

Markov 环境下“X”态基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验*

曾柏云 辜鹏宇 蒋世民 贾欣燕 樊代和†

(西南交通大学物理科学与技术学院, 成都 610031)

(2022 年 11 月 20 日收到; 2022 年 12 月 7 日收到修改稿)

量子非局域关联是量子理论最基础的特征之一。“X”态作为实验中常见的一种量子态, 因其在演化过程中仍保持“X”形的稳定性, 而被广泛应用于开放量子系统的研究中. 利用 Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) 不等式, 在 Markov 环境这种典型的开放量子系统下, 研究了两种通过局部变换操作所关联的“X”态在振幅阻尼环境和相位阻尼环境中量子非局域检验结果随时间的演化情况. 研究表明, 在相位阻尼环境中, 随着演化时间的增加, 两种“X”态具有相同的 CHSH 不等式检验结果. 在振幅阻尼环境中, 利用局部变换操作得到的“X”态, 可获得较长的成功进行量子非局域关联检验的演化时间. 最后, 详细给出了两种类型“X”态在相位阻尼环境和振幅阻尼环境中成功进行量子非局域关联检验的保真度范围.

关键词: 量子非局域关联, “X”态, CHSH 不等式, 相位阻尼, 振幅阻尼

PACS: 03.65.Ud, 03.65.Yz, 03.67.Mn

DOI: 10.7498/aps.72.20222218

1 引言

量子非局域关联最早由 Einstein-Podolsky-Rosen(EPR) 佯谬^[1]引入, 揭示了量子理论与经典局域实在论之间的矛盾. 由于量子非局域关联是量子理论最基本的特性之一, 其也成为了量子信息学发展的关键基础^[2]. 近年来, 量子非局域性关联在量子通信^[3]、量子计算^[4]和量子密码学^[5]等中均发挥了重要的应用价值.

1964 年, Bell^[6]提出了著名的 Bell 不等式, 可用于对量子非局域关联进行检验. 而对于两比特量子纠缠态, 利用 Clauser 等^[7]提出的 Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) 不等式, 可更加方便地进行量子非局域关联的实验检验研究. 在 CHSH 不等式检验方案中, 经典局域论预言 CHSH 不等式的检验上限为 $S_{c-max} = 2$, 而量子理论可以使该

上限值进一步达到 $S_{q-max} = 2\sqrt{2}$. 因此, 在量子非局域关联的检验研究中, 只需要通过判断 CHSH 不等式检验值 $S > 2$ 是否成立, 即可证明量子非局域关联的存在.

然而, 量子非局域关联在量子信息领域的实际应用中, 由于量子态不可避免地将与环境 (如开放量子系统) 相互作用, 进而导致量子态发生退相干现象, 这将导致虽然实验制备出的量子态具有量子非局域关联特性, 但与环境发生相互作用后, 其量子非局域关联特性将会消失, 甚至还会出现所谓的“纠缠突然死亡”的现象^[8]. 因此, 研究量子态在开放量子系统中随时间演化后, 是否还存在量子非局域关联特性, 具有一定的必要性. 通常, 量子态在开放量子系统演化时, 有两种典型的演化环境模型, 即相位阻尼环境和振幅阻尼环境. 例如, 相位阻尼环境可以用来描述量子态通过波导时的随机散射过程, 而振幅阻尼环境可以描述自发辐射过程

* 计算物理国防科技重点实验室 (批准号: G142A05180401) 和国家自然科学基金 (批准号: 12147208) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dhfan@swjtu.edu.cn

中量子态的动力学演化过程^[9].

2007年, Yu等^[10]提出了一种典型的量子态,即“X”态(其密度矩阵可写为如(1)式所示的“X”形状),并研究了该量子态在开放量子系统中并发度(concurrence) C 随保真度 F 和时间 t 的变化情况:

$$\rho_X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & w \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ w^* & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 $a + b + c + d = 1$, $|z| \leq \sqrt{bc}$, $|w| \leq \sqrt{ad}$. 值得说明的是,由于“X”态的并发度可写为

$$C = 2 \max\{0, |z| - \sqrt{ad}, |w| - \sqrt{bc}\}, \quad (2)$$

因此,当且仅当 $bc < |w|^2$ 或 $ad < |z|^2$ 时,(1)式才为一量子纠缠态.实际上,“X”态具有两方面的特点^[11]:首先,它可以在各种物理环境中产生,且在常见的开放量子系统中演化后,仍能保持为“X”型,这为更方便地研究其纠缠和量子非局域关联特性提供了保障;其次,其包含了若干重要类型的量子态类别,如最大纠缠态、部分纠缠态和 Werner态等,都属于“X”态的范畴.

目前,“X”态作为一个重要的量子资源,其在开放量子系统动力学的研究仍然是量子理论中的研究热点之一.例如,2022年,Guo等^[12]研究了一类两比特“X”态的相干和混合的几何图像,并展示了在相干与混合之间相协调的新的图像和结构.Kelleher等^[13]指出了“X”态的一些性质,如纠缠性与二阶辛极空间的一类特殊的超几何平面有关.Namitha等^[14]利用“X”态研究了初始的相干对具有偶极相互作用的一个公共真空库中空间分离的两个量子比特系统的纠缠动力学影响.Zhao等^[15]研究了量子相干性和量子纠缠在 Bell 对角态这种“X”态中的关系,并进一步提出相干性和纠缠之间的关系.2021年,我们课题组^[16]提出了一种基于 CHSH 不等式几何解释的“X”态量子非局域关联检验方案,这对任意“X”态的量子非局域关联检验研究提供了理论基础.虽然胡强等^[17]也利用 Hardy-type 佯谬对振幅阻尼信道、相位阻尼信道和退极化信道等三种类型的退相干传输信道中的量子态进行了量子非局域关联检验研究,但是,到目前为止,关于“X”态在开放量子系统中,特别是在 Markov 环境这种典型环境中,基于 CHSH 不等式的量子非局域性的研究还尚未有报道.

基于此,本文首先给出两种由局部变换关系所关联的“X”态的密度矩阵,结合 Kraus 算符,阐述了在 Markov 环境中,“X”态通过相位阻尼和振幅阻尼环境时,密度矩阵随时间和保真度的演化情况.最后,基于 CHSH 不等式,对两种类型“X”态经过相位阻尼和振幅阻尼环境演化后的量子非局域关联特性进行了检验研究,最终给出了这两种“X”态在上述两种环境中演化后,成功地进行量子非局域关联的条件和范围.

2 Markov 环境下“X”态的演化及其基于 CHSH 不等式的检验方案

考虑如图 1 所示的一个由腔 A 和腔 B 组成的量子系统,其中每个系统中均存在一个二能级原子.腔中原子与腔之间存在相互作用,且这两个腔中的原子之间存在一定的纠缠特性.此时,可将总的系统(腔 A 和腔 B 组成的整体)看作一个封闭的系统,它们不与系统外的环境相互作用.在该情况下,由该系统组成的量子态的密度矩阵,可由(1)式进行描述,其为一典型的“X”态,且其反对角线一般为实数^[18].

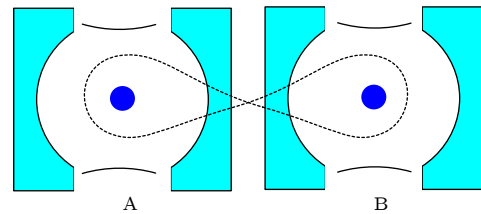


图 1 量子系统示意图,其中腔 A 和腔 B 中各有一个二能级原子,且其存在纠缠特性

Fig. 1. Schematic diagram of quantum system. Cavity A and cavity B have one two-level atom entanglement down respectively.

如(1)式所示的“X”态,在 Markov 环境下随时间演化时,不失一般性地,演化后的密度矩阵可写为

$$\rho_X(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 & w(t) \\ 0 & b(t) & z(t) & 0 \\ 0 & z(t) & c(t) & 0 \\ w(t) & 0 & 0 & d(t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

式中,各参数仍然满足如(1)式所述的要求.

在给定密度矩阵的情形下,根据基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验方案^[7,16,19],只需计算该量子态的关联矩阵 $K = (k_{mn})(m, n = 1, 2, 3)$,

即可进行量子非局域关联的检验研究. 其中关联矩阵元 $k_{mn} = \text{tr}(\rho_X(t) \cdot \sigma_m \otimes \sigma_n)$ 表示关联矩阵中处于第 m 行、第 n 列的矩阵元, $\sigma_{m,n}$ 表示泡利算符.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2w(t) + 2z(t) & 0 & 0 \\ 0 & 2z(t) - 2w(t) & 0 \\ 0 & 0 & a(t) - b(t) - c(t) + d(t) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

如假设 x 和 y 分别表示 (4) 式中 3 个对角元绝对值的最大和次大值, 则进行量子非局域关联检验时, CHSH 不等式的最大值可写为^[19]

$$S_m = 2\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

此时, 如 $S_m > 2$ 能够被满足, 即可证明该量子态可成功进行量子非局域检验.

在明确了上述基于 CHSH 不等式进行的量子非局域关联检验的方案后, 此时即需要得出“X”态在 Markov 环境下, 密度矩阵随时间的动力学演化结果. 实际上, 图 1 所示的 A 和 B 组成的总系统的哈密顿量可写为 $H_{\text{tot}} = H_{\text{at}} + H_{\text{cav}} + H_{\text{int}}$, 其中 H_{at} 表示 A 和 B 系统中原子的哈密顿量 H_{at}^{A} 与 H_{at}^{B} 之和, H_{cav} 表示腔 A 和腔 B 中环境的哈密顿量 $H_{\text{cav}}^{\text{A}}$ 与 $H_{\text{cav}}^{\text{B}}$ 之和, H_{int} 表示每个系统中原子与各自所处环境的相互作用哈密顿量 $H_{\text{int}}^{\text{A}}$ 与 $H_{\text{int}}^{\text{B}}$ 之和^[20]. 二能级原子与腔环境的相互作用后, 将导致“X”态的纠缠特性逐渐出现解纠缠现象, 并且不同类型的腔环境对量子态的纠缠特性影响不同. 本文主要考虑 Markov 环境下, “X”态在振幅阻尼和相位阻尼这两种典型环境演化后, 进行的量子非局域关联检验情况.

将 (3) 式所示的“X”态和这个封闭系统的总哈密顿量 H_{tot} 代入 Liouville-Von Neumann 方程 $d\rho_X(t)/dt = -i[H_{\text{tot}}, \rho_X(t)]$ 中, 再利用旋波近似和 Born-Markov 近似, 以及 Kraus 算符^[9] 进行方程求解, 即可得到在 Markov 环境下, “X”态密度矩阵随时间的演化结果:

$$\rho_X(t) = \sum_{\mu} Z_{\mu}(t) \rho_X(0) Z_{\mu}^{\dagger}(t), \quad (6)$$

其中 Kraus 算符 $Z_{\mu}(t)$ 满足 $\sum_{\mu} Z_{\mu}^{\dagger}(t) Z_{\mu}(t) = 1$.

在相位阻尼环境下, 每个子系统的 Kraus 算符可分别用

具体而言, 将 (3) 式所示的密度矩阵, 代入到关联矩阵 \mathbf{K} 的表达式中, 即可得到关联矩阵的具体表达式:

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 \\ 0 & \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \omega(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega(t) \end{pmatrix}$$

进行表示^[21], 其中 $\gamma(t) = e^{-\Gamma t/2}$, $\omega(t) = \sqrt{1 - \gamma^2(t)}$ (Γ 表示阻尼率). 将上述 Kraus 算符表达式代入 (6) 式, 则可得到量子态在相位阻尼环境演化后, 密度矩阵随时间的演化结果为

$$\rho_X^{\text{ph}}(t) = \sum_{i,j=0}^2 (\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j) \rho_X(0) (\mathbf{E}_i^{\dagger} \otimes \mathbf{E}_j^{\dagger}). \quad (7)$$

同理, 在振幅阻尼环境下, 每个子系统的 Kraus 算符又可分别用 $\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \omega(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 进行表示^[22]. 将 Kraus 算符代入 (6) 式中, 即可得到量子态在振幅阻尼环境中, 密度矩阵随时间的演化结果:

$$\rho_X^{\text{am}}(t) = \sum_{i,j=0}^1 (\mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}_j) \rho_X(0) (\mathbf{M}_i^{\dagger} \otimes \mathbf{M}_j^{\dagger}). \quad (8)$$

在得到如 (7) 式、(8) 式所示的量子态经过 Markov 环境演化后的密度矩阵后, 即可计算得到如 (4) 式所示的关联矩阵的具体表达式, 结合基于 CHSH 不等式的检验方案, 进而可进行“X”态的量子非局域关联检验研究.

3 Markov 环境下“X”态的量子非局域关联检验结果

实际上, “X”态包含了若干类别的纠缠态, 本文主要研究对象为较为常见的 Werner 态和将它进行局部变换操作得到的量子态. 由文献 [10] 可知, 常见的 Werner 态, 以及其进行局部变换操作后量子态的密度矩阵可分别写为

$$\rho_{\text{W}} = \frac{1-F}{3} \mathbf{I}_4 + \frac{4F-1}{3} |\psi^-\rangle \langle \psi^-| = \begin{pmatrix} \frac{1-F}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2F}{6} & -\frac{4F-1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{4F-1}{6} & \frac{1+2F}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-F}{3} \end{pmatrix}, \quad (9a)$$

$$\tilde{\rho}_{\text{W}} = \frac{1-F}{3} \mathbf{I}_4 + \frac{4F-1}{3} |\phi^-\rangle \langle \phi^-| = \begin{pmatrix} \frac{1+2F}{6} & 0 & 0 & -\frac{4F-1}{6} \\ 0 & \frac{1-F}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-F}{3} & 0 \\ -\frac{4F-1}{6} & 0 & 0 & \frac{1+2F}{6} \end{pmatrix}, \quad (9b)$$

其中 $|\psi^-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ 为一 Bell 态, 用局部变换算符 $U = i\sigma_x^A \otimes I_2^B$ 作用于 $|\psi^-\rangle$ 后, 即可得到另一个 Bell 态 $|\phi^-\rangle = (|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$, 其中, \mathbf{I}_n 表示 $n \times n$ ($n = 4, 2$) 的单位矩阵, F ($1/4 \leq F \leq 1$) 为保真度, 其表征了“X”态和纠缠纯态的相似程度, 当 $F \rightarrow 1$ 时, ρ_{W} 和 $\tilde{\rho}_{\text{W}}$ 趋于一量子纯态.

由并发度的计算表达式 (如 (2) 式所示) 和 (9) 式的具体表达式可知, 这两种“X”态的并发度可均表示为 $C_{\rho_{\text{W}}} = C_{\tilde{\rho}_{\text{W}}} = \max\{0, 2F - 1\}$, 即该两种类型的“X”态在未经 Markov 环境演化时, 局部变换操作并不改变它们的并发度.

下面, 首先研究“X”态在相位阻尼环境下的量子非局域关联检验情况. 将 (9a) 式和 (9b) 式分别代入到 (7) 式中, 可分别得到“X”态随时间演化后的密度矩阵为

$$\rho_{\text{W}}^{\text{ph}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-F}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2F+1}{6} & -\frac{4F-1}{6} e^{-2\Gamma t} & 0 \\ 0 & -\frac{4F-1}{6} e^{-2\Gamma t} & \frac{2F+1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-F}{3} \end{pmatrix}, \quad (10a)$$

$$\tilde{\rho}_{\text{W}}^{\text{ph}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2F+1}{6} & 0 & 0 & -\frac{4F-1}{6} e^{-2\Gamma t} \\ 0 & \frac{1-F}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-F}{3} & 0 \\ -\frac{4F-1}{6} e^{-2\Gamma t} & 0 & 0 & \frac{2F+1}{6} \end{pmatrix}. \quad (10b)$$

此时, 将 (10) 式代入到 (4) 式, 即可进一步计算得到进行量子非局域关联检验时的关联矩阵元 k_{mn} 值为

$$\mathbf{K}_{\rho_{\text{W}}}^{\text{ph}} = \begin{pmatrix} -\frac{4F-1}{3} e^{-2\Gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4F-1}{3} e^{-2\Gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4F-1}{3} \end{pmatrix}, \quad (11a)$$

$$K_{\tilde{\rho}_W}^{\text{ph}} = \begin{pmatrix} -\frac{4F-1}{3}e^{-2\Gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4F-1}{3}e^{-2\Gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4F-1}{3} \end{pmatrix}. \quad (11b)$$

从 (11) 式中可以看出, 两种类型“X”态的关联矩阵对角元的绝对值 $|k_{mm}|$ 相等, 且 $|k_{33}| > |k_{22}| = |k_{11}|$, 因此该两种类型“X”态具有相同的量子非局域关联检验结果, 即

$$\begin{aligned} S_{m-\rho_W}^{\text{ph}} &= S_{m-\tilde{\rho}_W}^{\text{ph}} = 2\sqrt{|k_{33}|^2 + |k_{22}|^2} \\ &= \frac{8F-2}{3}\sqrt{1+e^{-4\Gamma t}}. \end{aligned} \quad (12)$$

为了更清晰地描述 (12) 式的量子非局域关联检验结果, 图 2 给出了 $S_{m-\rho_W}^{\text{ph}}$ ($S_{m-\tilde{\rho}_W}^{\text{ph}}$) 随保真度 F 和演化时间 Γt 的变化关系曲线.

从图 2 可以看出, 在初始时刻 (即 $t=0$ 时), 当保真度 $F > 0.78$ 时, 该两种“X”态均可成功进行量子非局域关联检验 (即 $S_{m-\rho_W}^{\text{ph}} = S_{m-\tilde{\rho}_W}^{\text{ph}} > 2$). 而当 $F=1$ 时, 尽管两种“X”态的 $S_{m-\rho_W}^{\text{ph}} = S_{m-\tilde{\rho}_W}^{\text{ph}} > 2$ 恒成立 (可成功进行量子非局域关联检验), 但随着演化时间的增加, 这两种类型“X”态的 $S_{m-\rho_W}^{\text{ph}}$ ($S_{m-\tilde{\rho}_W}^{\text{ph}}$) 值将非线性地减小. 但无论如何, 保真度越大, 则这两种“X”态在相位阻尼环境中, 可成功进行量子非局域关联性检验的演化时间越长. 同时也表明了

对密度矩阵 ρ_W 进行局部变换操作得到 $\tilde{\rho}_W$ 后, 实际上并不影响“X”态在相位阻尼环境中进行量子非局域关联检验的能力.

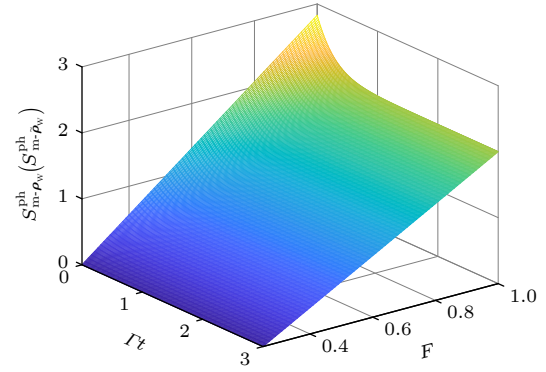


图 2 相位阻尼环境中, $S_{m-\rho_W}^{\text{ph}}$ 和 $S_{m-\tilde{\rho}_W}^{\text{ph}}$ 随演化时间 Γt 和保真度 F 的变化关系图

Fig. 2. $S_{m-\rho_W}^{\text{ph}}$ and $S_{m-\tilde{\rho}_W}^{\text{ph}}$ versus evolution time Γt and fidelity F in a phase damping environment.

将 (9) 式分别代入 (8) 式, 用上述同样的方法, 可得到两种类型“X”态的密度矩阵 ρ_W 和 $\tilde{\rho}_W$ 在振幅阻尼环境下随时间变化的密度矩阵:

$$\rho_W^{\text{am}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-F}{3}e^{-2\Gamma t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} - \frac{1-F}{3}e^{-2\Gamma t} & -\frac{4F-1}{6}e^{-\Gamma t} & 0 \\ 0 & -\frac{4F-1}{6}e^{-\Gamma t} & \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} - \frac{1-F}{3}e^{-2\Gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-\Gamma t} + \frac{1-F}{3}e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}, \quad (13a)$$

$$\tilde{\rho}_W^{\text{am}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2F+1}{6}e^{-2\Gamma t} & 0 & 0 & -\frac{4F-1}{6}e^{-\Gamma t} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} - \frac{2F+1}{6}e^{-2\Gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} - \frac{2F+1}{6}e^{-2\Gamma t} & 0 \\ -\frac{4F-1}{6}e^{-\Gamma t} & 0 & 0 & 1 - e^{-\Gamma t} + \frac{2F+1}{6}e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}. \quad (13b)$$

将 (13) 式分别代入 (4) 式中, 即可得到在振幅阻尼环境中, 两种“X”态进行量子非局域关联检验时的关联矩阵分别为

$$\mathbf{K}_{\rho_W}^{\text{am}} = \begin{pmatrix} -\frac{4F-1}{3}e^{-\Gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4F-1}{3}e^{-\Gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2e^{-\Gamma t} + \frac{4-4F}{3}e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}, \quad (14a)$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{\rho}_W}^{\text{am}} = \begin{pmatrix} -\frac{4F-1}{3}e^{-\Gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4F-1}{3}e^{-\Gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2e^{-\Gamma t} + \frac{4F+2}{3}e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}. \quad (14b)$$

从 (14) 式的关联矩阵可以看出, 在任一保真度 F 值的情况下, 矩阵对角元 $|k_{mm}|$ 值的最大和次大值, 将依赖于演化时间 Γt , 因此无法写出进行量子非局域关联检验时 $S_{m-\rho_W}^{\text{am}}$ 和 $S_{m-\tilde{\rho}_W}^{\text{am}}$ 的通用表达式. 但无论如何, 在某一保真度下, 随着演化时间的不同, 通过将 (14) 式中对角元 $|k_{mm}|$ 的值进行降序排列, 然后结合 (5) 式, 即可得到在振幅阻尼环境的

演化中, “X” 态进行量子非局域关联检验的结果, 如图 3 所示.

从图 3 中可以看出, 在振幅阻尼环境下, 当保真度 $F \leq 0.78$ 时, 不论演化时间为多少, 两种 “X” 态均不能成功进行量子非局域关联检验 (即 $S_m < 2$). 当 $F > 0.78$ 时, 在初始时刻 (即 $t = 0$), 两种 “X” 态的均可成功进行量子非局域关联检验 (即 $S_m > 2$),

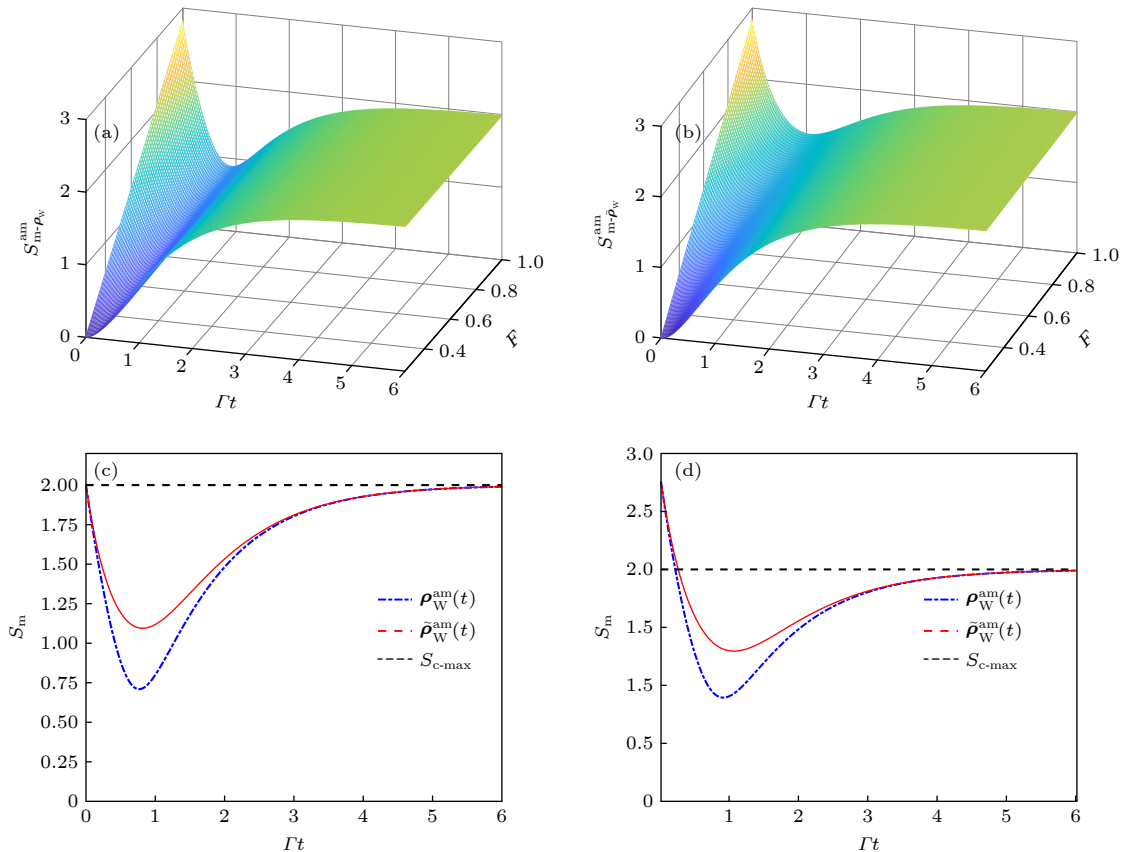


图 3 振幅阻尼环境中, $S_{m-\rho_W}^{\text{am}}$ ($S_{m-\tilde{\rho}_W}^{\text{am}}$) 随保真度 F 和演化时间 Γt 的变化关系图 (a), (b) 保真度在 $0.25 \leq F \leq 1$ 变化时的情况; (c), (d) $F = 0.78$ 和 $F = 1.00$ 时的情况

Fig. 3. $S_{m-\rho_W}^{\text{am}}$ ($S_{m-\tilde{\rho}_W}^{\text{am}}$) versus evolution time Γt in amplitude damping environment: (a), (b) The situation when the fidelity changes in $0.25 \leq F \leq 1$ respectively; (c), (d) the situation when $F = 0.78$ and $F = 1.00$ respectively.

且保真度越大, S_m 越大. 但是, 随着演化时间的增加, 尽管两种“X”态进行量子非局域关联检验时, 可获得的最大值 $S_m^{\text{am-}\rho_W}$ 和 $S_m^{\text{am-}\tilde{\rho}_W}$ 均将呈现先减小后增加的现象, 但是, 两种“X”态的演化关系曲线不同. 特别地, 当保真度 $F = 1$ 时, 对于密度矩阵为 ρ_W 的“X”态, 演化时间 $\Gamma t > 0.22$ 后, 则会得到 $S_m < 2$ 的量子非局域关联检验结果, 即此时该“X”态将不能进行量子非局域关联检验. 而对于密度矩阵为 $\tilde{\rho}_W$ 的“X”态, 演化时间 $\Gamma t > 0.26$ 后, 才得到 $S_m < 2$ 的检验结果, 这表明了在振幅阻尼环境下, 密度矩阵为 $\tilde{\rho}_W$ 的“X”态, 进行量子非局域关联检验能够保持更长的时间.

为了更清楚地显示“X”态在相位阻尼和振幅阻尼环境下, 能够成功进行量子非局域关联检验的范围情况, 图 4 给出了经局部变化操作后的两种“X”态, 能够成功进行量子非局域关联检验时的最小保真度 F_{\min} 与演化时间 Γt 的变化关系曲线.

从图 4 中可以清晰地看出, 在相同的演化时间下, 使用密度矩阵为 ρ_W 和 $\tilde{\rho}_W$ 的“X”态进行量子非局域关联检验时, 在相位阻尼环境中所需的最小保真度远小于在振幅阻尼环境中所需的保真度. 这也表明了, 在相位阻尼环境中, 可成功进行量子非局域关联检验的保真度范围将更大. 同时, 从图 4 中还

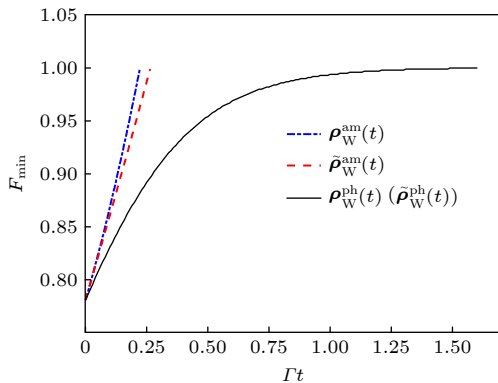


图 4 F_{\min} 与时间 Γt 的变化关系图. 其中蓝色点划线表示密度矩阵为 ρ_W 的“X”态在振幅阻尼信道下的演化曲线; 红色虚线表示密度矩阵为 $\tilde{\rho}_W$ 的“X”态在振幅阻尼信道下的演化曲线; 黑色实线表示两“X”态在相位阻尼信道下的演化曲线

Fig. 4. F_{\min} versus time Γt . The blue dotted line represents the evolution curve of the “X” state with the density matrix ρ_W under the amplitude damping channel; the red dotted line represents the evolution curve of the “X” state with density matrix $\tilde{\rho}_W$ under the amplitude damping channel; the black solid line represents the evolution curve of two “X” states in a phase damped channel.

可以看出, 在振幅阻尼环境以及相同的演化时间下, 密度矩阵为 $\tilde{\rho}_W$ 的“X”态成功进行量子非局域关联检验的保真度范围大于密度矩阵为 ρ_W 的“X”态, 这也表明了对“X”态的密度矩阵进行局部变换操作, 有助于提高成功进行量子非局域关联检验研究的量子态保真度范围. 特别地, 对于密度矩阵为 ρ_W 的“X”态, 能够成功进行量子非局域关联检验的演化时间为 $\Gamma t = 0.22$, 而对于密度矩阵为 $\tilde{\rho}_W$ 的“X”态, 该演化时间可达到 $\Gamma t = 0.26$.

4 总结

本文研究了两种由局部变换操作所联系的“X”态在 Markov 环境 (相位阻尼和振幅阻尼环境) 中随时间演化后, 基于 CHSH 不等式进行的量子非局域关联检验情况. 结果表明, 两种类型“X”态在相位阻尼环境演化中, 具有相同的量子非局域关联检验结果. 随着演化时间的增加, 两种“X”态的量子非局域关联检验最大值 S_m 都将非线性减小, 且仅当 $F = 1$ 时 (“X”态约化为量子纯态), 两者才能始终成功进行量子非局域关联检验的研究 (即 $S_m > 2$). 当保真度 $0.78 < F < 1$ 时, 两种“X”态随着演化时间的增加, 进行量子非局域关联检验时的最大值将由 $S_m > 2$ 逐步过渡到 $S_m < 2$, 进而不能成功进行量子非局域关联检验的研究.

两种“X”态在振幅阻尼环境中随时间演化后, 基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验将具有不同的结果. 研究表明, 当 $F > 0.78$ 时, 随着演化时间的增加, 经过局部变换操作后的“X”态, 较操作之前的“X”态量子非局域关联检验结果降低更加缓慢. 特别地, 当 $F = 1$ 时, 密度矩阵为 ρ_W 的“X”态在演化时间 $\Gamma t > 0.22$ 后, 将不能成功进行量子非局域关联检验. 而对于密度矩阵为 $\tilde{\rho}_W$ 的“X”态, 其在演化时间 $\Gamma t > 0.26$ 后, 才不能进行量子非局域关联检验. 这表明经过局部变换操作之后, 更有利于“X”态进行基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验.

最后, 给出了两种“X”态在相位阻尼环境和振幅阻尼环境下能够进行量子非局域关联时所满足的最小保真度 F_{\min} 随演化时间 Γt 的变化关系. 研究结果表明, 在能够成功进行量子非局域关联检验的前提下, 两类型“X”态在相位阻尼环境中演化, 可采用的保真度范围较大. 同时, 在相同的演化时

间下, 密度矩阵为 ρ_W 的“X”态在经过局部变换操作后有助于提高其在振幅阻尼环境中的量子非局域关联检验的保真度范围.

实际上, 本文的研究结果对基于“X”态在 Markov 环境演化后进行的量子非局域关联实验检验具有一定的指导意义. 首先, 从本文的研究结果可以看出, “X”态随时间演化后, 保真度对成功进行量子非局域关联检验具有重要的影响. 例如, 当初始时刻 $F < 0.78$ 时, 两种“X”态在振幅阻尼和相位阻尼环境中演化后, 均不能成功地进行量子非局域关联检验研究. 其次, 本文的研究结果表明, 尽管在相位阻尼环境演化后, 两种“X”态进行量子非局域关联检验时, 可得到相同的实验检验结果, 但相比振幅阻尼环境, 两种“X”态在相位阻尼环境演化时, 更利于成功进行量子非局域关联的实验检验研究. 并且, 在振幅阻尼环境演化后, 经过局部变换操作之后的“X”态, 更有利于量子非局域关联检验的实验检验.

本文的研究结果, 为理论和实验研究“X”态在 Markov 环境下随时间演化的量子非局域关联检验提供了思路. 相信本文的研究, 可为后续基于其他开放量子系统环境, 甚至基于非 Markov 环境的量子态量子非局域关联检验研究提供参考.

参考文献

- [1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev. Lett.* **47** 777
- [2] Horodecki R 2021 arXiv: 2103.07712 v2 [quant-ph]
- [3] Kaur E, Horodecki K, Das S 2022 *Phys. Rev. Appl.* **18** 054033
- [4] Kahanamoku-Meyer G D, Choi S, Vazirani U V, Yao N Y 2022 *Nat. Phys.* **18** 918
- [5] Portmann C, Renner R 2022 *Rev. Mod. Phys.* **94** 025008
- [6] Bell J S 1964 *Physics* **1** 195
- [7] Clauser J F, Horne M A, Shimony A, Holt R A 1969 *Phys. Rev. Lett.* **23** 880
- [8] Shaukat MI 2022 *Eur. Phys. J. Plus* **137** 205
- [9] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Information* (Cambridge: Cambridge University Press) pp380–386
- [10] Yu T, Eberly J 2007 *Quantum Inf. Comput.* **7** 459
- [11] Quesada N, Al-Qasimi A, James D F 2012 *J. Mod. Opt.* **59** 1322
- [12] Guo Y N, Wang X, Chen X J 2022 *Quantum Inf. Process.* **21** 149
- [13] Kelleher C, Holweck F, Lévay P, Saniga M 2021 *Results Phys.* **22** 103859
- [14] Namitha C, Satyanarayana S 2018 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **51** 045506
- [15] Zhao F, Wang D, Ye L 2022 *Int. J. Theor. Phys.* **61** 1
- [16] Zeng B Y, Gu P Y, Hu Q, Jia X Y, Fan D H 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 170302 (in Chinese) [曾柏云, 辜鹏宇, 胡强, 贾欣燕, 樊代和 2022 物理学报 **71** 170302]
- [17] Hu Q, Zeng B Y, Gu P Y, Jia X Y, Fan D H 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 070301 (in Chinese) [胡强, 曾柏云, 辜鹏宇, 贾欣燕, 樊代和 2022 物理学报 **71** 070301]
- [18] Zhang Y S, Huang Y F, Li C F, Guo G C 2002 *Phys. Rev. A* **66** 062315
- [19] Seiler J, Strohm T, Schleich W P 2021 *Phys. Rev. A* **104** 032218
- [20] Yu T, Eberly J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140404
- [21] Li W, He Z, Wang Q 2017 *Int. J. Theor. Phys.* **56** 2813
- [22] Mishra S, Thapliyal K, Pathak A 2022 *Quantum Inf. Process.* **21** 70

Quantum nonlocality testing of the “X” state based on the CHSH inequality in Markov environment^{*}

Zeng Bai-Yun Gu Peng-Yu Jiang Shi-Min Jia Xin-Yan Fan Dai-He[†]

(School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

(Received 20 November 2022; revised manuscript received 7 December 2022)

Abstract

Quantum nonlocality is one of the most fundamental characteristics of quantum theory. As a commonly used quantum state generated in experiment, the “X” state is a typical one in the research of open quantum systems, since it remains the stability of the “X” shape during the evolution. Using the Clauser-Horne-Harmony-Holt (CHSH) inequality, the quantum nonlocality testing of two “X” states associated with local transformation operations is studied under the Markov environment. The results show that in the phase damping environment, the two “X” states have the same CHSH inequality testing results with the increase of the evolution time. Moreover, the maximum of quantum nonlocality test of the two “X” states will decrease nonlinearly. When $0.78 < F < 1$, the maximum value S_m of testing quantum nonlocality will gradually transition from $S_m > 2$ to $S_m < 2$ with the increase of the evolution time of the two “X” states, and the research on the quantum nonlocality test cannot be successfully carried out. In the amplitude damping environment, the “X” state obtained by the local transformation operation has a longer evolution time for successfully testing quantum nonlocality when $F > 0.78$. In particular, when $F = 1$, the “X” state with the density matrix ρ_W cannot successfully test the quantum nonlocality after the evolution time $\Gamma t > 0.22$. For the “X” state with density matrix $\tilde{\rho}_W$, the quantum nonlocality testing cannot be performed until the evolution time $\Gamma t > 0.26$. These results show that the local transformation operation of the “X” state is more conducive to the quantum nonlocality testing based on the CHSH inequality. Finally, the fidelity ranges of successfully testing the quantum nonlocality of the two “X” states in phase and amplitude damping environments are given in detail. The results show that on the premise of the successful testing of quantum nonlocality, the two types of “X” states evolving in the phase damping environment have a large range of valid fidelity. Meanwhile, for the same evolution time, the local transformation operation is helpful in improving the fidelity range of quantum nonlocality test in amplitude damping environment for “X” state with density matrix ρ_W .

Keywords: quantum nonlocality, “X” states, CHSH inequality, phase damping, amplitude damping

PACS: 03.65.Ud, 03.65.Yz, 03.67.Mn

DOI: 10.7498/aps.72.20222218

^{*} Project supported by the Key Laboratory Project of Computational Physics of National Defense Science and Technology of China (Grant No. 6142A05180401) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12147208).

[†] Corresponding author. E-mail: dhfan@swjtu.edu.cn



Markov环境下“X”态基于CHSH不等式的量子非局域关联检验

曾柏云 辜鹏宇 蒋世民 贾欣燕 樊代和

Quantum nonlocality testing of the “X” state based on the CHSH inequality in Markov environment

Zeng Bai-Yun Gu Peng-Yu Jiang Shi-Min Jia Xin-Yan Fan Dai-He

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 050301 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222218

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222218>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于CHSH不等式几何解释的“X”态量子非局域关联检验

Quantum nonlocal test of “X” state based on geometric interpretation of CHSH inequality

物理学报. 2022, 71(17): 170302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220445>

退相干条件下两比特纠缠态的量子非局域关联检验

Testing quantum nonlocality of two-qubit entangled states under decoherence

物理学报. 2022, 71(7): 070301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211453>

基于Hardy-type佯谬的混合态高概率量子非局域关联检验

Testing quantum nonlocality with high probability using quantum mixed state based on hardy-type paradox

物理学报. 2019, 68(23): 230302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191125>

退相位环境下Werner态在石墨烯基量子通道中的隐形传输

Teleportation of Werner state via graphene-based quantum channels under dephasing environment

物理学报. 2022, 71(7): 070304 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211881>

级联环境下三量子比特量子关联动力学研究

Dynamics of quantum correlation for three qubits in hierarchical environment

物理学报. 2021, 70(10): 100301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202133>

中国聚变工程实验堆等离子体螺旋波阻尼系数的研究

Helicon wave damping coefficient of Chinese fusion engineering testing reactor plasma

物理学报. 2020, 69(14): 145201 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200222>