Acta Physica Sinica

高能量粒子测地声模与Dimits区漂移波相互作用**

魏广宇[1)]　陈凝飞[1)]　仇志勇[1)2)†]

1) (浙江大学物理学系, 聚变理论与模拟中心, 杭州　310027)

2) (Center for Nonlinear Plasma Science and ENEA C. R. Frascati, Frascati, Italy)

基于包含驱动和阻尼的三波非线性相互作用模型, 我们构建了一个描述高能量粒子测地声模(EGAM)与Dimits区漂移波湍流相互作用的系统, 并解析和数值地分别在系统的线性增长以及非线性振荡阶段做了相关研究. 更进一步的数值结果则表明, 在忽略EGAM的贡献时, 该系统具有随着线性驱动/阻尼率等参数变化, 从极限环振荡经历倍周期分岔最终进入混沌的行为特征. 在此基础上, 我们形式上构建了本系统的非线性饱和"Dimits区", 并研究了EGAM对Dimits区漂移波的影响. 结果表明, 对于不同幅度和频率的EGAM, 被调制后的漂移波将表现出受到激发或抑制的效果. 对此, 我们采用相空间分析的方法给出了相应的解释.

关键词: 漂移波, 带状流, 高能量粒子测地声模, 三波非线性耦合

PACS: 52.35.kt, 52.35.Mw, 52.25.Fi, 52.25.Gj

1 引言

漂移波(drift wave)湍流是磁约束等离子体中广泛存在的一种微观不稳定性[1, 2], 可以从等离子体不均匀性, 如托卡马克装置中堆芯到边缘的温度梯度、密度梯度, 获得自由能并引发不稳定性, 进而导致带电粒子横越磁场的反常输运[3], 降低装置的约束水平. 因此, 研究漂移波的激发、非线性演化及饱和

∗ 国家重点研发计划项目(项目号: 2017YFE0301900)和自然科学基金委项目(项目号: 11875233)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zqiu@zju.edu.cn

第一作者. E-mail: 3170106217@zju.edu.cn

过程, 对于理解进而改善托卡马克等磁约束装置的约束性能具有重要意义. 大规模的回旋动理学模拟表明, 带状流(zonal flow)的存在将使漂移波不稳定性的阈值上升, 即著名的Dimits上移(Dimits shift)[4]; 其原因可能是带状流本身自发地被漂移波激发并反过来抑制漂移波湍流的强度[5, 6, 7]. 带状流是指环形等离子体中由径向扰动电场引起的$\mathbf{E}\times\mathbf{B}$极向剪切流, 其模结构特征是环向对称($n=0$), 极向近似对称($m\simeq 0$)[8, 5]. 其中, n和m分别是环向模数和极向模数, $\mathbf{E}$为扰动电场, $\mathbf{B}$为平衡磁场. 带状流包含频率接近为零的零频带状流(zero-frequency zonal flow, ZFZF)[8], 和有限频率的测地声模(geodesic acoustic mode, GAM)[9, 10]. 由于模结构在环向和极向的对称性, 带状流不能从等离子体径向不均匀性中获得自由能而被激发, 因而是线性稳定的, 只能被湍流非线性激发[*]. 而GAM则因为其有限频率, 可以与高能量粒子共振, 并被其相空间各向异性所携带的自由能激发, 产生高能量粒子测地声模(energetic particle induced GAM, EGAM)[11, 12, 13, 14]. 考虑到带状流对漂移波湍流的抑制作用, 通过外部入射的高能量粒子束在漂移波不稳定区域激发EGAM被认为是主动控制漂移波湍流的可行方案[15]. 然而, Zarzoso等人在离子温度梯度漂移波的非线性模拟中却发现, 当引入高能量粒子激发EGAM后, 湍流不仅没有受到抑制, 反而有所增强, 这与一般的理论预测相反[16]. 对此的一个猜测是, 在耦合的EGAM－漂移波湍流系统中, 当EGAM被高能量粒子驱动达到较高幅度时, 能量将从EGAM流向漂移波湍流. 陈凝飞等人通过解析理论研究了有限幅度的带状流径向电场对漂移波局域稳定性和模结构的影响, 发现带状流对漂移波湍流总是起抑制作用, 无法解释相关模拟结果[17]. 因此, 关于EGAM促进漂移波湍流的机制还有待进一步研究.

漂移波湍流与带状流的自洽非线性相互作用, 可以通过参量衰变不稳定性(对于GAM与漂移波湍流相互作用[10, 18]) 或者调制不稳定性(对于ZFZF与漂移波湍流相互作用[6, 19])来进行描述, 其物理图像是漂移波湍流通过有质动力激发带状流结构, 而带状流将漂移波湍流散射到线性更稳定的径向短波长区间; 描述耦合的漂移波－带状流系统非线性演化的方程可以从非线性回旋动理学方程进行推导, 其详细的推导过程在参考文献[19](其中的方程组(12))和[10](其中的方程(29-31))中给出. 描述ZFZF和GAM与漂移波湍流相互作用的不同模型, 是由于ZFZF具有有限的径向波数而频率接近为零, 其与漂移波泵浦波的耦合产生的上下边带模均不满足漂移波的线性色散关系, 具有一个小的“频率失配”, 因此必须采用同时包含上下边带模的“四波”调制不稳定性模型来研究ZFZF的激发; 而GAM与漂移波泵浦波耦合产生的下边带模有可能满足漂移波的线性色散关系, 其激发阈值明显低于上边带模, 因此可以忽略上边带模的贡献. 然而, 从[10]和[20]可以看出, 当考虑漂移波－ZFZF耦合系统的慢时间尺度演化时, 描述上下边带模的方程是对称的, 可以合并为同一个方程. 因此, 尽管本工作涉及到了漂移波湍流与ZFZF的相互作用, 我们依然采用耦合

[*]注: 由于历史原因, 一般在讲带状流“线性稳定”时, 是忽略下面讨论的高能量粒子测地声模的.

的三波方程来描述其非线性演化.

漂移波湍流具有线性的群速度, 因此非线性耦合系统除了具有时间演化外, 还具有空间上的传播特性, 如参考文献[18]中的方程(9)和(11)所示. 对此, 可以对漂移波方程做平移变换, 消去方程中的空间偏导, 得到的系统仅对时间有依赖关系. 考虑线性不稳定的漂移波泵浦波的线性驱动, 及漂移波边带模和ZFZF的线性阻尼率后, 我们就得到描述漂移波和ZFZF时间演化的三波非线性耦合模型, 并从这一模型出发来研究ZFZF与漂移波相互作用的相关物理, 形式上地构建"Dimits区"的漂移波湍流. 最后, 作为本工作的最重要的结果, 在模型中引入EGAM, 来研究EGAM与Dimits区漂移波的相互作用. 利用解析和数值的手段, 我们从不同角度探究了这两个系统的动力学特征. 首先在三波非线性耦合模型中, 我们看到依赖于参数变化, 系统从极限环振荡经历倍周期分岔最终进入混沌的行为[21]. 考虑了EGAM的影响之后, 我们发现由于EGAM的幅度和频率的不同, 被调制的漂移波将表现出受到激发或抑制的不同趋势.相空间结构的分析则表明, 漂移波被激发或抑制的现象最终可以归结为相空间轨道被不同尺度的不动点或极限环所捕获的结果. 本文的结构安排如下: 首先, 我们在第2节中引入了理论模型. 在第3节, 我们分析了包含源和汇的耦合漂移波－ZFZF系统的非线性演化. 在第4节, 我们研究了EGAM对Dimits区漂移波的影响. 最后在第5节我们给出了简单的总结和讨论.

2 基本模型

为了研究Dimits区漂移波的行为, 我们采用三波耦合的物理图像来描述漂移波和带状流的相互作用[22, 18]. 在此过程中, 一支漂移波泵浦波$\Omega_0(\omega_0, k_0)$衰变为两支子波－漂移波边带模$\Omega_1(\omega_1, k_1)$和ZFZF $\Omega_Z(\omega_Z, k_Z)$. 考虑子波的耦合对泵浦波的反馈及每支波的线性激发和阻尼, 并忽略调制不稳定性伴随的小的频率失配, 三支波的振幅随时间的演化满足如下方程组

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} - \gamma_0\right)\phi_0 &= -\alpha_0\phi_1\phi_Z, \\
\left(\frac{d}{dt} + \gamma_1\right)\phi_1 &= \alpha_1\phi_0(\phi_Z^* + \phi_E\cos\omega_E t), \\
\left(\frac{d}{dt} + \gamma_Z\right)\phi_Z &= \alpha_Z\phi_0\phi_1^*.
\end{aligned} \tag{1}$$

其中ϕ_0, ϕ_1, ϕ_Z分别代表泵浦波、边带模和ZFZF的振幅, 即$\Omega_j = \phi_j e^{-i\omega_j t}(j = 0, 1, Z)$; ϕ_E代表EGAM的幅度, ω_E代表EGAM的频率†; γ_0代表泵浦波的线性驱动, γ_1和γ_Z代表漂移波边带模和ZFZF的线性阻尼,

---

†注: 如果考虑zonal flow与漂移波的非线性相互作用引起的有限频率, 我们可以将EGAM频率与该频率之差重新定义为ω_E, 从而方程(1)的形式保持不变.

$\alpha_{0,1,Z}$代表非线性项的耦合系数. 为不失一般性, 我们规定$\gamma_{0,1,Z} > 0$, $\alpha_{0,1,Z} > 0$.

在忽略EGAM的影响($\phi_E \cos\omega_E t$)时, 方程(1)描述了漂移波和ZFZF的相互作用. 其中考虑到漂移波上下边带模方程形式上的对称性[19], 我们已经将"四波"调制不稳定性过程归结为方程(1)所示的三波相互作用. 此外, 在本文中我们暂时不考虑调制不稳定伴随的频率失配效应, 这在非线性耦合引起的增长/衰减的时间尺度短于频率失配时是自然成立的. 实际上, 由(1)式描述的三波非线性耦合模型的应用非常广泛, 除了用来解释等离子体中波的相互作用, 它与光学中的参量振荡器[23], 流体力学中剪切流和重力波的相互作用[24]等很多物理过程都有密切联系. 注意到如果方程组(1)中ϕ_0、ϕ_1和ϕ_Z的初值都设置为实数, 那么这三个物理量将始终在实数范围内变化, 从而方程中的共轭符号可以忽略. 后面如果不做特殊说明, 我们都只在实数范围内考虑该系统的行为.

EGAM对耦合的漂移波湍流－ZFZF系统的调制作用体现在方程(1)中第二个方程右侧的$\phi_E \cos\omega_E t$这一项上. 由于EGAM由高能量粒子所激发, 可以忽略漂移波－ZFZF系统对其的影响, 而重点研究EGAM对漂移波的调制, 因此在漂移波和带状流的演化过程中ϕ_E和ω_E的大小都保持不变. 从方程(1)可以看出, 加入EGAM相当于在方程组中引入了一个强度和符号都随时间周期性变化的参数. 当EGAM与ϕ_Z符号相同时, 漂移波边带模ϕ_1方程右手边的耦合项被增强, EGAM将增强ZFZF对漂移波的调制; 而当EGAM与ϕ_Z符号相反时, ϕ_1方程右手边的耦合项则被减弱, 甚至整个耦合项的正负性可能会被改变. 因此, EGAM的引入将对原系统起到很明显的调节作用. 我们将在第4节以上述模型为基础详细地讨论EGAM对Dimits区漂移波的影响. 这里需要指出, 我们在ϕ_Z后面加入$\phi_E \cos\omega_E t$项来研究EGAM的作用效果是基于对漂移波－带状流相互作用的物理机制的理解, 突出其对漂移波边带模的调制, 并没有从第一性原理出发严格推导. 基于第一性原理系统地描述漂移波、GAM和高能量粒子的非线性演化的方程由参考文献[15]给出(其中的方程(38)、(79)和(80)). 而自洽描述ZFZF和漂移波相互作用的方程在文献[19]中的公式(9)和（10）给出. 我们看到, GAM和ZFZF对漂移波的调制的非线性项在结构上是完全一样的, 因此, 其对漂移波的相互作用可以认为是线性叠加, 将EGAM与ϕ_Z合并来表示带状流整体对漂移波的调制效果被增强或抑制应该是一个比较自然的想法.

3 漂移波－带状流系统的动力学行为

本节我们将从耦合方程组(1)出发, 忽略EGAM的影响, 研究漂移波和ZFZF的相互作用, 并构建该系统下的"Dimits区". 从方程组(1)等号右侧的耦合项可以看出, 子波受到的非线性激励正比于泵浦波与另一

支子波的耦合强度; 同时, 泵浦波将受到来自两支子波非线性耦合的负反馈. 当子波的幅度很小时, 其对泵浦波的反馈可以忽略, 子波在泵浦波的激励下不断增长; 而当两个子波增长到一定程度时, 子波的负反馈将可能超过泵浦波的线性驱动, 从而使得泵浦波强度减小, 相应的子波受到的激励也随之减小. 直观来看, 三支波可能会在某一时刻达到“收支平衡”, 或者说系统趋向于一个静止的稳态解, 即不动点解. 然而, 根据Anderson等人的相关研究[25], 该系统在一般情况下并不存在稳定的不动点解. 实际上, 三支波最终将呈现出此消彼长的振荡行为. 下面我们详细来看子波线性增长和三波非线性振荡这两个行为.

对于子波刚开始从扰动水平增长的阶段, 子波的耦合对泵浦波的反馈效果可以忽略. 从而ϕ_0的演化方程与ϕ_1和ϕ_Z解耦, 方程组(1)变成一个线性的常微分方程组, 可以直接求解. 为了使方程的解更加直观, 我们同时忽略泵浦波的线性驱动, 从而方程组(1)退化为

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}+\gamma_1\right)\phi_1 &= \alpha_1\phi_0\phi_Z,\\ \left(\frac{d}{dt}+\gamma_Z\right)\phi_Z &= \alpha_Z\phi_0\phi_1.\end{aligned} \tag{2}$$

这是一个典型的参量不稳定性问题. 子波ϕ_1和ϕ_Z的增长率γ由非线性色散关系$(\gamma+\gamma_1)(\gamma+\gamma_Z)=\alpha_1\alpha_Z\phi_0^2$决定, 从而得到参量不稳定性的增长率

$$\gamma = -\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_Z)+\frac{1}{2}\sqrt{(\gamma_1+\gamma_Z)^2+4(\alpha_1\alpha_Z\phi_0^2-\gamma_1\gamma_Z)}, \tag{3}$$

由此可以给出系统关于$|\phi_0|^2$的稳定性阈值$|\phi_0|^2=\gamma_1\gamma_Z/(\alpha_1\alpha_Z)$. 也就是说, 当泵浦波的强度大于该阈值的时候, 边带模和ZFZF将被激发起来, 呈指数增长. 当泵浦波的幅度远大于阈值时, 可以忽略子波阻尼率的影响, 增长率与泵浦波的幅度成正比, 即$\gamma \propto |\phi_0|$.

当两个子波增长到和泵浦波相同量级的时候, 其对泵浦波ϕ_0的反馈不能忽略, 需要完整的求解方程组(1). 对三个波的幅度做如下归一化:

$$\phi_j \to \sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_0\alpha_1\alpha_Z}}\phi_j, \quad j=0,1,Z. \tag{4}$$

原方程组变为

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}-\gamma_0\right)\phi_0 &= -\phi_1\phi_Z,\\ \left(\frac{d}{dt}+\gamma_1\right)\phi_1 &= \phi_0\phi_Z,\\ \left(\frac{d}{dt}+\gamma_Z\right)\phi_Z &= \phi_0\phi_1.\end{aligned} \tag{5}$$

对三个方程分别乘以ϕ_0、ϕ_1和ϕ_Z, 再相互加或减以消去右手边的耦合项, 我们得到如下三个恒等式:

$$
\begin{aligned}
&e^{-2\gamma_1 t}\frac{d}{dt}(n_1 e^{2\gamma_1 t}) - e^{-2\gamma_Z t}\frac{d}{dt}(n_Z e^{2\gamma_Z t}) = 0, \\
&e^{2\gamma_0 t}\frac{d}{dt}(n_0 e^{-2\gamma_0 t}) + e^{-2\gamma_1 t}\frac{d}{dt}(n_1 e^{2\gamma_1 t}) = 0, \\
&e^{2\gamma_0 t}\frac{d}{dt}(n_0 e^{-2\gamma_0 t}) + e^{-2\gamma_Z t}\frac{d}{dt}(n_Z e^{2\gamma_Z t}) = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

其中$n_j \equiv \phi_j^2 (j = 0, 1, Z)$. 显然对于不考虑泵浦波的线性驱动以及两个子波的线性阻尼的情况[22], 即取$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_Z = 0$时, 方程组(6)定义了如下三个守恒量:

$$
m_0 \equiv n_1 - n_Z, \quad m_1 \equiv n_0 + n_1, \quad m_2 \equiv n_0 + n_Z. \tag{7}
$$

这组守恒式被称为Manley - Rowe关系(Manley-Rowe relations)[26], 给出了参量衰变过程中所满足的粒子数量守恒关系. 方程组(6)是Manley-Rowe关系推广到包含线性驱动/阻尼下的一般形式. 结合方程(7)给出的三个守恒量和(5)式的第一个方程, 可以得到描述n_0演化的方程

$$
\frac{d}{dt} n_0 = 2\sqrt{n_0(m_1 - n_0)(m_2 - n_0)}, \tag{8}
$$

其解由椭圆函数给出, 即

$$
n_0(t) = m_1 \mathrm{sn}^2(\sqrt{m_2}t, \sqrt{m_1/m_2}), \tag{9}
$$

其中sn是椭圆正弦函数. 方程(9)给出了忽略了三支耦合波的线性增长/阻尼率时, 泵浦漂移波的时间演化行为. 在求解过程中, 我们假定了ZFZF的初始强度大于漂移波边带模, 即$m_1 < m_2$, 否则方程(9)中m_1和m_2的位置要相互交换. 另外两支波的解可从守恒条件(7)得出. 根据这三个解我们在图1中给出了三支波的演化曲线, 可以看到波的强度随时间周期性变化, 且泵浦波和两个子波的强度此消彼长, 表现出典型的捕食者－猎物模型的行为特征. 值得注意的是, 大部分描述带状流激发的参量/调制不稳定性模型, 只关注了图1中的早期阶段, 从而只从原理上论证了带状流激发的机制, 但并未系统研究其对漂移波湍流非线性演化和饱和的贡献[20, 27].

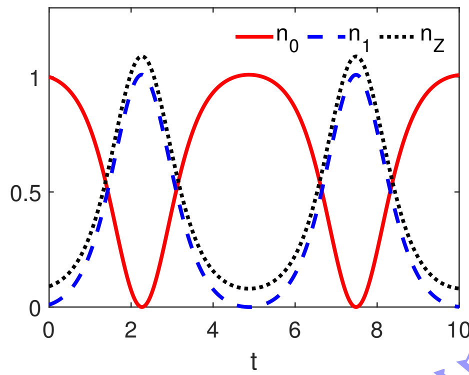


图 1: 忽略三支波的线性增长/阻尼时, 三支波强度随时间的演化. 红色实线、蓝色虚线和黑色点线分别代表泵浦波、边带模和ZFZF的演化曲线.

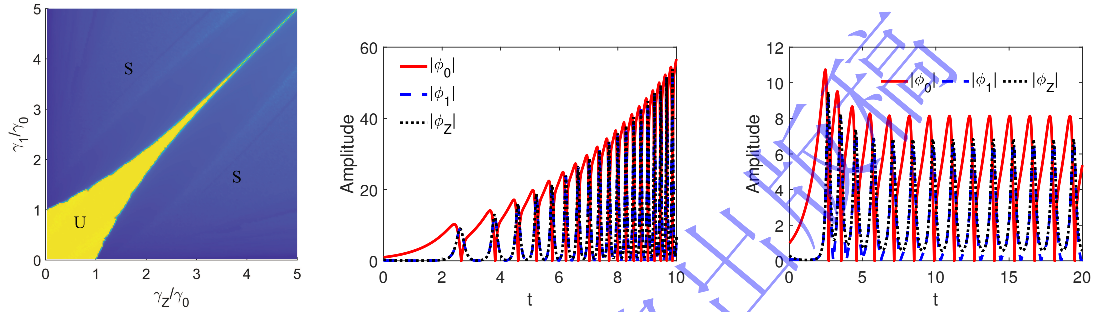
Fig.1. The evolution of the strength of the three waves with time when the linear growth/damping of the three waves is ignored. The red solid line, blue dashed line and black dotted line represent the evolution curve of pump wave, sideband and ZFZF, respectively.

回到包含线性驱动和阻尼的方程组(5), 再对三个波的幅度和时间做归一化: $\phi_{0,1,Z} \to \gamma_0\phi_{0,1,Z}$ 和$t \to t/\gamma_0$, 可以得到

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\phi_0 &= -\phi_1\phi_Z, \\
\left(\frac{d}{dt} + \gamma_1/\gamma_0\right)\phi_1 &= \phi_0\phi_Z, \\
\left(\frac{d}{dt} + \gamma_Z/\gamma_0\right)\phi_Z &= \phi_0\phi_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

因此, 要研究系统的演化特征与方程组参数的关系, 只需要改变两个相对阻尼系数γ_1/γ_0和γ_Z/γ_0. 下面我们通过数值离散的方法求解方程组(10), 计算的差分格式采用四阶龙格库塔方法, 编程语言采用MATLAB. 通过在0.0~5.0范围内扫描参数γ_1/γ_0和γ_Z/γ_0的值, 我们发现, 当γ_1/γ_0和γ_Z/γ_0的取值在图2(a)的黄色区域时, 波的幅度随时间增加而无限增长, 如图2(b)所示; 而当取值在图2(a)的蓝色区域时, 波的幅度最终稳定在有限范围内, 如图2(c)所示. 对于图2(a), 黄色区域主要集中在$\gamma_1 + \gamma_Z < \gamma_0$的范围内以及对角线$\gamma_1 = \gamma_Z$附近. 其中$\gamma_1 + \gamma_Z < \gamma_0$这一参数区间直观上是容易理解的, 此时三维相空间(空间坐标为ϕ_0、ϕ_1和ϕ_Z)内体积的增长率$\gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_Z > 0$, 即相空间体积是膨胀的. 因此有限体积内的相点最终将扩散到无穷大范围去, 从而系统表现出无限增长的趋势. 然而, 系统在$\gamma_1 = \gamma_Z$附近的增长行为直观上无法简单地解释, 但由于这个参数范围($\gamma_1 \simeq \gamma_Z \gg \gamma_0$)并不是本问题的重点关注区间, 我们将在之后的工作中再深入讨论. 对于图2(c), 我们需要指出, 当系统进入稳态后(表现为曲线的周期性振荡), 曲线振荡的周期和幅度仅依赖于方程中的参

数γ_1/γ_0和γ_Z/γ_0, 而和初值的选取无关, 它代表了该非线性系统在参数确定的情况下必然的演化趋势. 在非线性动力学中, 这种周期性振荡也被称为极限环. 如果在相空间内画出相点的运动轨迹, 我们将得到一个封闭的环形轨道. 由于其附近的相轨道随时间增加都无限逼近于该极限环, 我们称该极限环是稳定的(或吸引的).

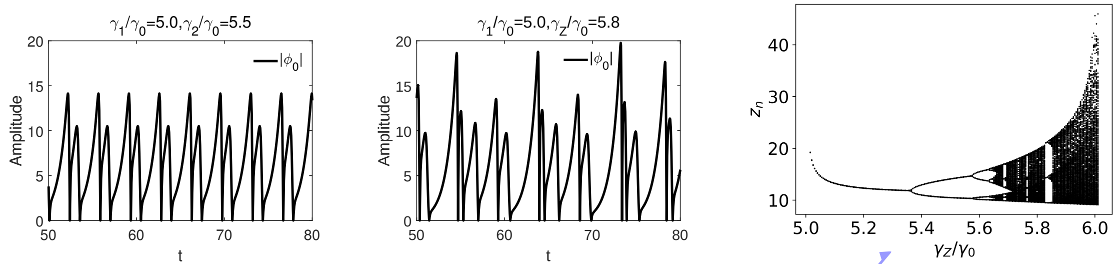


(a) (b) (c)

图 2: (a) γ_1/γ_0和γ_Z/γ_0的参数空间内, 当参数取值在黄色区域(标记为U)时, 系统无限增长, 当参数取值在蓝色区域(标记为S)时, 系统稳定在有限范围内. (b) 和(c) 展示了两种情形下三个波的时间演化曲线.

Fig.2. (a) In the parameter space of γ_1/γ_0 and γ_Z/γ_0, when the parameter value is set in the yellow region (marked by U), the system grows infinitely, while in the blue region (marked by S), a stable state of the system is obtained. (b) and (c) show the time evolution curves of the three waves in these two cases.

事实上, 图2(c)并不是系统稳定在有限范围后所表现出的唯一的振荡模式. 我们固定$\gamma_1/\gamma_0 = 5.0$, 而从5.01开始逐渐增加γ_Z/γ_0. 试验发现, 系统刚开始收敛到图2(c)所示的极限环上; 随着γ_Z/γ_0的增加, 系统出现如图3(a)所示的周期倍增现象; 经历多次倍周期分岔后, 最终系统进入到非周期振荡的混沌, 如图3(b)所示. 此时系统的状态对初值具有极端敏感的依赖性, 初值的任意微小差异都会使系统在确定时刻的状态有很大不同. 但同时混沌依然保持有稳定性, 它使得系统最终收敛到一个有限的范围内. 因此由数值计算得到的图3(b)只能反映系统收敛到的大致范围而不能给出在某一时刻系统的确切状态. 图3(c)用$z_n = \max\{|\phi_0(t)|\}$随$\gamma_Z/\gamma_0$变化的散点图形象地展示了系统从极限环振荡经历倍周期分岔到达混沌的这一过程. 需要指出的是, 观测到系统这一动力学特征的参数采样点并不限于上述给定的取值范围. 数值试验的结果表明, 在图2(a)的蓝色区域内, 从黄蓝区域的边界线附近出发沿直线远离该边界线, 在这样的参数采样下我们总能观察到类似图3(c)的结果.



(a) (b) (c)

图 3: (a) $\gamma_1/\gamma_0 = 5.0$, $\gamma_Z/\gamma_0 = 5.5$时泵浦波$|\phi_0|$随时间的演化. (b) $\gamma_1/\gamma_0 = 5.0$, $\gamma_Z/\gamma_0 = 5.8$时泵浦波$|\phi_0|$随时间的演化. (c) $z_n = \max\{|\phi_0(t)|\}$随$\gamma_Z/\gamma_0$变化的散点图.

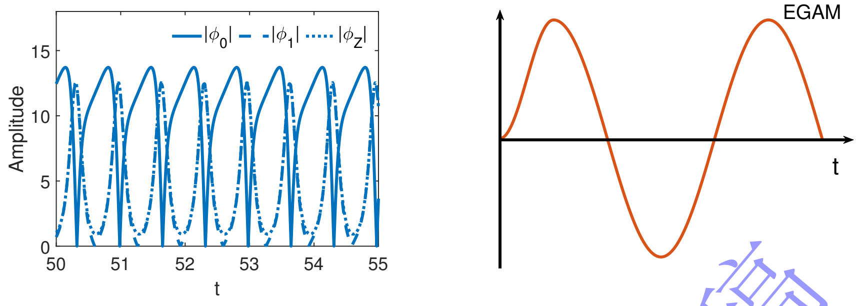
Fig.3. (a) Time evolution curves of pump wave $|\phi_0|$ when $\gamma_1/\gamma_0 = 5.0$, $\gamma_Z/\gamma_0 = 5.5$. (b) Time evolution curves of pump wave $|\phi_0|$ when $\gamma_1/\gamma_0 = 5.0$, $\gamma_Z/\gamma_0 = 5.8$. (c) Scatterplot of $z_n = \max\{|\phi_0(t)|\}$ varying with γ_Z/γ_0.

通过本节的研究我们看到, 由上述三波模型所描述的非线性耦合漂移波－带状流系统, 由于ZFZF的激发主要有三种行为: 不稳定的振荡(无限增长); 稳定的周期性振荡(极限环); 稳定的非周期性振荡(混沌). 这些曲线整体的变化可以非常复杂, 振荡的周期和幅度有各有不同, 但仔细观察图2(b)和图2(c)可以看出, 在一个小的时间窗口内, 三支波的振荡行为和图1所示的捕食者－猎物模型是类似的. 因此, 考虑非零的线性增长率和阻尼率后, 最直观的影响是对图1所示的三波振荡产生了周期和幅度上的调制.

由于“Dimits区”对应于漂移波湍流非线性稳定区域, 我们将图2(c)所示的周期振荡行为定义为本非线性耦合模型的“Dimits区”, 并研究外加有限频率的EGAM对其的影响. 需要注意的是, 本工作的出发点是研究周期性振荡的EGAM对Dimits区湍流的影响, 但本文的主导方程组(1), 并不限于EGAM. 实际上, 对于任何周期性的磁面对称的电场振荡对漂移波湍流的影响, 均可用此模型来进行研究, 如外加的静电偏压, 以及由其他湍流(如阿尔芬不稳定性)所激发的GAM/ZFZF等.

4 EGAM对Dimits区漂移波的影响

根据上一节的研究, 我们可以构建一个稳定的描述Dimits区漂移波的系统. 我们取方程组(1)中的$\gamma_0 = 1.0$, $\gamma_1 = 3.0$, $\gamma_Z = 3.1$, 此时加入EGAM之前的漂移波－ZFZF系统处于图4(a)所示的周期振荡的稳态解上. 本节我们将探究有限频率的EGAM对原系统的影响. 为了尽可能减少数值不稳定性, 我们在引入EGAM的时刻用一段平滑增强的过程来过渡, 如图4(b)所示.



(a) (b)

图 4: (a) 加入EGAM之前系统的周期性振荡. 蓝色实线、蓝色虚线和蓝色点线分别代表泵浦波、边带模和ZFZF和的时间演化曲线. (b) 周期振荡的EGAM曲线, 初始阶段逐步增强以实现平滑过渡.

Fig.4. (a) Periodic oscillation of the system before EGAM is introduced. The blue solid line, blue dashed line and blue dotted line represent the evolution curve of pump wave, sideband and ZFZF, respectively. (b) Periodically oscillating EGAM. The initial phase is progressively enhanced to achieve a smooth transition.

4.1 缓变EGAM对Dimits区漂移波湍流的影响

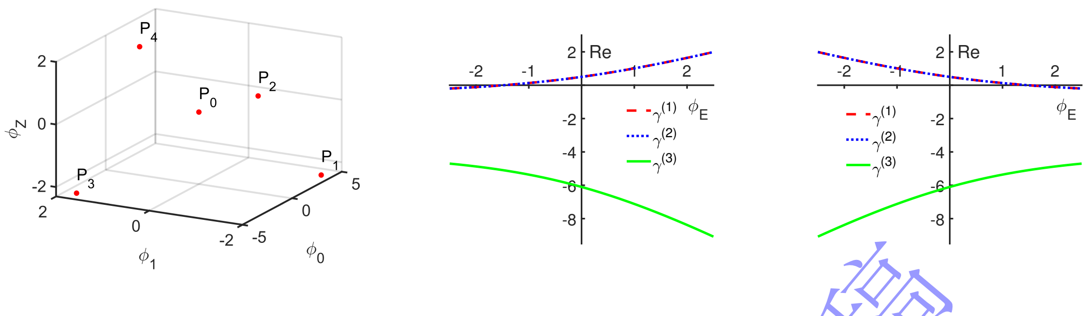
首先考虑一个“缓变”的EGAM, 对应于其频率远小于4(a)中周期振荡频率的情形; 因此在很长一段时间内, EGAM相对于漂移波–带状流而言近似是一个常数ϕ_E, 从而可以忽略EGAM的周期振荡, 将方程组(1)写为:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}-\gamma_0\right)\phi_0&=-\phi_1\phi_Z,\\ \left(\frac{d}{dt}+\gamma_1\right)\phi_1&=\phi_0(\phi_Z+\phi_E),\\ \left(\frac{d}{dt}+\gamma_Z\right)\phi_Z&=\phi_0\phi_1,\end{aligned}\tag{11}$$

对于该方程组, 我们先研究其不动点解的稳定性. 令方程中的时间导数为0, 得到如下5个不动点解:

$$(0,0,0),\left(\mp\sqrt{\gamma_Z/\gamma_0}a_+,\pm\sqrt{\gamma_0\gamma_Z},-a_+\right),\left(\pm\sqrt{\gamma_Z/\gamma_0}a_-,\pm\sqrt{\gamma_0\gamma_Z},a_-\right).\tag{12}$$

其中$a_\pm=\sqrt{4\gamma_0\gamma_1+\phi_E^2}/2\pm\phi_E/2$. 注意到$\gamma_{0,1,Z}$都已经给定, 因此该系统中的不动点及其稳定性只由$\phi_E$唯一决定. 图5(a)给出了当$\phi_E=1.0$时5个不动点在相空间的相对分布, 其中$P_1$和$P_3$, P_2和P_4关于ϕ_Z轴对称. 这从方程组(11)的结构也能明显看出来: 如果$(\hat\phi_0,\hat\phi_1,\hat\phi_Z)$是方程的解, $(-\hat\phi_0,-\hat\phi_1,\hat\phi_Z)$必然也是方程的解.



(a) (b) (c)

图 5: (a)5个不动点在相空间的相对分布. (b)不动点P_1和P_3, (c)不动点P_2和P_4处Jacobi矩阵的三个本征值的实部随ϕ_E的变化. 此处$\gamma_0 = 1.0$, $\gamma_1 = 3.0$, $\gamma_Z = 3.1$.

Fig.5. (a)Relative distribution of five fixed points in phase space. (b)Dependence of the real part of the three eigenvalues of Jacobi matrix at fixed points (b)P_1/P_3 and (c)P_2/P_4. Here, $\gamma_0 = 1.0$, $\gamma_1 = 3.0$, $\gamma_Z = 3.1$.

不动点的稳定性可以通过计算不动点处的Jacobi矩阵得到, 其对应于在不动点附近做线性化后得到的线性微分方程组的系数矩阵:

$$J \equiv \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\phi_Z & -\phi_1 \\ \phi_Z + \phi_E & -\gamma_1 & \phi_0 \\ \phi_1 & \phi_0 & -\gamma_Z \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其本征值可解得:

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} &= -\frac{a}{3} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(b+c)^{1/3} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}(b-c)^{1/3}, \\ \gamma^{(2)} &= -\frac{a}{3} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}(b+c)^{1/3} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(b-c)^{1/3}, \\ \gamma^{(3)} &= -\frac{a}{3} + (b+c)^{1/3} + (b-c)^{1/3}, \end{aligned} \tag{14}$$

其中$a = \gamma_1 + \gamma_Z - \gamma_0$, $b = \frac{ad}{6} - \frac{a^3}{27} - \frac{e}{2}$, $c = \left[b^2 + \left(\frac{d}{3} - \frac{a^2}{9}\right)^3\right]^{1/2}$, $d = -\gamma_0\gamma_1 - \gamma_0\gamma_Z + \gamma_1\gamma_Z - \phi_0^2 + \phi_1^2 + \phi_Z^2 + \phi_Z\phi_E$, $e = \sum_j \gamma_j \phi_j^2 + 2\phi_0\phi_1\phi_Z + \phi_0\phi_1\phi_E + \gamma_Z\phi_Z\phi_E - \gamma_0\gamma_1\gamma_Z$.

不动点的稳定性由特征值$\gamma^{(j)}$的实部,即$Re(\gamma^{(j)})$,决定, $Re(\gamma^{(j)})$可以简单理解为不动点附近的扰动的增长率. 如果$Re(\gamma^{(j)}) < 0$, 则不动点是稳定的; 反之是不稳定的. 将不动点坐标和参数$\gamma_{0,1,Z}$的值代入$\gamma^{(j)}$的表达式, 我们将得到本征值与ϕ_E的依赖关系. 图5(b)和图5(c)分别绘制了P_1(或P_3)和P_2(或P_4)处Jacobi矩阵的三个本征值的实部随ϕ_E的变化. 可以看出, 当$\phi_E < -1.48$时, 不动点P_1和P_3是稳定的; 当$\phi_E > 1.48$时, 不动点P_2和P_4是稳定的; 当$-1.48 < \phi_E < 1.48$时, 不存在稳定不动点. 注意到不动点P_0一定是不稳定的,

因为(11)式的第一个方程在P_0处线性化后必将得到指数增长的ϕ_0. 而当$\phi_E=0$时退化到原来的三波耦合情形, 不存在稳定的不动点, 这与上一节提到的Anderson等人的研究结果相吻合[25]. 后面我们将只考虑$\phi_E>0$的情况, 因为对于$\phi_E<0$的情况, 只需要将ϕ_1和ϕ_Z反号就等价为$\phi_E>0$时的方程组.

试验发现, 当参数ϕ_E在不同的区间内取值时, 系统在相空间内的不动点和极限环会表现出不同的性质:

1. 当$\phi_E>1.48$时, 相空间内除了有两个稳定不动点P_2, P_4(图5(a)), 还有两个稳定的大极限环, 如图6(a)的蓝色曲线所示, 其大小(通过$\max\{|\phi_0|\}$表征)与ϕ_E呈正相关, 而形状基本保持不变. 在此情形下, 根据初值选取的不同, 系统最终将收敛到大极限环或不动点P_2, P_4上.

2. 当$0.88<\phi_E<1.48$时, 大极限环仍然存在, 不动点P_2, P_4失去稳定性, 但其附近出现两个稳定的小极限环, 如图6(b)的蓝色曲线所示. 在此情形下, 根据初值选取的不同, 系统最终将收敛到大极限环或小极限环上.

3. 当$0.37<\phi_E<0.88$时, 大极限环仍然存在, 没有稳定不动点.P_2, P_4附近的小极限环合并为一个中等尺寸极限环, 如图6(c)的蓝色曲线所示. 图6(d)用ϕ_0-ϕ_1平面内的投影展示了ϕ_E从1.4减小到0.6, 两个小极限环合并为中等尺寸极限环的过程. 在此情形下, 根据初值选取的不同, 系统最终将收敛到大极限环或中等尺寸极限环上.

4. 当$\phi_E<0.37$时, 大极限环仍然存在, 中等尺寸极限环消失, 没有稳定不动点, 逐渐回归到没有EGAM的情形. 在此情形下, 系统只可能收敛到大极限环上.

经过上面的试验, 我们实际上给出了系统所有可能存在的稳态解. 其中极限环对应的是周期变化的稳态解, 稳定不动点对应的是常数稳态解. 在方程的初值和参数ϕ_E给定的情况下, 足够长时间后, 系统必然会演化到相应的稳态解上. 需要指出的是这里的区间范围是在其他参数($\gamma_{0,1,Z}$)给定的情况下通过数值计算得到的, 如果其他参数改变, 上面给出的区间范围也要做相应的修改. 注意到大极限环对应的漂移波和带状流的幅度均远大于其初始值(如图4(a)所示), 因此在本文中方程组(1)所描述的EGAM与Dimits区湍流耦合系统, 只有收敛到不动点和小极限环的情况才对应于缓变的EGAM对Dimits区漂移波湍流的进一步抑制; 而不稳定解和大极限环情形, 对应于EGAM对Dimits区漂移波的激发. 注意到此处假定了EGAM的频率小于原耦合漂移波−ZFZF系统的振荡频率, 因此本节的结论是否可以直接应用于理解参考文献[16]的模拟结果, 需要进一步的分析.

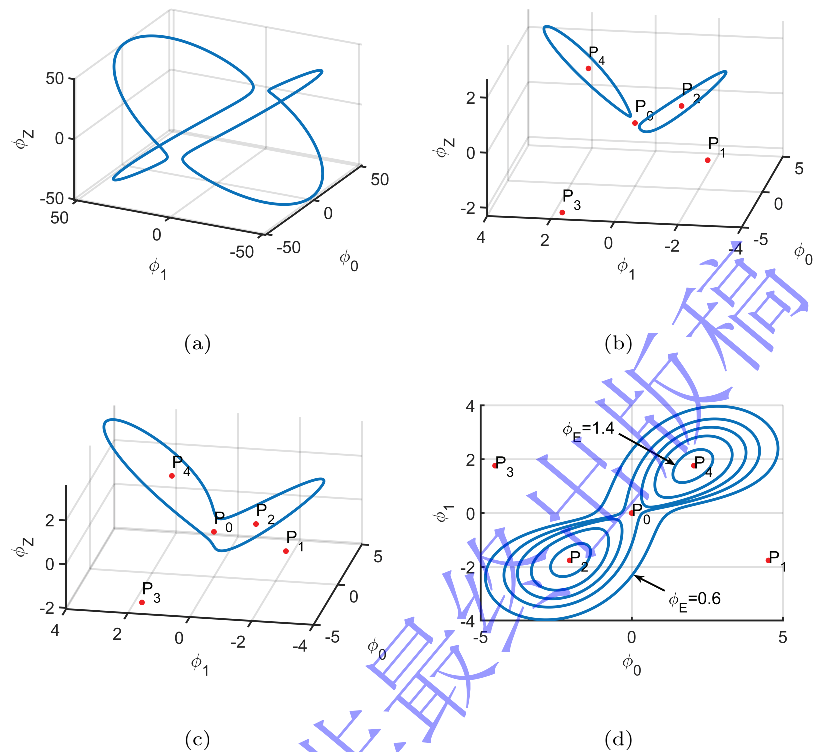


图 6: (a) $\phi_E = 2.0$时的大极限环. (b) $\phi_E = 1.0$时的小极限环. (c) $\phi_E = 0.6$时的中等尺寸极限环. (d) ϕ_E从1.4减小到0.6, 两个小极限环合并为中等尺寸极限环的过程.

Fig.6. (a) Big limit cycle when $\phi_E = 2.0$. (b) Small limit cycle when $\phi_E = 1.0$. (c) Medium size limit cycle when $\phi_E = 0.6$. (d) Two small limit cycles combine into one medium size limit cycle with ϕ_E decreasing from 1.4 to 0.6.

4.2 周期振荡的EGAM对Dimits区漂移波的影响

回到方程组(1), 我们考察不同幅度(ϕ_E)和频率(ω_E)的EGAM对Dimits区漂移波的影响. 模拟发现, 由于EGAM的幅度和频率的不同, 被调制后的漂移波将有可能表现出被激发或抑制这两种截然相反的效果. 图7的(a)、(c)和(e)给出了有限幅度的EGAM引起的三种典型的变化, 其参数设置分别为(1)$\phi_E = 1.4$, $\omega_E = 0.02\pi$; (2)$\phi_E = 2.8$, $\omega_E = 0.02\pi$; (3)$\phi_E = 1.4$, $\omega_E = 0.04\pi$. 图7的(b)、(d)和(f)是对应的相空间轨迹.

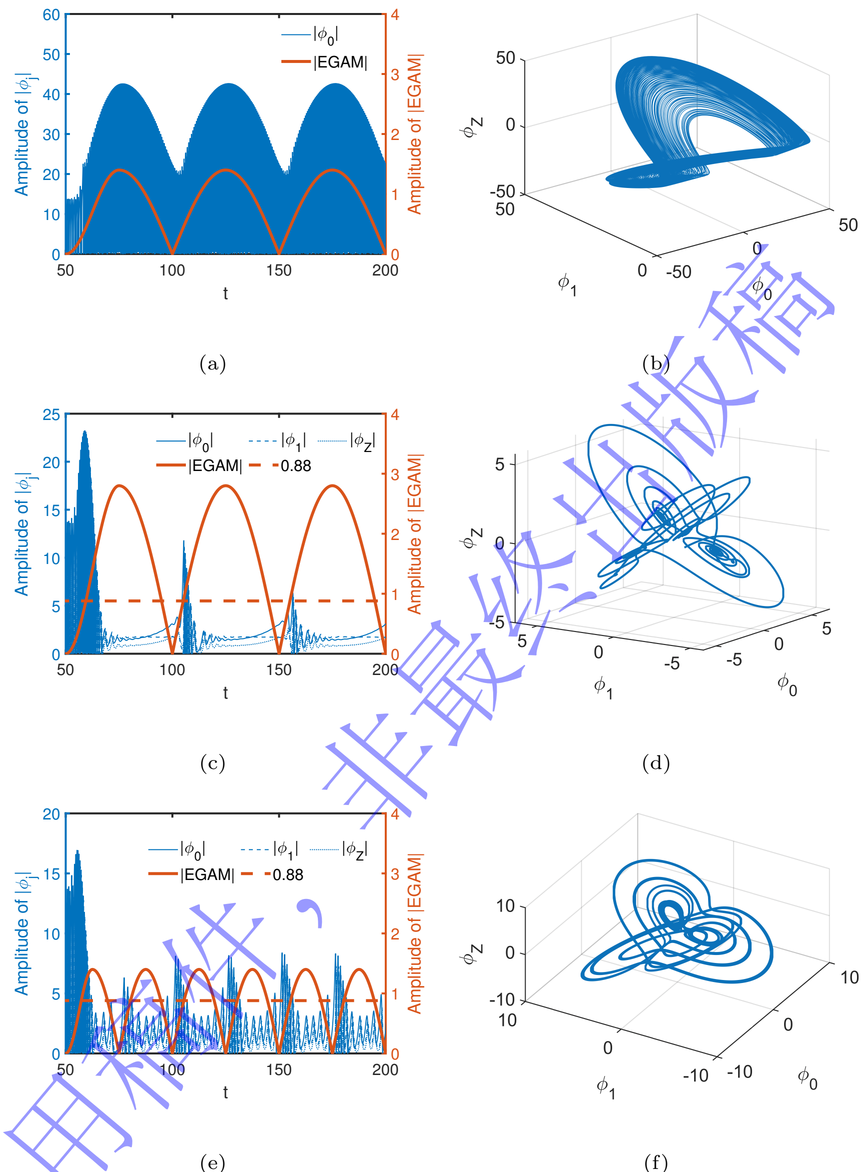


图 7: (a) $\phi_E = 1.4$, $\omega_E = 0.02\pi$时泵浦波$|\phi_0|$随时间的演化及(b)相应的相空间轨迹. (c) $\phi_E = 2.8$, $\omega_E = 0.02\pi$时三波随时间的演化及(d) 相应的相空间轨迹. (e) $\phi_E = 1.4$, $\omega_E = 0.04\pi$时三波随时间的演化及(f) 相应的相空间轨迹.

Fig.7. (a) Time evolution of pump wave $|\phi_0|$ when $\phi_E = 1.4$, $\omega_E = 0.02\pi$ and (b) corresponding trajectory in phase space. (c) Time evolution of three waves when $\phi_E = 2.8$, $\omega_E = 0.02\pi$ and (d) corresponding trajectory in phase space. (e) Time evolution of three waves when $\phi_E = 1.4$, $\omega_E = 0.04\pi$ and (f) corresponding trajectory in phase space.

分析发现, 曲线(a)、(b)和(c)的形成都与图6所列出的忽略EGAM的振荡时的各类极限环和不动点密切相关. 下面我们逐个进行分析:

1. 对于图7(a)和图7(b), 相轨道始终被大极限环所捕获, 表现出大幅的振荡行为. 由于大极限环的尺寸与EGAM的实时幅度$\bar{\phi_E} = \phi_E|\cos\omega_E t|$近似成正比, 图7(a)中曲线振荡的包络形状由$\bar{\phi_E}$所调制.

2. 对于图7(c)和图7(d), 在$\bar{\phi_E} > 1.48$的时间窗口内, 相轨道被不动点所捕获, 表现出小幅的慢变行为; 在$\bar{\phi_E} < 1.48$的时间窗口内, 相轨道被小极限环或中等尺寸极限环所捕获, 表现出小幅的振荡行为.

3. 对于图7(e)和图7(f), 在$\bar{\phi_E} > 0.88$和$\bar{\phi_E} < 0.88$的时间窗口内, 相轨道分别被小极限环和中等尺寸极限环所捕获, 表现出两种小幅的振荡行为.

综上, 这三种曲线都可以看作是相轨道被不同的极限环或稳定不动点捕获的结果. 由于EGAM的幅度$\bar{\phi_E}$随时间变化, 不同时刻极限环的类型和大小, 不动点的位置和稳定性都有所不同, 这才导致了曲线振荡模式的多样性. 而$\bar{\phi_E}$曲线波动的快慢则影响了曲线在不同模式间的转换.

我们注意到, 只有系统演化如图7(a)和(b)所示, 相轨道被大极限环所捕获时, 漂移波$|\phi_0|$才是被激发的(图7(a)), 从而表现出类似于参考文献[16]所观测到的EGAM“激发”漂移波湍流的过程. 而相轨道被大极限环所捕获的关键则是大极限环随$\bar{\phi_E}$变化的速度要小于此刻大极限环“吸引”附近相轨道的速度, 否则相轨道很容易就会离开大极限环的捕获范围, 转而被不动点或小/中极限环所捕获, 进而表现出漂移波被抑制的效果, 正如图7(c)和图7(e)所示. 然而, 极限环对附近相轨道的“吸引”速度难以精确衡量, 且目前还不能给出极限环的解析表达式, 所以要定量给出激发漂移波对EGAM的具体要求目前还十分困难. 但根据已有的数值结果, 我们仍然可以给出一些简单的定性的描述: 给定EGAM的幅度, EGAM的频率越低, 漂移波越容易被激发; 给定EGAM的频率, 当EGAM的幅度小于某一临界值时, 漂移波将被激发, 且被激发的程度近似正比于EGAM的幅度, 而当EGAM的幅度超过该临界值时, 漂移波将被抑制.

5 小结

在当前的工作中, 为了理解参考文献[16]中观测到的EGAM对漂移波湍流的“激发”, 我们使用了一个简化的三波非线性耦合的模型研究了漂移波－ZFZF系统的时间演化特征, 以及EGAM对“Dimits区”漂移波湍流的作用. 当忽略EGAM的影响时, 在非线性过程的初始阶段, 漂移波边带模和ZFZF将因为参量不稳定性而被激发, 激发的阈值由子波的阻尼率所决定.而当子波对泵浦波强烈反馈时, 如果不考虑驱动和阻尼, 方程组的解由一组椭圆函数给出, 三个波的强度表现出类似捕食者－猎物模型的周期性振荡的行为; 当考虑驱动和阻尼时, 上述振荡的周期和幅度将受到调制, 并且在相对阻尼系数的不同取值下, 系统可能

表现出不稳定增长、极限环和混沌这三种不同的行为. 我们也推导了包含线性驱动和阻尼时非线性系统的守恒量. 在此基础上, 我们构建了此系统的“Dimits区”, 并基于方程组(1)所示的模型来研究EGAM对原系统的影响. 在不考虑EGAM振荡的情况下, 我们通过相空间分析的方法, 给出了系统所有可能存在的稳态解(稳定不动点和极限环)对EGAM的幅度的依赖关系. 当考虑EGAM振荡后, 基于实时的EGAM幅度, 和EGAM的振荡频率与漂移波－ZFZF系统演化到“大极限环”的周期振荡态的时间尺度之比, 解释了相空间具有不同振荡模式的原因, 并定性的给出此模型下漂移波被EGAM驱动或抑制的条件.

致谢

本文的作者之一(ZQ)感谢浙江大学陈骝教授分享的一些原始想法.

[1] Horton W 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71**(3) 735

[2] Artsimovich L A, Bobrovskii G A, Mirnov S A, Razumova K A and Strelkov V S 1967 *Sov. At. Energy* **22** 325

[3] Chen L 1999 *Journal of Geophysical Research: Space Physics* **104** 2421

[4] Dimits A M, Bateman G, Beer M A, Cohen B I, Dorland W, Hammett G W, Kim C, Kinsey J E, Kotschenreuther M, Kritz A H, Lao L L, Mandrekas J, Nevins W M, Parker S E, Redd A J, Shumaker D E, Sydora R and Weiland J 2000 *Physics of Plasmas* **7** 969

[5] Lin Z, Hahm T S, Lee W W, Tang W M and White R B 1998 *Science* **281** 1835

[6] Chen L, Lin Z and White R 2000 *Physics of Plasmas* **7** 3129

[7] Diamond P H, Itoh S I, Itoh K and Hahm T S 2005 *Plasma Physics and Controlled Fusion* **47** R35

[8] Rosenbluth M N and Hinton F L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80**(4) 724

[9] Winsor N, Johnson J L and Dawson J M 1968 *Physics of Fluids* **11** 2448

[10] Zonca F and Chen L 2008 *Europhys. Lett.* **83** 35001

[11] Nazikian R, Fu G Y, Austin M E, Berk H L, Budny R V, Gorelenkov N N, Heidbrink W W, Holcomb C T, Kramer G J, McKee G R, Makowski M A, Solomon W M, Shafer M, Strait E J and Zeeland M A V 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101**(18) 185001

[12] Fu G 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 185002

[13] Berk H and Zhou T 2010 *Nuclear Fusion* **50** 035007

[14] Qiu Z, Zonca F and Chen L 2010 *Plasma Physics and Controlled Fusion* **52** 095003

[15] Qiu Z, Chen L and Zonca F 2018 *Plasma Science and Technology* **20** 094004

[16] Zarzoso D, Sarazin Y, Garbet X, Dumont R, Strugarek A, Abiteboul J, Cartier-Michaud T, Dif-Pradalier G, Ghendrih P, Grandgirard V, Latu G, Passeron C and Thomine O 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110**(12) 125002

[17] Chen N, Hu H, Zhang X, Wei S and Qiu Z 2021 *Physics of Plasmas* **28** 042505

[18] Qiu Z, Chen L and Zonca F 2014 *Physics of Plasmas* **21** 022304

[19] Zonca F, White R B and Chen L 2004 *Physics of Plasmas* **11** 2488

[20] Guo Z, Chen L and Zonca F 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103**(5) 055002

[21] Wersinger J M, Finn J M and Ott E 1980 *Phys. Fluids* **23** 1142

[22] Sagdeev R and Galeev A 1969 *Nonlinear plasma theory* (AW Benjamin Inc.)

[23] Edelstein D C, Wachman E S and Tang C L 1989 *Applied Physics Letters* **54** 1728

[24] Hughes D W and Proctor M R E 1992 *Journal of Fluid Mechanics* **244** 583

[25] Anderson D and Bondeson A 1977 *Phys. Fluids* **20** 1072

[26] Manley J M and Rowe H E 1956 *Proceedings of the IRE* **44** 904

[27] Chen N, Wei S, Wei G and Qiu Z 2021 *Submitted to Plasma Physics and Controlled Fusion*

Nonlinear interaction of EGAM with DW turbulence in the Dimits shift region *

Guangyu Wei[1)] Ningfei Chen[1)] Zhiyong Qiu[1)2)†]

1) (*Institute for Fusion Theory and Simulation and Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*)

2) (*Center for Nonlinear Plasma Science and ENEA C. R. Frascati, Frascati, Italy*)

Abstract

Based on the nonlinear three-wave interaction model including driving and dissipation, we construct a system to describe the nonlinear interaction between energetic particle induced geodesic acoustic mode (EGAM) and the drift waves turbulence in the Dimits shift region, and study both analytically and numerically the linear growth and nonlinear oscillation phases of the system, respectively. Further numerical results show that, without the contribution of EGAM, the system goes through limited cycle oscillation to period doubling, and finally route to chaos with the change of the linear drive/dissipation rate. On this basis, the nonlinear saturated "Dimits region" of the system is constructed, which is then used to study the influence of EGAM on the drift wave in the Dimits region. The results show that for EGAM with different amplitude and frequency, the modulated drift wave can be either excited or suppressed, partly reproduces the results from large scale simulation. Finally, We use the method of phase space analysis to give the corresponding explanation.

Keywords: Drift wave, Zonal flow, EGAM, Three-wave nonlinear coupling

PACS: 52.35.kt, 52.35.Mw, 52.25.Fi, 52.25.Gj

---

* Project supported by the National Key Research and Developement Program of China under (Grant

† No. 2017YFE0301900) and the National Science Foundation of China under (Grant No. 11875233).