Acta Physica Sinica

从横场伊辛链到量子 E_8 可积模型 *

王骁 [1)]　杨家豪 [1)]　吴建达 [1)2)†]

1)（上海交通大学, 李政道研究所, 上海　200240）

2)（上海交通大学物理与天文学院, 上海　200240）

本文综述了近年来关于横场伊辛链模型及量子 E_8 可积模型研究工作的一系列理论及实验进展. 在针对横场伊辛链的研究工作中, 理论上发现格林艾森比率 (热或磁胀系数与比热之比) 在此模型中独特的奇异量子临界行为, 并实质性地扩展了能涌现横场伊辛链普适类的微观模型. 这些理论进展成功地推进了一系列合作实验在准一维反铁磁材料 $BaCo_2V_2O_8$ 及 $SrCo_2V_2O_8$ 中首次实现横场伊辛链普适类. 在针对量子 E_8 可积模型的研究工作中，理论上严格计算了该系统的低温局域动力学行为及在零转移动量之时的动力学结构因子, 并在动力学结构因子的连续谱区域得到了级联幂次发散的奇性谱边激发. 这些理论进展在结合详细的量子临界标度行为分析及大规模 iTEBD 数值计算之后, 成功促成了包括太赫兹谱学测量, 非弹性中子散射, 核磁共振等系列实验在 $BaCo_2V_2O_8$ 中首次实现量子 E_8 可积模型. 量子 E_8 可积模型的物理实现为在真实材料中研究量子可积系统的物理开拓了新的边界. 这一系列关于横场伊辛链及量子 E_8 可积模型的研究进展将为凝聚态系统、冷原子系统、统计场论和共形场论等方向的研究带来新的启发, 并为量子不可积系统的研究提供了新的可能.

关键词: 可积系统, 量子磁性, 普适类, 自旋动力学

PACS: 05.30.Rt, 31.15.aq, 67.30.hj, 74.40.Kb

* 上海自然科学基金 (批准号: 20ZR1428400) 、上海浦江人才计划 (批准号: 20PJ1408100) 及额外一项上海人才计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wujd@sjtu.edu.cn

录用稿件，非最终出版稿

1 引　言

量子相变 (quantum phase transition) 指在零温下通过调节参数, 强关联多体系统发生的相变行为 [1]. 在量子临界点 (quantum critical point, QCP) 附近, 强烈的量子涨落往往会涌现出奇异的量子临界行为 [2−7]. 对这些量子临界行为的深入理解将有助于解答长期悬而未决的物理问题 [8−16], 包括非常规高温超导体, 非费米液体等 [17−19], 并有助于在材料中实现量子自旋液体 [20,21], 因此吸引着理论和实验的持续研究. 量子临界行为能被临界指数所刻画, 每一组量子临界指数对应于一种普适类, 并往往伴随相应的低能有效量子场论 [1]. 即使微观起源不同, 属于同一普适类的模型在 QCP 附近也会展示出非常一致的物理, 如标度规律, 关联行为及动力学激发等 [1]. 因此, 对普适类的深入研究可以使人们同时理解 QCP 附近大量具有该普适类的微观模型, 而这意味着将实际系统调节向 QCP 附近是实现并研究普适类之必要. 然而，由于真实材料内在的复杂性, 只有极少数的 QCP 可以被实验实现, 即使一些形式上并不复杂的微观模型, 如横场伊辛链模型 [22] (transverse field Ising chain model, TFIC 模型, 哈密顿量见方程 (1).), 实验上也一直难以找到候选材料实现并研究其对应的普适类.

在 QCP 处对体系的微扰则可能会进一步涌现出丰富的物理, 如涌现对称性和涌现可积性 [3−6,23−26,67]. 自 1989 年起 Zamolodchikov 等人发展了微扰共形场论 (perturbed Conformal Field Theory, pCFT)[23,24,27−29]. 他们通过在不同普适类的临界点处施加微扰, 从而发现了一系列能够由例外李代数 (exceptional Lie algebra) 所描述的可积模型 [24]. 比如, QCP 处的 TFIC 模型在纵向磁场的微扰下会涌现出量子 E_8 可积模型 [23,24,27−31]. 这类涌现现象同样具有普适性，一方面不依赖于微观模型的具体细节, 另一方面拓展了量子可积模型范围, 有利于推动实验在实际材料中对可积模型的研究.

近年来, 笔者吴建达及其合作者在理论和实验的共同努力下, 在强关联材料 $BaCo_2V_2O_8$ (BCVO) 和 $SrCo_2V_2O_8$ (SCVO) 中首次成功实现 TFIC 模型的普适类 [22 32−35], 并在 BCVO 材料中首次实现量子 E_8 可积模型 [30,36,37]. 这一系列进展不仅是量子可积磁性理论和实验上的突破 [2], 也展示了对量子临界行为, 普适类, 涌现对称性和涌现可积性研究的重要意义, 更开拓了于真实材料中实现并研究量子可积模型的重要方向. 本文按照历史的脉络, 从理论和实验两个方面综述了这一系列的进展。全文组织如下: 第 2 节分别回顾 TFIC 模型和横场海森堡-伊辛链 的量子临界行为及其普适类; 第 3 节介绍证实 BCVO 材料和 SCVO 材料中 TFIC 模型普适类的实验进展; 第 4 节概括量子 E_8 模型的理论背景和进展; 第 5 节叙述量子 E_8 模型在材料中的实验实现; 第 6 节为总结与展望.

录用稿件，非最终出版稿

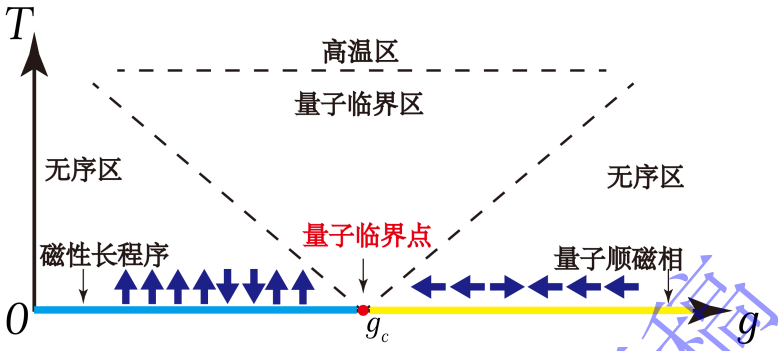


图 1　TFIC 模型相图. g 为横场参数, $g_c = 1$ 为 QCP. 在相变点左侧, 青蓝色实线代表零温下的铁磁相; 在相变点右侧, 黄色实线代表零温下的顺磁相. 相图中的两斜虚线为低温下各个不同无序区域的过渡边界, 而上方虚线则是量子临界区域到经典区域的过渡边界.

Fig. 1. A phase diagram of TFIC, where g is labels transverse field, and $g_c = 1$ is the QCP. The cyan solid line represents for ferromagnetic phase at zero temperature on the left of the critical point, while on the right the yellow solid line stands for a paramagnetic phase at zero temperature. The two tilted dotted lines illustrate the crossovers of different disorder phases in low temperature region, while the dotted line above shows a crossover from quantum critical region to classical region.

实用稿件，非最终出版稿

2 伊辛普适类

2.1 横场伊辛链

TFIC 模型的哈密顿量 [1,22]

$$H_I = -J\sum_i(\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z + g\sigma_i^x), \tag{1}$$

其中 J 及 gJ 分别为铁磁及横场与自旋间的相互作用强度. $S_i^\alpha = \sigma_i^\alpha/2, \alpha = x, y, z$ 表示在格点 i 处的自旋 1/2 算符, σ_i^α 是泡利矩阵. 该模型是一精确可解模型 (exactly solvable model), 利用约当–魏格纳变换 (Jordan-Wigner transformation) 和波格留波夫 (Bogoliubov) 变换可以对角化该哈密顿量并求解出其激发谱 [1,22,32],

$$H_I = \sum_k \epsilon_k(\gamma_k^\dagger\gamma_k - \frac{1}{2}). \tag{2}$$

其中 $\epsilon_k = 2J\sqrt{1+g^2-2g\cos(ka)}$ 为单粒子激发谱, a 为晶格常数, $\gamma_k^\dagger$ 和 γ_k 分别为波格留波夫变换后的费米子产生湮灭算符. 显然, 当 $g \neq 1$ 时, 系统存在能隙, 该能隙在 $g = g_c = 1$ 时消失. 零温时, 该模型存在一个横场驱动的铁磁相和顺磁相之间的量子相变 (图 1)[1,22], 对应的 QCP 位于 g_c.

1970 年, Pfeuty 首次研究了 TFIC 模型的量子相变 [22]. 1984 年, Zamolodchikov 等人证明了当 $g = g_c$

时 TFIC 模型的低能物理可以被中心荷 1/2 的共形场论 (central charge 1/2 Conformal Field Theory, $\mathrm{CFT}_{c=1/2}$) 所描述 [3,30,38]. 在标度极限 (scaling limit) 下 [30], TFIC 模型中的自旋算符 σ_i^z 及 σ_i^x 分别对应于 $\mathrm{CFT}_{c=1/2}$ 中自旋密度算符 $\sigma(x)$ 及能量密度算符 $\epsilon(x)$. 当 $|x|\to 0$ 时, 其两点关联函数具有标度行为 [31,38]

$$\langle\sigma(x)\sigma(0)\rangle \sim \frac{1}{|x|^{1/4}},\ \langle\epsilon(x)\epsilon(0)\rangle \sim \frac{1}{|x|^2}, \tag{3}$$

$\sigma(x)$ 和 $\epsilon(x)$ 对应的标度维度 (scaling dimension) 分别是 $2\Delta_\sigma = 1/8$ 和 $2\Delta_\epsilon = 1$ [30,31,38], 这些指数刻画了 TFIC 模型的普适类, 同时也刻画了二维经典伊辛模型的普适类 [39](以下简称该普适类为伊辛普适类). 然而, 自 TFIC 模型提出后的近半个世纪里, 具有伊辛普适类的强关联材料却一直没有被确认存在, 这是因为实验上一方面受限于实验精度，另一方面缺乏有效的理论指导去分辨并证实观测到的量子临界行为是否属于伊辛普适类. 比如, 方程 (3) 所提及的标度行为是等时短程关联, 实验上不具有可操作性, 无法进行测量. 2018 年, 笔者吴建达与合作者关于伊辛普适类格林艾森比率量子临界标度行为的理论突破为实验提供了一个可靠的判定标准 [32]. 这里我们先简要归纳伊辛普适类在 QCP 附近的标度规律, 这些标度规律皆可作为判断伊辛普适类的依据 [1,22,32]. 首先, QCP 附近系统的磁化 M_z 满足 $M_z \sim |g-g_c|^\delta$, 其中 $\delta = 1/8$. 其次, 在 QCP 附近考虑自旋关联函数

$$C_{ij} = \langle\sigma_i^z\sigma_j^z\rangle - \langle\sigma_i^z\rangle\langle\sigma_j^z\rangle, \tag{4}$$

该关联随格点间距呈指数衰减, 即 $C_{ij}\sim e^{-|i-j|/\xi}$, 其中 ξ 被称为关联长度 (correlation length), 满足标度律 $1/\xi \sim |g_c-g|^\nu$, $\nu = 1$. 此时系统激发的能隙满足标度律 $\Delta\sim|g_c-g|^{z\nu}$, $z=1$ 被称为动力学临界指数 (dynamical critical exponent)[1,32,35].

由于临界指数也可以直接用于分析热力学量临界行为，因此在实验方面，可以通过测量相应热力学量的量子临界行为考察相关材料的普适类性质。比如我们考虑和磁热效应相关的热力学量格林艾森比率 (Grüneisen ratio)

$$\Gamma_H = \frac{\alpha_H}{c_H} = -\frac{1}{T}\frac{(\partial M/\partial T)_H}{(\partial S/\partial T)_H} = -\frac{1}{T}\frac{(\partial S/\partial H)_T}{(\partial S/\partial T)_H}, \tag{5}$$

其中 H 是可控外场, c_H, α_H, M 和 S 分别为摩尔比热, 磁膨胀系数, 每摩尔磁化强度和熵. 在 TFIC 模型中, 相关物理量均可被解析地求解出来 [32]. 零温极限下, 格林艾森比率在横场趋于 TFIC 模型的 QCP 时趋于发散 $\Gamma_{cr}(t\to 0, g)\approx \alpha/c_v = \mathrm{sgn}(g-g_c)/|g-g_c|$, 而在量子临界区内, 趋于 QCP 时, 格林艾森比率则趋于常数 [32]. 此奇异的量子临界行为一方面表明了 TFIC 模型的 QCP 是本性奇点, 另一方面则可作为

录用稿件，非最终出版稿

TFIC 模型中伊辛普适类的独特特征, 为实验探测伊辛普适类提供了有效的理论指导. 值得一提的是, 格林艾森比率发散行为意味着熵极大值会出现在 QCP 附近 [40], 这在相关材料的量子临界测量中得到确认, 如 $Sr_3Ru_2O_7$ 和 $CeCu_{6-x}Au_x$ 等 [41,42]. 于是, 基于上述理论, 我们在实验中可以通过测量相关材料格林艾森比率的量子临界行为, 判断该材料的普适类是否是伊辛普适类.

2.2 横场海森堡-伊辛链

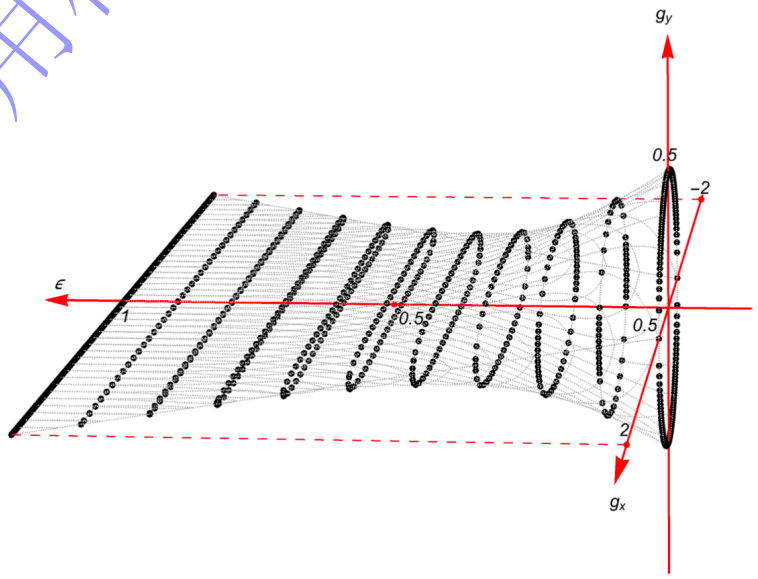
接下来我们总结横场海森堡-伊辛链在外加横场之下的可能量子相变及其普适类特征, 我们首先考察外加均匀横场之下的海森堡-伊辛链

$$H=\sum_i J[\epsilon(S_i^xS_{i+1}^x+S_i^yS_{i+1}^y)+S_i^zS_{i+1}^z]+H_x\sum_i S_i^x. \tag{6}$$

这里 H_x 是自旋和横场的耦合系数. ϵ 通常取 $0\sim1$ 之间, 当 $\epsilon=0,1$ 时该模型分别对应 TFIC 和横场海森堡链, 于是称该模型为横场海森堡-伊辛链[43,44]. 人们此前已经证明了该模型在加横场后会存在伊辛普适类 [44]. 2019 年, 笔者吴建达及其合作者利用大规模 infinite time-evolving block decimation (iTEBD) 数值计算证明了引入垂直于所加均匀横场的交错横场后, 该模型在量子相变点处依旧展示了伊辛普适类 [35]. 考虑一般的带有交错横场的海森堡-伊辛链 哈密顿量,

$$H=\sum_i J[\epsilon(S_i^xS_{i+1}^x+S_i^yS_{i+1}^y)+S_i^zS_{i+1}^z]-\sum_i[g_xS_i^x+(-1)^ig_yS_i^y]. \tag{7}$$

利用 iTEBD 数值方法, 在 $g_x-g_y-\epsilon$ 三维参数空间内可以精确计算该有效模型中展现伊辛普适类物理的 QCPs, 所有的 QCPs 组成了 $g_x-g_y-\epsilon$ 参数空间内一量子临界曲面, 见图 2[35].

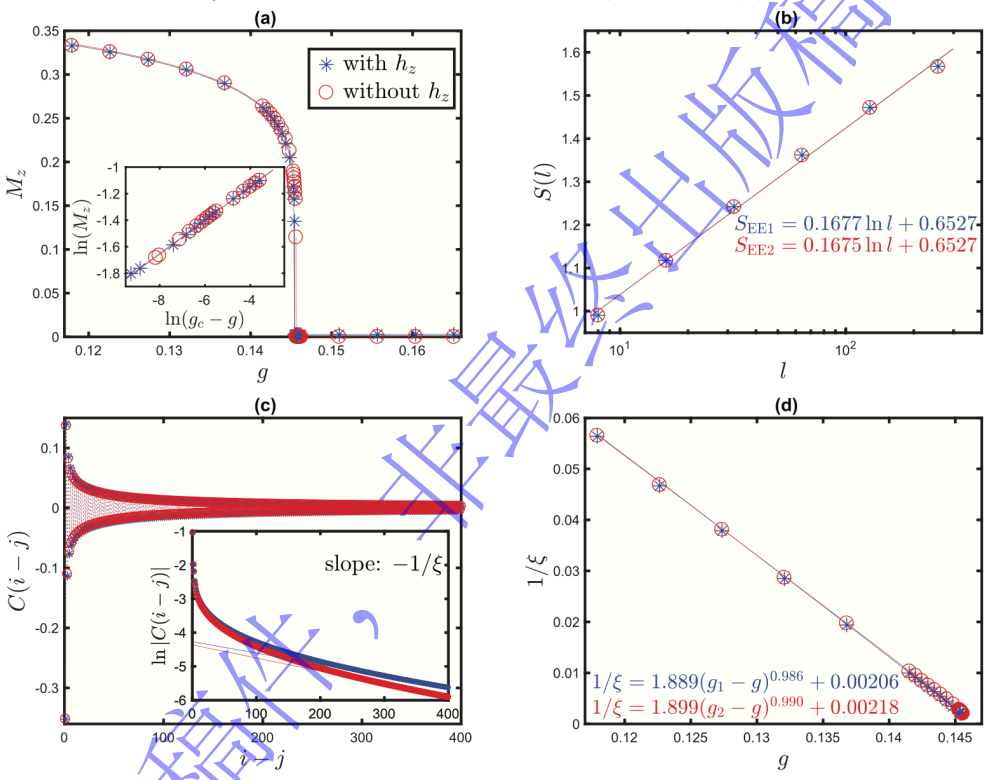


录用稿件，非最终出版稿

图 2　由 iTEBD 计算得出的针对模型方程 (7) 的量子临界曲面 (图片经文献 [35] 允许转载, 版权归 2019 IOP Publishing Ltd 所有)

Fig. 2. Quantum critical surface calculated by iTEBD algorithm for Eq. (7). (Reprinted with permission from Ref. [35]. Copyright 2019 IOP Publishing Ltd.)

该理论工作进一步考察了带有交错横场的海森堡-伊辛链 存在沿 z 方向的四周期磁场微扰项的情形, 发现这一微扰项仅轻微移动 QCP 的位置而不改变相应的伊辛普适类。计算结果见图 3[35].



录用稿件，非最终出版稿

图 3　(a) 交错磁化 $M_z(g)$ 的计算结果. 蓝线和红线分别代表了带有和不带有四周期项的数据. 这两条曲线可以分别用 $M_z = 0.524(g_{c1} - g)^{0.126}$ 和 $M_z = 0.530(g_{c2} - g)^{0.128}$ 来拟合, 其中 $g_{c1} = 0.1454$, $g_{c2} = 0.1456$, 在误差精度范围内均可得到临界指数为 1/8 的结论. 内嵌图是利用对数坐标轴画出的 M_z 的标度行为. (b) 半对数坐标轴下纠缠熵 $S_{EE}(l)$ 和链长 l 的关系, 两种情况都符合伊辛普适类的 1/2 中心荷. (c) 当 $g = 0.1448$ 时, 自旋两点关联函数和距离 $i - j$ 间的函数关系. 内嵌图展示了 $\ln C(i - j)$ 在长程时与 $i - j$ 成正比. (d) 关联长度的倒数和 g 的函数关系, 两种情况都符合伊辛普适类中关联长度指数 $\nu = 1$ 的结论. (图片经文献 [35] 允许转载, 版权归 2019 IOP Publishing Ltd 所有)

Fig. 3. (a)iTEBD results for staggered magnetization $M_z(g)$. The blue line and red line represent iTEBD data with and without the four periodic term, respectively. The two curves can be fitted with $M_z = 0.524(g_{c1} - g)^{0.126}$ and $M_z = 0.530(g_{c2} - g)^{0.128}$, where $g_{c1} = 0.1454$, $g_{c2} = 0.1456$, and critical exponent $\delta = 1/8$ is obtained within error bar for both cases. Inset shows scaling behavior of M_z in $\log - \log$ plot. (b)Entanglement entropy $S_{EE}(l)$ versus length l in a semi-log plot, both fall into central charge $c = 1/2$ of TFIC universality. (c)Spin-spin correlation function versus distance $i - j$ at $g = 0.1448$. Inset shows $\ln C(i - j)$ being proportional to $i - j$ in long range region. (d)The inverse of correlation length in terms of g, both agree with correlation length exponent $\nu = 1$. (Reprinted with permission from Ref. [35]. Copyright 2019 IOP Publishing Ltd.)

综上所述, 该工作利用 iTEBD 数值算法证明了在带有交错横场的海森堡-伊辛链中通过合理调整所加磁场, 可以到达伊辛普适类的量子临界区, 从而实现伊辛普适类的物理. 而由于 BCVO 和 SCVO 材料均可被海森堡-伊辛链所描述 [33−37], 理论上预期这两种材料在横场调节之下可以实现伊辛普适类. 在第 3 节中, 我们将叙述在 BCVO 和 SCVO 材料中实验实现伊辛普适类的一系列工作. 实验测量所得到的 BCVO 材料中格林艾森比率的量子临界行为完美符合了伊辛普适类中该物理量量子临界行为的理论结果, 从而为 BCVO 在外加强横场之下涌现伊辛普适类提供了坚实的判定依据 [33]. 而利用核磁共振 (NMR) 实验辅以数值算法, 通过对 SCVO 材料及其有效模型进行研究, 我们证实了 SCVO 材料在弱横场下展现了伊辛普适类 [34].

3 BCVO 和 SCVO 材料中的伊辛普适类

利用上述伊辛普适类的相关理论, 笔者吴建达及其合作者对 BCVO 和 SCVO 材料展开测量并证实了这两类准一维材料在外加横场之下能够实现伊辛普适类 [32−37]. BCVO 和 SCVO 是能被海森堡-伊辛链 有

录用稿件，非最终出版稿

效描述的准一维反铁磁材料, 在外加磁场下一般性的有效哈密顿量为 [43]

$$H = J\sum_i [\epsilon(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y) + S_i^z S_{i+1}^z] - \mu_B \sum_i \boldsymbol{S_i}\widetilde{g}\boldsymbol{H_0}. \tag{8}$$

其中 μ_B 是玻尔磁子, $\boldsymbol{H_0}$ 为外加磁场, $\widetilde{g}$ 代表 g 张量,

$$\widetilde{g} = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

考虑加横向磁场 $\boldsymbol{H_0} = H_0\boldsymbol{e_x}$, 由于 g 张量的非对角元, 此时在 Y 轴和 Z 轴会诱导出垂直于该磁场的有效磁场, 因此有 [45]

$$\mu_B \sum_i \boldsymbol{S_i}\widetilde{g}\boldsymbol{H_0} = \mu_B \sum_i [S_i^x g_{xx} + S_i^y g_{xy} + S_i^z g_{xz}]H_0. \tag{10}$$

其中

$$g_{xx} = (g_\xi \cos^2\theta + g_\zeta \sin^2\theta)\cos^2\phi + g_\psi \sin^2\phi, \quad \phi = \phi_1 + \frac{\pi}{2}(i-1) \tag{11}$$

$$g_{xy} = (g_\xi \cos^2\theta - g_\psi + g_\zeta \sin^2\theta)\cos^2\frac{\sin(2\phi_1 + \pi(i-1))}{2}, \tag{12}$$

$$g_{xz} = (g_\zeta - g_\xi)\sin\theta\cos\theta\cos(\phi_1 + \frac{\pi}{2}(i-1)). \tag{13}$$

而 ξ 轴, ϕ 轴和 ζ 轴代表将实验室的 XYZ 坐标轴绕 Y 轴转 θ 角, 绕 Z 轴转 ϕ 角后得到的材料中的局域坐标轴. CoO_6 的晶格结构, 螺旋链结构及坐标轴间的关系如图 4 所示.

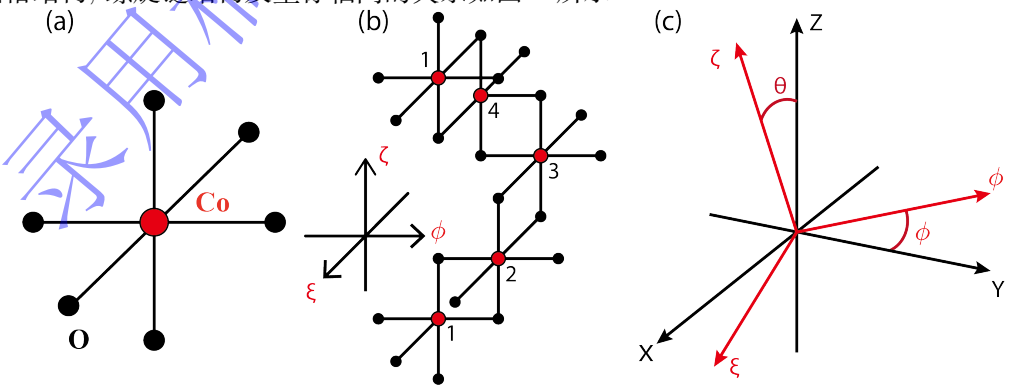


图 4 (a)CoO_6 八面体的结构. (b)CoO_6 四周期螺旋链的单元结构及局域坐标系 $\xi\phi\zeta$. (c) 局域坐标系 $\xi\phi\zeta$ 与实验室坐标系 XYZ 的关系.

Fig. 4. (a)Structure of CoO_6 Octahedron. (b)A unit structure of CoO_6 four-period screw chain and the local coordinate $\xi\phi\zeta$. (c)Relation between the local coordinate $\xi\phi\zeta$ and the lab coordinate XYZ.

对于外加磁场沿 [110] 和 [100] 两种情况, ϕ_1 分别取 0° 和 45°. 以 BCVO 为例, 若对该材料施加沿 [110] 的磁场, 则 $g_{xy} = g_{xz} = 0$, 可以避免诱导出有效交错横场. 在低温下对该材料进行磁热效应测量, 可

录用稿件，非最终出版稿

以得到随温度和横场变化的格林艾森比率数据. 对该数据的标度行为分析完全符合理论上对 TFIC 模型格林艾森比率量子临界行为的预期, 从而确认该材料 QCP 在 $B_{\perp}^{c} = 40$ 特斯拉 (T) 附近, 并在该点附近涌现出伊辛普适类 (图 5)[33].

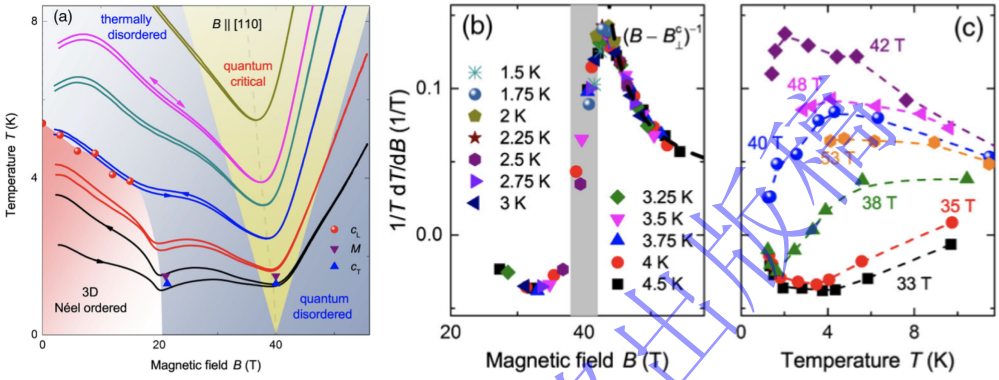


图 5 (a)BCVO 材料在加 [110] 方向磁场后的相图, 利用从不同起始温度出发的绝热磁热测量得出. 红色区域内直到 20T 处标记了一有限温的三维序. 一维 QCP 出现在 $B_{\perp}^{c} = 40$T 附近, 上方黄色区域为量子临界区. (b),(c) 以磁场和温度作为自变量的格林艾森比率实验数据. 在 (b) 中, 大于 QCP 时不同温度的数据展现了 $\Gamma_B \sim (B - B_{\perp}^{c})^{-1}$ 的发散行为. 相对应地, 当场强在临界场强附近时, 低温下格林艾森比率 $\Gamma_B(T)$ 趋于收敛. (图片经文献 [33] 允许转载, 版权归 2018 American Physical Society 所有)

Fig. 5. (a)Phase diagram of BCVO material with a transverse field along [110], obtained from adiabatic magnetocaloric-effect measurements starting from different temperatures. Red area labels a finite-temperature 3D order until 20T. The 1D QCP appears around $B_{\perp}^{c} = 40$T, while the yellow area above labels quantum critical region. (b),(c)Experimental data of Grüneisen ratio in terms of magnetic field and temperature. In (b) data of different temperature above the QCP shows divergent behavior of $\Gamma_B \sim (B - B_{\perp}^{c})^{-1}$. Correspondingly, with the field being around the critical field, Grüneisen ratio converges in low temperature. (Reprinted with permission from Ref. [33]. Copyright 2018 American Physical Society.)

然而, 40T 左右的量子临界磁场过于昂贵, 难以从此出发继续深入研究与伊辛普适类相关的物理. 此后不久, 笔者吴建达及合作者在对 SCVO 和 BCVO 的进一步研究中发现, 沿 [100] (或 [010]) 方向施加一横向磁场所诱导出的沿 [010] (或 [100]) 的有效交错横场能极大降低达到 QCP 所需要的磁场强度 [34–37], 其相关的数值分析已在 2.2 节中提及 (图 2)[35]. 这里我们介绍笔者吴建达及其合作者对施加沿 [100] 方向磁场的 SCVO 材料的伊辛普适类 QCP 的实验进展. 此时, 该材料的有效哈密顿量为 [34]

$$H = J\sum_{i}[\epsilon(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y) + S_i^z S_{i+1}^z] - \mu_B g_x \sum_{i}\{HS_i^x + H_y(-1)^i S_i^y + H_z S_i^z \cos[\pi(2i-1)/4]. \quad (14)$$

其中 $J \approx 7.5$meV, 各向异性因子 $\epsilon = 0.47$. $g_x \approx 2.79$ 为旋磁比率, 诱导出的有效交错横场 $H_y \approx 0.4H$, 四

周期场 $H_z \approx 0.14H$. 利用 NMR 实验可以测量此时的 QCP 及其普适类, 测量结果见图 6[34]. 在 SCVO 中, 沿 [100] 方向调节磁场会涌现出两个 QCPs, 记为 H_{c1} 和 H_{c2}. 其中, $H_{c1} \approx 7.03$T 代表三维序的终点, 而 $H_{c2} \approx 7.7$T 对应伊辛普适类的量子临界点 [34].

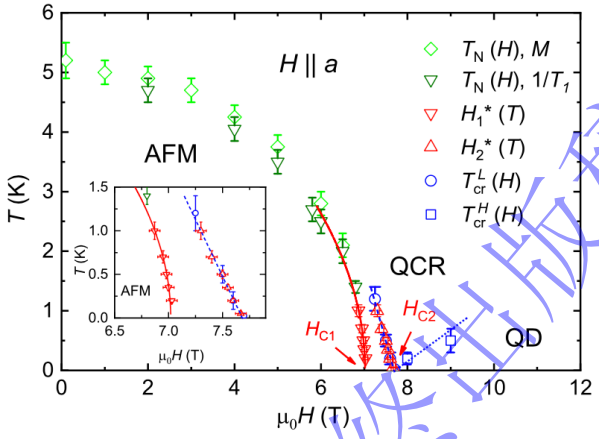


图 6 外加 [100] 方向磁场的 SCVO 材料相图. 图中 AFM, QCR 和 QD 分别代表反铁磁相, 量子临界区和量子无序区. 两个 QCPs 分别为 $H_{c1} \approx 7.03T$ 和 $H_{c2} \approx 7.7T$. 蓝色线可以被曲线 $T_{cr}^{L,H} \sim |H_{c2} - H|$ 所拟合, 揭示了该 QCP 对应伊辛普适类. 内嵌图是两 QCPs 附近拟合曲线的放大. (图片经文献 [34] 允许转载, 版权归 2019 American Physical Society 所有)

Fig. 6. Phase diagram of SCVO with transverse field along [100]. The AFM, QCR and QD in the figure corresponds to anti-ferromagnetic phase, quantum critical region and quantum disordered region, respectively. The two QCPs are $H_{c1} \approx 7.03T$ and $H_{c2} \approx 7.7T$. The blue line can be fitted with $T_{cr}^{L,H} \sim |H_{c2} - H|$, implying the Ising universality of the 1D QCP. Inset is an enlarged figure of the fitting curves near two QCPs. (Reprinted with permission from Ref. [34]. Copyright 2019 American Physical Society.)

这篇工作表明了对于能被海森堡-伊辛链所有效描述的磁性材料而言, 若外加横向磁场时能诱导出新的平面内交错磁场, 这些诱导场能够有效压制达到临界磁场所需要的的场强大小, 从而在一个较小的磁场环境下实现伊辛普适类.

本节总结了在 BCVO 和 SCVO 中实现伊辛普适类的实验工作 [33,34]. 在实现伊辛普适类之后, 笔者及其合作者结合理论工作进展 [30,46], 推动了量子 E_8 可积模型(以下简称 E_8 模型)的物理实现. 下文我们将首先介绍与该模型促成的该奇异模型在 BCVO 材料中的实现.

录用稿件，非最终出版稿

4 量子 E_8 可积模型

1990 年前后, Zamolodchikov 和 Fateev 证明了对应于某一特定中心荷的 CFT, 若它被一相关元场 (relevant primary field) 所微扰, 该 CFT 对应的哈密顿量会成为能够被例外李代数所描述的可积模型 [16,23,24,27−31]. 特别地, 对于中心荷 $c = 1 - 6/p(p+1)$ 的 CFT 哈密顿量 H_p, 其被相关元场 Φ_p 微扰的哈密顿量

$$\hat{H}_p = H_p + \lambda \int \Phi_p(x)dx. \tag{15}$$

当 $p = 6,\ 4,\ 3$ 时, 该微扰哈密顿量可以分别被 $E_6,\ E_7,\ E_8$ 例外李代数所描述, 对应的系统分别包含有六, 七, 八种准粒子激发 [24,51−57]. 在 QCP 处, TFIC 模型是中心荷 $c = 1/2$ 的 CFT[3], 在标度极限下, 自旋密度算符为相关元场 [30,31], 在其微扰下的哈密顿量

$$H = H_{c=1/2} + h \int \sigma(x)dx \tag{16}$$

成为一个激发谱能够被 E_8 例外李代数所描述的量子可积模型 [16,27−38], 其对应的格点模型为被一纵向磁场所微扰的 QCP 处 ($g = g_c = 1$) 的 TFIC 模型 [30,36,37],

$$H = -J \sum_i \left(\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sigma_i^x + h_z \sigma_i^z\right). \tag{17}$$

其中处在 QCP 处的 TFIC 哈密顿量 $-J\sum_i \left(\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sigma_i^x\right)$ 对应中心荷 $c = 1/2$ 的哈密顿量 $H_{c=1/2}$, 纵向场微扰 $-J\sum_i h_z \sigma_i^z$ 对应元场微扰 $h\int \sigma(x)dx$, 而 $h_z J$ 是纵向磁场与自旋间的耦合强度, 对应于标度极限下方程 (16) 中的 h. 对 TFIC 模型而言, 标度极限由如下转换方式给出 [30],

$$a \to 0, \quad J \to \infty, \quad h_z \to 0, \quad aJ \to finite\ \ value. \tag{18}$$

即在标度极限下, 晶格常数 a 与纵场 h_z 趋于 0, 同时保持能隙 $\Delta \approx J h_z^{8/15}$ 和 $2Ja$ 为有限值. 由此, 在标度极限下

$$h \sim J^{15/8} h_z, \quad \sigma(x) \sim J^{1/8} \sigma_j^z, \quad \epsilon(x) \sim J\sigma_j^x. \tag{19}$$

E_8 模型包含有 8 种不同的准粒子激发. 其中最轻的准粒子质量 $m_1 = C h^{8/15}$, $C = 4.4049\cdots$[58]. 而次轻准粒子质量 m_2 与 m_1 满足黄金分割, 即 $m_2 = 2\cos(\pi/5)m_1 \approx 1.618 m_1$. 其他准粒子的质量都可以通过 m_1 及 m_2 精确地得到. E_8 模型相图如图 7 所示. 该相图展示了 E_8 准粒子激发与伊辛普适类的联系: 在 TFIC 模型的伊辛普适类处, QCP 附近的物理可以用中心荷 1/2 的共形场论所描述. 此时纵向磁场的微扰提供了一个微弱的禁闭效应, 引起一系列完美共振的介子 (meson) 态, 从而产生 8 种 E_8 模型的准粒子激发 [65,66]. 因此纵向磁场较小的区间正是可以涌现出量子 E_8 模型的区间, 如图中蓝色区域所示.

录用稿件，非最终出版稿

而这些准粒子间的精确质量关系亦见于图 7.

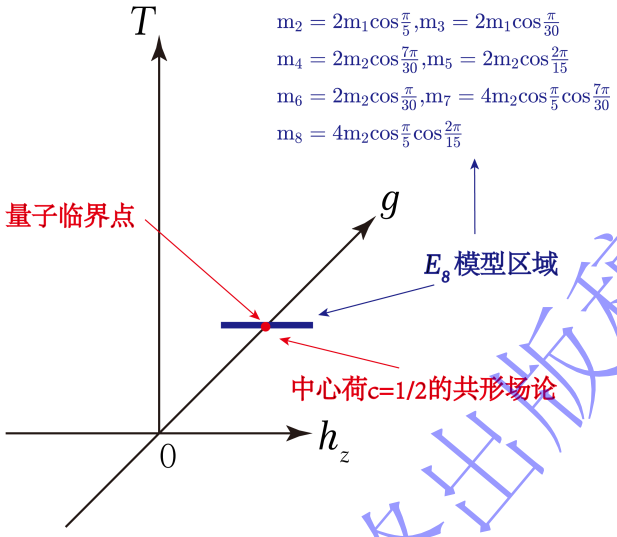


图 7　E_8 模型相图. 图中蓝色实线代表了 E_8 模型涌现的区域, 其中 g 和 h_z 分别对应于横场参数 g 和方程 (17) 中的 h_z. 其余 E_8 准粒子的质量和 m_1 和 m_2 的关系列于右上, 其中 m_1 为最轻准粒子的质量.

Fig. 7. A phase diagram of E_8 model. The blue solid line in the figure implies region of E_8 model emerging, where g and h_z correspond to transverse parameter g and h_z in Eq. (17) respectively. Relations of other E_8 particles' masses to m_1 and m_2 are listed in the top right-hand corner, where m_1 is mass of the lightest particle.

E_8 模型哈密顿量的本征态可以表达为一系列 E_8 准粒子的直积态 $|A(\theta_1)...A(\theta_n)\rangle_{a_1,...,a_n}$. 其中 $|A(\theta_i)\rangle_{a_i}$ 为单粒子态, 满足正交归一化关系 ${}_{a_i}\langle A(\theta_i)|A(\theta_j)\rangle_{a_j} = 2\pi\delta_{a_ia_j}\delta(\theta_i-\theta_j)$. θ_i 和 $a_i(i=1,...,8)$ 分别代表该粒子的快度 (rapidity) 和八个 E_8 粒子之一, 其能量及动量满足 $E_i = m_i\cos\theta_i$, $P_i = m_i\sin\theta_i$, 这里我们设定系统的特征速度 $c=1$ 及普朗克常量 $\hbar = 1$, . E_8 模型的基态是不包含任何准粒子激发的真空态, 记为 $|0\rangle$. 对时空关联函数作傅里叶变换后有动力学结构因子 (dynamic structure factor, DSF) $D^{\Phi\Phi}(\omega,q) = \int dxdte^{i(\omega t-qx)}\langle\Phi(x,t)\Phi(0,0)\rangle$, 其中 Φ 可以取自旋密度算符或能量密度算符, 分别对应于格点模型中 σ^z 和 σ^x. E_8 模型中 σ^y 不存在对应的 CFT 元场, 因此我们无法直接计算 σ^y 的 DSF, 但可以证明 σ^y 的 DSF $D^{yy}(\omega,q)$ 与 $D^{zz}(\omega,q)$ 间满足严格关系 $D^{yy}(\omega,q) = \omega^2 D^{zz}(\omega,q)/(4J^2)$[46]. 于是, 考虑零动量的情形, 通过引入不同数目 E_8 粒子完备基, DSF 的莱曼表示 (Lehmann representation) 为 [30,36,37],

$$D^{ii}(\omega,q=0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\{a_i\}}(\prod_{a_i}\frac{1}{N_{a_i}!})\frac{1}{(2\pi)^{n-2}}\int_{-\infty}^{\infty}d\theta_1...d\theta_n|F_n^{\sigma^i}(\theta_1,...,\theta_n)|^2\delta(\omega-\sum_{i=1}^{n}E_i)\delta(\sum_{i=1}^{n}P_i). \quad (20)$$

其中 $i=x$, z, 而 $D^{yy}(\omega,q=0)$ 由前述关系给出. $F_n^{\sigma^i}(\theta_1,...,\theta_n)$ 为对应于 σ^i 算符的包含 n 粒子的形式因

录用稿件，非最终出版稿

子 (Form Factor, FF)[28],

$$F_n^{\sigma^i}(\theta_1,...,\theta_n) = \langle 0|\sigma^i|A(\theta_1),...,A(\theta_n)\rangle_{a_1,...,a_n}. \tag{21}$$

有关于 FF 的一般性讨论可参考文献 [30,31,59-62]. 而对于 E_8 模型 FF 的求解则可见于文献 [30,47], 这里不再赘述.

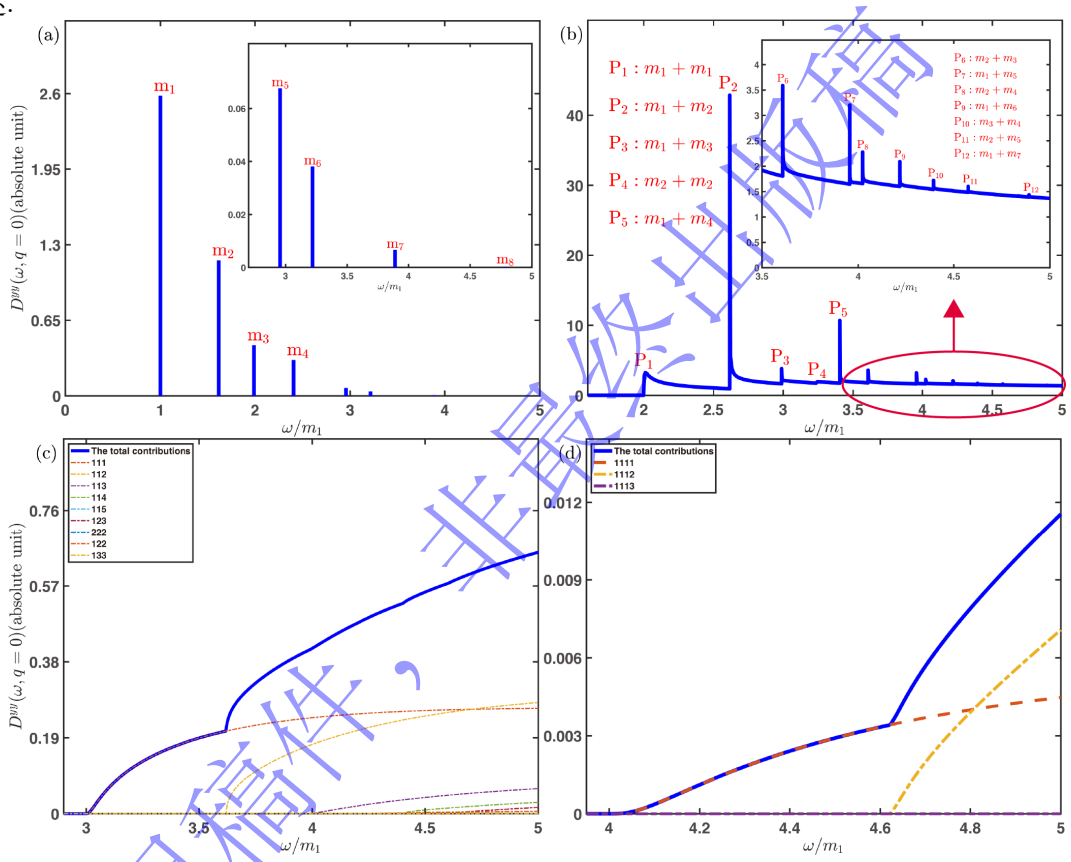


图 8 $D^{yy}(\omega)$ 的解析计算结果. (a) 单粒子通道的谱权重贡献, 八个峰的位置依次对应 E_8 模型八种粒子的质量, 其中 $m_1 = 1$. (b)-(d) 二粒子, 三粒子和四粒子通道的谱权重贡献, 图中分别标出了谱线和峰的具体贡献来源. (图片经文献 [30] 允许转载, 版权归 2021 American Physical Society 所有)

Fig. 8 Analytical result of $D^{yy}(\omega)$. (a) Spectrum contribution from single particle channel, the eight delta peaks one-by-one correspond to the masses of the eight particles in the quantum E_8 model with $m_1 = 1$. (b)-(d) contributions from two, three and four particle channels. The detailed contributions of different peaks and curves are highlighted in the sub-figures. (Reprinted with permission from Ref. [30]. Copyright 2021 American Physical Society.)

在方程 (20) 中, 通过引入不同粒子数态, 依粒子数的不同, 总体的贡献可分解为不同的通道, 即单粒子

录用稿件，非最终出版稿

通道, 两粒子通道, 三粒子通道和四粒子通道 [30]. 由于质量最大的 E_8 粒子的质量约在 $4.8m_1$ 左右, 而计算表明随着能量增加谱权重急剧衰减, 因此我们选取 DSF 直至 $\omega = 5m_1$. 以 $D^{yy}(\omega)$ 为例, 其 DSF 谱如图 8 所示. 这一解析计算的结果展示了丰富的物理: 首先, 对于单粒子通道, 所有的谱均为共振峰, 其位置分别对应了 E_8 模型中八种准粒子的质量. 随着能量的增大共振峰的强度不断衰减. 这是由于在粒子质量增大的同时, 单粒子形式因子的绝对数值也在不断减小, 而单粒子通道的谱权重的峰值正比于 $|F|^2/m$, 因此质量越大的单粒子对应的峰值越小. 其次, 对于两粒子通道, 含不同类型粒子 a 和 b 的通道谱存在谱边发散行为 $1/\sqrt{\omega-\omega_0}$, 位于这两粒子的质量之和边界 $\omega_0 = m_a + m_b$ 处. 这是由两粒子态密度的发散行为所导致的, 即范 · 霍夫奇性 (Van Hove's singularity)[30]. 两相同类型的粒子组合却不存在这种发散行为, 这是由于它们的 FF 特殊结构恰好能够消除由态密度导致的发散. 最后, 三粒子和四粒子通道的谱贡献不存在上述的发散行为, 且二者行为相似, 贡献都比较小. 这是由于随着引入粒子数的增多, FF 的绝对大小在不断衰减, 同时由于相空间的增大, 奇性行为被消去. 从图 8 的解析数据可以预期, 随着能量的不断升高, 高能区的 DSF 谱会不断衰减, 其行为相对来说较为平凡. 将解析计算得出的 DSF 谱线以实验测量的能量分辨率作展宽后 [30], 便可以与实验进行对比以验证具体材料中是否实现 E_8 模型.

5 BCVO 材料中的 E_8 激发

2010 年, 牛津大学的 Coldea 实验组利用非弹性中子散射技术 (Inelastic Neutron Scattering, INS) 对准一维磁性材料 $CoNb_2O_6$ 展开了自旋动力学谱的测量. 其测量结果提供了量子 E_8 模型可在材料中实现的初步实验证据 [63], 这体现在质量最轻的两个粒子质量比满足黄金分割. 然而, 受限于实验分辨率, 其测量结果未能得到较为精确的连续谱, 无法就连续谱区域的相关的 E_8 物理做出有效的比对, 从而未能就该材料是否能完整实现量子 E_8 模型给出确定性的回答. 之后, 2020 年对该材料的太赫兹 (THz) 谱测量 [64] 得到了详细且精确的连续谱, 实验所展示的连续谱区域特征和解析上得到的 E_8 谱存有明显的偏差, 因此该材料是否能实现量子 E_8 模型有待进一步深入仔细的研究 [68,69]. 接下来, 我们聚焦于 BCVO 材料中实现量子 E_8 模型的工作.

前文所述的 E_8 模型对应的格点模型为铁磁相互作用, 而若想在反铁磁相互作用下实现 E_8 模型, 需要将方程 (17) 中的纵场转为交错纵场, 这在凝聚态系统实验中几乎不可能通过外加手段实现, 因此只能另辟蹊径. 考虑沿 [010] 方向的外加磁场, 材料的有效哈密顿量 [34−37]

$$\begin{aligned} H &= J\sum_n [S_n^z S_{n+1}^z + \epsilon(S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y)] - \mu_B g_{yy} H \sum_n [S_n^y + h_x(-1)^n S_n^x \\ &+ h_z \cos(\pi\frac{2n-1}{4}) S_n^z] - \mu_B H' \sum_n (-1)^n S_n^z. \end{aligned} \tag{22}$$

录用稿件，非最终出版稿

其中交错纵场 $\mu_B H' \sum_n (-1)^n S_n^z$ 仅在材料处于三维反铁磁序内, 利用链平均场描述链间相互作用时才会出现.

根据上文提及的 SCVO 材料的相关参数, 其对应于伊辛普适类的最低临界磁场值为 7.7T 位于三维量子相变点 7.0T 以外, 所以此材料缺乏能产生交错纵场的机制或手段 [34−37], 难以实现 E_8 模型. 而对 BCVO 材料来说, 相互作用 $J = 5.8$meV, 利用 iTEBD 数值计算及 NMR 实验, 可以确定其伊辛普适类的临界磁场位于 $\mu_0 H = 4.7$T 处 (图 10), 恰处在 10T 左右的三维序内 (图 9), 因此存在由链间相互作用平均后大小为 $\mu_B H' = 0.018J$ 的有效弱交错纵向磁场, 为实现 E_8 模型提供了可能. 确实, 在该材料三维序内, 进一步的非弹性中子实验将沿 [010] 方向所加横场调到 4.7T 时得到的自旋动力学关联谱与解析计算得出的 E_8 模型单粒子及多粒子激发谱及从 (22) 式出发的 iTEBD 数值计算结果高度吻合, 见于图 11. 这是人们首次在真实材料中实现 E_8 模型, 不仅明确测量到了单 E_8 粒子激发, 同时确认了多 E_8 粒子激发, 是强关联磁性系统研究的一次重大进展。

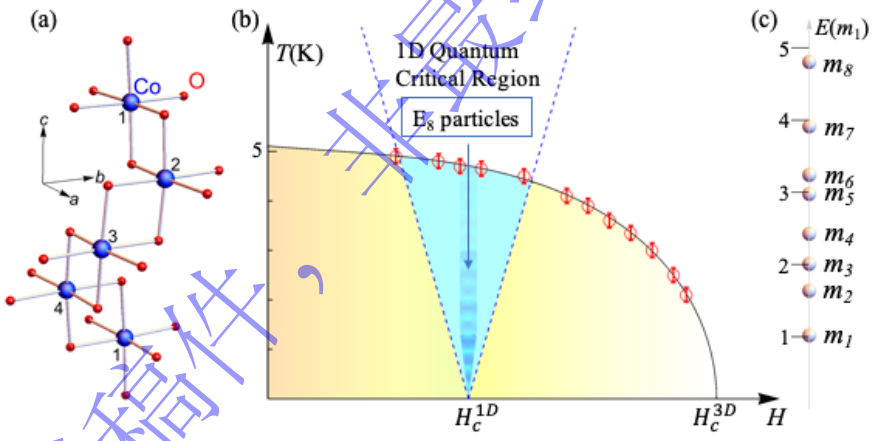


图 9 (a) BCVO 的晶格结构. (b) 加沿 [010] 方向磁场后 BCVO 的相图, QCP 为 H_c^{1D}, 隐藏在三维序中, 其一维量子临界行为可在三维序外测得。棕色圆圈代表由 NMR 实验测出的尼尔 (Néel) 温度 T_N. $H_c^{3D} = 10.4 \pm 0.1$T, $H_c^{1D} = 4.7 \pm 0.3$T. E_8 模型在蓝色缎带区涌现. (c) 八种 E_8 粒子的质量以 m_1 为单位沿能量轴分布. (图片经文献 [37] 允许转载, 版权归 2021 American Physical Society 所有)

Fig. 9. (a) Crystal structure of BCVO. (b) Phase diagram of BCVO with a transverse field along [010] direction. QCP is at H_c^{1D}, hidden in the 3D order. Its quantum criticality can be measured outside the 3D ordering phase. Brown circles represent for Néel temperature T_N measured by NMR experiments. $H_c^{3D} = 10.4 \pm 0.1$T, $H_c^{1D} = 4.7 \pm 0.3$T. E_8 model emerged in the blue ribbon area. (c) Masses of eight E_8 particles along energy axis in unit of m_1. (Reprinted with permission from Ref. [37]. Copyright 2021 American Physical Society.)

录用稿件，非最终出版稿

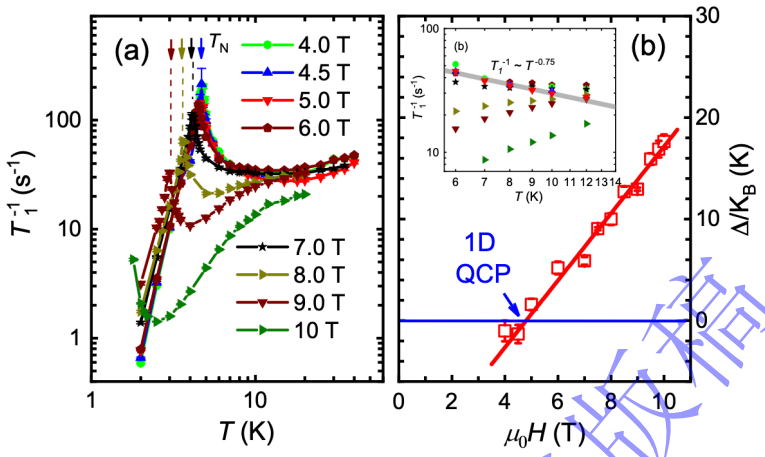


图 10　三维反铁磁序外 NMR 实验测量结果. (a) 在不同横场下测得自旋-晶格弛豫率 $1/T_1$ 关于温度的函数. 下箭头标记出决定 T_N 的 $1/T_1$ 的峰. (b) 拟合 $1/T_1$ 得到能隙, 温度区间从 $6K$ 到 $12K$. 具体细节见 [37]. QCP 位于 4.7 ± 0.3T. 内嵌图是对数坐标下放大的低温区数据. 灰色直线区域内的量子临界行为可以拟合为 $1/T_1 \sim T^{-0.75}$. (图片经文献 [37] 允许转载, 版权归 2021 American Physical Society 所有)

Fig. 10. NMR experiment result outside the 3D anti-ferromagnetic ordering phase. (a) Spin-lattice relaxation rate $1/T_1$ with different transverse fields as a function of temperature. The down arrows label $1/T_1$ peaks that determining T_N. (b) Energy gap by fitting $1/T_1$, with temperature being from $6K$ to $12K$. The details can be found in [37]. QCP is at 4.7 ± 0.3T. Inset: a $\log-\log$ plot of enlarged data in low-temperature region. The quantum critical behavior around the gray line area can be fitted by $1/T_1 \sim T^{-0.75}$. (Reprinted with permission from Ref. [37]. Copyright 2021 American Physical Society.)

6 结　论

本文综述了在 BCVO 和 SCVO 材料中首次发现伊辛普适类并在 BCVO 材料中首次实现 E_8 模型激发的研究进展. 在本文中, 我们叙述了便于判断伊辛普适类的格林艾森比率的奇异量子临界行为. 随后介绍了横场海森堡伊辛链并叙述了数值验证其具有伊辛普适类的理论进展. 通过将数值方法和实验相结合, 确认了 BCVO 和 SCVO 材料在外加横场之下会涌现出伊辛普适类. 在此基础上, 我们介绍了 E_8 模型主要的理论进展及在理论与实验的共同推动下于 BCVO 材料中实现 E_8 模型的一系列工作.

这些研究进展充分展示了普适类的强大力量, 其所蕴含的迷人的物理现象持续吸引着人们对量子临界物理及相关普适类物理的进一步的探索 [2]. 我们期待未来通过更多的凝聚态理论和实验物理学家的合作, 能在实际材料中实现更多非平凡的普适类, 并能通过深入研究这些奇异系统中的非平凡物理激发, 最终实现物理操纵这些奇异的激发并期望能够服务于新颖量子器件的设计与开发.

录用稿件，非最终出版稿

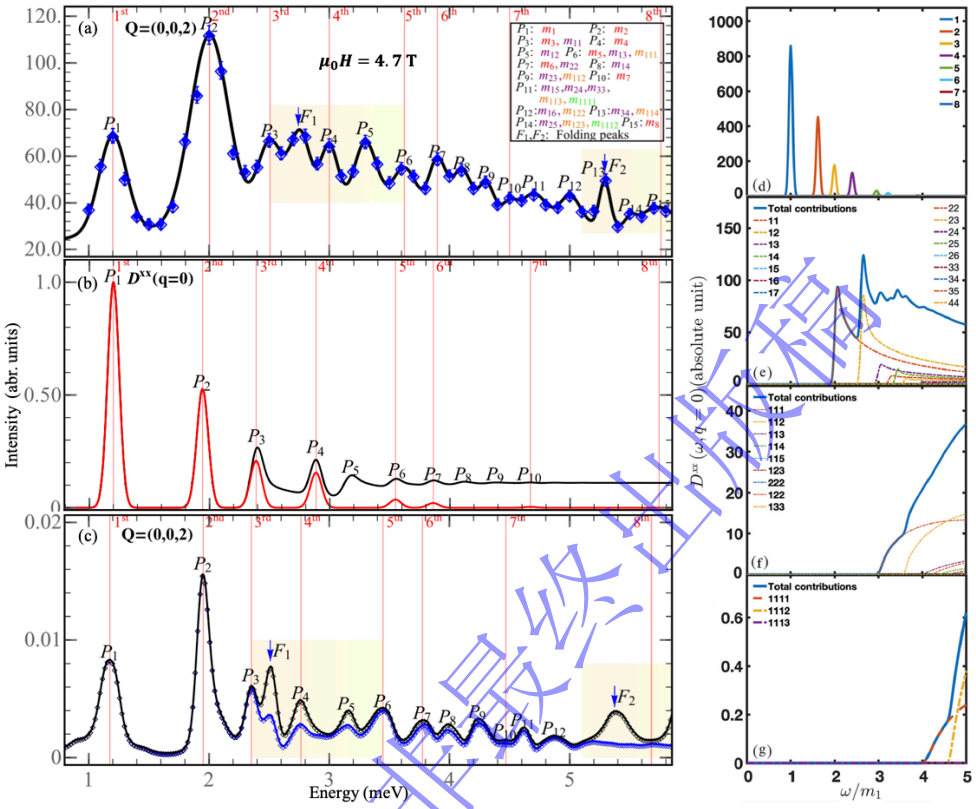


图 11　(a) $Q = (002)$QCP 处 INS 测量数据, 场强 $H = 4.7$T, 温度 0.4K. 蓝色方块及误差棒为实验测量数据, 黑线是高斯函数的拟合. 红色竖线对应于八种 E_8 模型的粒子. 其他的峰来自于多粒子通道的连续谱贡献以及布里渊区折叠效应 (标记于 F_1 和 F_2 处). (b) 解析计算的 $D^{xx}(\omega)$, 数据经过 $0.08m_1$ 洛伦兹展宽. $m_1 = 1.2$meV. 红色线和黑色线分别代表单粒子激发贡献及引入多粒子激发贡献的总和. (c) iTEBD 数值计算有效模型在转移动量 $k = 0$ 处的激发谱, 其中蓝线和黑线代表不包含及包含折叠效应的数据. (d)-(g) 单粒子到四粒子激发通道的贡献, $ijkl$ 代表激发来自于 $m_i m_j m_k m_l$ 通道. (图片经文献 [37] 允许转载, 版权归 2021 American Physical Society 所有)

Fig. 11. (a) INS data obtained from $Q = (002)$ at QCP with $H = 4.7$T, temperature 0.4K. The blue diamonds with error bars are experimental data, the black curve is fitted with Gaussian functions. The red vertical lines correspond to eight particles of E_8 model. Other peaks are contributed from multi-particle channels and zone-folding effect (labelled at F_1 and F_2). (b) Analytical result of $D^{xx}(\omega)$ with a $0.08m_1$ Lorentzian boradening. $m_1 = 1.2$meV. Red curve and black curve are single particle spectrum and total spectrum including multi-particle excitations respectively. (c) Effective model spectrum of iTEBD calculation at $k = 0$, where blue curve and black curve are results of without and with zone-folding effect. (d)-(g) single particle-four particle excited channels' contributions, where $ijkl$ represents for $m_i m_j m_k m_l$ channel. (Reprinted with permission from Ref. [37]. Copyright 2021 American Physical Society.)

录用稿件，非最终出版稿

[1] Sachdev S 2011 *Quantum Phase Transitions* (Cambridge: Cambridge University Press) pp96-115

[2] Oshikawa M 2020 *Journal Club for Condensed Matter Physics* https://doi.org/10.36471/JCCM_September_2020_04.

[3] Belavin A, Polyakov A, Zamolodchikov A 1984 *Nucl. Phys. B* **241** 333

[4] Zamolodchikov A B, Zamolodchikov A B 1979 *Ann. Phys. (NY)* **120** 253

[5] Belavin A A, Belavin V A, Litvinov A V, Pugai Y P, Zamolodchikov A B 2004 *Nucl. Phys. B* **676** 587

[6] Delfino G, Mussardo G 1994 *Phys. Lett. B* **324** 40

[7] Berg B, Karowski M, Weisz P 1979 *Phys. Rev. D* **19** 2477

[8] Löhneysen V H 2010 *J. Low Temp. Phys.* **161** 1

[9] Si Q M, Rabello S, Ingersent K, Smith J L 2001 *Nature (London)* **413** 804

[10] Schuberth E, Tippmann M, Steinke L, Lausberg S, Steppke A, Brando M, Krellner C, Geibel C, Yu R, Si Q M, Steglich F 2016 *Science* **351** 485

[11] Wang Z, Wu J D, Yang W, Bera A K, Kamenskyi D, Islam A T M N, Xu S L, Law J M, Lake B, Wu C J, Loidl A 2018 *Nature (London)* **554** 219

[12] Fan Y C, Yang J H, Yu W Q, Wu J D, Yu R 2020 *Phys. Rev. Research* **2** 013345

[13] Isakov S V, Moessner R 2003 *Phys. Rev. B* **68** 104409

[14] Essler F H L, Konik R M 2005 *in From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics* (Vol. 1) (Singapore: World Scientific) pp684–830

[15] Amico L, Fazio R, Osterloh A, Vedral V 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 517

[16] Mussardo G 2010 *Statistical Field Theory* (New York: Oxford University Press)

录用稿件，非最终出版稿

[17] Ku W, Yildirim Y 2015 *Phys. Rev. B* **92** 180501(R)

[18] Ku W, Yildirim Y 2011 *Phys. Rev. X* **1** 011011

[19] Kitaev A 2006 *Ann. Phys. (Amsterdam)* **321** 2

[20] Banerjee A, Yan J Q, Knolle J, Bridges C, Stone M, Lumsden M, Mandrus D, Tennant D, Moessner R, Nagler S 2017 *Science* **356** 1055

[21] Balents L 2010 *Nature (London)* **464** 199

[22] Pfeuty P 1970 *Ann. Phys. (N.Y.)* **57** 79

[23] Zamolodchikov A B 1989 *Int. J. Mod. Phys. A* **04** 4235

[24] Fateev V A, Zamolodchikov A B 1990 *Int. J. Mod. Phys. A* **05** 06

[25] Yang W L, Yang Z Y, Y T et.al 2019 *Integrable Model Method and Its Applications* (Beijing: Science Press) [杨文力, 杨战营, 杨涛等 2019 可积模型方法及其应用 (北京: 科学出版社)]

[26] Wu T T, McCoy B M, Tracy C A, Barouch E 1976 *Phys. Rev. B* **13** 316

[27] Zamolodchikov A B 1989 *Adv. Stud. Pure Math.* **19** 641

[28] Zamolodchikov A B 1991 *Nucl. Phys. B* **348** 619

[29] Braden H W, Corrigan E, Dorey P E, Sasaki R 1990 *Nucl. Phys. B* **338** 3

[30] Wang X, Zou H Y, Hódsági K, Kormos M, Takács G, Wu J D 2021 *Phys. Rev. B* **103** 235117

[31] Delfino G, Mussardo G 1995 *Nucl. Phys. B* **455** 724

[32] Wu J D, Zhu L J, Si Q M 2018 *Phys. Rev. B* **97** 245127

[33] Wang Z, Lorenz T, Gorbunov D I, Cong P T, Kohama Y, Niesen S, Breunig O, Engelmayer J, Herman A, Wu J D, Kindo K, Wosnitza J, Zherlitsyn S, Loidl A 2018 *Phys. Rev.Lett.* **120** 207205

[34] Cui Y, Zou H, Xi N, He Z Z, Yang Y X, Shu L, Zhang G H, Hu Z, Chen T, Yu R, Wu J D, Yu W Q 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 067203

录用稿件，非最终出版稿

[35] Zou H Y, Yu R, Wu J D2020 *J. Phys.: Condens. Matter.* **32** 045602

[36] Zhang Z, Amelin K, Wang X, Zou H Y, Yang J H, Nagel U, Rõõm T, Dey T, Nugroho A A, Lorenz T, Wu J D, Wang Z 2020 *Phys. Rev. B* **101** 220411(R)

[37] Zou H Y, Cui Y, Wang X, Zhang Z, Yang J H, Xu G, Okutani A, Hagiwara M, Matsuda M, Wang G, Mussardo G, Hódsági K, Kormos M, He Z Z, Kimura S, Yu R, Yu W Q, Ma J, Wu J D 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 077201

[38] Francesco P D, Mathieu P, Sénéchal D 1997 *Conformal Field Theory* (New York: Springer) pp200-235

[39] Wu T T, McCoy B 2013 *The Two-Dimensional Ising Model* (Cambridge: Harvard University Press)

[40] Wu J D, Zhu L J, Si Q M 2011 *J. Phys.: Conf. Ser.* **273** 012019

[41] Rost A, Perry R, Mercure J F, Mackenzie A, Grigera S 2009 *Science* **325** 1360

[42] Grube K, Zaum S, Stockert O, Si Q M, Löhneysen H V 2017 *Nature Phys.* **13** 742

[43] Shiba H, Ueda Y, Okunishi K, Kimura S, Kindo K 2003 *J. Phys. Soc. Jpn.* **72** 2326

[44] Dmitriev V D, Krivnov V V, Ovchinnikov A A, Langari A 2002 *J. Exp. Theor. Phys.* **95** 538

[45] Kimura S, Okunishi K, Hagiwara M, Kindo K, He Z Z, Taniyama T, Itoh M, Koyama K, and Watanabe K 2013 *J. Phys. Soc. Jpn. Lett.* **82** 033706

[46] Wu J D, Kormos M, Si Q M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 247201

[47] Hódsági K, Kormos M, Takács G 2019 *J. High Energy Phys.* **08** 047

[48] Delfino G, Simonetti P, Cardy J 1996 *Phys. Lett. B* **387** 327

[49] Delfino G, Simonetti P 1996 *Phys. Lett. B* **383** 450

[50] Delfino G, Mussardo G, Simonetti P 1996 *Phys. Lett. B* **473** 469

[51] O'Brien E, Fendley P 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 206403

[52] O'Brien E, Fendley P 2020 *SciPost Phys.* **9** 88

录用稿件，非最终出版稿

[53] Zou Y J, Vidal G 2020 *Phys. Rev. B* **101** 045132

[54] Gehlen G 1990 *Nucl. Phys. B* **330** 741

[55] Deserno M 1997 *Phys. Rev. E* **56** 5204

[56] Xiang C H, Chen A M, Su H Y, Wang H L 2020 *Physica A* **553** 124274

[57] Balbao D B, Felicio J R D D 1987 *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** L207

[58] Fateev V 1994 *Phys. Lett. B* **324** 45

[59] Pozsgay B, Takács G 2008 *Nucl. Phys. B* **788** 167

[60] Pozsgay B, Takács G 2008 *Nucl. Phys. B* **788** 209

[61] Kormos M, Takács G 2010 *J. High Energy Phys.* **2010** 112

[62] Kormos M, Takács G 2008 *Nucl. Phys. B* **803** 277

[63] Coldea R, Tennant D A, Wheeler E M, Wawrzynska E, Prabhakaran D, Telling M, Habicht K, Smeibidl P, Kiefer K 2010 *Science* **327** 177

[64] Amelin K, Engelmayer J, Viirok J, Nagel U, Rõõm T, Lorenz T, Wang Z 2020 *Phys. Rev. B* **102** 104431

[65] Fonseca P, Zamolodchikov A 2006 *arxiv:* **hep-th/0612304**

[66] McCoy B M, Wu T T 1978 *Phys. Rev. D* **18** 1259

[67] 涌现对称性指量子系统在低能物理中的对称性大于完整的哈密顿量的对称性. 涌现可积性指不可积系统在某些特定的参数区间成为可积系统, 产生了可积性; 或可积系统在恰当扰动下又呈现出新的可积性.

[68] Morris M C, Desai N, Viirok J, Hüvonen D, Nagel U, Rõõm T, Krizan W J, Cava J R, McQueen T M, Koohpayeh S M, Kaul K R, Armitage N P *Nat. Phys.* **17** 832

[69] Favaa M, Coldea R, Parameswaran S *PNAS* **117** 41

录用稿件，非最终出版稿

From Transverse Field Ising Chain to Quantum E_8 Integrable Model *

Xiao Wang[1)] Jiahao Yang[1)] Jianda Wu[1)2)†]

1) (*Tsung-Dao Lee Institute, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*)

2) (*School of Physics and Astronomy, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*)

录用稿件，非最终出版稿

Abstract

This review reports a series of theoretical and experimental progress on researches of transverse field Ising chain and quantum E_8 integrable model. For transverse field Ising chain, on one hand, a unique exotic quantum critical behavior of Grüneisen ratio (a ratio from magnetic or thermal expansion coefficient to specific heat) is theoretically established; on the other hand microscopic models can accommodate transverse field Ising chain universality class are substantially expand. These progresses successfully promote a series of experiments collaborations to first-time realize transverse-field Ising chain universality class in quasi one-dimensional anti-ferromagnetic material $BaCo_2V_2O_8$ and $SrCo_2V_2O_8$. For the quantum E_8 integrable model, the low temperature local dynamics and dynamic structure factor with zero transfer momentum of this system are analytically determined, where a cascade of edge singularities with power-law divergences are obtained in the continuum region of the dynamic structure factor. After combining with detailed quantum critical scaling behaviors analysis and large scale iTEBD calculation, it successfully facilitates a series of experiments, including THz spectrum measurements, inelastic neutron scattering and NMR experiments, to realize quantum E_8 integrable model in $BaCo_2V_2O_8$ for the first time. The experimental realization of quantum E_8 integrable model substantially extends the frontiers of studying quantum integrable models in real materials. The series of progresses and developments on transverse field Ising chain and quantum E_8 integrable model not only inspire studies in condensed matter systems, cold atom systems, statistical field theory and conformal field theory, but also lay down a concrete ground to go beyond

* Project supported by Natural Science Foundation of Shanghai (Grant No. 20ZR1428400), Shanghai Pujiang Program (Grant No. 20PJ1408100), and an additional Shanghai talen program.

integrability.

Keywords: integrable systems, quantum magnetism, universality class, spin dynamics

PACS: 05.30.Rt, 31.15.aq, 67.30.hj, 74.40.Kb

录用稿件，非最终出版稿