

分形格点中易辛模型的临界行为^{*}

杜啸颖 俞振华[†]

(中山大学物理与天文学院, 广东省量子精密测量与传感重点实验室, 珠海 519082)

分形格点是一类特殊的格点, 它具有非整数的维度, 且打破了平移不变性. 本文对分形格点中易辛模型的临界行为进行了研究. 在这个系统中存在从有序到无序的连续相变. 我们利用张量网络重正化群算法计算了不同位置格点上的物理量, 并据此在不同空间位置拟合出了相应的临界指数. 由于平移对称性的缺失, 我们发现临界指数的拟合结果对空间位置有依赖关系. 我们在分形格点中的不同位置检验了临界指数间的标度关系(hyperscaling relations), 最终发现在某些格点上所有的标度关系全部成立, 而在另外一些格点上则只有部分的标度关系成立.

关键词: 分形格点, 易辛模型, 张量网络, 临界现象

PACS: 05.70.Jk, 05.20.-y, 64.60.ae

1 引言

临界现象是凝聚态物理和统计物理学中的重要研究课题. 在临界点处, 热力学量会出现奇性, 关联长度会发散; 这些特性都可以在理论模型中运用重正化群的方法计算得到^[1-4]. 二维方格子中的易辛模型代表了临界现象中的一个普适类. 它是一个严格可解的模型, 1945年Onsager给出二维正方格子中易辛模型在没有外场情况下的配分函数, 严格证明了在二维易辛模型中存在连续相变^[5]. 此后, 杨振宁严格计算了二维方格子中的自发磁矩^[6]. 而一维的易辛模型则不存在铁磁到非铁磁的相变: 利用decimation重正化群算法, 可

^{*} 广东省重点领域研发计划 (批准号: 2019B030330001) 和国家自然科学基金 (批准号: 11474179, 11722438, 91736103, 12074440)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: yuzhh5@mail.sysu.edu.cn

第一作者. E-mail: duxy36@mail2.sysu.edu.cn

以严格计算出系统的重正化流; 用转移矩阵的方法可以计算出一维易辛模型的配分函数^[4]. 进一步, 通过对 ϕ^4 理论的重正化群计算, Wilson等证明了在大于-一维的格点中的易辛模型存在铁磁到非铁磁的相变^[7].

相比于常规的布拉伐格点, 对分形格点中的易辛模型的研究较少. 与常规布拉伐格点所不同的是, 分形格点不具有平移不变性, 在空间上是非均匀的, 因此对分形格点的研究可以加深我们对非均匀性影响的认识. 另外, 分形格点的系统通常具有非整数的维度, 对它的研究可以帮助我们理解非整数维度下的物理特性. Gefen等最早用重正化群的方法对分形格点进行研究^[8-12]. 对于分形格点中的易辛模型, 根据有无相变发生, 可以将其分为两类: 第一类是不存在从有序到无序的相变的分形格点. 对于这类格点, 它们有一个共同的特征, 即在这些格点中给定一个任意大的区域, 这个区域内的自旋与区域外的自旋相连的键的数目是有限的, 总是可以像一维的易辛模型一样, 精确地求解出它们的重正化流, 从而证明其不存在有限温度的不动点^[8]. Sierpinski gasket格点上的易辛模型就是其中的一个例子, 它的Hausdorff维度是大于1的, 但已经被证明不存在铁磁到顺磁的相变^{[8][13]}. 虽然在这个格点系统中不存在相变过程, 却存在非平庸的行为: 在系统尺寸有限的情况下, 或者外加非常小的磁场时, 会出现相变过程^[14].

另一类格点则是存在从有序到无序相变的分形格点. Sierpinski carpet格点中的易辛模型就是其中的一个例子. 在这个格点中, 已经被证明存铁磁到顺磁的相变^{[8][15]}; Gefen等利用重正化群对该格点中的易辛模型进行了分析, 发现 $T = 0$ 和 $T = \infty$ 都对应着重正化流中稳定的不动点, 说明在这个系统中至少存在一个有限温度的不稳定的不动点 $T_c > 0$ ^[8]. 而且, 这个模型中的临界指数已经通过蒙特卡洛(Monte-Carlo algorithm)和有限尺度标度(finite size scaling)相结合的方法尝试计算得到^[16]. 然而, 在进行有限尺度标度计算时, 系统的格点数指数增加, 此方法限于一定的尺度. 张量网络重正化群算法的发展改进了这一问题, 给我们提供了一种高精度的方法来计算经典统计模型中的物理量^[17-29]. 利用这个方法, 我们可以计算非常大尺寸的系统, 极大抑制尺寸效应所带来的影响, 计算精度远高于蒙特-卡洛和有限尺度标度相结合的方法. 由于分形格点具有重新标度的不变性(rescaling invariance), 非常便于重正化群的计算. 基于高阶奇异值分解的张量重正化群算法(higher order tensor renormalization group 以下简称HOTRG)已被应用于计算分形格点中的临界指数, 得到了十分准确的结果^[30]. 此后, HOTRG方法还被应用于计算分形格点中的 $J_1 - J_2$ 模型^[31]以及横场量子易辛模型^[32]. 人们在分形格点中还发现了拓扑相和高阶拓扑相的存在^[33-35].

本工作中, 我们利用HOTRG重正化群算法计算得到了不同位置格点上的物理量, 并据此在不同空间位置拟合出了相应的临界指数 α , η , ν , 和 γ . 由于平移对称性的缺失, 我们发现临界指数的拟合结果对空间位置有依赖关系. 我们在分形格点中的不同位置检验了临界指数间的标度关系, 最终发现在某些格点上所

有的标度关系全部成立,而在另外一些格点上则只有部分的标度关系成立. 本文的内容安排如下: 在第二部分,我们介绍了使用HOTRG来对分形格点进行研究的方法,详细介绍了如何将各个物理量表示成张量网络的形式,以及如何利用HOTRG求得最终的结果. 在第三部分,我们给出了利用HOTRG方法计算得到的分形格点中各个物理量的期望值,并对相应的临界指数进行了拟合. 在最后一部分,我们进行了总结和展望. 讨论了平移对称性的缺失和分数维度对临界行为带来的影响.

2 数值方法

2.1 理论模型

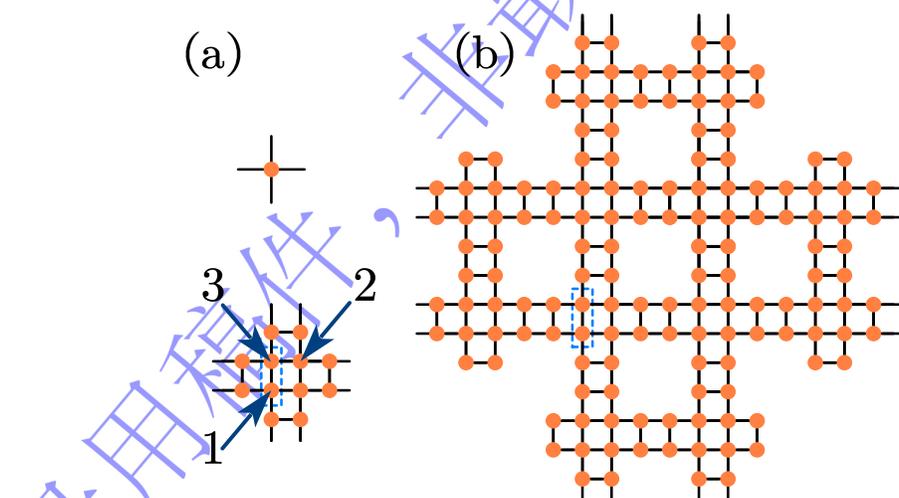


图1 分形格点 (a) 单个自旋. (b) 12个自旋连接在一起组成团簇. (c) 图(1b)的团簇替换图(1b)中的格点得到的新的团簇. 其中橙色的点表示自旋,他们之间的连线表示自旋之间的易辛相互作用.

Fig. 1. Fractal lattice: (a) A single spin. (b) The 12 spins are joined together to form a cluster. (c) Each site in the cluster shown in Figure (1b) is replaced with the entire cluster in Figure (1b), yielding the new cluster. The orange dots indicate spins and the lines between them indicate the Ising interaction between them.

本文研究的易辛模型在图1所示的分形格点上. 图1中每一个圆点表示一个自旋,不同圆圈之间的连线表示自旋之间的易辛相互作用:

2

$$H(\sigma, \sigma') = -J\sigma\sigma'. \quad (1)$$

其中自旋 σ 的取值为 $+1$ 或 -1 . J 表示相互作用强度大小,其值大于0表示铁磁相互作用,小于0则表示反铁

磁相互作用. 本文研究铁磁相互作用, 故 $J > 0$. 如图1所示, 本文研究的格点具有循环的结构. 图1b所示的团簇由12个格点组成, 如果将图1b所示的整个团簇替换图1b中的每一个格点便得到图1c所示的团簇, 我们同样可以用图1c中的团簇替换图1b中的每一个格点得到一个更大的团簇. 该过程可以一直进行下去, 每次用新得到的团簇替换图1b中的每一个格点得到一个更大的团簇, 最终生成我们所要研究的分形格点. 从图1b可以看到, 每次替换, 系统的尺寸放大了4倍, 而格点数增加了12倍; 因此, 按照Hausdorff维度的定义, 该格点具有分数的维度 $d_H = \ln(12) / \ln(4) \approx 1.792$.

对于某一个键上的相互作用来说, 局部的玻尔兹曼权重为:

$$\exp\left[-\frac{H(\sigma, \sigma')}{k_B T}\right] = \exp\left[\frac{J}{k_B T} \sigma \sigma'\right] = e^{K \sigma \sigma'}. \quad (2)$$

为了计算方便, 我们取 J 和 k_b 为1, 相应的 $K = 1/T$. 通过引入一个位于自旋 σ 和 σ' 之间辅助的自旋 s , 可以将玻尔兹曼权重改写为

$$e^{K \sigma \sigma'} = \frac{1}{2 (\cosh 2\bar{K})^{1/2}} \sum_{s=\pm 1} e^{\bar{K} s (\sigma + \sigma')}. \quad (3)$$

当 $\sigma = \sigma'$ 时, 上式右边的取值为 $(\cosh 2\bar{K})^{1/2}$; 当 $\sigma \neq \sigma'$ 时, 上式右边的取值为 $(\cosh 2\bar{K})^{-1/2}$. 因此, 为了使得(3)式等号成立, 我们取

$$e^{\bar{K}} = \sqrt{e^{2\bar{K}} + \sqrt{e^{4\bar{K}} - 1}}. \quad (4)$$

通过引入矩阵:

$$W_{\sigma s} = e^{\bar{K} \sigma s} \left[2 (\cosh 2\bar{K})^{1/2}\right]^{-1/2} \quad (5)$$

就可以将玻尔兹曼权重表示成

$$e^{K \sigma \sigma'} = \sum_s W_{\sigma s} W_{\sigma' s}. \quad (6)$$

其中, 矩阵 W 形式为

$$W = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{\cosh(\bar{K})}} & \sqrt{\sinh(\bar{K})} \\ \sqrt{\cosh(\bar{K})} & -\sqrt{\sinh(\bar{K})} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

利用将玻尔兹曼权重用矩阵 W 来表示, 可以将易辛模型的配分函数映射到一个和本文研究的格点具有相同几何结构的张量网络上. 其中, 每一个自旋对应一个张量, 且张量阶数等于该自旋最近邻个数. 对于具

有4个最近邻的格点, 可以由 W 得到单个自旋所对应的张量 T :

$$T_{xx'yy'} = \sum_{\sigma} W_{\sigma x} W_{\sigma x'} W_{\sigma y} W_{\sigma y'}. \quad (8)$$

对于包含3个最近邻的格点, 如果在 x 方向有两个最近邻, 而 y 方向只存在一个最近邻, 其对应的张量为

$$X_{xx'y} = \sum_{\sigma} W_{\sigma x} W_{\sigma x'} W_{\sigma y}, \quad (9)$$

如果在 y 方向有两个最近邻, 而 x 方向只有一个最近邻, 则其对应的张量为

$$Y_{xyy'} = \sum_{\sigma} W_{\sigma x} W_{\sigma y} W_{\sigma y'}. \quad (10)$$

类似的, 对于包含2个最近邻的格点, 其 x, y 方向各只有一个最近邻, 所对应的张量为:

$$C_{xy} = \sum_{\sigma} W_{\sigma x} W_{\sigma y}. \quad (11)$$

可以验证对张量网络的所有下标收缩求和后即得到配分函数:

$$Z = \text{Tr} \prod_i T_{x_i x'_i y_i y'_i}. \quad (12)$$

其中 Tr 表示对张量之间所有相连的指标求和缩并.

2.2 重正化群方法

在将配分函数表示为张量网络(12)式的形式后, 我们通过粗粒化进行HOTRG重正化群计算. 粗粒化过程类似生成分形格点的逆过程, 即在每次粗粒化的过程中, 将每个团簇中十二个张量的下标求和缩并, 从而得到粗粒化后新的张量. 在用HOTRG进行张量网络收缩的时候, 首先需要利用高阶奇异值分解求得幺正的张量 U_x, U_y ^[19] (参见图3). U_x, U_y 的计算过程如下, 我们首先对两个 $T^{(n)}$ 张量的上下指标求和:

$$M^{(n)}_{xx'yy'} = \sum_i T^{(n)}_{x_1, x'_1, y, i} T^{(n)}_{x_2, x'_2, i, y'}, \quad (13)$$

这里的 $T^{(n)}$ 表示 n 次粗粒化之后得到的张量, 当 $n = 0$ 时, $T^{(0)}$ 为(8)式中所定义的 T . 其中 $M^{(n)}$ 的指标 $x = x_1 \otimes x_2$, $x' = x'_1 \otimes x'_2$, 在这里我们把指标 x_1, x_2 合作了一个指标 x , 因此指标 x 的维度为 x_1, x_2 维度的乘积, x' 与之类似. 上述过程可以用图2a来表示. 接下来, 我们把张量 $M^{(n)}$ 当作一个矩阵来处理, 把 $M^{(n)}$ 的 x 指标看成一个独立的指标, 把剩下的三个指标合作另2个指标, 从而得到

$$M^{(n)L} \equiv M^{(n)}_{x, x'yy'}. \quad (14)$$

我们进一步通过对厄密矩阵 $M^{(n)L} (M^{(n)L})^\dagger$ 做奇异值分解

$$M^{(n)L} (M^{(n)L})^\dagger = U^L \Gamma^L (U^L)^\dagger, \quad (15)$$

得到么正矩阵 U^L 及对角矩阵 Γ^L ; Γ^L 的对角项为厄密矩阵 $M^{(n)L} (M^{(n)L})^\dagger$ 的本征值. 该过程的示意图如2b所示. 同样的, 可以把 $M^{(n)}$ 的 x' 指标当成独立的指标, 把其它的指标合作另一个指标

$$M^{(n)R} \equiv M_{x',xyy'}^{(n)}. \quad (16)$$

用相同的方法求得么正矩阵 U^R 和 Γ^R . 这样, 么正矩阵 U^R, U^L 的每一列分别为 $M^{(n)L} (M^{(n)L})^\dagger, M^{(n)R} (M^{(n)R})^\dagger$ 的本征态. 如果 U^R, U^L 的维度小于我们预设的截断长度 D , 我们取 U^{ix} 为 U^R, U^L 中任意一个即可. 如果 U^R, U^L 的维度大于截断长度 D , 我们需进行截断, 只保留其中本征值最大的 D 列. 截断后的 U^R 和 U^L 一般情况下并不相等, 我们取 U^{ix} 为 U^R, U^L 中带来较小截断误差的那个矩阵. 截断误差的计算如下:

$$\epsilon^{R(L)} = \sum_{i>D} \Gamma_{ii}^{R(L)}. \quad (17)$$

其中 $\sum_{i>D}$ 表示除去 D 个最大本征值后, 对剩下的本征值求和. 如果 $\epsilon^R < \epsilon^L$, 取 U_x^i 为 U^R ; 反之, 则取 U_x^i 为 U^L .

在前面的计算中我们将两个指标合为了一个指标: $x = x_1 \otimes x_2, x' = x'_1 \otimes x'_2$; 接下来, 我们需要复原原来的指标表示, 即将 U^{ix} 写成三阶张量 $U_{x_1, x_2, i}^x$, 在这里我们把 U^{ix} 的行指标拆成了两个指标; 该过程如图2c所示.

在求得 U_x 后, 可以通过图2d所示的张量网络的收缩过程得到 $T_1^{(n)}$. 然后我们将两个 $T_1^{(n)}$ 的左右指标求和得到 $M_1^{(n)}$, 该过程如图2e所示, 这里有 $y = y_1 \otimes y_2, y' = y'_1 \otimes y'_2$, 我们把指标 y_1, y_2 合作了一个指标 y , 指标 y 的维度为 y_1, y_2 维度的乘积, y' 与之类似. 接下来, 同样可以把 $M_1^{(n)}$ 当作矩阵处理, 分别把它的 y 或 y' 指标看成独立的指标, 把剩下的三个指标合到另一个指标; 这样, 重复前文计算 U_x 的过程, 可以计算得到 U_y .

在求得 U_x 和 U_y 之后, 我们进行如图3所示的张量网络的收缩过程, 从 $T^{(n)}, X^{(n)}, Y^{(n)}, C^{(n)}, U_x, U_y$ 出发, 收缩得到 $T^{(n+1)}, X^{(n+1)}, Y^{(n+1)}, C^{(n+1)}$. 这里 $T^{(n)}, X^{(n)}, Y^{(n)}, C^{(n)}$ 表示的是经过 n 次粗粒化过程后得到的张量, 当 $n = 0$ 时, 其分别对应的是(8-11)式定义的 T, X, Y, C . 由于分形格点的特性, 粗粒化前后的格点具有相同的结构, 因此可以一直重复这个粗粒化的过程. 最终在粗粒化足够多次之后, 我们选取周期性边界条件计算配分函数:

$$Z_n(T) = \sum_{x,y} T_{x,x,y,y}^{(n)}. \quad (18)$$

如图4a所示, 在经过几次粗粒化的过程之后, 计算得到的平均自由能

$$f(T) = -\frac{T}{N} \ln(Z(T)) \quad (19)$$

就已经收敛. 这里的 N 表示总自旋数. 如果需要 n 次粗粒化过程, 我们计算的就是具有 12^n 个自旋的分形格

点. 当 n 足够大时, 可以认为系统达到了热力学极限, 尺寸效应带来的影响忽略不计.

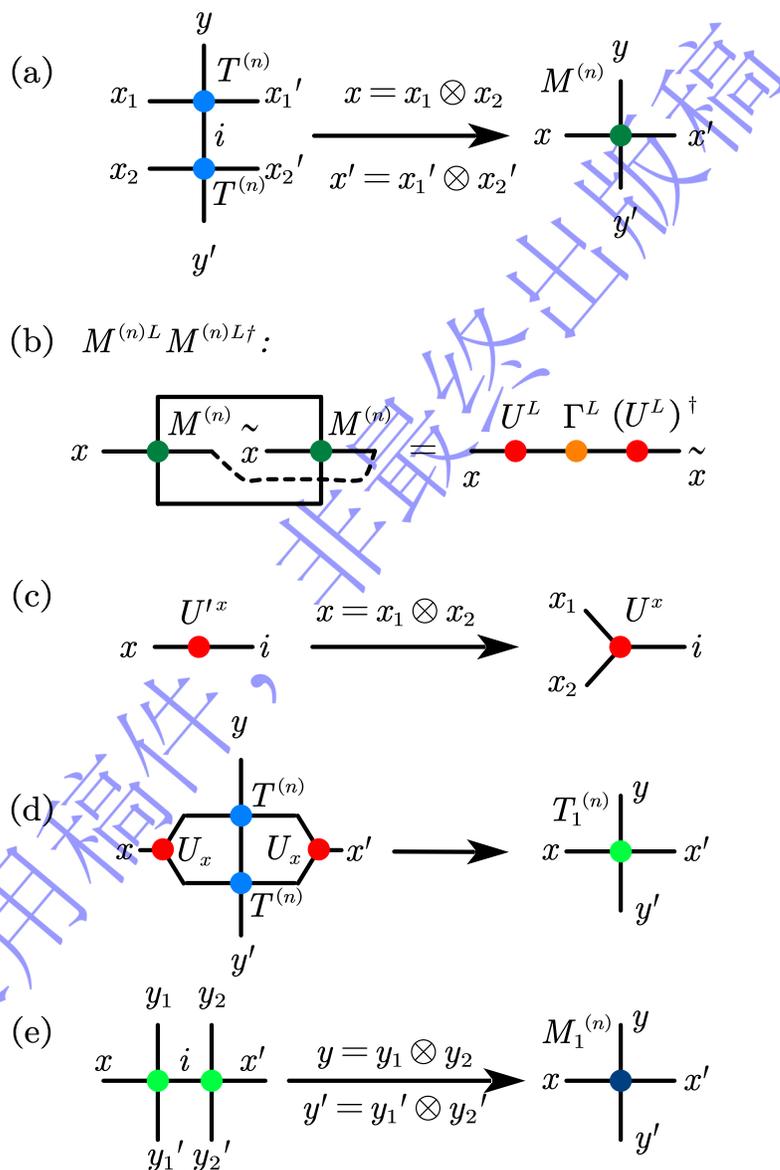


图2 HOTRG张量重正化群计算过程的图形表示 (a)将两个 $T^{(n)}$ 张量的上下指标求和得到张量 $M^{(n)}$, 在这里有 $x = x_1 \otimes x_2$, $x' = x'_1 \otimes x'_2$, x_1, x_2 合为了指标 x , x'_1, x'_2 合为了指标 x' ; (b)对 $M^{(n)L} (M^{(n)L})^\dagger$ 奇异值分解得到 U^L, Γ^L ; (c)将 U^L 的 x 指标拆分成 x_1, x_2 指标得到 U'^L ; (d)将两个 $T^{(n)}$ 张量, 两个 U^x 张量求和缩并得到张量 $T_1^{(n)}$; (e)将两个 $T_1^{(n)}$ 张量左右相连得到 $M_1^{(n)}$, 在这里有 $y = y_1 \otimes y_2$, $y' = y'_1 \otimes y'_2$, y_1, y_2 合为了指标 y , y'_1, y'_2 合为了指标 y' .

Fig. 6. Graphical representations of HOTRG renormalization steps. (a)Determination of tensor $M^{(n)}$ by contracting two $T^{(n)}$ tensors. Here, indexes x_1, x_2 are combined into index x and x'_1, x'_2 are combined into x' ($x = x_1 \otimes x_2, x' = x'_1 \otimes x'_2, x_1, x_2$). (b)Performing a singular value decomposition of matrix $M^{(n)L} (M^{(n)L})^\dagger$ to obtain matrices U^L and Γ^L . (c)Dividing the index x of U'^x into x_1 and x_2 to obtain tensor U^x . (d)Determination of tensor $T_1^{(n)}$ by contracting two $T^{(n)}$ and two U^x tensors. (e)Determination of tensor $M^{(n)}$ by contracting two $T^{(n)}$ tensors. Here, indexes x_1, x_2 are combined into index x and x'_1, x'_2 are combined into x' ($x = x_1 \otimes x_2, x' = x'_1 \otimes x'_2, x_1, x_2$).

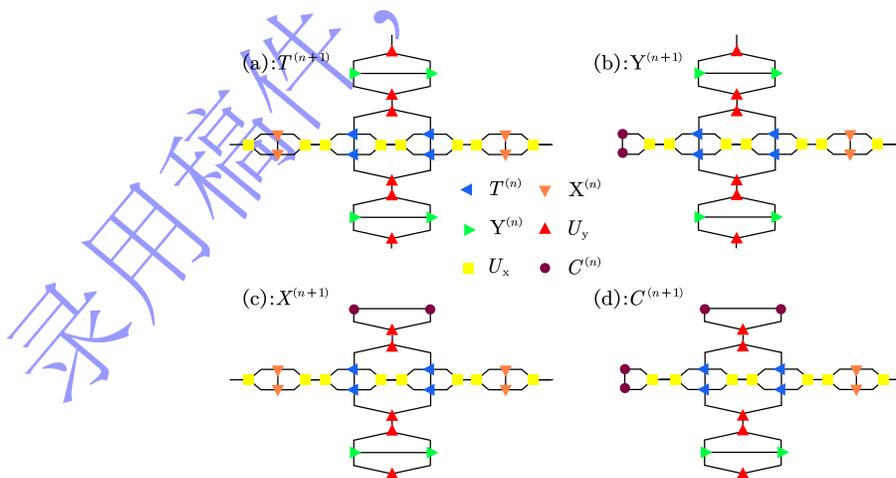


图3 粗粒化过程的图形表示 从张量 $U_x, U_y, T^{(n)}, X^{(n)}, Y^{(n)}, C^{(n)}$ 出发, 对张量网络求和缩并得到(a) $T^{(n+1)}$;(b) $Y^{(n+1)}$;(c) $X^{(n+1)}$;(d) $C^{(n+1)}$.

Fig. 1. Graphical representations of the coarse graining processes. Obtaining the tensors (a) $T^{(n+1)}$, (b) $Y^{(n+1)}$, (c) $X^{(n+1)}$ and (d) $C^{(n+1)}$ by contracting the tensor networks consisting of $U_x, U_y, T^{(n)}, X^{(n)}, Y^{(n)}$ and $C^{(n)}$.

使用上述HOTRG进行粗粒化的过程会带来一定的误差, 通过增加HOTRG过程中的截断长度, 可以将误差控制在一个较小的范围. 如图4b所示, 在临界点处, 随着截断长度的增加, 计算得到的自由能收敛; 取截断长度 $D = 16$ 相比与 $D = 24$ 所得到的自由能的相对误差小于 10^{-11} . 事实上, 由于本文研究的格点所具有的特性, 即使在临界点, 每次奇异值分解得到的奇异值谱仍是指数衰减的^[26]. 因此只需要选取适中的截断

长度就能得到较为精确的结果.

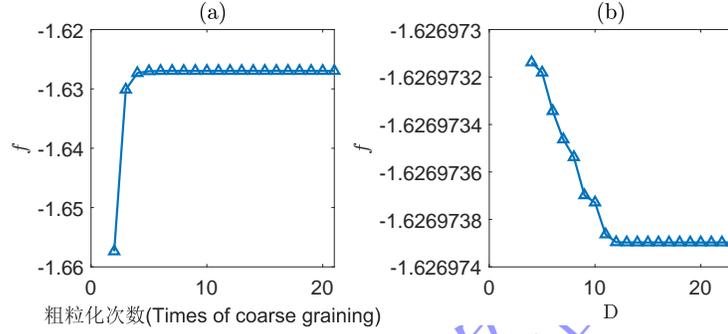


图4 在临界温度处, 系统平均自由能随(a)粗粒化次数(截断长度 $D=24$)以及(b)随截断长度 D (粗粒化次数为20)的变化关系图.

Fig. 4. Average free energy calculated by HO TRG method at the critical point (a) as a function of coarse graining times (truncation lengths are chosen as $D = 24$) and (b) as a function of truncation lengths D (coarse graining times are chosen as 20).

2.3 物理量的计算

物理量 O 的期望值定义为

$$\langle O \rangle = \text{Tr} O \exp \left(-\beta \sum_{m,n} H(\sigma_m, \sigma_n) \right) / Z. \quad (20)$$

上式中分母即为配分函数, 对于单点函数 $\langle \sigma_i \rangle$, 其分子部分的计算与配分函数的计算方法类似; 唯一的不同之处在于, 需要把格点 i 处张量替换为杂质点张量

$$\tilde{T}_{ss's''s'''} = \sum_{\sigma} \sigma W_{\sigma s} W_{\sigma s'} W_{\sigma s''} W_{\sigma s'''}. \quad (21)$$

而对于两点函数 $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$, 其分子部分的计算则需要将 i, j 格点处的张量同时替换为(21)式中的 \tilde{T} . 其它多点函数的计算方法与之类似, 都可以通过插入杂质点张量来实现. 本文以下计算的物理量都可以用单点函数和两点函数表示. 例如格点 i 上的磁矩 $\langle \sigma_i \rangle$, 格点 i, j 之间的关联函数

$$G(i, j) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle. \quad (22)$$

需要注意的是, 如果考虑外加磁场 $h \neq 0$ 的情况, 需将(20)式中 $\sum_{\langle m,n \rangle} H(\sigma_m, \sigma_n)$ 替换成 $\sum_{\langle m,n \rangle} H(\sigma_m, \sigma_n) - \sum_m h \sigma_m$.

3 数值结果

3.1 临界指数 α

首先, 我们计算热力学量-比热的临界行为. 我们利用插入杂质点张量的算法, 先计算出某一个键上的内能 $U = -J \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ (这里自旋 σ_i 和 σ_j 为通过这个键相连的两个自旋). 然后我们对内能数值求导得到比热:

$$c(T) = \frac{dU(T)}{dT}. \quad (23)$$

由于我们研究的格点并不具有平移不变性, 在不同格点位置的计算结果一般并不相同, 我们需要给定键的所在位置. 格点 i, j 为这个键相连的两个格点, 我们这样确定它们的位置: 前面提到, 分形格点的产生过程中, 我们每次将12个格点或者团簇合成一个更大的团簇; 每次合并过程中, 我们总让格点 i 或其所在的团簇位于图1b中所示的位置1; 而格点 j 则为其正上方的最近邻. 当格点粗粒化次数为1或者2时, 键的位置分别对应图1b, 1c虚线框所标出的位置. 在计算过程中, 截断长度选取为 $D = 16$, 粗粒化的次数为 $n = 50$ 次. 本文后续的计算中, 如无特别说明, 我们均采用上述 D, n 取值.

理论预言比热会在临界温度 T_c 附近会出现奇异性, 可以从图5的计算结果确定系统的临界温度 T_c . 图6是取不同截断长度 D 时 T_c 的计算结果, 可以看到, 随着截断长度的增加, 确定出临界温度收敛, $T_c \approx 1.317188$. 比热在临界点附近呈现如下关系^[4]:

$$c_c(T) \propto |t|^{-\alpha}. \quad (24)$$

其中 c_c 表示比热中的奇异部分, $t = (T - T_c)/T_c$ 为约化温度. 如果临界温度处的比热 $c(T_c)$ 是有限值, 我们可以认为在临界温度附近奇异的项占据主导, 忽略平庸的项带来的影响, 得到:

$$c_c(T) = c(T) - c(T_c). \quad (25)$$

根据(24)式, 我们可以拟合临界指数 α , 图5中黄色的实线和红色的虚线分别表示在 $T < T_c$ 和 $T > T_c$ 时的拟合结果. $T < T_c$ 时的拟合结果为 $\alpha \approx -0.441$, $T > T_c$ 时的拟合结果为 $\alpha \approx -0.378$. 由于在温度在 $T < T_c$ 时拟合的误差小于 $T > T_c$ 时的误差, 我们以 $T < T_c$ 时的拟合结果为准(见(26)式以下的讨论). 上述结果并非如Genzor等认为的 α 非常接近于0^[30]. 在 $T < T_c$ 处的局部放大图如图7所示, 在这里我们采用的是双对数坐标, 蓝色的星号表示利用HOTRG的得到的结果, 红色的虚线表示拟合的结果.

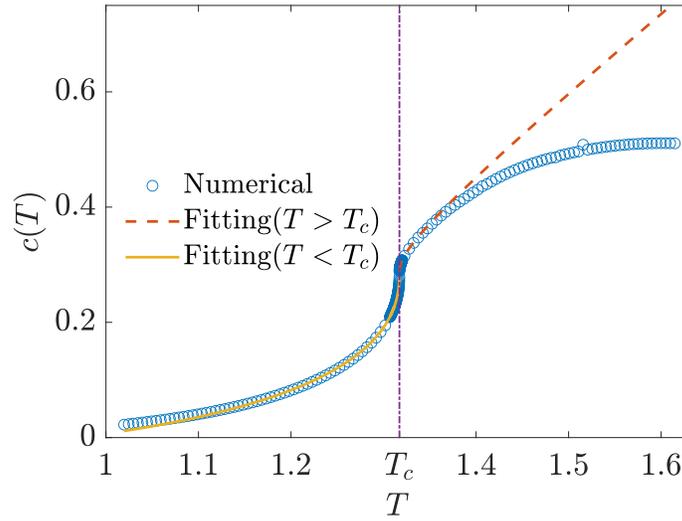


图5 比热随温度变化的关系图。其中蓝色的圈表示利用HOTRG数值计算得到的结果，计算选取的截断长度为 $D=16$ 。黄色的实线和红色的虚线分别表示 $T < T_c$ 和 $T > T_c$ 时对(24)式的拟合结果，紫色虚线标出的是临界温度所在位置，其大小为 $T_c = 1.317188$ 。

Fig. 5. Capacity as a function of temperature. The numerical results calculated by HOTRG methods are depicted as blue circles (the truncation length is chosen as $D = 16$). The yellow solid line (red dashed line) is a fitting curve for Eq.(24) when $T < T_c$ ($T > T_c$). The vertical purple dashed line shows the location of the critical temperature $T_c = 1.317188$.

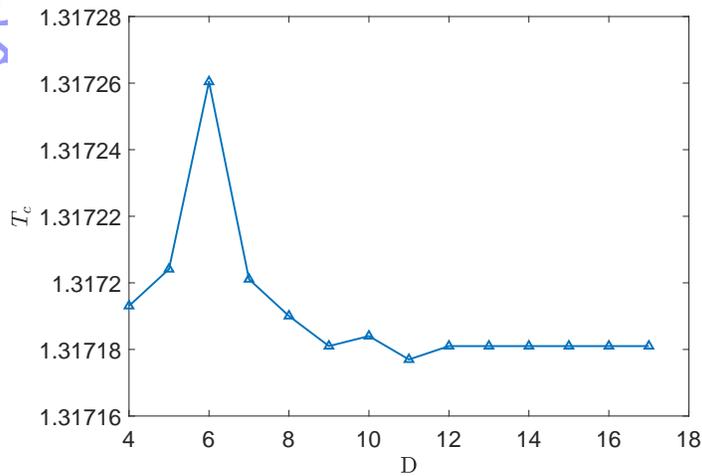


图6 不同截断长度 D 下利用HOTRG算法确定出的临界温度 T_c 。

Fig. 6. The critical temperatures determined by HOTRG method as a function of the truncation lengths D .

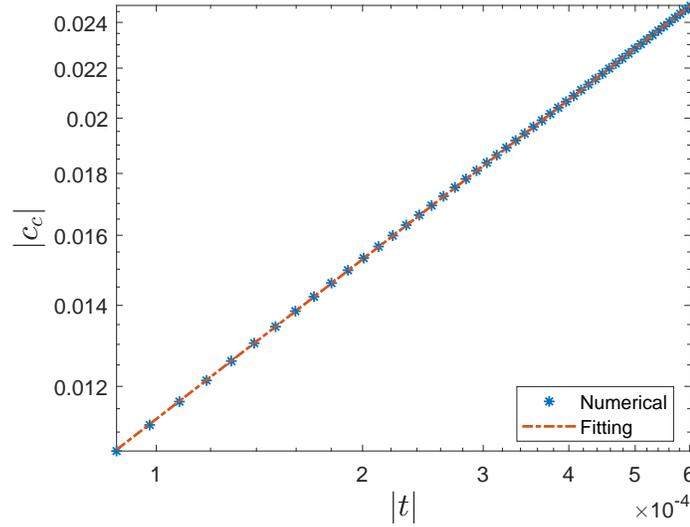


图7 比热的奇异部分 c_c 随约化温度 t 变化的关系图. 其中蓝色星号表示利用HOTRG求得的数值结果, 红色的虚线表示对(24)式拟合的结果, 横轴和纵轴采用的都是对数坐标.

Fig. 7. Singular part of the capacity c_c as a function of reduced temperature t . Numerical results obtained by HOTRG method are depicted by blue stars, and the red dashed line is a fitting curve for Eq.(24). Both the horizontal coordinate and the vertical coordinate are logarithmic here.

我们进一步检验了拟合结果的精确性. 我们用参数

$$R^2 \equiv 1 - \frac{\sum_i (c_i - \hat{c}_i)^2}{\sum_i (c_i - \bar{c})^2} \quad (26)$$

来衡量拟合的误差大小^[36], 其中 c_i 表示用HOTRG计算得到在温度 t_i 处的比热, \hat{c}_i 表示在温度 t_i 处拟合的结果, \bar{c} 表示的是 c 的平均值. 由上式计算得到 R^2 取值在 $[0, 1]$ 之间, 其值越接近于1意味着拟合的误差越小, 越接近于0则拟合的误差越大. 对于我们拟合的结果, 其 R^2 值非常接近于1; 为了对数坐标中看出不同区间内拟合误差的对比, 在图8中所画的是 $1 - R^2$, 其值越接近于0表示误差越小. 如图8所示, 在温度 $T < T_c$ 时, 我们在不同的约化温度区间 $|t| \in [t_{ub}/120, t_{ub}]$ 对 α 进行拟合, 其中误差条表示拟合结果置信度为95%的置信区间. 图中横轴表示的便是约化温度的上边界(upper boundary) t_{ub} . 从图中可以看出, 在一段温度区间内, 拟合的误差非常小. 同样在这段温度区间内, 拟合出来的临界指数 α 的大小几乎不发生改变, 可以认为在这段区间内拟合结果收敛. 而在远离临界温度的区域, 此时比热中奇异的项相对于平庸的项不再占据主导, 这会导致拟合结果不准确.

而如果太靠近临界温度, 拟合的误差又增大了, 可能的原因有几种: (1)在临界点附近的纠缠会增大, 利

用HOTRG做近似的误差会增大; (2)太过于靠近临界温度会使得对温度数值求导时的温度间隔太小, 进一步放大误差; (3)使用数值方法并不能完全准确地确定临界温度, 导致拟合的结果会出现偏差, 这在靠近临界温度的区间带来的影响更加明显. 上述可能导致误差的原因有待后续定量的研究.

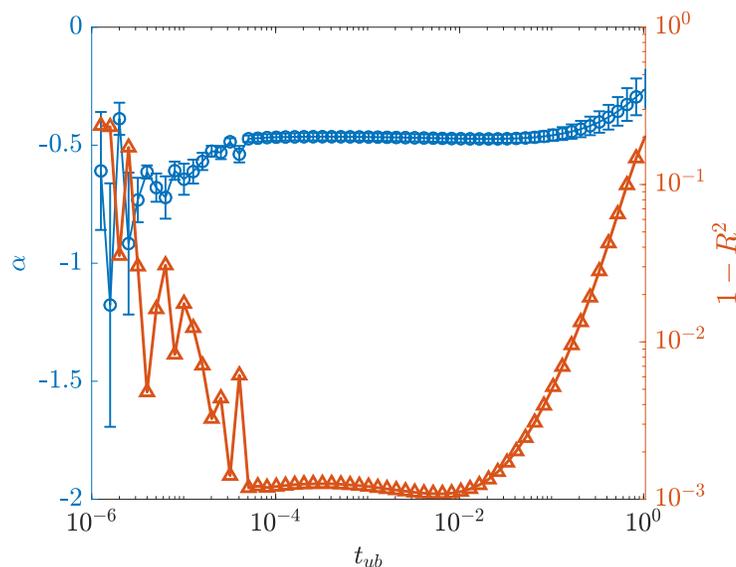


图8 不同约化温度区间 $[t_{ub}/120, t_{ub}]$ 下临界指数 α (式(24))的拟合结果及误差. 其中蓝色的线表示 α 的拟合结果, 红色的线表示拟合的误差 $1 - R^2$. 其中横轴和右边的纵轴 $1 - R^2$ 采用的是对数坐标. 误差棒表示拟合参数置信度为95%的置信区间.

Fig. 8. The fitting results (blue) and errors $1 - R^2$ (red) for the critical exponent α (Eq.(24)) at different induced temperature intervals $[t_{ub}/120, t_{ub}]$. The horizontal coordinate and the right vertical coordinate $1 - R^2$ are logarithmic here. The error bars represent the confidence intervals with a confidence level of 95% for the fitted parameter.

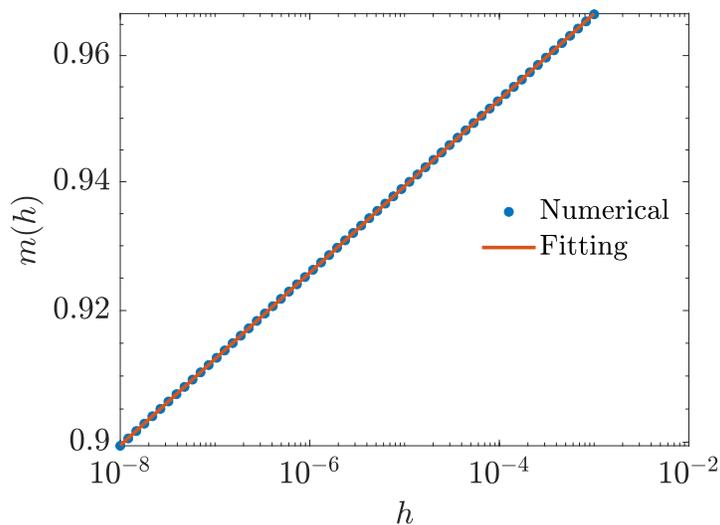


图9 在临界温度下, 磁矩随外加磁场 h 变化的关系图. 其中蓝色的点表示利用HOTRG计算得到的结果, 红色的实线表示对(27)式的拟合结果. 其中横轴与纵轴采用的都是对数坐标.

Fig. 1. Magnetic moment as a function of the external magnetic field h at the critical temperature. The blue dots show the numerical results obtained by HOTRG method, and the red solid line is a fitting curve for Eq.(27). Both the horizontal coordinate and the vertical coordinate are logarithmic here.

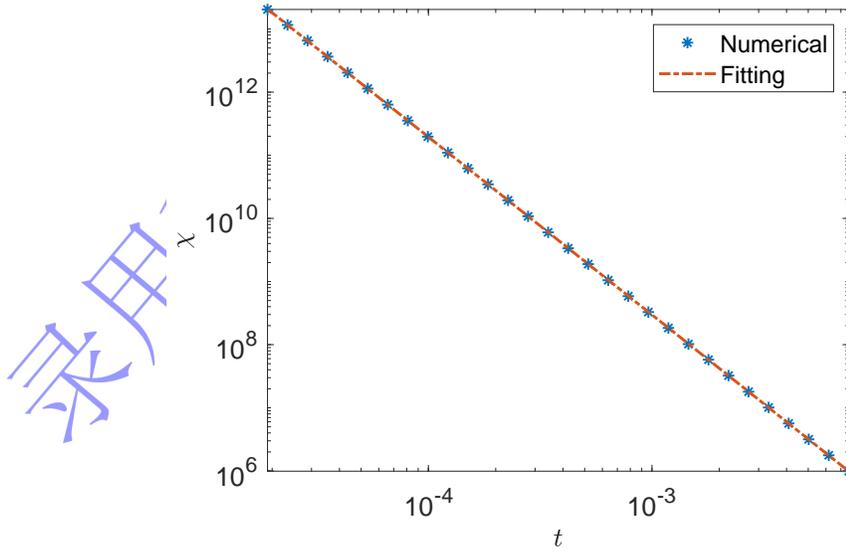


图10 在 $T > T_c$ 时, 磁化率随约化温度 t 变化的关系图. 其中蓝色的星号表示利用HOTRG计算得到的结果, 红色的虚线表示利用(29)式进行拟合的结果. 其中横轴与纵轴采用的都是对数坐标.

Fig. 10. Magnetic susceptibility as a function of the reduced temperature t when $T > T_c$. The blue stars show the numerical results obtained by HOTRG method, and the red dashed line is a fitting curve for Eq.(29). Both the horizontal coordinate and the vertical coordinate are logarithmic here.

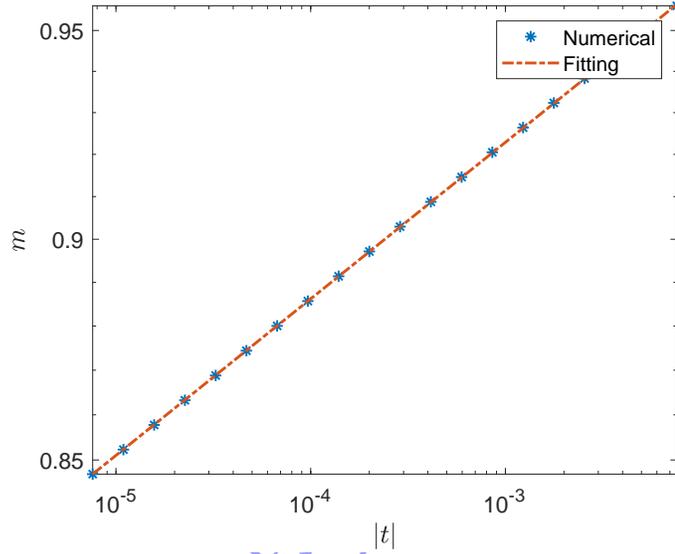


图11 在 $T < T_c$ 时, 自发磁矩随约化温度 t 变化的关系图. 其中蓝色的星号表示利用HOTRG计算得到的结果, 红色的虚线表示对(30)式进行拟合的结果. 其中横轴与纵轴采用的都是对数坐标.

Fig. 11. Spontaneous magnetic moment as a function of the reduced temperature t when $T < T_c$. The blue stars show the numerical results obtained by the HOTRG method and the red dashed line is a fitting curve for Eq.(30). Both the horizontal coordinate and the vertical coordinate are logarithmic.

3.2 临界指数 δ

再者, 我们计算了临界温度下, 磁矩 m 随外加磁场 h 的变化关系. 在临界区域内, m 与 h 满足关系^[4]:

$$m \propto h^{1/\delta}. \quad (27)$$

在这里, 取 $m = \langle \sigma_i \rangle$, 其表示的是在格点 i 上的磁矩. 由于系统不具有平移不变性, 因此如果取不同的格点会得到不同的计算结果. 在这里格点 i 所在位置即为计算临界指数 α 时选取的格点 i 的位置. 如图9所示, 通过对上式的拟合, 我们得到临界指数 $\delta \approx 160.1$, 拟合结果置信度为95%的置信区间为 $[160.0225, 160.2164]$.

3.3 临界指数 γ

2

磁化率 χ 可以通过:

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} \quad (28)$$

求得. 在这里, 取 $m = \langle \sigma_i \rangle$, 其表示的是在格点 i 上的磁矩. 其中格点 i 所在位置与前文中计算临界指数 δ 时选

取的位置相同. 我们在磁场 h 为 $[0, 10^{-11}]$ 的区间内进行对磁矩数值求导得到 χ , 其与温度的关系如图10所示. 在临界区域, 磁化率与温度满足关系^[4]:

$$\chi \propto t^{-\gamma}. \quad (29)$$

如图10所示, 通过对上式的拟合, 我们得到临界指数 $\gamma \approx 2.81839$, 拟合结果置信度为95%的置信区间为 $[2, 8169, 2.8198]$.

3.4 临界指数 β

在温度区间 $T < T_c$ 时, 即使没有外加磁场, 系统也会存在一个自发的磁矩. 在临界区域内自发磁矩与温度满足如下关系^[4]:

$$m \propto -t^\beta. \quad (30)$$

在这里, 取 $m = \langle \sigma_i \rangle$, 表示的是格点 i 上的磁矩. 我们选取格点 i 所在的位置与计算临界指数 δ 和 γ 时格点 i 的位置相同. 如图11所示, 对上式拟合我们得到临界指数 $\beta \approx 0.0176$, 拟合结果置信度为95%的置信区间为 $[0.17579, 0.17630]$.

3.5 临界指数 η 和 ν

接下来我们计算了系统自旋 σ_i 与 σ_j 之间的关联函数. 不同温度条件下, σ_i 与 σ_j 之间的关联随距离 r 的关系如图12所示, σ_i 与 σ_j 在分形格点中所处的位置由附录A1给出. 在临界区域内, 自旋之间的关联 G 与距离 r 满足关系式^[4]:

$$G \propto r^{2-d-\eta} \exp(-r/\xi). \quad (31)$$

其中 ξ 表示关联长度, 图12中实线表示对上式拟合得到的结果, 其中竖直的虚线画出的是关联长度所在位置, 可以看到温度越靠近临界温度, 关联长度越大.

不同温度的情况下拟合出的关联长度如图13所示, 在临界区域内, 关联长度与温度满足如下关系^[4]

$$\xi \propto t^{-\nu}. \quad (32)$$

我们据此拟合出临界指数 $\nu \approx 1.5986$, 拟合结果置信度为95%的置信区间为 $[1.595, 1.601]$. 图13中红色的虚线表示拟合得到的结果. 同样我们在不同温度下拟合得到了指数 $d + \eta - 2 \approx 0.025$, 其结果如图13所示. 如果认为这里的维度 d 为系统的Hausdorff维度, 则 $\eta \approx 0.2325$.

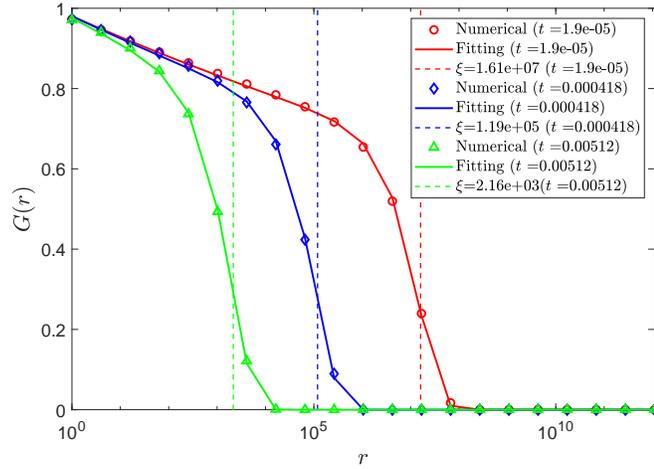


图12 在 $T > T_c$ 时, 自旋-自旋关联函数随距离变化的关系图. 其中不同颜色的点表示不同温度下HOTRG的计算结果, 不同颜色的实线表示不同温度下对(31)式进行拟合的结果, 不同颜色的虚线标出了不同温度下拟合得到的关联长度. 其中横轴采用的是对数坐标.

Fig. 12. The spin-spin correlation functions as a function of the distance r when $T > T_c$. The dots show the numerical results obtained by HOTRG method. The solid lines are fitting curves for Eq.(31). The vertical dashed lines show the locations of the correlation lengths. Different colors mean different deduced temperatures. The horizontal coordinate is logarithmic here.

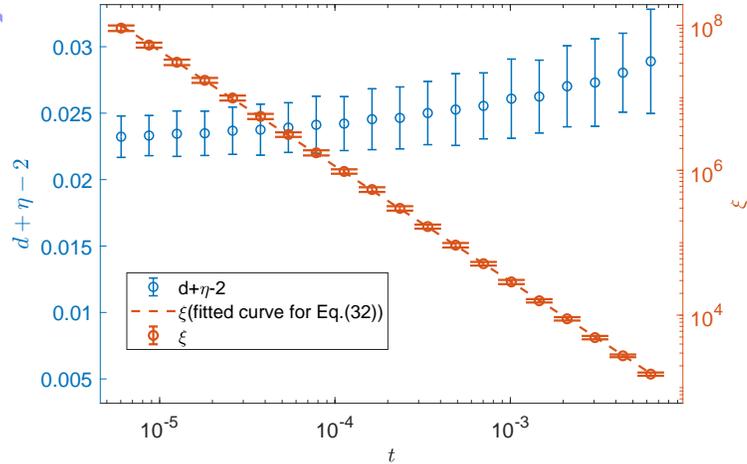


图13 在 $T > T_c$ 时, 不同约化温度 t 下关联长度 ξ 与指数 $d + \eta - 2$ 的拟合结果. 其中蓝色的圈表示 $d + \eta - 2$ 的拟合结果, 红色的星号表示 ξ 的拟合结果, 红色的虚线表示对(32)式进行拟合的结果. 其中横轴 t 和纵轴 ξ 采用了²对数坐标. 误差棒表示拟合参数置信度为 95% 的置信区间.

Fig. 13. The fitting results for correlation lengths ξ (blue circles) and the exponent $d + \eta - 2$ (red stars) at different reduced temperatures t . The red dashed line is a fitting curve for Eq.(32). The horizontal coordinate t and the right vertical coordinate ξ are logarithmic here. The error bars represent the confidence intervals with a confidence level of 95% for the fitted parameter.

4 总结与讨论

在本文中我们利用了HOTRG的方法,研究了分形格点中的易辛模型,在该模型中存在从有序到无序的连续相变.我们拟合了分形格点中相应的临界指数,计算了分形格点中的关联性质.根据标度假说,临界指数之间满足标度关系^[4]:

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (33)$$

$$\delta - 1 = \gamma/\beta \quad (34)$$

$$2 - \alpha = d\nu \quad (35)$$

$$\gamma = (2 - \eta)\nu \quad (36)$$

因此,6个临界指数中只有2个是独立的.

表1 在 $P(1)$ 位置拟合得到的的临界指数

Table 1. Critical exponents fitted at position $P(1)$.

临界指数	α	β	γ	δ	η	ν
拟合结果	-0.8290	0.0138	2.816	205.0	0.2325	1.5986

表2 标度关系式的检验.

Table 2. Examination of the hyperscaling relations.

标度关系式	(33)	(34)	(35)	(36)
LHS	2.0146	204.0	2.8290	2.8160
RHS	2.0000	204.06	2.8655	2.8255
ϵ	0.0073	2.84×10^{-4}	0.0127	0.0095

所有在 $P(1)$ 点拟合得到的临界指数如表1所示, $P(1)$ 的定义在附录A2给出. 临界指数 η 和 ν 是与关联函数相关的临界指数,我们通过计算 $P(1)$ 位置自旋与其它格点位置自旋的关联得到 η 和 ν ,即3.5节的结果. 临界指数 α 是与比热相关的临界指数,我们通过计算 $P(1)$ 位置自旋与它正上方最近邻自旋间相互作用能的比热获得. 我们将表1的结果带入到(33-36)式中的四个标度关系中,为了验证等式左边(left hand side, 以下简

称LHS)和等式右边(right hand side 以下简称RHS)是否相等, 可以用

$$\epsilon = \left| \frac{LHS - RHS}{RHS} \right| \quad (37)$$

来表征等式左右两边的相对误差. 其数值结果如表2所示, 我们发现所有的标度关系都得到了很好的满足, 等式左右两边相对误差在0.01左右. 本文中, 系统的维度 d 一共出现了两次, 第一次出现在确定临界指数 η 的过程中: $d + \eta - 2 \approx 0.025$, 第二次出现在标度关系(35)式中. 因此, 我们可以得出结论, 在分数维度下, 标度关系依然满足, 且在标度关系中出现的维度 d 即为系统的Hausdorff维度.

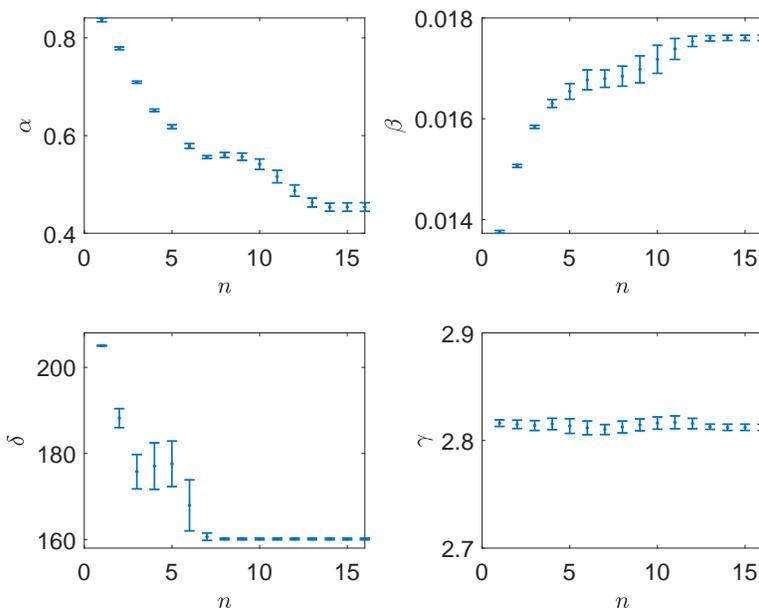


图14 在位置 $P(n)$ 处拟合得到的临界指数(a) α , (b) β , (c) δ 和(d) γ 随 n 的变化关系图. 误差棒表示拟合参数置信度为95%的置信区间.

Fig. 14. The fitting results for the critical exponents (a) α , (b) β , (c) δ and (d) γ at different positions $P(n)$ as functions of n . The error bars represent the confidence intervals with a confidence level of 95% for the fitted parameter.

由于我们所选择的分形格点不具有平移不变性, 我们在系统的不同位置 $P(n)$ 插入了杂质点张量, 对临界指数进行了拟合($P(n)$ 的定义我们在附录A2中给出). 对于临界指数 α , 它是与比热相关的临界指数, 应该定义在某一个键上, 其所对应的键为: 位置 $P(n)$ 处自旋与它正上方最近邻自旋间的键. 图14中所画的便是在 n 取不同值时, 在 $P(n)$ 处拟合得到的临界指数, 可以看到, 在不同位置上临界指数 α , β , δ 的拟合结果存在差别. 因此, 我们可以得出结论, 系统平移对称性的缺失导致了在不同空间位置拟合出的临界指数存在差异.

然而, γ 的拟合结果却几乎不随空间位置发生改变. 如何解释这一行为, 是一个有待我们下一步研究的问题. 同样我们也在其它位置检验了标度关系, 我们发现当 $n \neq 1$ 时, 在 $P(n)$ 位置, 标度关系式(34)和(36)式仍然满足, 然而包含临界指数 α 的(33), (35)式却不再满足, 如何解释这一行为, 也是我们下一步需要研究的问题.

致谢

感谢中国人民大学物理学系谢志远副教授和付阳锋同学的讨论.

附录A1

正文3.5节中自旋 σ_i, σ_j 的位置, 可以由如下方法确定: 我们已经知道, 在分形格点的产生过程中, 我们每次将十二个自旋或者团簇合成一个更大的团簇, 我们称这样一个过程为一次聚合.

(1) 设 m 为某一任意正整数, 当聚合的次数 k 小于 m 时, 分别将 σ_i 与 σ_j 或其所在的团簇聚合到两个不同的更大的团簇中. 如果 k 为奇数, 聚合的过程中 σ_i 与 σ_j 或其所在的团簇位于图1b所示的位置1, 如果 k 是偶数, 则在位置2.

(2) 当聚合的次数 k 等于 m 时, 则让 σ_i 与 σ_j 或其所在的团簇聚合到同一个更大的团簇中. 如果 k 为奇数, 则让 σ_i 或其所在的团簇位于图1b所示位置1; 如果 k 是偶数, 则在位置2; 同时令 σ_j 或其所在的团簇位于图1b所示的位置3.

(3) 当聚合的次数 k 大于 m 时, 如果 k 为奇数, 则令 σ_i 与 σ_j 共同所在的团簇位于图1b所示的位置1; 如果为偶数, 则在位置2.

通过上述方法确定了 σ_i 与 σ_j 在分形格点中所在的位置, 它们之间的距离为 $r = 4^{m-1}$.

附录A2

2

在这一部分我们介绍了 $P(n)$ 位置的定义. 在每一次粗粒化过程中, 我们将12个自旋或者团簇合成一个更大的团簇, 在计算的过程中我们这样选取自旋 σ_i 的位置: 连续 n 次粗粒化过程使得自旋 σ_i 所在的团簇位于图1b中所示的位置1, 接下来的连续 n 次粗粒化过程又让自旋 σ_i 所在的团簇位于图1b中所示的位置2, 如此循环往复. 我们取总的粗粒化次数为 $32 - 32 \bmod n$, 这样可以保证其为 n 的整数倍. 我们把上述杂质点张量所

在的位置定义为 $P(n)$.

参考文献

- [1] Fisher M E 1974 *Rev. Mod. Phys.* **46** 597
- [2] Kadanoff L P 1985 *Physics* **2** 263
- [3] Efrati E, Wang Z, Kolan A, Kadanoff L P 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 647
- [4] Kardar M 2007 *Statistical Physics of Fields* (Cambridge: Cambridge University Press) pp54-92
- [5] Onsager L *Phys. Rev.* 1944 **65** 117
- [6] Yang C N 1952 *Phys. Rev.* **85** 808
- [7] Wilson K G, Kogut J 1974 *Phys. Rep.* **12** 75
- [8] Gefen Y, Mandelbrot B B, Aharony A 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 855-858
- [9] Gefen Y, Meir Y, Mandelbrot B B, Aharony A 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 145-148
- [10] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B B 1983 *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** 1267-1278
- [11] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B B 1984 *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** 1277-1289
- [12] Gefen Y, Aharony A, Shapir Y, Mandelbrot B B 1984 *J. Phys. A* **17** 435
- [13] Luscombe J H, Desai R C 1985 *Phys. Rev. B* **32** 1614
- [14] Stosic T, Stosic B D, Milosevic S, Stanley H E 1996 *Physica A* **233** 31
- [15] Vezzani A *J. Phys. A* 2003 **36** 1593
- [16] Carmona J M, Marini U, Marconi B, Ruiz-Lorenzo J J, Tarancon A 1998 *Phys. Rev. B* **58** 14387

- [17] Levin M, Nave C P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 120601
- [18] Gu Z C, Wen X G 2009 *Phys. Rev. B* **80** 155131
- [19] Xie Z Y, Chen J, Qin M P, Zhu J W, Yang L P, Xiang T 2012 *Phys. Rev. B* **86** 045139
- [20] Ueda H, Okunishi K, Nishino T 2014 *Phys. Rev. B* **89** 075116
- [21] Evenbly G , Vidal G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 180405
- [22] Evenbly G , Vidal G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 200401
- [23] Evenbly G , Vidal G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 040401
- [24] Hauru M, Evenbly G, Ho W W, Gaiotto D, Vidal G 2016 *Phys. Rev. B* **94** 115125
- [25] Evenbly G 2017 *Phys. Rev. B* **95** 045117
- [26] Yang S, Gu Z C, Wen X G 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 110504
- [27] Evenbly G 2018 *Phys. Rev. B* **98** 085155
- [28] Adachi D, Okubo T, Todo S 2020 *Phys. Rev. B* **102** 054432
- [29] Adachi D, Okubo T, Todo S 2022 *Phys. Rev. B* **105** L060402
- [30] Genzor J, Gendiar A, Nishino T 2016 *Phys. Rev. E* **93** 012141
- [31] Genzor J, Gendiar A, Kao Y J 2022 *Phys. Rev. E* **105** 024124
- [32] Krcmar R, Genzor J, Lee Y, Cencarikova H, Nishino T, Gendiar A 2018 *Phys. Rev. E* **98** 062114
- [33] Yang Z, Lustig E, Lumer Y, Segev M 2020 *Light Sci. Appl.* **9** 128
- [34] Manna S, Nandy S, Roy B 2022 *Phys. Rev. B* **105** 201301
- [35] Pai S, Prem A 2019 *Phys. Rev. B* **100** 155135
- [36] Ann H, Dennis G 1971 *Statistics: A Foundation for Analysis* (Addison-Wesley) pp344 - 348

Critical behaviors of the Ising model in a fractal lattice *

Du Xiao-Ying¹⁾ Yu Zhen-Hua^{1)†}

1) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Metrology and Sensing, School of Physics and Astronomy, Sun Yat-Sen University, Zhuhai 519082, China*)

Abstract

Fractal lattices are a special class of lattices that have non-integer Hausdorff dimensions and the fractal structure breaks the translation invariance. Studying these lattices can help us understand the impact of non-integer dimensions and the lack of translational symmetry on critical behaviors. We study the Ising model in a fractal lattice with a non-integer dimension of $\log_4(12) \approx 1.7925$ using the higher order tensor network renormalization group (HOTRG) algorithm. The partition function is represented in terms of a tensor network, and is finally calculated by a coarse graining process based on higher order singular value decomposition. When the truncation lengths and the times of coarse graining increase, the results are found to

* Project supported by the Key Area Research and Development Program of Guangdong Province, China (Grant No. 2019B030330001) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11474179, 11722438, 91736103, 12074440).

† Corresponding author. E-mail: yuzhh5@mail.sysu.edu.cn

be convergent. Magnetic moment, internal energy and correlation properties are calculated by inserting impurity tensors to the tensor network at different temperatures and under different external magnetic fields. The magnetic susceptibility is obtained by differentiating the magnetic moment with respect to the magnetic field, and the capacity is calculated by differentiating the internal energy with respect to the temperature. Our numerical results show that there is a continuous order-disorder phase transition in this system, and the critical temperature is found to be $T_c/J = 1.317188$. Physical quantities show singular behaviours around the critical point, and the correlation length is found to be divergent at the critical point, which is consistent with the results of the renormalization group theory. The corresponding critical exponents are obtained by fitting the numerical data around the critical point. We also calculated the critical exponents at different positions by inserting impurity tensors to different places of the lattice. Due to the lack of translational symmetry, it was found that the critical exponents α , β , δ fitted at different positions vary, but critical exponent γ almost remains the same₂. From the scaling hypothesis, it can be deduced that the critical exponents satisfy the hyperscaling relations which contain the dimension of the lattice. Our numerical results show that all of

the hyperscaling relations are satisfied when the fractional dimension and the critical exponents we have obtained were substituted into them on some sites of the fractal lattice, but only two of the four hyperscaling relations are satisfied on other sites.

Keywords: Fractal lattice , Ising model, tensor network, critical phenomena

PACS: 05.70.Jk, 05.20.-y, 64.60.ae