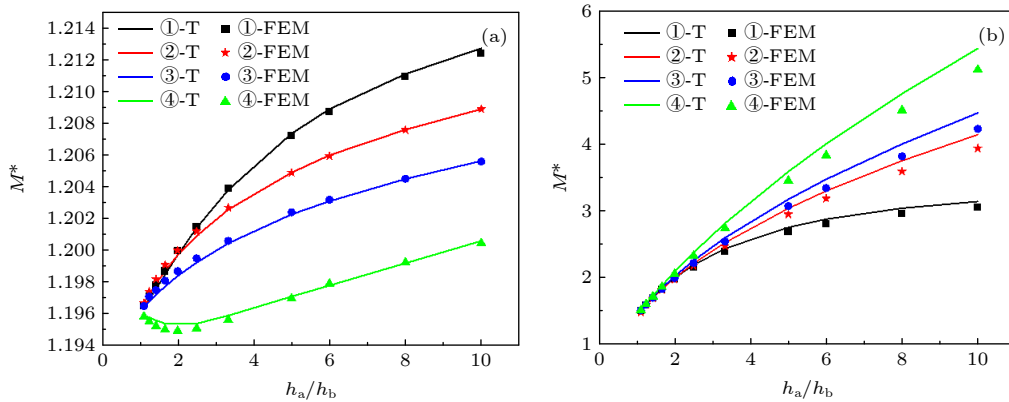


图 5 4 种变厚度环型聚能器一阶和二阶径向共振位移放大系数随 h_a/h_b 的变化曲线 (a) 一阶径向共振; (b) 二阶径向共振

Fig. 5. The relationship between the first and second order radial resonance displacement amplification coefficient and thickness ratio h_a/h_b of four kinds of variable thickness metal rings: (a) First-order radial resonance; (b) second-order radial resonance.

振的位移放大系数从大到小依次是悬链线型、指数型、幂函数型、锥型. 4 种聚能器的一阶共振位移放大系数较小, 在 1.2 左右, 二阶共振位移放大系数较大, 在 2—4 范围. 这表明位移放大系数不止与厚度随半径的函数变化关系有关, 还与工作模态相关. 另外, 4 种聚能器径向一阶、二阶共振位移放大系数的数值解基本与理论解随 h_a/h_b 的变化曲线重合, 验证了理论解的正确性.

2.3 N 取值对计算精度的影响

本文将变厚度金属圆环的径向振动等效近似为 N 个等厚金属圆环径向振动的叠加, N 的取值大小对计算精度影响较大. 选取锥型变厚度金属圆环的材料为铝, 尺寸参数是: 内环半径 $R_b = 25$ mm, 外环半径 $R_a = 50$ mm, 外环半径处厚度 $h_a = 10$ mm, 内环半径处厚度 $h_b = 1$ mm. 锥型变厚度金属圆环的一阶、二阶径向共振频率随 N 的变

化趋势如图 6 所示, 由图 6 可知, 当 N 的取值大于 50 时, 锥型金属圆环径向一阶、二阶共振频率趋于稳定, 即等厚度金属圆环的径向厚度小于 0.5 mm 时, 共振频率的计算精度满足要求.

3 环型压电换能器径向振动分析

3.1 变厚度环型压电换能器径向振动的等效电路

根据文献 [26] 可知, 在厚度方向极化的压电陶瓷薄圆环径向振动的等效电路图如图 7 所示. 图 7 中 F_a, V_a 和 F_c, V_c 分别代表压电陶瓷内环和外环的径向作用力和径向振动速度, $n_1 = \pi k_p R_c / 2$, $n_2 = \pi k_p R_a / 2$, $k_p = \omega_p / c_p$, $\omega_p = 2\pi f$, $c_p = [S_{11}^E \rho_p (1 - \nu_p^2)]^{-1/2}$, $\nu_p = -S_{12}^E / S_{11}^E$, $N_{31} = \pi^2 k_p R_a R_c d_{31} / (s_{11}^E + s_{12}^E)$, $C_{0r} = (\varepsilon_{33}^T S_p / h_a) \{1 - 2d_{31}^2 / [\varepsilon_{33}^T (s_{11}^E + s_{12}^E)]\}$, $S_p = \pi(R_c^2 - R_a^2)$, N_{31} 和 C_{0r} 分别代表压电陶瓷圆环径向振动的机电

耦合系数和钳定电容, d_{31} 是压电应变常数, s_{11}^E 和 s_{12}^E 是恒定电场下的弹性柔顺系数, ε_{33}^T 是恒定应力

下的介电常数. 图 7 中机械阻抗 Z_{P1} , Z_{P2} , Z_{P3} 的具体表达式如下:

$$Z_{P1} = \frac{\pi^2(k_p R_c)^2 Z_{ra}}{4j} \left[\frac{Y_1(k_p R_c) J_0(k_p R_a) - J_1(k_p R_c) Y_0(k_p R_a)}{J_1(k_p R_c) Y_1(k_p R_a) - J_1(k_p R_a) Y_1(k_p R_c)} + \frac{1 - \nu_p}{k_p R_a} \right] - j \frac{Z_{ra}}{2} \frac{\pi k_p R_c}{J_1(k_p R_c) Y_1(k_p R_a) - J_1(k_p R_a) Y_1(k_p R_c)}, \quad (16)$$

$$Z_{P2} = \frac{\pi^2(k_p R_a)^2 Z_{rc}}{4j} \left[\frac{Y_1(k_p R_a) J_0(k_p R_c) - J_1(k_p R_a) Y_0(k_p R_c)}{J_1(k_p R_c) Y_1(k_p R_a) - J_1(k_p R_a) Y_1(k_p R_c)} + \frac{1 - \nu_p}{k_p R_c} \right] - j \frac{Z_{rc}}{2} \frac{\pi k_p R_a}{J_1(k_p R_c) Y_1(k_p R_a) - J_1(k_p R_a) Y_1(k_p R_c)}, \quad (17)$$

$$Z_{P3} = j \frac{Z_{ra}}{2} \frac{\pi k_p R_c}{J_1(k_p R_c) Y_1(k_p R_a) - J_1(k_p R_a) Y_1(k_p R_c)}, \quad (18)$$

其中, $Z_{ra} = \rho_p c_p S_{ra}$, $Z_{rc} = \rho_p c_p S_{rc}$, $S_{ra} = 2\pi R_a h_a$, $S_{rc} = 2\pi R_c h_a$, h_a 是压电陶瓷圆环的厚度, k_p 和 c_p 分别是压电陶瓷圆环的波数和径向声速.

变厚度金属薄圆环与压电陶瓷薄圆环在半径 R_a 处满足径向应力连续和振动速度连续, 因此, 变厚度金属薄圆环径向振动与压电陶瓷薄圆环径向振动的等效电路串联, 可得到环型压电超声换能器

径向振动的等效电路图如图 8 所示.

当环型压电超声换能器内外表面所受径向作用力为 0 时, 即图 8 中 $F_b = F_c = 0$ 时, 环型压电超声换能器电端输入阻抗表达式为

$$Z_e = \frac{1/(j\omega C_{0r}) \cdot Z_m/N_{31}^2}{1/(j\omega C_{0r}) + Z_m/N_{31}^2} = \frac{Z_m}{j\omega C_{0r} Z_m + N_{31}^2}, \quad (19)$$

其中

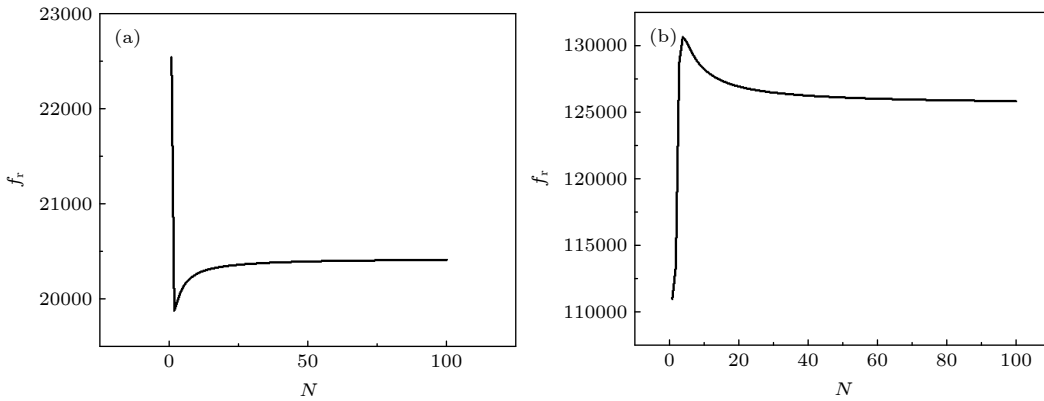


图 6 锥型金属圆环的一阶、二阶径向共振频率与 N 的关系 (a) 一阶径向共振; (b) 二阶径向共振

Fig. 6. The relationship between the first and second order radial resonant frequencies of conical metal rings and N : (a) First-order radial resonance; (b) second-order radial resonance.

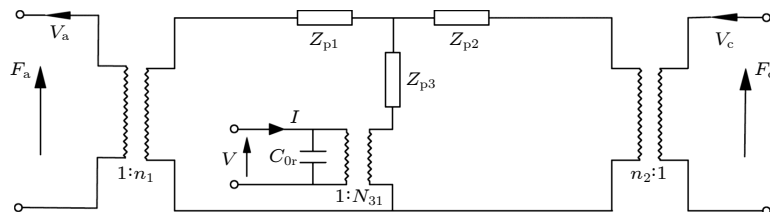


图 7 压电陶瓷圆环径向振动的等效电路图

Fig. 7. Equivalent circuit diagram of piezoelectric ceramic annular in radial vibration.

$$Z_m = \frac{(n_1^2 Z_{in} + Z_{p1}) Z_{p2}}{n_1^2 Z_{in} + Z_{p1} + Z_{p2}} + Z_{p3}. \quad (20)$$

因此环型压电超声换能器径向振动共振频率方程为

$$Z_m = 0, \quad (21)$$

径向振动反共振频率方程为

$$Z_m = \infty. \quad (22)$$

3.2 变厚度环型压电超声换能器径向振动性能分析

根据 (21) 式和 (22) 式可以求得任意变厚度环型压电超声换能器径向振动的共振频率和反共振频率, 本文以锥型变厚度环型压电超声换能器为例, 锥型压电超声换能器由锥型变厚度金属薄圆环和等厚度压电陶瓷圆环组成. 变厚度金属薄圆环的尺寸参数是: 内环半径 $R_b = 20$ mm, 外环半径 $R_a =$

40 mm, 外环半径处厚度 $h_a = 10$ mm, 内环半径处厚度 h_b 的取值范围为 1—10 mm. 压电陶瓷圆环的尺寸参数是: 内环半径 $R_a = 40$ mm, 外环半径 $R_c = 45$ mm, 压电陶瓷圆环的厚度 $h_a = 10$ mm. 选取金属圆环的材料为铝, 选取压电陶瓷圆环的材料为 PZT-4, 其材料参数是: $\rho_p = 7500$ kg/m³, $S_{11}^E = 12.3 \times 10^{-12}$ m²/N, $S_{12}^E = -4.05 \times 10^{-12}$ m²/N, $d_{31} = -1.23 \times 10^{-10}$ C/N, $\epsilon_{33}^T = 11.4946 \times 10^{-9}$. 为了与理论计算结果进行对比, 使用有限元软件 COMSOL6.0 对上述材料尺寸的环型压电超声换能器进行仿真模拟, 模拟所得一阶共振、二阶共振的振型图如图 9 所示. 部分尺寸锥型变厚度环型压电超声换能器一阶、二阶共振频率和反共振频率的理论解和数值解如表 3 和表 4 所示.

表 3 和表 4 中 f 和 f^* 分别表示锥型变厚度环型压电超声换能器径向振动共振频率的理论解和数值解, K_{eff} 和 K_{eff}^* 分别为其有效机电耦合系数的理

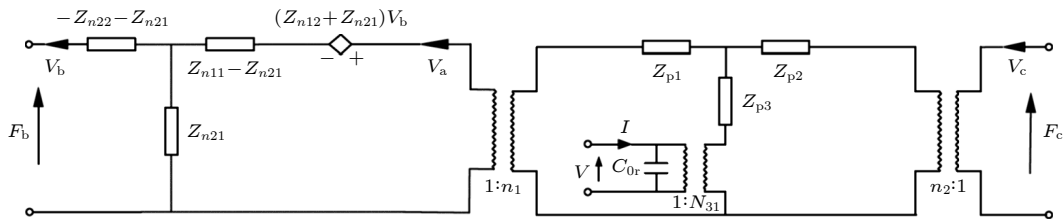


图 8 环型压电超声换能器径向振动的等效电路图

Fig. 8. Equivalent circuit diagram of circular piezoelectric ultrasonic transducer in radial vibration.

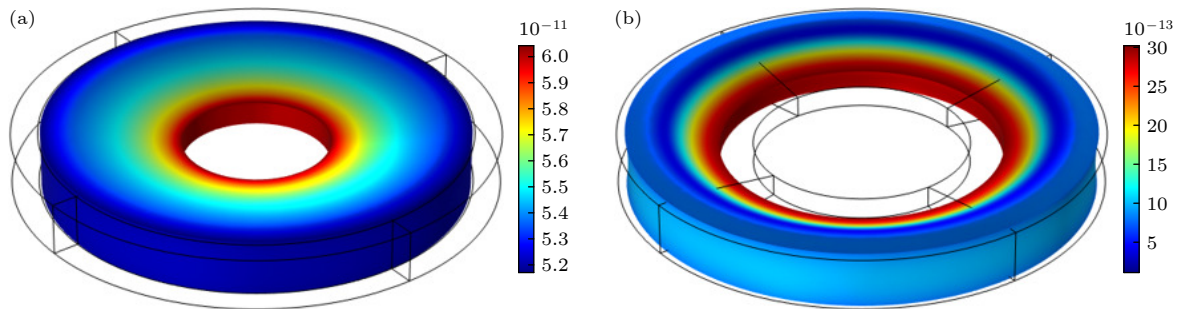


图 9 锥型变厚度环型压电超声换能器一阶、二阶径向共振振型图 (a) 一阶径向共振; (b) 二阶径向共振

Fig. 9. First-order and second-order radial resonance mode shapes of conical variable thickness annular piezoelectric ultrasonic transducer: (a) First-order radial resonance; (b) second-order radial resonance.

表 3 锥型变厚度环型压电换能器一阶共振频率和反共振频率

Table 3. The first-order resonant frequency and anti-resonant frequency of conical variable thickness annular piezoelectric transducer.

h_b /mm	h_a /mm	f_{r1} /Hz	f_{r1}^* /Hz	$\Delta_{f_{r1}}$ /%	f_{a1} /Hz	f_{a1}^* /Hz	$\Delta_{f_{a1}}$ /%	$K_{\text{eff}1}$	$K_{\text{eff}1}^*$
9	10	22002	21989	0.06	22276	22269	0.03	0.156	0.158
6	10	21059	21042	0.08	21355	21348	0.03	0.166	0.169
3	10	19886	19856	0.15	20209	20192	0.08	0.178	0.182

表 4 锥型变厚度环型压电换能器二阶共振频率和反共振频率

Table 4. The second-order resonant frequency and anti-resonant frequency of conical variable thickness annular piezoelectric transducer.

h_b/mm	h_a/mm	f_{r2}/Hz	f_{r2}^*/Hz	$\Delta_{f_{r2}}/\%$	f_{a2}/Hz	f_{a2}^*/Hz	$\Delta_{f_{a2}}/\%$	$K_{\text{eff}2}$	$K_{\text{eff}2}^*$
9	10	95014	93401	1.73	96069	94814	1.32	0.148	0.172
6	10	98432	96383	2.13	99471	97922	1.58	0.144	0.177
3	10	105005	102020	2.93	106094	103830	2.18	0.143	0.186

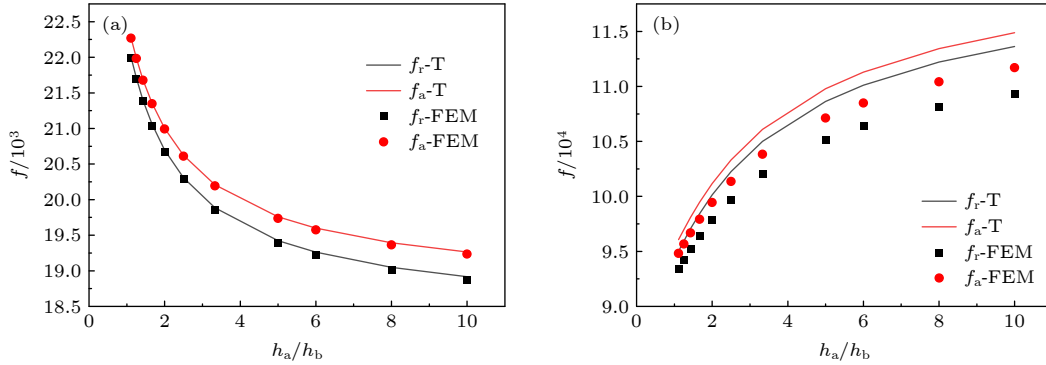


图 10 锥型变厚度环型压电超声换能器一阶、二阶径向共振频率和反共振频率与 h_a/h_b 的关系 (a) 一阶共振和反共振; (b) 二阶共振和反共振

Fig. 10. The relationship between the first and second order radial resonance frequency and the anti-resonance frequency and the thickness ratio h_a/h_b of a conical variable thickness annular piezoelectric ultrasonic transducer: (a) The first-order radial resonance and anti-resonance; (b) the second-order radial resonance and anti-resonance.

论解和数值解, 相对误差 $\Delta = |(f - f^*)/f^*|$. 由表 3 和表 4 可知, 径向一阶振动共振频率的理论解和数值解吻合非常好, 相对误差不超过 0.2%, 径向二阶振动共振频率的理论解和数值解吻合较好, 相对误差不超过 3%. 这验证了基于传输矩阵法的任意变厚度环型压电超声换能器径向振动共振频率理论解的正确性. 由于径向二阶的声波波长比一阶小, 耦合振动效应较为明显, 二阶共振频率、反共振频率的相对误差大于径向一阶.

锥型变厚度环型压电超声换能器径向一阶、二阶共振频率和反共振频率随内外环厚度比 h_a/h_b 的变化曲线如图 10 所示. 由图 10 可知, 径向一阶共振频率、反共振频率随着随 h_a/h_b 的增大而减小, 径向二阶共振频率、反共振频率随着随 h_a/h_b 的增大而增大. 随着 h_a/h_b 的增大, 一阶、二阶的共振频率和反共振频率的差值增大, 有效机电耦合系数增大.

4 结 论

本文基于传输矩阵法将变厚度金属圆环的径向振动转化为 N 个等厚度金属圆环径向振动的叠

加, 得到了任意变厚度金属薄圆环径向振动的等效电路图、共振频率方程和位移放大系数表达式, 分析了锥型、幂函数型、指数型、悬链线型金属圆环的位移放大系数随内外环厚度比 h_a/h_b 的变化关系. 研究发现, 整体上一阶共振频率随 h_a/h_b 的增大而减小, 二阶共振频率随着 h_a/h_b 的增大而增大. 一阶、二阶的位移放大系数均随 h_a/h_b 的增大而增大, 且径向一阶共振位移放大系数从大到小依次是锥型、幂函数型、指数型和悬链线型, 径向二阶共振位移放大系数从大到小依次是悬链线型、指数型、幂函数型、锥型. 在此基础上, 推导了由任意变厚度金属圆环和压电陶瓷圆环复合而成的压电超声换能器径向振动的等效电路和共振频率方程, 计算了不同尺寸的环型压电换能器的共振频率和反共振频率, 为了验证理论计算结果的正确性, 使用有限元软件进行仿真模拟, 模拟所得数值解与理论解符合较好, 最大相对误差不超过 3%.

参考文献

[1] Sun S Z, Li J B 2019 *Acta Acust.* **44** 743 (in Chinese) [孙淑珍, 李俊宝 2019 *声学学报* **44** 743]
 [2] Liu S Q, Yang X L, Zhang Z L, Chen Z J 2013 *Acta Acust.*

- 38 188 (in Chinese) [刘世清, 杨先莉, 张志良, 陈赵江 2013 声学学报 **38** 188]
- [3] Jin O K, Jung G L 2007 *J. Sound Vib.* **300** 241
- [4] Wang H M, Luo D S 2016 *Appl. Math. Model.* **40** 2549
- [5] Hyun K L, Dabin J 2020 *Optik (Stuttg)* **222** 165480
- [6] Luka P, Duje M, Fran M, Marko S, Marko B, Sven L 2022 *IEEE Int. Ultrason. Symp.* **124** 106737
- [7] Kai X Z, Huang S M, Wu L, Ran T, Peng Y J, Mao Z M, Chen F, Li G R 2019 *J. Mater. Sci. Technol.* **35** 2107
- [8] Feng J J, Liu L, Ma X Hong, Yuan J H, Wang A J 2017 *Int. J. Hydrogen Energy* **42** 2071
- [9] Mohammad J B, Ammad M, Thomas L, Jochen B, Konrad K 2022 *Bioresour Technol.* **348** 126785
- [10] Liu H B, Wang X K, Qin S, Lai W J, Yang X, Xu S Y 2021 *Sci. Total Environ.* **789** 147862
- [11] Li S, Wang Y H, Wu S S, Niu W D, Yang S Q 2022 *Appl. Math. Model.* **109** 455
- [12] Liu Z Y, Miao K, Tan Z M 2022 *Appl. Acoust.* **187** 108497
- [13] Wang X Y, Lin S Y 2021 *Acta Acust.* **46** 271 (in Chinese) [王晓宇, 林书玉 2021 声学学报 **46** 271]
- [14] Liu Y, Li B 2017 *Electromach. Mould.* **03** 61 (in Chinese) [刘垚, 李斌 2017 电加工与模具 **03** 61]
- [15] Li J, Ding Y H, Liang X 2016 *Mach. Design Manufact.* **7** 197 (in Chinese) [李井, 丁艳红, 梁欣 2016 机械设计与制造 **7** 197]
- [16] Gong J H, Wang C F, Wu C Q 2022 *Mech. Engineer.* **1** 151 (in Chinese) [巩建辉, 王晨丰, 吴承启 2022 机械工程师 **1** 151]
- [17] Wang S, Shan J J, Lin S Y 2022 *IEEE Int. Ultrason. Symp.* **120** 106640
- [18] Chen C, Lin S Y 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 017701 (in Chinese) [陈诚, 林书玉 2021 物理学报 **70** 017701]
- [19] Hu L Q, Wang S, Lin S Y 2022 *Chin. Phys. B* **31** 508
- [20] Xu L, Li W D 2019 *Acta Acust.* **44** 826 (in Chinese) [许龙, 李伟东 2019 声学学报 **44** 826]
- [21] Xu L, Fan X M 2021 *J. Appl. Acoust.* **40** 878 (in Chinese) [许龙, 范秀梅 2021 应用声学 **40** 878]
- [22] Liu S Q, Lin S Y, Guo J Z 2006 *Piezoelect. Acoustoop.* **03** 347 (in Chinese) [刘世清, 林书玉, 郭建中 2006 压电与声光 **03** 347]
- [23] Wang X Y, Lin S Y 2020 *J. Shaanxi Normal Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **48** 107 (in Chinese) [王晓宇, 林书玉 2020 陕西师范大学学报 (自然科学版) **48** 107]
- [24] Deng T T, Fu B 2017 *Mech. Engineer.* **1** 36 (in Chinese) [邓婷婷, 傅波 2017 机械工程师 **1** 36]
- [25] Lin S Y, Xu L 2012 *IEEE Int. Ultrason. Symp.* **52** 103
- [26] Lin S Y 2007 *Sens. Actuators A Phys.* **134** 505

Arbitrary variable thickness annular piezoelectric ultrasonic transducer based on transfer matrix method*

Dong Yi-Lei Chen Cheng Lin Shu-Yu †

(*Shaanxi Provincial Key Laboratory of Ultrasound, School of Physics and Information Technology,
Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China*)

(Received 3 November 2022; revised manuscript received 26 November 2022)

Abstract

The variable thickness annular radial piezoelectric ultrasonic transducer can realize impedance transformation and energy concentration, has the advantages of large radiation area and full directivity, and is widely used in power ultrasound, underwater acoustic and other fields. Because solving complex variable thickness metal ring radial vibration wave equation is more difficult, in this paper, the radial vibration of metal rings with variable thickness is transformed into the superposition of the radial vibrations of N metal rings with equal thickness by using the transfer matrix method. The equivalent circuit diagram, the resonance frequency equation and the expression of the displacement amplification coefficient of the radial vibration of the metal thin ring with arbitrary thickness are obtained. The relationship between the displacement amplification coefficient and the geometric size of the cone, power function, exponential and catenary metal rings is analyzed. On this basis, the equivalent circuit and resonance frequency equation of radial vibration of piezoelectric ultrasonic transducer which is composed of a metal ring with variable thickness and a piezoelectric ring with equal thickness are derived. In order to verify the correctness of the theoretical results, the finite element software is used in simulation, and the numerical solutions of the first and second order resonance frequency and displacement amplification coefficients are in good agreement with the theoretical solutions. In this paper, the universal solution of radial vibration of metal ring with arbitrary variable thickness is given, which provides theoretical guidance for designing and optimizing the radial piezoelectric ultrasonic transducers.

Keywords: annular piezoelectric ultrasonic transducer, radial vibration, transfer matrix method, equivalent circuit

PACS: 43.38.+n, 43.30.+m

DOI: [10.7498/aps.72.20222110](https://doi.org/10.7498/aps.72.20222110)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11674206, 11874253, 12174240).

† Corresponding author. E-mail: sylin@snnu.edu.cn



基于传输矩阵法的任意变厚度环型压电超声换能器

董宜雷 陈诚 林书玉

Arbitrary variable thickness annular piezoelectric ultrasonic transducer based on transfer matrix method

Dong Yi-Lei Chen Cheng Lin Shu-Yu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 054304 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222110

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222110>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于2-2型压电复合材料的新型宽频带径向振动超声换能器

A new broadband radial vibration ultrasonic transducer based on 2-2 piezoelectric composite material

物理学报. 2021, 70(1): 017701 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201352>

黏弹介质包裹的液体腔中气泡的动力学分析

Dynamic analysis of bubble in liquid cavity wrapped by viscoelastic medium

物理学报. 2021, 70(12): 124301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201876>

双层螺旋环超表面复合吸波体等效电路模型及微波损耗机制

Equivalent circuit model and microwave reflection loss mechanism of double-layer spiral-ring metasurface embedded composite microwave absorber

物理学报. 2019, 68(9): 095201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181960>

二次电子倍增对射频平板腔建场过程的影响

Influence of multipactor discharge on field-buildup process in radio-frequency plate cavity

物理学报. 2018, 67(17): 177902 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180656>

双明模耦合的双波段类电磁诱导透明研究

Electromagnetic induction-like transparency in dual-band with dual-bright mode coupling

物理学报. 2022, 71(1): 014201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211312>

高功率脉冲磁控溅射钛靶材的放电模型及等离子体特性

Discharge model and plasma characteristics of high-power pulsed magnetron sputtering titanium target

物理学报. 2021, 70(18): 180701 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202050>