物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

高维宇称-时间对称系统中的信息恢复与临界性

曲登科 范毅 薛鹏

Information retrieval and criticality in high−dimensional parity−time−symmetric systems

Qu Deng-Ke Fan Yi Xue Peng

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 130301 (2022) DOI: 10.7498/aps.70.20220511

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.70.20220511

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 71, No. 13 (2022) 130301

专题: 非厄米物理前沿

高维宇称-时间对称系统中的信息恢复与临界性*

曲登科 1)2)† 范毅 3) 薛鹏 2)‡

1) (东南大学物理学院, 南京 211189)

2) (北京计算科学研究中心, 北京 100084)

3) (中国人民解放军陆军步兵学院, 石家庄 050083)

(2022 年 3 月 22 日收到; 2022 年 4 月 6 日收到修改稿)

近期, 满足宇称-时间对称性的非厄米系统的研究取得了令人印象深刻的进展, 如物理系统拓扑性质和奇异点处临界性的观测. 宇称-时间对称的非幺正动力学的一个至关重要的方面就是系统与环境之间的信息流动. 本文利用量子态间的可区分性这一物理量, 统一量化了低维与高维宇称-时间对称的非厄米系统和环境之间的信息流动. 数值计算结果表明, 在宇称-时间对称性保持的相区域可以观测到量子态间可区分性的振荡以及完全的信息恢复. 然而在宇称时间对称性破坏的相区域, 信息处于指数衰减的状态. 奇异点处标志着信息流动的可逆与不可逆的临界性, 量子态间的可区分性表现出幂律衰减的行为. 理解非幺正量子动力学中的这些独特的现象为研究开放量子系统提供了重要视角, 并且有助于其在量子信息中的应用.

关键词: 非厄米, 宇称-时间对称性, 信息恢复, 可区分性

PACS: 03.65.Vf, 03.65.Aa, 02.50.Ga, 02.60.Cb **DOI:** 10.7498/aps.70.20220511

1 引言

量子力学要求封闭系统的物理可观测值由具有实特征值的厄密算子表示. 然而在自然界中, 由于耗散现象的普遍存在, 不可避免地存在能量、粒子以及信息等物理量的丢失, 物理量的守恒性会被破坏. 因此真实的物理系统实际上是非厄米系统. 近年来, 非厄米系统及其动力学特性越来越受到人们的关注[1–20]. 研究量子系统与环境之间的相互作用是至关重要的, 此相互作用可以导致耗散、衰退和退相干等现象. 值得一提的是如果系统满足宇称-时间对称性, 则一类非厄米哈密顿量可以具有完全为实数的本征能量[21–23]. 非厄米哈密顿量的本征能量为实数的一个充分条件是哈密顿量满足宇称时间对称性, 并且哈密顿量的本征函数同时是宇称-时间对称算子的本征函数. 满足宇称-时间对称性的非厄米系统包含两个相区域: 宇称-时间对称性保持的区域, 在此区域内整个本征谱都为实数, 在宇称-时间对称性破坏的区域本征值形成复共轭对的形态. 在这两个相区间存在着奇异点, 在奇异点处会有非常规的相变发生[24].

在增益和损耗平衡的经典系统已经预测和观察到宇称-时间对称系统的几个独特的性质[25–32]. 自从第一次在光学系统中观测到宇称-时间对称性破坏和功率振荡[25,26]以来, 研究人员相继报道了非守恒系统中独有的丰富的波的现象, 如单向性[30]和多功能设备中的光传输[27]. 相关现象已经在物理学的其他子领域进行了研究, 包括电路[28]和机械振荡器[29]. 在量子体系中, 同样研究了宇称-时间对称系统的各个方面[33–43], 如玻色-哈伯德二聚体[33]、纠缠[34]以及临界现象[39–42].

* 国家杰出青年科学基金 (批准号: 12025401) 和国家自然科学基金 (批准号: U1930402, 12088101) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dkqu@seu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: gnep.eux@gmail.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

虽然损耗通常被认为会对系统的相干性产生损坏[44,45], 但是满足宇称-时间对称性的经典系统中的独特的现象和有用的应用说明了平衡增益和损耗的作用. 从经典系统的研究成果来看, 满足宇称-时间对称性的量子系统有望显示出对退相干的鲁棒性, 可能会导致量子信息处理中的长相干时间. 近年来, 满足宇称-时间对称性的系统的信息论表征开始被探索[40–42,46]. 除了实际的重要性之外, 这种信息论表征对于更深入地理解宇称-时间对称系统可以作为开放量子系统是必备的. 在开放量子系统中宇称-时间对称的非幺正动力学的一个典型的例子就是系统与环境之间信息流动的可逆-不可逆的临界性[46].

在 2019 年, 中国和日本的研究小组利用两能级的光学系统, 借助量子态间的可区分性量化信息的流动, 实验上验证了当系统处于宇称-时间对称相区域时, 流入环境的信息可以完全恢复[40]. 当系统自发破坏宇称-时间对称性时, 信息的流动是不可逆的. 同时, 在宇称-时间转变点周围信息的流动具有独特的临界性, 通过该点时, 可逆的信息变得不可逆, 反之亦然. 然而对于宇称-时间对称系统的量子信息的可逆性的学习目前还限于二维希尔伯特空间的系统中, 在本文中, 将重点介绍在高维希尔伯特空间中, 在宇称-时间对称性保持的相区域, 损失到环境中的信息仍然可以完全恢复, 在靠近奇异点区域时, 量子态间的可区分性会出现幂律的行为. 我们使用量子态间的可区分性这一物理量统一量化了低维与高维量子系统与环境之间的信息流动.

宇称-时间对称系统中的信息恢复为更好地控制量子系统的行为提出了新的可能性, 其方式不同于量子芝诺效应[47–49]或动态解耦[50–52]. 动态解耦依赖于脉冲注入的时间反转, 而本文中的信息恢复是有对称性保护的隐藏的纠缠伙伴引起的. 这其中潜在的物理本质上不同于无退相干的子空间, 在无退相干的子空间中, 幺正态的演化由一定的对称性保持[53–59]; 相比之下, 在宇称时间对称性保持与破坏的相区域, 宇称-时间对称的动力学过程本质上都是非幺正的. 本文第 2 节会介绍信息流动的定义. 第 3 节回顾两维希尔伯特空间中信息流动的恢复与临界性. 第 4 节介绍高维希尔伯特空间中使用量子态间的可区分性来衡量信息的流动. 最后对全文进行总结与展望.

2 信息流动

满足宇称-时间对称性的非厄米哈密顿量 $\hat{H}_{\rm PT}$ 控制的动力学可以由下式表示[60]:

$$\hat{\rho}\left(t\right)=\frac{{\rm e}^{-{\rm i}\hat{H}_{\rm PT}t}\hat{\rho}\left(0\right){\rm e}^{{\rm i}\hat{H}_{\rm PT}^{\dagger}t}}{{\rm tr}\left[{\rm e}^{-{\rm i}\hat{H}_{\rm PT}t}\hat{\rho}\left(0\right){\rm e}^{{\rm i}\hat{H}_{\rm PT}^{\dagger}t}\right]}. \tag{1}$$

这里, 通常使用希尔伯特-施密特内积. 考虑一个通用的 N 能级量子系统, 并根据同一系统的两个量子态之间的迹距离来表征进出系统的信息流动[61]:

$$D\left(\hat{\rho}_1\left(t\right),\hat{\rho}_2\left(t\right)\right)=\frac{1}{2}{\rm tr}\left|\,\hat{\rho}_1\left(t\right)-\hat{\rho}_2\left(t\right)\right|, \tag{2}$$

其中 $|\hat{A}|:=\sqrt{\hat{A}^{\dagger}\hat{A}}$. 迹距离 D 可以测量两个量子态之间的可区分性, 因为当量子态 $\hat{\rho}_1$ 和 $\hat{\rho}_2$ 能够被完全区分时, $\left[1+D\left(\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2\right)\right]/2$ 会达到最大概率[62,63]. 迹距离在幺正转变下是不会发生改变的, 这也意味着在幺正演化下没有信息从系统中泄露出去. 除此之外, 在完全正保迹映射下, 迹距离也不会增加, 用公式可以表示为 $D\left(\mathcal{E}\hat{\rho}_1,\mathcal{E}\hat{\rho}_2\right)\leqslant D\left(\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2\right)$, 其中 $\mathcal{E}$ 表示完全正保迹映射[64]. 因此可区分性的单调下降 ($\dot{D}<0$) 表示系统到环境的信息是单向流动的. 相比之下, 当可区分性处于上升的趋势时 ($\dot{D}>0$), 标志着信息从环境回流到系统, 暗示着在开放量子动力学中存在记忆效应. 换句话说, 当一个时间区间处于 $\dot{D}>0$, 动力学过程被认为是非马尔可夫过程[65–73].

马尔可夫演化问题的主要解决方法是可以基于可除性[66,69,74,75]、态的可区分性[67]、量子纠缠[69]、量子费舍尔信息流动[76]、保真度[76]、互信息[70,77]、几何表征[78]等物理量. 但并不是所有的物理量都可以很好地量化表示宇称-时间对称的动力学, 由于非线性的原因, 可除性等物理量就无法探测宇称-时间对称系统的动力学的非马尔可夫性. 然而, 量子态之间的可区分性仍然可以作为宇称-时间动力学中的非马尔可夫性的一种度量, 因为这种度量可以直接量化系统与环境之间的信息流动, 从而检测记忆效应的存在, 即使动力学是非线性的. 虽然采取其他的测量方法也是可行的, 由于迹距离区分了所有不同的量子态, 并且只取决于系统的动力学, 因此迹距离非常适合作为信息流动的测量方法.

非马尔可夫性起源于本征态的非正交性. 为了解释这个, 对 (1) 式表示的宇称-时间对称的动力

学进行本征分解:

$$\hat{\rho}\left(t\right)=\frac{\sum\limits_{mn}\rho_{mn}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(E_m-E_n\right)t}|\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|}{\sum\limits_{mn}\rho_{mn}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(E_m-E_n\right)t}\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle},\tag{3}$$

其中, $|\varphi_n\rangle$是$\hat{H}_{\rm PT}$本征能量为E_n的右本征矢. 当动力学过程是幺正过程时, 本征态是相互正交的, 由(3)式的分母给出的归一化因子始终是一个常数. 在宇称-时间对称的动力学过程中, 归一化因子由于本征态的非正交性而振荡, 表明系统与环境之间存在连续的信息交换. 在这一方面, 在各种系统中观测到的功率振荡可以解释为信息从环境中回流的证据[25–28,44], 以及在宇称-时间对称性保持的相区域的非马尔可夫特征.

3 二能级系统中的信息恢复

首先考虑一个简单的例子, 一个二能级系统$\hat{H}_{\rm PT}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_x+\mathrm{i}a\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z$, 其中$a\geqslant 0$表示非厄米的度, $\hat{\sigma}_{x(z)}$表示泡利算符. 当$a=0$时哈密顿量恢复厄米性; 当$0<a<1$时, 系统保持着宇称-时间对称性; 当$a>1$时, 宇称时间对称性被破坏; 当$a=1$时, 系统处于奇异点的位置. 这个模型在经典系统[26,31,32]和量子系统[36,79]的实验中已经被实现了. 选择$\rho_0(0)=|0\rangle\langle 0|$和$\rho_1(0)=|1\rangle\langle 1|$作为初始态, 经过$t$时间的演化态可以表示为$\rho_0(t)$和$\rho_1(t)$. 这两个量子态之间的可区分性通过计算可以得到:

$$D\left(t\right)=\left[1+\left(\frac{2a\sin^2\left(\sqrt{1-a^2}t\right)}{1-a^2}\right)^2\right]^{-1/2}.\tag{4}$$

值得一提的是, 在量子系统中使用单光子实现宇称-时间对称的动力学演化的难度在于无法实现单光子的增益. 已有实验通过更少损失与更多损失的交替来替代宇称-时间对称动力学中的增益与损失, 从而实现了满足宇称-时间对称的量子系统的动力学演化过程[37]. 基于这种思路, 该二能级系统的哈密顿量$\hat{H}_{\rm PT}$对应的有效非厄米的哈密顿量可以写为

$$\hat{H}_{\rm eff}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_x+\mathrm{i}a(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z-\hat{\mathbb{I}}),\tag{5}$$

其中$\hat{\mathbb{I}}$表示单位算符. 由(1)式可知, 无论是应用$\hat{H}_{\rm eff}$还是$\hat{H}_{\rm PT}$, 最终经过t时间得到的演化态都是相同的.

图1(a)和图1(b)给出了在宇称-时间对称的区域($0<a<1$)量子态之间的可区分性随时间的演化. 作为对比, 也给出了幺正演化($a=0$)的情况. 从图中可以看出, 量子态间的可区分性随时间会出现一个周期性振荡的现象. 这也意味着存在一段时间区域, 在此时间中量子态间的可区分性的一

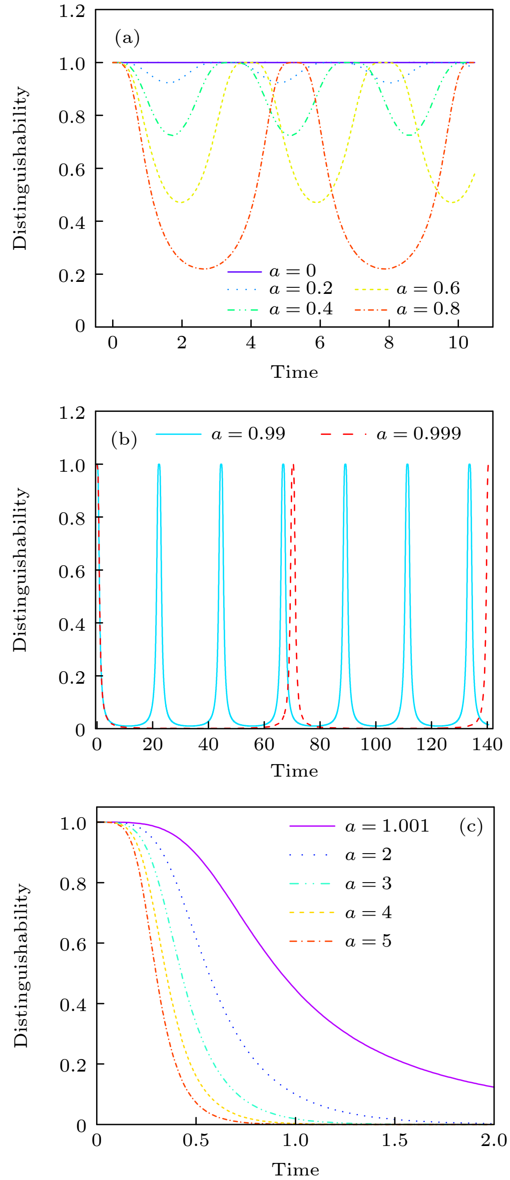


图1 在宇称-时间对称的两能级系统的信息流动 (a), (b)在宇称-时间对称保持的区域($0<a<1$), 量子态的可区分性表现出周期性振荡, 当逐渐靠近奇异点($a=1$)时, 信息恢复的周期会变长; (c)在宇称-时间对称性被破坏的区域($a>1$), 量子态的可区分性在一直在衰减

Fig. 1. Information flow in the parity-time-symmetric two-level system: (a), (b) The distinguishability oscillates with period in the parity-time-unbroken phase ($0<a<1$). When approaching the exceptional point ($a=1$), the period of the information retrieval. (c) The distinguishability between quantum states is declining in the parity-time-symmetry-broken regime ($a>1$).

次导数是大于0的. 因此, 系统恢复了流入环境的信息, 在宇称-时间保持的相区域展示了独特的非马尔可夫行为. 并且从图 1(a) 和图 1(b) 可以看出, 振荡的时间周期随着系统逐渐靠近奇异点的位置也逐渐上升.

图 1(c) 给出了在宇称-时间对称性被破坏的相区域 ($a > 1$) 的量子态间的可区分性随着时间的演化. 可以看出, 可区分性随时间呈现指数衰减的趋势. 若使用函数 $D(t) = D(0)\mathrm{e}^{-t/\tau}$ 对数据进行拟合, 其中 $D(0)$ 为常数, τ 为弛豫时间, 可以发现弛豫时间随着系统接近奇异点而增加[40]. 在奇异点的位置 ($a = 1$), 可区分性在长时间限制内可以表现出幂律的行为. 如图 2 所示, 将计算的数据使用函数 xt^{-y} 进行拟合, 可以得到量子态间的可区分性展示出的幂律行为是 $D(t) \sim t^{-2}$, 这与解析结果是完全符合的[46].

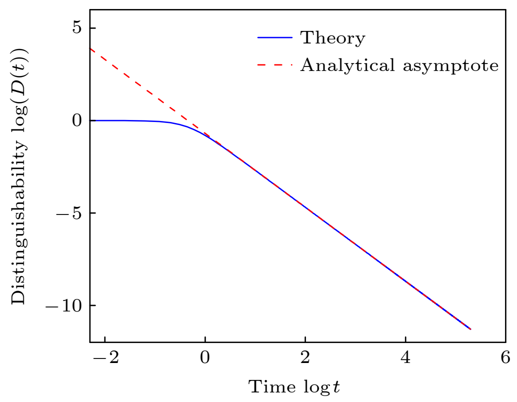


图 2 在宇称-时间对称的两能级系统在奇异点处 ($a = 1$), 量子态的可区分性的幂律行为
Fig. 2. Power-law behavior of the distinguishability of the parity-time-symmetric system at the exceptional point $a = 1$.

4 四能级系统中的信息恢复

对于满足宇称-时间对称性的系统的研究, 还大多停留在二维希尔伯特空间中. 本节主要介绍在四维希尔伯特空间中宇称-时间对称的动力学的信息恢复. 考虑一个四能级的宇称-时间对称系统[41,80–82], 其由以下哈密顿量描述:

$$\hat{H}_{\mathrm{PT}} = -J\hat{S}_x + \mathrm{i}\gamma\hat{S}_z, \tag{6}$$

其中 $\hat{S}_x$ 和 $\hat{S}_z$ 为 SU(2) 群的自旋–3/2 表示. 该哈密顿量写成矩阵表示为

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{PT}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\mathrm{i}\gamma & -\sqrt{3}J & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}J & \mathrm{i}\gamma & -2J & 0 \\ 0 & -2J & -\mathrm{i}\gamma & -\sqrt{3}J \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}J & -3\mathrm{i}\gamma \end{pmatrix}. \tag{7}$$

该四能级系统的基态为计算基 $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$. 该哈密顿量与反线性的宇称-时间算符对易, 其中宇称算符为 antidiag$(1,1,1,1)$ 且时间反演算符由它的复共轭给出. (7) 式中前两个计算模代表增益, 后两个计算模代表损失. 宇称-时间对称哈密顿量的本征能量可以表示为 $\lambda_k = \{-3/2, -1/2, +1/2, +3/2\}\sqrt{J^2-\gamma^2}$, ($k = 1,2,3,4$), 在 $\gamma = J$ 的位置产生四阶奇异点, 表示有4个本征值与4个本征态都是简并的. 该宇称-时间对称的哈密顿量 $\hat{H}_{\mathrm{PT}}$ 的能量间隙为 $\varDelta = \sqrt{J^2-\gamma^2}$, 因此在 $\gamma < J$ 时, 系统位于宇称-时间对称性保持的相区域, 在 $\gamma > J$ 时, 系统的宇称-时间对称性被打破. 为了衡量在四能级系统中的信息流动, 选择初态 $\rho_1 = 1/2(|1\rangle + |2\rangle)(\langle 1| + \langle 2|)$ 和 $\rho_2 = 1/2(|3\rangle + |4\rangle)(\langle 3| + \langle 4|)$. 依然可以通过通过 (2) 式计算两个态随时间演化的可区分性.

如图 3(a) 和图 3(b) 所示, 选择参数 $J = 1$, 对于系统处于幺正演化的情况 ($\gamma = 0$), 量子态之间的可区分性始终为1, 也就意味着系统的信息没有流失. 在宇称-时间对称性保持的相区域 ($\gamma < J$), 与二能级系统中展示的宇称-时间对称的动力学过程相同, 量子态之间的可区分性呈现出周期性振荡的现象, 这种现象也标志着系统流入环境的信息会完全恢复. 随着系统逐渐逼近奇异点, 振荡的周期也是逐渐变长, 并且信息恢复的程度也在变大. 图 3(c) 表示量子态之间的可区分性随着时间的增加一直在衰减. 当接近奇异点时, 量子态的可区分性渐进地表现为 $D \sim 1/t^2$. 如图 4 所示, 在奇异点的位置 ($\gamma = J$), 量子态之间的可区分性在长时间的演化后表现出幂律行为. 将计算结果使用函数 xt^{-y} 进行拟合, 可以得到在奇异点处, 量子态的可区分性表现出的幂律行为是 $D \sim 1/t^2$.

由于线性增益放大器中噪声的量子限制[83], 不可能在量子领域中创建具有平衡增益和损失的量子系统[84]. 奇异点的简并现象也可以在具有模式选择损失的耗散系统中实现. 这种被动的宇称-时间对称系统已经在量子领域实现, 如单光子[85–88]、

超冷原子[36]、超导传输子[89]. 基于以上基础, 针对本文提出的高维希尔伯特空间中的信息恢复与临界性的方案, 也可以借助单光子光源去实现耗散系统[90–96], 从而观测到宇称-时间对称动力学演化的临界现象.

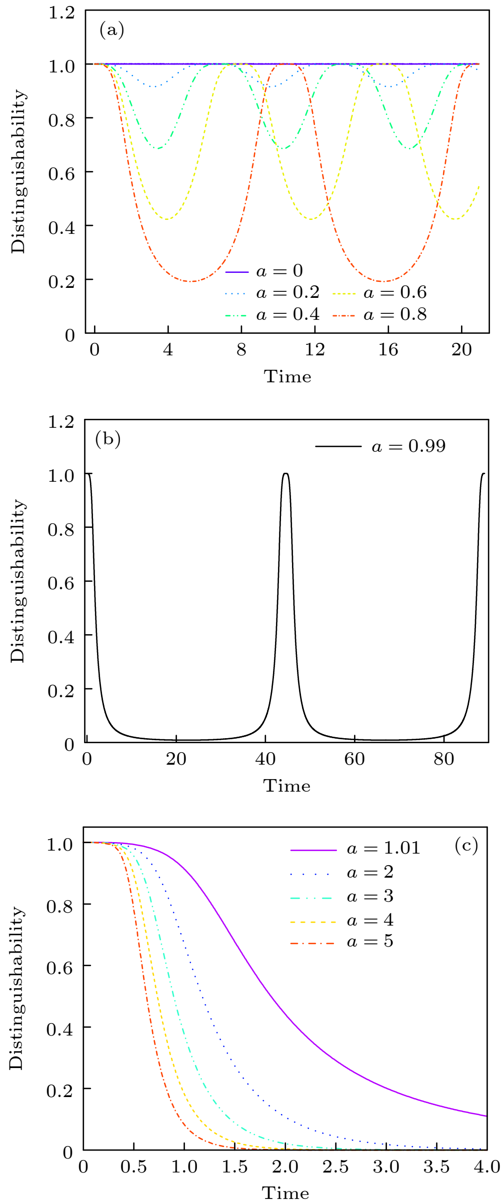


图 3 宇称-时间对称的四能级系统的信息流动 (a), (b) 在宇称-时间对称保持的区域 ($\gamma < J$), 量子态的可区分性表现出周期性振荡, 当逐渐靠近奇异点 ($\gamma = J$) 时, 信息恢复的周期会变长; (c) 在宇称-时间对称性被破坏的区域 ($\gamma > J$), 量子态的可区分性在一直在衰减

Fig. 3. Information flow in the parity-time-symmetric four-level system: (a), (b) The distinguishability oscillates with period in the parity-time-unbroken phase ($\gamma < J$). When approaching the exceptional point ($\gamma = J$), the period of the information retrieval. (c) The distinguishability between quantum states is declining in the parity-time-symmetry-broken regime ($\gamma > J$).

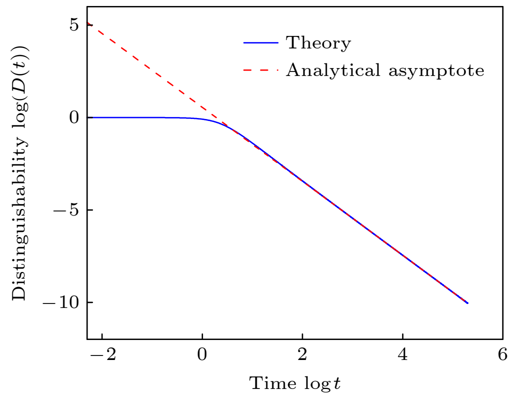


图 4 在宇称-时间对称的四能级系统在奇异点处 ($\gamma = J$), 量子态的可区分性的幂律行为.

Fig. 4. Power-law behavior of the distinguishability of the parity-time-symmetric system at the exceptional point $\gamma = J$.

5 总结和展望

高维的宇称-时间对称系统可以视为两个或者多个最小的非厄米量子系统的组合, 为宇称-时间对称性与奇异点简并性的相互作用的量子模型提供了一个新的起点. 本文发现流入环境中的信息可以在高维的宇称-时间对称系统中恢复. 在非厄米动力学过程中, 奇异点扮演着临界点的角色, 当系统穿越该点时, 信息流动的可逆性变为不可逆, 反之亦然. 在临界点的周围, 量子态间的可区分性这一物理量表现出幂律行为. 并且使用量子态的可区分性统一量化了低维与高维宇称-时间对称系统中的信息流动. 这些发现可能在量子控制中找到新的应用.

参考文献

[1] Chen X Y, Zhang N N, He W T, et al. 2022 *npj Quantum Inf.* **8** 22
[2] Zou D, Chen T, He W, et al. 2021 *Nat. Commun.* **12** 7201
[3] Wu T, Zhang W, Zhang H, et al. 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 083901
[4] Yang Z, Zhang K, Fang C, Hu J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 226402
[5] Zhang K, Yang Z, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
[6] Yang Z, Chiu C K, Fang C, Hu J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 186402
[7] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
[8] Pan L, Chen X, Chen Y, Zhai H 2020 *Nat. Phys.* **16** 767
[9] Zhou Z, Yu Z 2019 *Phys. Rev. A* **99** 043412
[10] Zeng Q B, Yang Y B, Xu Y 2020 *Phys. Rev. B* **101** 020201(R)
[11] Wang X R, Guo C X, Kou S P 2020 *Phys. Rev. B* **101** 121116(R)
[12] Guo C X, Wang X R, Kou S P 2020 *Phys. Rev. B* **101** 144439
[13] Zhang S, Jin L, Song Z 2022 *Chin. Phys. B* **31** 010312

[14] Guo C X, Liu C H, Zhao X M, Liu Y, Chen S 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 116801
[15] Liu Y, Zhou Q, Chen S 2021 *Phys. Rev. B* **104** 024201
[16] Cui D, Li T, Li J, Yi X 2021 *New J. Phys.* **23** 123037
[17] Lin G, Zhang S, Hu Y, Niu Y, Gong J, Gong S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 033902
[18] Yang X, Cao Y, Zhai Y 2022 *Chin. Phys. B* **31** 010308
[19] Ding P, Yi W 2022 *Chin. Phys. B* **31** 010309
[20] Zhao X M, Guo C X, Kou S P, Zhuang L, Liu W M 2021 *Phys. Rev. B* **104** 205131
[21] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
[22] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401
[23] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
[24] Heiss W D 2012 *J. Phys. A* **45** 444016
[25] Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Musslimani Z H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 103904
[26] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
[27] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* **488** 167
[28] Schindler J, Li A, Zheng M C, Ellis F M, Kottos T 2011 *Phys. Rev. A* **84** 040101(R)
[29] Bender C M, Berntson B K, Parker D, Samuel E 2013 *Am. J. Phys.* **81** 173
[30] Lin Z, Ramezani H, Eichelkraut T, Kottos T, Cao H, Christodoulides D N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 213901
[31] Liu Z P, Zhang J, Özdemir S K, et al. 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 110802
[32] Gao T, Estrecho E, Bliokh K Y, et al. 2015 *Nature* **526** 554
[33] Graefe E M, Korsch H J, Niederle A E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 150408
[34] Chen S L, Chen G Y, Chen Y N 2014 *Phys. Rev. A* **90** 054301
[35] Yin S, Huang G Y, Lo C Y, Chen P 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 065701
[36] Li J, Harter A K, Liu J, de Melo L, Joglekar Y N, Luo L 2019 *Nat. Commun.* **10** 855
[37] Xiao L, Zhan X, Bian Z, et al. 2017 *Nat. Phys.* **13** 1117
[38] Wang K, Qiu X, Xiao L, et al. 2019 *Nat. Commun.* **10** 2293
[39] Xiao L, Qu D, Wang K, et al. 2021 *PRX Quantum* **2** 020313
[40] Xiao L, Wang K, Zhan X, et al. 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 230401
[41] Bian Z, Xiao L, Wang K, et al. 2020 *Phys. Rev. A* **102** 030201(R)
[42] Bian Z, Xiao L, Wang K, et al. 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 022039(R)
[43] Xiao L, Deng T, Wang K, Wang Z, Yi W, Xue P 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 230402
[44] Zurek W H 2003 *Rev. Mod. Phys* **75** 715
[45] de Vega I, Alonso D 2017 *Rev. Mod. Phys* **89** 015001
[46] Kawabata K, Ashida Y, Ueda M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 190401
[47] Misra B, Sudarshan E C G 1977 *J. Math. Phys.* **18** 756
[48] Itano W M, Heinzen D J, Bollinger J J, Wineland D J 1990 *Phys. Rev. A* **41** 2295
[49] Facchi P, Pascazio S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 080401
[50] Viola L, Lloyd S 1998 *Phys. Rev. A* **58** 2733
[51] Viola L, Knill E, Lloyd S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2417
[52] Viola L, Lloyd S, Knill E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4888
[53] Palma G M, Suominen K A, Ekert A K 1996 *Proc. R. Soc. A* **452** 567
[54] Zanardi P, Rasetti M 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 3306
[55] Duan L M, Guo G C 1998 *Phys. Rev. A* **57** 737
[56] Lidar D A, Chuang I L, Whaley K B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 2594
[57] Lidar D A, Bacon D, Whaley K B 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4556
[58] Knill E, Laflamme R, Viola L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2525
[59] Beige A, Braun D, Tregenna B, Knight P L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1762
[60] Brody D C, Graefe E M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 230405
[61] Nielsen M A, Chuang I L 2010 *Quantum Computation and Quantum Information* (New York: Cambridge University Press) pp403–409
[62] Fuchs C A, van de Graaf J 1999 *IEEE Trans. Inf. Theory* **45** 1216
[63] Gilchrist A, Langford N K, Nielsen M A 2005 *Phys. Rev. A* **71** 062310
[64] Ruskai M B 1994 *Rev. Math. Phys.* **06** 1147
[65] Erez N, Gordon G, Nest M, Kurizki G 2008 *Nature* **452** 724
[66] Wolf M M, Eisert J, Cubitt T S, Cirac J I 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 150402
[67] Breuer H P, Laine E M, Piilo J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 210401
[68] Laine E M, Piilo J, Breuer H P 2010 *Phys. Rev. A* **81** 062115
[69] Rivas A, Huelga S F, Plenio M B 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 050403
[70] Luo A, Fu S, Song H 2012 *Phys. Rev. A* **86** 044101
[71] Chruściński D, Maniscalco S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 120404
[72] Chruściński D, Macchiavello C, Maniscalco S 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 080404
[73] Breuer H P, Laine E M, Piilo J, Vacchini B 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 021002
[74] Wolf M M, Cirac J I 2008 *Commun. Math. Phys.* **279** 147
[75] Hou S C, Yi X X, Yu S X, Oh C H 2011 *Phys. Rev. A* **83** 062115
[76] Lu X M, Wang X, Sun C P 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042103
[77] Jiang M, Luo S 2013 *Phys. Rev. A* **88** 034101
[78] Lorenzo S, Plastina F, Paternostro M 2013 *Phys. Rev. A* **88** 020102
[79] Tang J S, Wang Y T, Yu S, et al. 2016 *Nat. Photonics* **10** 642
[80] Hodaei H, Hassan A U, Wittek S, et al. 2017 *Nature* **548** 187
[81] Graefe E M, Günther U, Korsch H J, Niederle A E 2008 *J. Phys. A* **41** 255206
[82] Quiroz-Juárez M A, Perez-Leija A, Tschernig K, et al. 2019 *Photonics Res.* **7** 862
[83] Caves C M 1982 *Phys. Rev. D* **26** 1817
[84] Scheel S, Szameit A 2018 *Europhys. Lett.* **122** 34001
[85] Wang K, Qiu X, Xiao L, et al. 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 020501
[86] Zhan X, Xiao L, Bian Z, et al. 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 130501
[87] Xiao L, Deng T S, Wang K, et al. 2020 *Nat. Phys.* **16** 761
[88] Klauck F, Teuber L, Ornigotti M, Heinrich M, Scheel S, Szameit A 2019 *Nat. Photonics* **13** 883
[89] Naghiloo M, Abbasi M, Joglekar Y N, Murch K W 2019 *Nat. Phys.* **19** 1232
[90] Zhan X, Wang K, Xiao L, et al. 2020 *Phys. Rev. A* **101** 010302(R)
[91] Xue P 2022 *Chin. Phys. B* **31** 010311
[92] Xue P, Sanders B C, Leibfried D 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 183602
[93] Wang K, Xiao L, Budich J C, Yi W, Xue P 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 026404
[94] Wang K, Li T, Xiao L, Han Y, Yi W, Xue P 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 270602
[95] Wang X, Xiao L, Qiu X, Wang K, Yi W, Xue P 2018 *Phys. Rev. A* **98** 013835
[96] Xiao L, Qiu X, Wang K, et al. 2018 *Phys. Rev. A* **98** 063847

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Information retrieval and criticality in high-dimensional parity-time-symmetric systems*

Qu Deng-Ke[1)2)†] Fan Yi[3)] Xue Peng[2)‡]

1) (*Department of Physics, Southeast University, Nanjing* 211189, *China*)

2) (*Beijing Computational Science Research Center, Beijing* 100084, *China*)

3) (*The Army Infantry Academy of PLA, Shijiazhuang* 050083, *China*)

(Received 22 March 2022; revised manuscript received 6 April 2022)

Abstract

Recently, impressive progress has been made in the study of non-Hermitian systems with parity-time symmetry, such as observations of topological properties of physical systems and criticality at exceptional points. A crucial aspect of parity-time symmetric nonunitary dynamics is the information flow between the system and the environment. In this paper, we use the physical quantity, distinguishability between quantum states, to uniformly quantify the information flow between low-dimensional and high-dimensional parity-time symmetric non-Hermitian systems and environments. The numerical results show that the oscillation of quantum state distinguishability and complete information retrieval and can be obtained in the parity-time-unbroken phase. However, the information decays exponentially in the parity-time-broken phase. The exceptional point marks the criticality between reversibility and irreversibility of information flow, and the distinguishability between quantum states exhibits the behavior of power-law decay. Understanding these unique phenomena in nonunitary quantum dynamics provides an important perspective for the study of open quantum systems and contributes to their application in quantum information.

Keywords: non-Hermitian, parity-time symmetry, information retrieval, distinguishability

PACS: 03.65.Vf, 03.65.Aa, 02.50.Ga, 02.60.Cb **DOI:** 10.7498/aps.70.20220511

* Project supported by the National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China (Grant No. 12025401) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. U1930402, 12088101).

† Corresponding author. E-mail: dkqu@seu.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: gnep.eux@gmail.com

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

非厄米镶嵌型二聚化晶格

侯博 曾琦波

Non-Hermitian mosaic dimerized lattices

Hou Bo Zeng Qi-Bo

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 130302 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220890

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20220890

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

三聚化非厄密晶格中具有趋肤效应的拓扑边缘态

Topological edge states with skin effect in a trimerized non-Hermitian lattice

物理学报. 2019, 68(10): 104206 https://doi.org/10.7498/aps.68.20190112

广义布里渊区与非厄米能带理论

Generalized Brillouin zone and non-Hermitian band theory

物理学报. 2021, 70(23): 230307 https://doi.org/10.7498/aps.70.20211908

非厄米局域拓扑指标的动力学特性

Dynamics of non-Hermitian local topological marker

物理学报. 2021, 70(23): 230309 https://doi.org/10.7498/aps.70.20211576

纳米机械谐振器耦合量子比特非厄米哈密顿量诱导的声子阻塞

Phonon blockade induced by a non-Hermitian Hamiltonian in a nanomechanical resonator coupled with a qubit

物理学报. 2019, 68(11): 114203 https://doi.org/10.7498/aps.68.20182263

周期驱动的二能级系统中的准宇称-时间对称动力学

Quasi-parity-time symmetric dynamics in periodically driven two-level non-Hermitian system

物理学报. 2022, 71(7): 074207 https://doi.org/10.7498/aps.70.20220270

专题: 非厄米物理前沿

非厄米镶嵌型二聚化晶格*

侯博　曾琦波†

(首都师范大学物理系, 北京 100048)

(2022 年 5 月 6 日收到; 2022 年 5 月 30 日收到修改稿)

非厄米系统近年来受到了物理学相关领域研究人员的大量关注. 非厄米因素的存在往往会带来许多在厄米系统中不存在的新奇效应. 本文引入一类新的非厄米晶格系统——非厄米镶嵌型二聚化晶格. 在这一模型中, 交替变化的非对称跃迁被等间距地施加在某些相邻格点的跃迁项中. 研究结果表明, 随着非对称跃迁强度的增大, 系统在开边界条件下的能谱会从实数变为复数. 此外, 系统中的非厄米趋肤效应和不同边界条件下的能谱性质会受到镶嵌型调制周期的影响. 当这一调制周期为奇数时, 系统中不存在非厄米趋肤效应, 且其能谱在开放和周期边界条件下是一样的(拓扑边界态除外); 而当镶嵌型调制周期为偶数时, 系统中存在非厄米趋肤效应, 且其能谱在不同的边界条件下具有完全不同的结构. 本文进一步研究了这类系统中的拓扑零能边界态, 并计算了 Berry相位对其进行表征. 本研究揭示了镶嵌型非对称跃迁对系统性质的影响, 拓展了非厄米系统这一领域的相关研究.

关键词: 非厄米系统, 镶嵌型非对称跃迁, 非厄米趋肤效应, 拓扑零能边界态

PACS: 03.65.Vf, 03.65.Yz, 68.65.Cd, 71.23.An　　**DOI:** 10.7498/aps.71.20220890

1 引　言

非厄米系统在过去二三十年中引起了研究人员的广泛关注[1–5]. 在所研究的系统中, 如果要进一步考虑系统与外部环境的相互作用或者影响, 可以在系统的哈密顿量中引入非厄米项, 如物理增益或者损耗等. 非厄米哈密顿量在光学、冷原子系统等经典和量子系统中均有广泛应用[6–25]. 不同于传统的厄米系统中系统能量始终为实数, 非厄米系统的能量往往是复数. 复数能谱在复能量平面中能表现出更为丰富的能带结构特征, 如点能隙 (point gap) 和线能隙 (line gap)[26]、环状能隙 (loop gap)[27,28] 等. 如果系统哈密顿量具有 PT 对称性[29–31] 或者赝厄米性[32–35], 其能谱也可以为实数.

近年来, 具有非对称跃迁的非厄米系统掀起了新一轮的研究热潮[36–38]. 在格点模型中, 非对称跃迁是指相同的两个格点之间的跃迁在不同方向具有不同的强度. 例如, 在一维 Hanato-Nelson (HN) 模型中[39], 粒子向前跃迁与向后跃迁的跃迁振幅不同, 从而导致系统的哈密顿量不再是厄米的. 具有非对称跃迁的系统中往往存在非厄米趋肤效应 (non-Hermitian skin effect), 即在开边界条件下, 系统的本征态不再分布于整个系统中, 而是被局域在系统的边界上[40,41]. 由于非厄米趋肤效应的存在, 这类系统的能谱对于边界条件的变化十分敏感[42], 从而为设计新型的传感器件提供了新的思路和灵感[43–45]. 此外, 非厄米趋肤效应对拓扑态也有重要影响, 会破坏传统的厄米拓扑系统中的体-边界对应原理[40,41], 这一效应也使得非厄米拓扑系统在最近几年中得到了深入的研究[45–52]. 近期的研究表明, 非厄米趋肤的拓扑起源为系统在周期边界条件

* 北京市教育委员会科学研究计划项目 (批准号: KM202210028017), 低维量子物理国家重点实验室开放研究基金 (批准号: KF202109) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zengqibo@cnu.edu.cn

下存在的点状能谱[53,54]. 另一方面, 非对称跃迁对无序或准周期系统中的安德森局域化现象 (Anderson localization) 也有重要影响[39,55], 其存在往往会引起退局域化效应 (delocalization effect)[26,56–59].

目前为止, 有关非对称跃迁的系统的研究主要集中在将非对称跃迁施加在所有的跃迁项上. 最近, 研究人员提出了镶嵌型晶格模型, 发现在将周期调制等间距地施加在某些格点上, 系统中会出现迁移率边等有趣的现象[60]. 类似地, 当调制项等间距地施加到跃迁项中时, 系统的拓扑态和局域化等也会受到影响[61,62].

本文研究一维非厄米镶嵌型二聚化晶格模型. 在这类系统中, 交替变化的非对称跃迁被等间距地施加在跃迁项中. 计算结果表明, 在跃迁项均为实数的情形下, 系统的能谱可以在一定的参数范围内保持为实数. 随着非对称跃迁强度的增大, 系统在开边界条件下的能谱会从实数变为复数. 此外, 系统的能谱性质和非厄米趋肤效应会受到镶嵌型调制周期的影响. 本文进一步研究了这类系统中的拓扑零能边界态并在非布洛赫能带理论的基础上, 计算了贝里相位对其进行表征. 本研究工作引入了一类新型的非厄米格点模型, 进一步揭示了非厄米系统的新奇特性.

2 非厄米镶嵌型二聚化晶格模型

2.1 模型哈密顿量

考虑具有最近邻跃迁的一维格点模型, 其中非对称跃迁被等距离的施加在某些相邻格点的跃迁项中, 如图 1 所示. 系统的哈密顿量如下:

$$H=\sum_j\left[tc_j^\dagger c_{j+1}+tc_{j+1}^\dagger c_j\right]+\sum_{j=s\kappa}\left[(-1)^j\lambda c_j^\dagger c_{j+1}-(-1)^j\lambda c_{j+1}^\dagger c_j\right],\quad(1)$$

其中, $c_j^\dagger(c_j)$为格点j处的粒子产生 (湮灭) 算符. t为相邻格点间的跃迁振幅, λ为格点间的非对称跃迁强度. 本文取$t=1$作为能量单位且所有参数均为实数. κ为正整数, 代表了镶嵌型调制的周期; s的取值也为正整数, 表明非对称跃迁每隔κ个格点施加在跃迁振幅中. 由于非对称跃迁是正负交替变化的, 这一模型具有二聚化晶格的特征.

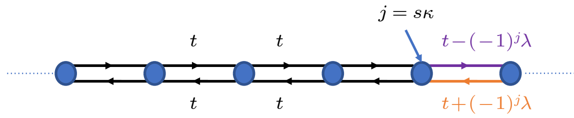


图 1 具有镶嵌型非对称跃迁的一维非厄米二聚化晶格示意图. 第 $s\kappa$ 个格点和第 $s\kappa+1$ 格点之间的跃迁振幅是不对称的, 为$t\pm(-1)^j\lambda$

Fig. 1. Schematic of the one-dimensional non-Hermitian mosaic dimerized lattice with asymmetric hopping. The backward and forwardward hopping amplitudes between the $s\kappa$-th and $s\kappa$+1-th sites are $t\pm(-1)^j\lambda$, which are asymmetric.

2.2 有向性 IPR(directional, IPR)

由于模型中存在非对称跃迁, 可以预期系统中将存在非厄米趋肤效应. 在这一效应的影响下, 系统在开边界条件下的体态都会被局域在一维格点系统的两端. 系统本征态的局域性质可以通过计算其 IPR(inversion participation ratio) 来进行判断. IPR 的定义为

$$\mathrm{IPR}(\varPsi_n^R)=\sum_{j=1}^{L}\frac{|\varPsi_{n,j}^R|^4}{(\langle\varPsi_n^R\mid\varPsi_n^R\rangle)^2},\quad(2)$$

其中, $\varPsi_n^R$为系统的右本征矢且满足薛定谔方程$H\varPsi_n^R=E_n\varPsi_n^R$. L为系统的格点数. 当$\varPsi_n^R$为扩展态时, 其 IPR 值趋于 0; 而如果$\varPsi_n^R$为局域态, 则其 IPR 为一接近 1 的有限值. 为了区分不同参数条件下, 系统本征态被局域在不同边界处的趋肤效应, 在 IPR 的基础上引入有向性 IPR, 即 dIPR[36]. 其定义为

$$\mathrm{dIPR}(\varPsi_n^R)=P(\varPsi_n^R)\sum_{j=1}^{L}\frac{|\varPsi_{n,j}^R|^4}{(\langle\varPsi_n^R|\varPsi_n^R\rangle)^2},\quad(3)$$

式中的$P(\varPsi_n^R)$的定义为

$$P(\varPsi_n^R)=\mathrm{sgn}\left[\sum_{j=1}^{L}\left(j-\frac{L}{2}-\delta\right)|\varPsi_{n,j}^R|\right],\quad(4)$$

sgn(x)给出了变量x的符号: 当$x>0$时为正, 当$x<0$则为负. δ为正数且取值为$0<\delta<0.5$. $P(\varPsi_n^R)$给出了本征态$\varPsi_n^R$分布在系统的左半部分还是右半部分的信息, 因而可以反映在非厄米趋肤效应下, 本征态是被局域在一维格点系统的左端还是右端. 当 dIPR >0 时, 说明该本征态局域在系统的右端; 而如果 dIPR <0, 则意味着该本征态局域在系统的左端. 由此可见, 可以用 dIPR 来有效地对一维格点系统中的非厄米趋肤效应进行区分.

3 本征能谱、非厄米趋肤效应和拓扑零能态

3.1 本征能谱

首先考察一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在不同边界条件下的本征能谱. 图 2 给出了在开边界条件下, 具有不同周期 (即κ) 的镶嵌型非对称跃迁的二聚化晶格的本征能谱作为非对称跃迁强度λ的函数图像. 从能谱的虚部 (图 2 下半部分) 可以看出, 当非对称跃迁强度$|\lambda|<t$时, 系统的本征能量为实数, 因而系统在这一参数区域内具有纯实数能谱. 随着$|\lambda|$的增大, 系统的能谱不再保持为实数. 当$\kappa=1$时, 非对称跃迁被施加在所有的跃迁项上, 可以发现系统的能量在$|\lambda|>t$变为纯虚数, 因此系统的能谱在$|\lambda|=t$处经历了实数能谱到虚数能谱的变化. 而对于镶嵌型调制的情况而言 ($\kappa>1$), 系统的能谱在$|\lambda|>t$时变为复数. 因此, 在开边界条件下, 随着非对称跃迁的增强, 系统的能谱会从实数变为虚数或复数, 且发生这一变化的临界点为$|\lambda|=t$.

接下来讨论系统在周期边界条件下的能谱性质, 数值计算结果如图 3 所示. 通过与图 2 中开边界条件下的能谱进行比较可知, 当$\kappa=1$和3时, 系统的能谱在不同边界条件下具有相同的结构 (边界态除外), 且能谱在$|\lambda|<t$的参数范围内均为实数. 而当$\kappa=2$和 4 时, 系统在周期边界条件和开边界条件下的能谱结构则完全不同, 且在周期边界条件下, 系统能谱在$\lambda\neq 0$时即变成复数. 通过进一步计算其他镶嵌调制周期κ下的能谱, 发现当κ为奇数时, 系统在开边界和周期边界条件下的能谱是相同的 (除边界态外, 见后文讨论); 而如果κ是偶数, 则系统在不同边界条件下的能谱具有十分不同的结构, 与常规的具有非对称跃迁的晶格模型的能谱特征类似.

3.2 非厄米趋肤效应

下面研究一维非厄米镶嵌型二聚化晶格系统中的非厄米趋肤效应. 图 2 中, 数据点的颜色代表各个能量本征值所对应本征态的 dIPR 值. 由 dIPR 的定义 ((2) 式)可知, 当 dIPR < 0 时, 对应的本征态被局域在晶格的左端; 而如果 dIPR > 0, 则该本征态局域在晶格的右端. 从图 4 中可以发现, 在κ为奇数时, 所有体态的 dIPR 值都趋于 0, 意味着这些体态均为扩展态, 系统中没有趋肤效应. 当κ为偶数时, 体态的 dIPR 在$\lambda<0$的区域为正, 而在$\lambda>0$的区域为负. 此时, 对应的本征态分别局域在一维晶格的右端和左端, 如图 4(a) 所示. $\lambda=0$时, 系统中不存在非对称跃迁, 因而没有趋肤效应. 为了更直观表征趋肤效应在不同镶嵌型调制

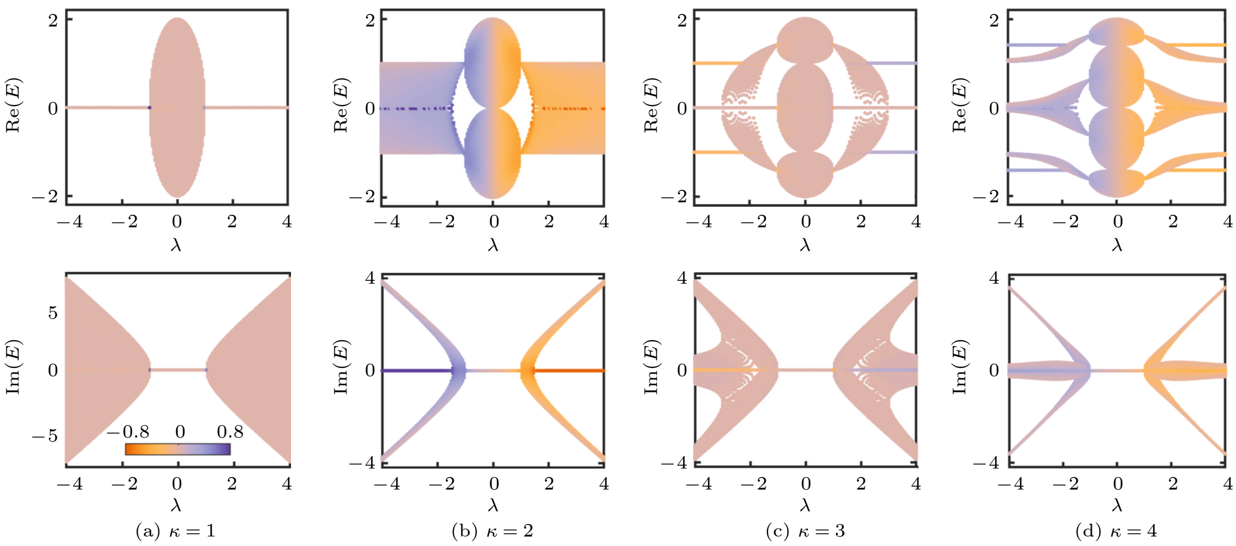


图 2 具有不同镶嵌型调制的一维非厄米二聚化晶格模型在开边界条件下的本征能谱. 上半部分为能谱实部, 下半部分为能谱虚部; 图中的颜色代表该能量对应的本征态的 dIPR 值; 系统大小为 $L=120$

Fig. 2. The eigenenergy spectra of the 1D non-Hermitian dimerized lattices with different mosaic modulations. The upper panel shows the real parts of the spectra while the lower panel shows the imaginary parts, the colorbar indicates the dIPR value of the eigenstate, the lattice size is $L=120$.

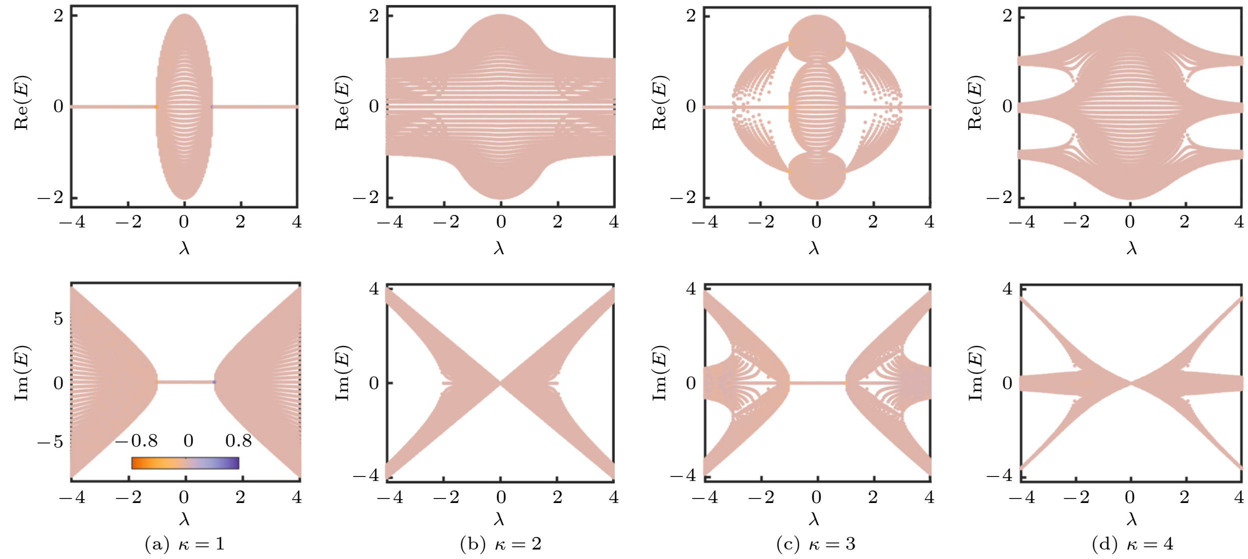


图 3 一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在周期性边界条件下的本征能谱

Fig. 3. The eigenenergy spectra of the 1D non-Hermitian mosaic dimerized lattices under periodic boundary conditions.

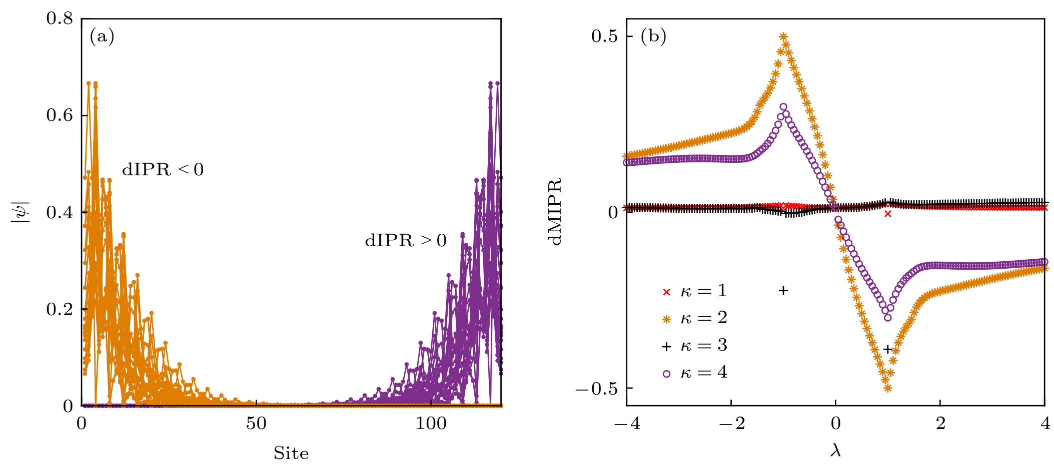


图 4 具有非对称跃迁的一维镶嵌型二聚化晶格中的非厄米趋肤效应 (a) 在开边界条件下, 当本征态的 dIPR >0(dIPR <0) 时, 体态将局域在一维系统的右端 (左端); (b) 系统的 dMIPR 值在不同的镶嵌型调制周期下的变化

Fig. 4. The non-Hermitian skin effect in the 1D mosaic dimerized lattices with asymmetric hopping: (a) Under open boundary conditions, the bulk eigenstates with dIPR >0(dIPR <0) will be localized at the right (left) end of the lattice; (b) the variations of dMIPR for the systems with different mosaic modulation.

周期下的表现, 可以计算 dIPR的平均值, 即 dMIPR, 其定义为

$$\mathrm{dMIPR}=\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{L}\mathrm{dIPR}(\Psi_n). \tag{5}$$

图 4(b) 给出了 dMIPR 作为λ的函数图像. 从图中可以看到, 在κ为奇数时, dMIPR 始终在 0 附近, 表明系统中不存在趋肤效应; 而当κ是偶数时, dMIPR 则为有限值, 且在$\lambda=0$处由正值变为负值, 对应于非厄米趋肤效应发生方向的改变.

非厄米趋肤效应在不同镶嵌型调制周期下的不同表现也可以在能谱中反映出来 (见图 2 和 3). 之前的研究已表明, 非厄米趋肤效应与系统在周期边界条件下能谱中的点能隙有关[53,54]. 图 5 也给出了系统在$\lambda=1.5$时的能谱. 可以看到, 在没有趋肤效应的系统中 (即$\kappa=1,3$), 不同边界条件下本征能量在复平面的分布是基本重合的, 且周期边界条件下的能谱没有环状结构, 即不存在点能隙. 但在$\kappa=2,4$的系统中, 其周期边界下的能谱形成环状结构, 存在点能隙, 对应开边界下具有趋肤效应这一特征.

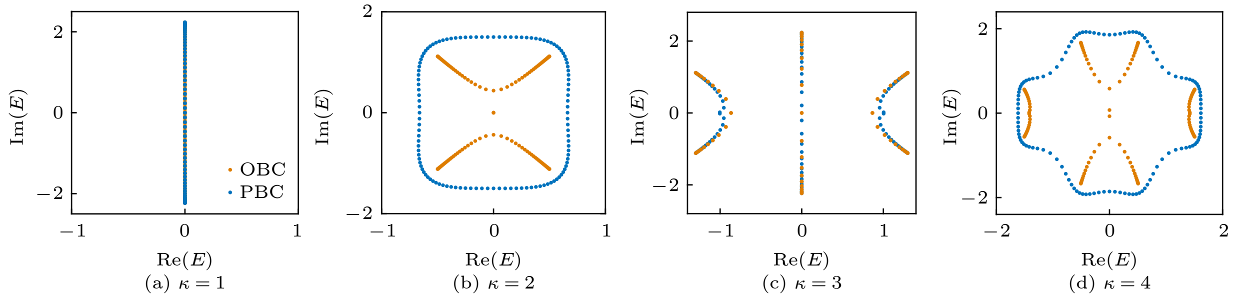


图 5 在 $\lambda=1.5$ 时, 系统在不同边界条件下的能谱. 棕色代表开边界条件 (OBC) 下的能谱, 蓝色代表周期边界条件 (PBC) 下的能谱

Fig. 5. The energy spectra under different boundary conditions of the system with $\lambda=1.5$. The brown dots represent the spectra under OBC and the blue dots represent the spectra under PBC.

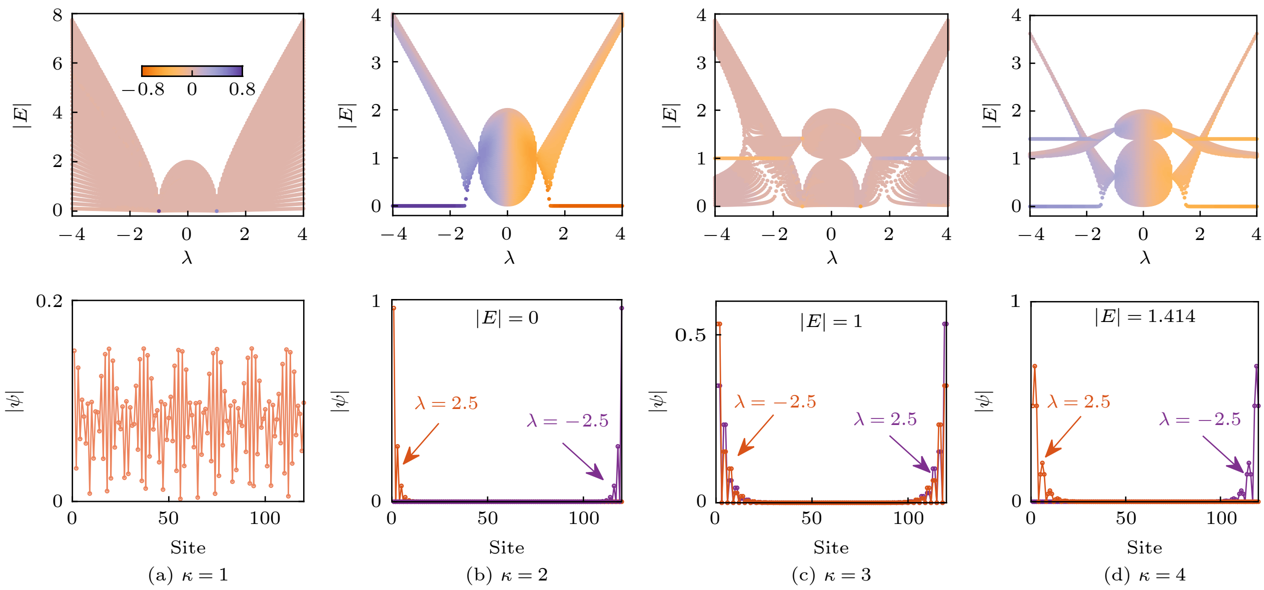


图 6 一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在开边界条件下能谱的绝对值 (上图), 图中的颜色代表该能量对应的本征态的 dIPR 值, 系统的大小为 $L=120$; 不同 κ 值下, 系统的本征态的空间分布 (下图), $\kappa=1$ 时, 系统的本征态都为扩展态; $\kappa=2$ 和 4 时, 系统中存在局域在边界上的零能拓扑态. 此外, 在 $\kappa=3$ 和 4 时, 系统中分别存在能量为 $|E|=1$ 和 $|E|=1.414$ 的边界态

Fig. 6. The absolute values of the eigenenergies of the non-Hermitian mosaic dimerized lattices (upper), the colorbar indicates the dIPR value of the eigenstates, the lattice size is $L=120$; the distribution of eigenstates for systems with different κ values(lower), when $\kappa=1$, the eigenstates are extended. When $\kappa=2$ and 4, there are topological zero-energy edge modes in the system. In addition, in the systems with $\kappa=3$ and 4, there are also edge states with energies $|E|=1$ and $|E|=1.414$, respectively.

3.3 拓扑零能态

从图 2 的开边界能谱图可以发现, 在某些情况下, 系统中是存在拓扑边界态的. 为了更好判断系统中是否存在拓扑零能边界态, 可以计算开边界下系统能谱的绝对值, 如图 6 所示. 当 $\kappa=2$ 和 4 时, 系统存在拓扑零能边界态, 且拓扑非平庸区域与平庸区域的临界值为 $|\lambda_c|\approx 1.42$.

为表征系统中拓扑零能边界态, 可以计算系统的贝里相位. 由于存在非厄米趋肤效应, 需要使用非布洛赫能带理论 (non-Bloch band theory)[41,42]. 对于镶嵌调制周期为 κ 的格点系统, 其原胞中的格点数 q 为 2 和 κ 的最小公倍数, 即 $q=lcm(2,\kappa)$. 系统在动量空间中的布洛赫哈密顿量可以表示成一个 $q\times q$ 维的矩阵, 且其矩阵元为

$$H(k)_{mn}=\delta_{m,n-1}t_m+\delta_{m-1,n}t_n'+\delta_{m,1}\delta_{n,q}t_q'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}+\delta_{m,q}\delta_{n,1}t_q\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}. \tag{6}$$

在此基础上, 根据非布洛赫能带理论, 做如下替代: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\to\beta=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}$. 例如, 对于 $\kappa=4$ 的系统, 其哈密顿量可改写为

$$H(\beta)=\begin{pmatrix}0 & t_1 & 0 & t_4'\beta^{-1}\\ t_1' & 0 & t_2 & 0\\ 0 & t_2' & 0 & t_3\\ t_4\beta & 0 & t_3' & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & t & 0 & (t-\lambda)\beta^{-1}\\ t & 0 & t & 0\\ 0 & t & 0 & t\\ (t+\lambda)\beta & 0 & t & 0\end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中, $\beta = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}$, $r=|\beta|=\sqrt{\left|\dfrac{t_1't_2't_3't_4'}{t_1t_2t_3t_4}\right|}=\sqrt{\left|\dfrac{t-\lambda}{t+\lambda}\right|}$. 在此基础上, 定义第$n$个能带的贝里相位 (Berry phase) 为

$$A_n=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}k\frac{\langle\varPsi_n^{\mathrm{L}}(k)|\partial_k\varPsi_n^{\mathrm{R}}(k)\rangle}{\langle\varPsi_n^{\mathrm{L}}(k)|\varPsi_n^{\mathrm{R}}(k)\rangle}, \quad (8)$$

其中$\varPsi_n^{\mathrm{L/R}}(k)$分别为$H(k)$的左右本征矢. 图 7 给出了$\kappa=2$和4的系统的贝里相位. 从图 7 可以看出, 在$|\lambda_c|\approx 1.42$处, 贝里相位从 0 突然跳到$\pi$, 表明系统中存在拓扑相变. 贝里相位为$\pi$的区域与开边界条件下具有零能拓扑边界态的区域一致.

除了拓扑零能边界态外, 在$\kappa=3$和4的开边界能谱中还可以看到非零能量的拓扑边界态, 且这些边界态对应的能量为常数, 不会随着λ的变化而发生改变, 如图 6(c) 和 (d) 所示.

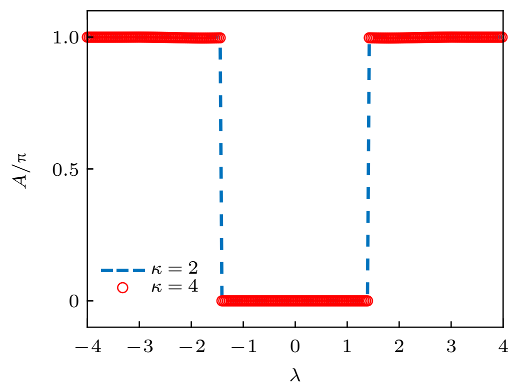
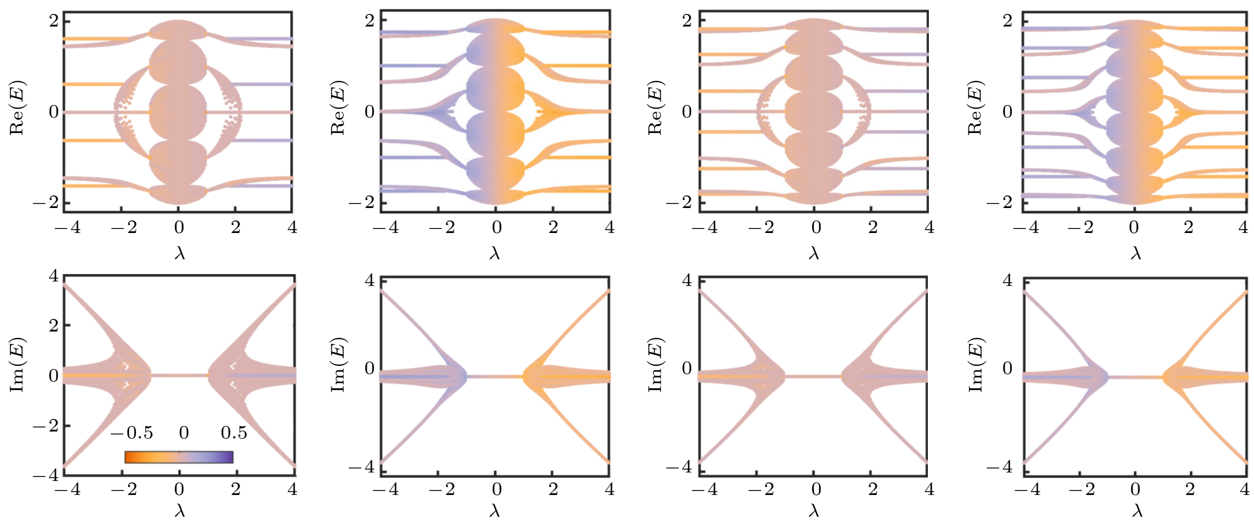


图 7 一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在$\kappa=2$(蓝色虚线) 和$\kappa=4$(红色空心圆点) 时的贝里相位. 数值结果分别是将本征能量的实部小于零的能带的贝里相位相加得到, 从而表征系统中出现的拓扑零能边界态

Fig. 7. The Berry phase for the 1 D non-Hermitian mosaic dimerized lattices with $\kappa=2$ (blue dashed line) and $\kappa=4$ (red empty circles). The numerical results are obtained by summing up the Berrry phases of the bands with the real part of the eigenenergies smaller than 0 and thus characterize the existence of topological zero modes.

4 讨论部分

从以上的讨论中可以发现, 一维非厄米镶嵌型二聚化晶格的能谱和非厄米趋肤效应与镶嵌型的非对称跃迁的周期有紧密联系. 当κ为奇数时, 系统中的非对称跃迁在不同格点处会发生正负交替变化, 使得整个系统中的非对称跃迁被抵消, 因而



(a) $\kappa=5$ (b) $\kappa=6$ (c) $\kappa=7$ (d) $\kappa=8$

图 8 具有不同κ值的一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在开边界条件下的能谱, 图中的颜色代表本征态的 dIPR 值

Fig. 8. The eigenenergy spectra of the one-dimensional non-Hermitian mosaic dimerized lattices with different κ values under open boundary conditions. The color bar indicates the of the dIPR values eigenstates.

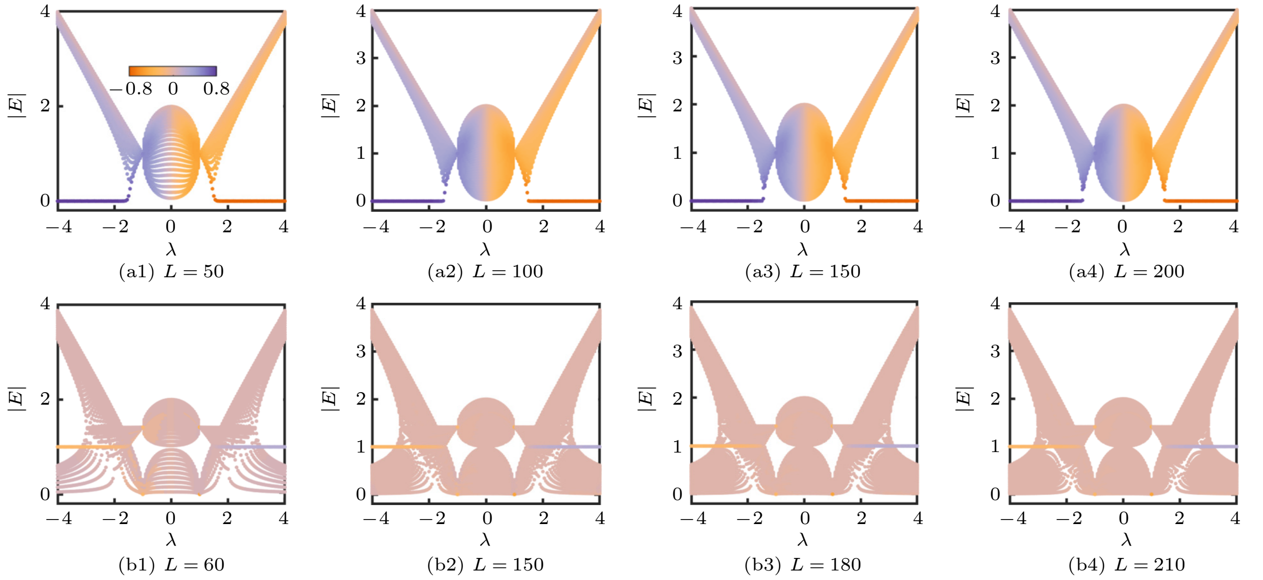


图 9 具有不同尺度的一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在开边界条件下的能谱 (a1)—(a4) 和 (b1)—(b4) 分别对应 $\kappa=2$和 3 的系统

Fig. 9. The energy spectra of the one-dimensional non-Hermitian mosaic dimerized lattices with different sizes under open boundary conditions, (a1)–(a4) and (b1)–(b4) correspond to the systems with $\kappa=2$ and 3, respectively.

表 1 具有不同κ值的一维非厄米镶嵌型二聚化晶格的性质

Table 1. The eigenenergy spectra of the one-dimensional non-Hermitian mosaic dimerized lattices with different κ values.

κ取值	非厄米趋肤效应	子晶格对称性	拓扑零能边界态
κ为奇数	无	有	无
κ为偶数	有	有	有

系统中不会出现非厄米趋肤效应. 但如果κ是偶数, 那么系统中的非对称跃迁的符号不会随格点位置发生变化, 因此系统中会出现趋肤效应, 且其能谱结构也会在不同边界条件下表现出不同的特征. 图 2 和 3 中给出了$\kappa=1,2,3,4$时的系统能谱. 为表明这一特性的普遍性, 本文进一步计算了该系统在$\kappa=5,6,7,8$时在开边界条件下的能谱, 如图 8 所示. 从本征态的 dIPR 可以看出, 非厄米趋肤效应存在与否和κ是偶数还是奇数有关. 此外, 本文还计算了非厄米镶嵌型二聚化晶格在不同尺度下的能谱, 如图 9 所示. 可以发现, 前述的研究结论不随系统尺度的变化而发生改变.

此外, 由于系统在动量空间的布洛赫哈密顿量$H(k)$是一个$q\times q$维矩阵, 而$q=lcm(2,\kappa)$, 所以q始终为偶数. 可以证明:

$$S^{-1}H(k)S=-H(k), \tag{9}$$

其中, $S=\mathrm{diag}(1,-1,1,-1,\cdots,1,-1)$是一个$q\times q$维的对角矩阵. 因此, 系统中存在子晶格对称性 (sublattice symmetry). 尽管如此, 由前述的数值结果可以发现, 只有在κ为偶数的系统中存在拓扑零能边界态, 而当κ为奇数时, 系统中不存在拓扑零能边界态. 综上, 将一维非厄米镶嵌型二聚化晶格的性质总结见表 1.

5 结 论

本文引入了一类具有镶嵌型非对称跃迁的一维晶格模型. 通过分析系统的本征能谱和本征态性质, 发现镶嵌型非对称跃迁的周期对系统的性质具有显著的影响. 当镶嵌型调制周期为奇数时, 系统中没有非厄米趋肤效应, 其本征能谱在开边界和周期边界条件下是相同的 (除拓扑边界态外). 如果镶嵌型调制周期为偶数, 那么系统中存在非厄米趋肤效应, 且本征能谱在不同的边界条件下具有完全不同的结构. 本文还分析了这类系统中的拓扑态, 讨论了系统中的拓扑零能边界态及其表征. 本研究的结果表明, 通过改变一维格点系统中的非对称跃迁的施加方式和周期, 可以改变系统中的非厄米趋肤效应以及系统中的拓扑边界态, 从而进一步揭示了

非厄米系统特别是具有非对称跃迁的非厄米系统的新奇特性.

参考文献

[1] Cao H and Wiersig J 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 61
[2] Konotop V V, Yang J, Zezyulin D A 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035002
[3] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, Musslimani Z H, Rotter S, Christodoulides D N 2018 *Nat. Phys.* **14** 11
[4] Ashida Y, Gong Z, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 3
[5] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
[6] Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Musslimani Z H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 103904
[7] Klaiman S, Günther U, Moiseyev N 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 080402
[8] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, Morandotti R, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902
[9] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
[10] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* **488** 167
[11] Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, Lu M H, Oliveira J E B, Almeida V R, Chen Y F, Scherer A 2013 *Nat. Mater.* **12** 108
[12] Peng B, Özdemir S K, Lei F, Monifi F, Gianfreda M, Long G L, Fan S, Nori F, Bender C M, Yang L 2014 *Nat. Phys.* **10** 394
[13] Wiersig J 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 203901
[14] Hodaei H, Hassan A U, Wittek S, Garcia-Gracia H, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2017 *Nature* **548** 187
[15] Chen W, Özdemir S K, Zhao G, Wiersig J, Yang L 2017 *Nature* **548** 192
[16] Brody D C, Graefe E M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 230405
[17] Lee T E, Chan C K 2014 *Phys. Rev. X* **4** 041001
[18] Li J, Harder A K, Liu J, de Melo L, Joglekar Y N, Luo L 2019 *Nat. Commun.* **10** 855
[19] Kawabata K, Ashida Y, Ueda M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 190401
[20] Hamazaki R, Kawabata K, Ueda M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 090603
[21] Xiao L, Wang K, Zhan X, Bian Z, Kawabata K, Ueda M, Yi W, Xue P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 230401
[22] Wu Y, Liu W, Geng J, Song X, Ye X, Duan C K, Rong X, Du J 2019 *Science* **364** 878
[23] Yamamoto K, Nakagawa M, Adachi K, Takasan K, Ueda M, Kawakami N 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 123601
[24] Naghiloo M, Abbasi N, Joglekar Y N, Murch K W 2019 *Nat. Phys.* **15** 1232
[25] Matsumoto N, Kawabata K, Ashida Y, Furukawa S, Ueda M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 260601
[26] Gong Z, Ashida Y, Kawabata K, Takasan K, Higashikawa S, Ueda M 2018 *Phys. Rev. X* **8** 031079
[27] Shen R, Lee C H 2021 arXiv: 2107.03414
[28] Zeng Q B, Lü R 2022 *Phys. Rev. A* **105** 042211
[29] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
[30] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401
[31] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
[32] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 205
[33] Mostafazadeh A 2010 *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **7** 1191
[34] Zeng Q B, Yang Y B, Lü R 2020 *Phys. Rev. B* **101** 125418
[35] Kawabata K, Sato M 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 033391
[36] Lee T E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 133903
[37] Lieu S 2018 *Phys. Rev. B* **97** 045106
[38] Yin C, Jiang H, Li L, Lü R, Chen S. 2018 *Phys. Rev. A* **97** 052115
[39] Hatano N, Nelson D R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 570
[40] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
[41] Yao S, Song F, Wang Z, 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 136802
[42] Xiong Y 2018 *J. Phys. Commun.* **2** 035043
[43] Budich J C, Bergholtz E J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 180403
[44] Koch F, Budich J C 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** 013113
[45] Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, Bergholtz E J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 026808
[46] Jin L, Song Z 2019 *Phys. Rev. B* **99** 081103(R)
[47] Yokomizo K, Murakami S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 066404
[48] Herviou L, Bardarson H H, Regnault N 2019 *Phys. Rev. A* **99** 052118
[49] Yang Z, Zhang K, Fang C, Hu J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 226402
[50] Zirnstein H G, Refael G, Rosenow B 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 216407
[51] Zhang Z Q, Liu H, Liu H, Jiang H, Xie X C 2022 arXiv: 2201.01577
[52] Borgnia D S, Kruchkov A J, Slager R J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 056802
[53] Okuma N, Kawabata K, Shiozaki K, Sato M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 086801
[54] Zhang K, Yang Z, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
[55] Shnerb N M, Nelson D R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5172
[56] Jiang H, Lang L J, Yang C, Zhu S L, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 054301
[57] Zeng Q B, Xu Y 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 033052
[58] Liu Y, Wang Y, Liu X J, Zhou Q, Chen S 2021 *Phys. Rev. B* **103** 014203
[59] Liu Y, Zhou Q, Chen S 2021 *Phys. Rev. B* **104** 024201
[60] Wang Y, Xia X, Zhang L, Yao H, Chen S, You J, Zhou Q, Liu X J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 196604
[61] Zeng Q B, Lü R, You L 2021 *Europhys. Lett.* **135** 17003
[62] Zeng Q B, Lü R 2021 *Phys. Rev. B* **104** 064203

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Non-Hermitian mosaic dimerized lattices*

Hou Bo Zeng Qi-Bo †

(*Department of Physics, Capital Normal University, Beijing* 100048, *China*)

(Received 6 May 2022; revised manuscript received 30 May 2022)

Abstract

Non-Hermitian systems have attracted much attention during the past few years, both theoretically and experimentally. The existence of non-Hermiticity can induce multiple exotic phenomena that cannot be observed in Hermitian systems. In this work, we introduce a new non-Hermitian system called the non-Hermitian mosaic dimerized lattice. Unlike the regular nonreciprocal lattices where asymmetric hoppings are imposed on every hopping term, here in the mosaic dimerized lattices the staggered asymmetric hoppings are only added to the nearest-neighboring hopping terms with equally spaced sites. By investigating the energy spectra, the non-Hermitian skin effect (NHSE), and the topological phases in such lattice models, we find that the period of the mosaic asymmetric hopping can influence the system's properties significantly. For a system with real system parameters, we find that as the strength of asymmetric hopping increases, the energy spectra of the system under open boundary conditions will undergo a real-imaginary or real-complex transition. As to the NHSE, we find that when the period is odd, there appears no NHSE in the system and the spectra under open boundary conditions (OBCs) and periodic boundary conditions (PBCs) are the same (except for the topological edge modes under OBCs). If the period of the mosaic asymmetric hopping is even, the NHSE will emerge and the spectra under different boundary conditions exhibit distinctive structures. The PBC spectra form loop structures, indicating the existence of point gaps that are absent in the spectra under OBCs. The point gap in the PBC spectrum is shown to be the topological origin of the NHSE under OBCs, which also explains the NHSE in our mosaic dimerized lattices. To distinguish whether the bulk states of the system under OBCs are shifted to the left or right end of the one-dimensional lattice due to the NHSE, we define a new variable called the directional inverse participation ratio (dIPR). The positive dIPR indicates that the state is localized at the right end while the negative dIPR corresponds to the states localized at the left end of the one-dimensional lattice. We further study the topological zero-energy edge modes and characterize them by calculating the Berry phases based on the generalized Bloch Hamiltonian method. In addition, we also find that the topological edge modes with nonzero but constant energy can exist in the system. Our work provides a new non-Hermitian lattice model and unveils the exotic effect of mosaic asymmetric hopping on the properties of non-Hermitian systems.

Keywords: non-Hermitian systems, mosaic asymmetric hopping, non-Hermitian skin effect, topological zero-energy edge modes

PACS: 03.65.Vf, 03.65.Yz, 68.65.Cd, 71.23.An **DOI:** 10.7498/aps.71.20220890

* Project supported by R&D Program of Beijing Municipal Education Commission (Grant No. KM202210028017) and Open Research Fund Program of the State Key Laboratory of Low-Dimensional Quantum Physics (Grant No. KF202109).

† Corresponding author. E-mail: zengqibo@cnu.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

两量子比特系统中相互作用对高阶奇异点的影响

施婷婷 张露丹 张帅宁 张威

High-order exceptional point in a quantum system of two qubits with interaction

Shi Ting-Ting Zhang Lu-Dan Zhang Shuai-Ning Zhang Wei

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 130303 (2022) DOI: 10.7498/aps.70.20220716

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.70.20220716

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 71, No. 13 (2022) 130303

专题: 非厄米物理前沿

两量子比特系统中相互作用对高阶奇异点的影响*

施婷婷[1)] 张露丹[1)] 张帅宁[1)2)†] 张威[1)2)]

1) (中国人民大学物理系, 北京 100872)

2) (北京量子科学研究院, 北京 100193)

(2022 年 4 月 17 日收到; 2022 年 5 月 22 日收到修改稿)

近年来, 与环境耦合的非厄米开放系统成为人们研究的热点. 非厄米体系中的奇异点会发生本征值和本征态的聚合, 是区分厄米体系的重要性质之一. 在具有宇称-时间反演对称性的体系中, 奇异点通常伴随着对称性的自发破缺, 存在很多值得探究的新奇物理现象. 以往的研究多关注无相互作用系统中的二阶奇异点, 对具有相互作用的多粒子系统, 及其中可能出现的高阶奇异点讨论较少, 特别是相关的实验工作尚未见报道. 本文研究了具有宇称-时间反演对称性的两量子比特体系, 证明了该体系中存在三阶奇异点, 并且量子比特间的伊辛型相互作用能够诱导体系在三阶奇异点附近出现能量的高阶响应, 可通过测量特定量子态占据数随时间的演化拟合体系本征值的方法来验证. 其次通过探究该体系本征态的性质, 展示了奇异点的态聚合特征, 并提出了利用长时间演化后稳态的密度矩阵验证态聚合的方法. 此外, 还将理论的两量子比特哈密顿量映射到两离子实验系统中, 基于 $^{171}Yb^+$ 囚禁离子系统设计了实现和调控奇异点, 进而验证三阶响应的实验方案. 这一方案具有极高的可行性, 并有望对利用非厄米系统实现精密测量和高灵敏度量子传感器提供新的思路.

关键词: 非厄米体系, 奇异点, 宇称-时间反演对称, 离子阱

PACS: 03.65.Yz, 05.30.Rt, 03.65.Aa **DOI:** 10.7498/aps.70.20220716

1 引 言

在具有增益或耗散的开放系统中的简并点, 即奇异点 (exceptional point, EP)[1], 与厄米体系中的简并点 (diabolic point, DP)[2] 具有截然不同的性质[3–5], 会产生一系列新奇的现象, 如灵敏度增强测量[6–10]、耗散诱导透明或激光[11,12] 等, 并在量子信息与量子通信、精密测量、光学等多个领域引起了广泛关注. 在 EP 点处, 通常会有两个或者更多的本征值发生简并, 同时伴随着本征态的聚合[5,13,14], 使得希尔伯特空间维度降低. 而在 DP 点, 只存在能量的简并, 本征态依然可以通过选取合适的幺正变换变成相互正交的, 不存在空间维度的损失. 当一个量子体系处于简并点时, 通常可以通过施加微扰 ε 破除简并. 在 DP 点附近, 原本简并的本征值发生劈裂, 本征值的改变量 $\Delta\varepsilon$ 正比于微扰的强度, 即与 ε 呈线性依赖. 而在 EP 点附近, $\Delta\varepsilon$ 正比于 $\varepsilon^{1/n}$, 其中 n 是 EP 点的阶数, 代表有 n 个本征态聚合于该点. 随着阶数 n 的增大, 能量的改变量越显著, 即微扰诱导的 n 阶响应[7,15]. 因此, 在非厄米体系中, EP 点可以实现对微扰更高阶、更灵敏的测量, 可用于制作高灵敏度的传感器. 高阶 EP 点的这一性质可以通过三个相互耦合的光学微腔中的经典光场模式进行模拟演示[7], 而在量子体系中尚未实现.

具有宇称-时间反演 (parity-time reversal, PT) 对称性的非厄米系统在参数空间中可以实现从全

* 国家重点研发计划 (批准号: 2018YFA0306501)、国家自然科学基金 (批准号: 12074428)、北京市重点研究专题 (批准号: Z180013) 和中国博士后科学基金 (批准号: BX20200379, 2021M693478) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangshuaining@ruc.edu.cn

部为实数的本征值到具有互为复共轭的复数本征值的连续调节[16], 即 PT 对称性保持相到破缺相的相变, 相变点即为体系 EP 点. 因此, PT 对称的非厄米系统天然具有研究 EP 点性质的优势[17]. 此外, 具有 PT 对称性的系统已在很多经典体系, 如微腔[18,19]、波导[20,21]、电子电路[22,23] 等, 以及部分量子体系, 如超导电路[24]、耗散单光子[25]、冷原子[26]、离子阱[10,27] 等体系中得到实现. 为了测量 EP 点的增强响应, 需要精确测量出体系的本征值. 在经典体系中, EP 点对微扰响应的强度可以直接通过测量吸收谱的共振峰得到. 但在量子体系中, 本征值一般无法被直接测量, 使得 EP 点增强响应的测量具有挑战性. 近期, Ding 等[10] 在离子阱体系中提出并实现了一种无需拟合任何参数就能直接测定体系的本征值和 EP 点位置的方法, 且这种方法不依赖于所在的相. 这一方案为在量子体系中实现高阶 EP 点, 并验证其高阶响应提供了新的思路.

本文研究了一个具有 PT 对称性的全同两量子比特系统, 证明了其中存在三阶 EP点. 通过观测体系的本征值, 演示了两量子比特之间的伊辛相互作用可以诱导体系在三阶 EP 点出现高阶响应. 通过研究体系的本征态, 展示了 EP 点处态聚合的性质. 其次, 探究了该体系在 PT 对称性破缺相的密度矩阵的性质, 并提出利用长时间演化后稳态的密度矩阵验证 EP 点处态聚合的方法. 此外, 根据该体系的三阶 EP 点对微扰的响应, 基于 $^{171}\mathrm{Yb}^+$ 囚禁离子系统中设计了实现和调控 EP 点, 进而验证三阶响应的实验方案.

2 高阶 EP 点处本征值和本征态的特征

考虑一个由两个全同量子比特构成的非厄米体系. 每一个量子比特 (标记为 $s=1,2$) 均由一个具有 PT 对称性的二能级哈密顿量 $\hat{H}_{PT,s}=J\hat{\sigma}_{x,s}-\mathrm{i}\varGamma\hat{\sigma}_{z,s}$ 描述. 其中 $\hat{\sigma}_{x,s}=|\uparrow_s\rangle\langle\downarrow_s|+|\downarrow_s\rangle\langle\uparrow_s|$, $\hat{\sigma}_{z,s}=|\uparrow_s\rangle\langle\uparrow_s|-|\downarrow_s\rangle\langle\downarrow_s|$, J 和 $\varGamma$ 分别为自旋上下态之间的耦合强度和耗散带来的非厄米项. 因此, 体系的总哈密顿量同样具有 PT 对称性, 可写为

$$\hat{H}_{PT}=\hat{H}_{PT,1}\otimes\hat{\boldsymbol{I}}_2+\hat{\boldsymbol{I}}_1\otimes\hat{H}_{PT,2}, \tag{1}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{I}}$ 为 2 × 2 的单位矩阵. 该哈密顿量满足 $\hat{H}_{PT}=\mathcal{PT}\hat{H}_{PT}(\mathcal{PT})^{-1}$, 其中 $\mathcal{T}=\mathcal{K}$ 为复共轭算符, $\mathcal{P}=\sigma_{x,1}\otimes\sigma_{x,2}$ 为宇称算符[10,27]. 在不考虑扰动的情况下, 上述两量子比特体系的 PT 哈密顿量的 4 个本征值可以通过直接求解久期方程得到, 分别为 $E_{1,2}=\pm2\sqrt{J^2-\varGamma^2}$, $E_{3,4}=0$, 对应的本征态记为 $|\varphi_{1,2,3,4}\rangle$(见附录 A1). 当调节参数 J 和 $\varGamma$, 可以实现前两个本征值从纯实数到互为复共轭的连续变化, 即实现了从 PT 对称性保持相到破缺相的连续调节. 特别地, 当 $J=\varGamma$ 时, 体系对应出现三阶 EP 点. 此时, 所有的本征值聚合到 0. 其中前三个本征态聚合在一起, 如果选择两个量子比特的直积态 $\{|\uparrow_1\uparrow_2\rangle,|\uparrow_1\downarrow_2\rangle,|\downarrow_1\uparrow_2\rangle,|\downarrow_1\downarrow_2\rangle\}$ 作为基矢, 可以表示为 $|\varphi_1\rangle=|\varphi_2\rangle=|\varphi_3\rangle=(-1,-i,-i,1)^{\mathrm{T}}$. 另外一个与之正交的态为 $|\varphi_4\rangle=(0,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$. 需要说明的是, 这里并未对态进行归一化. 在 EP 点处, 原本为四维的希尔伯特空间塌缩为二维, 体系哈密顿量无法被对角化. 且在 EP 点附近, 能量具有更高阶的响应[6,7].

为了研究高阶 EP 点处微扰引起的体系能量响应, 在体系中引入伊辛型相互作用 $\hat{H}_{\mathrm{int}}=J_x\hat{\sigma}_{x,1}\otimes\hat{\sigma}_{x,2}$. 其中, J_x 为两个量子比特之间的相互作用强度, 且满足 $0\leqslant J_x\ll J$. 此时, 体系的哈密顿量为

$$\hat{H}=\hat{H}_{PT}(\varGamma=J)+\hat{H}_{\mathrm{int}}. \tag{2}$$

可以证明上述哈密顿量仍然满足 PT 对称性, 即 $[\mathcal{PT},\hat{H}]=0$. 通过数值求解 (2) 式满足的四阶特征方程, 可以得到四个本征值的实部 $\varepsilon_n^{\mathrm{Re}}$ 和虚部 $\varepsilon_n^{\mathrm{Im}}$ 随微扰强度 J_x 的变化曲线, 如图 1(a) 和图 1(b) 所示. 在 $0<J_x/J<0.1$ 的范围内, 蓝色和红色实线标记的两个本征值互为复共轭, 分别记为 ε_1 和 ε_2, 且满足 $\varepsilon_1=\varepsilon_2^*=a+b\mathrm{i}$, 其中 a 和 b 均为实数且令 $b>0$. 这两个本征值所对应的本征态分别为 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$, 满足 $|\psi_2\rangle=\mathcal{PT}|\psi_1\rangle$. 黄色和紫色对应的本征值为实数, 分别记为 $\varepsilon_3=c$ 和 $\varepsilon_4=d$, 对应的本征态分别为 $|\psi_3\rangle$ 和 $|\psi_4\rangle$. 可以发现 $|\psi_4\rangle=(0,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 不随 J_x 变化. 在这个参数区间内, 体系处于 PT 对称性破缺的相. 附录 A2 中, 把体系的本征值在对数坐标中表示, 可以看出, $\varepsilon_4=-J_x$ 随 J_x 线性变化, 而另外的 3 个本征值的实部和虚部均和 J_x 呈现三次方根的关系. 随着 J_x 继续增大, 体系会经历一个二阶 EP 点, 然后到达 PT 对称性保持的相, 此时, 所有的本征值均为实数 (见附录 A2).

接下来讨论该体系的本征态特征. 在量子系统中, 迹距离是用来衡量两个量子态距离的物理量, 定义为[28]

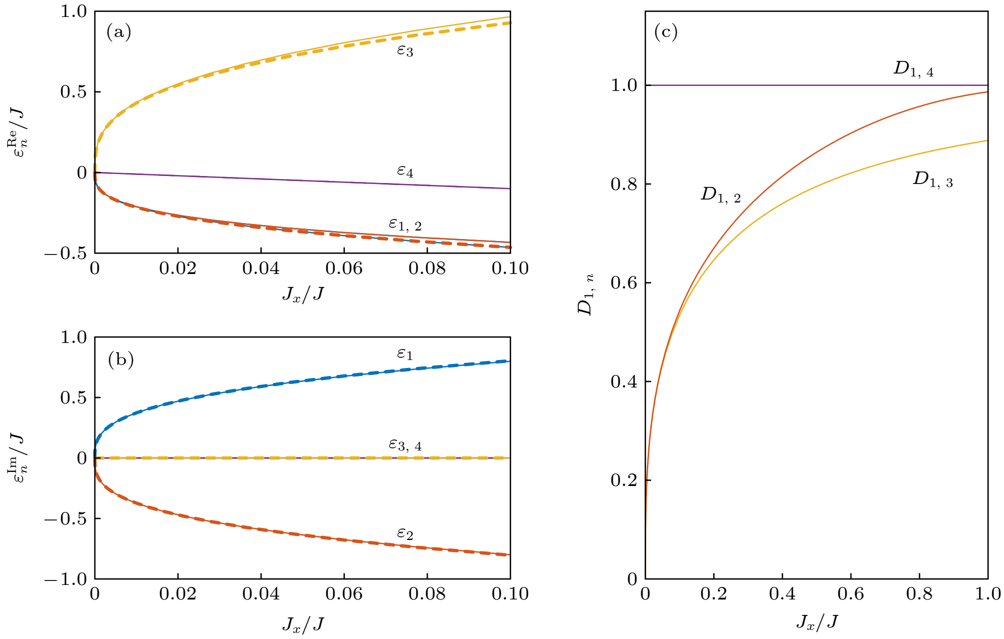


图 1 微扰作用下高阶 EP 点处本征值和本征态的特征 (a), (b) 在高阶 EP 点处存在微扰时, 体系本征值的实部 ((a)) 和虚部 ((b)) 随微扰 J_x/J 的变化曲线. 其中, 实线对应本征值的数值结果, 虚线代表对 J_x/J 做微扰处理后, 仅保留最低阶的结果. 同一种颜色的曲线对应同一个本征值. (c) 本征态 $|\psi_1\rangle$ 分别和 $|\psi_2\rangle$ (红色), $|\psi_3\rangle$ (黄色), $|\psi_4\rangle$ (紫色) 的区分度 $D_{1,n}$

Fig. 1. Eigenvalues and eigenstates near a high-order exceptional point: (a) The real part and (b) imaginary part of the eigenvalues of Hamiltonian $\hat{H}$ versus the perturbation J_x/J. Here, solid lines are numerical results obtained by direct diagonalization, and dashed lines are those from perturbation. (c) Trace distance between $|\psi_1\rangle$ and $|\psi_2\rangle$ (red), $|\psi_3\rangle$ (yellow), $|\psi_4\rangle$ (purple).

$$D_{i,j} = \frac{1}{2}{\rm tr}|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|. \tag{3}$$

其中$|\boldsymbol{\rho}| = \sqrt{\boldsymbol{\rho}^\dagger\boldsymbol{\rho}}$, $\boldsymbol{\rho}_i = |\bar{\psi}_i\rangle\langle\bar{\psi}_i|$是归一化的量子态$|\bar{\psi}_i\rangle = |\psi_i\rangle/\sqrt{\langle\psi_i|\psi_i\rangle}$对应的密度矩阵. 可以证明, 两个态 $\boldsymbol{\rho}_i$ 和 $\boldsymbol{\rho}_j$ 能被成功分辨的最大概率为 $(1+D_{i,j})/2$[29,30]. 当$D=1$时, 两个态的区别最大; 当$D=0$时, 两个态区别最小. 因此, 迹距离 D 可以被理解为两个量子态之间的区分度, 是定量刻画两个态之间差异的有效手段[31,32]. 为了证明当体系处于三阶 EP 点时 ($J_x=0$) 存在本征态的聚合, 根据 (3) 式计算了$|\psi_1\rangle$和其他 3 个本征态的迹距离 $D_{1,n}$ 随 J_x的变化, 其中 $n=2, 3, 4$. 结果如图 1(c) 所示. 可以看到, 随着 J_x逐渐减小到零, $D_{1,2}$和 $D_{1,3}$逐渐减小, 直到三阶 EP 点处减小至零. 而 $D_{1,4}$始终为 1. 这一结果说明在趋向三阶 EP 点的过程中, $|\psi_1\rangle$与$|\psi_4\rangle$始终正交, 而与另外两个态逐渐聚合为同一个态.

3 高阶 EP 点附近微扰诱导的高阶响应及态聚合的验证

为了展示高阶 EP 点对微扰的高阶响应, 需要刻画体系的本征值随微扰 J_x 的变化规律. 在由少数量子比特组成的量子体系中, 直接测量体系的本征值 (本征能量) 通常比较困难. 此外, 在具有相互作用的两比特系统中, 对任意初态的演化将和多个本征值有关, 其结果将是不同本征值和时间的非线性组合, 因此很难像单比特体系中一样通过恰当地选择初态直接测量本征值和 EP 点. 因此在实验中, 一般通过测量某个特定态上占据数的时间演化来间接拟合和本征值相关的参数. 为了使实验数据的拟合具有更高的可信度, 我们希望尽量准确地确定体系本征值和本征态表达式. 但是对于一般的具有相互作用的两量子比特体系, 通常无法解析求解本征值, 只能通过微扰理论对其进行处理.

在三阶 EP 点附近, 体系的一个已知本征值为 $\varepsilon_4=-J_x$, 对应的本征态为$|\psi_4\rangle=(0,-1,1,0)^{\rm T}$. 另外 3 个本征值满足特征方程

$$\varepsilon^3 - J_x\varepsilon^2 - J_x^2\varepsilon + J_x^3 - 8J^2J_x = 0. \tag{4}$$

不同于厄米体系中的整数级数展开, 非厄米体系中可以利用 Newton-Puiseux 分数级数将 ε 在 EP 点附近展开到$J_x^{1/3}$的二阶, 即$\varepsilon=c_{(0)}+c_{(1)}J_x^{1/3}+c_{(2)}J_x^{2/3}$, 其中$c_{(0)}=0$, $c_{(1)}$和$c_{(2)}$为复数. 将这些结果代入特征方程并令前两阶的系数为零, 得到 3 组

展开系数$\{c_{(1)}, c_{(2)}\}$, 见附录 A2, 于是, 得到体系另外 3 个本征值的近似表达式为

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 2J^{2/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}J_x^{1/3}, \\ \varepsilon_2 = 2J^{2/3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3}J_x^{1/3}, \\ \varepsilon_3 = 2J^{2/3}J_x^{1/3}. \end{cases} \tag{5}$$

上述本征值的近似结果如图 1(a) 和图 1(b) 中虚线所示. 可以看出, 在J_x很小的情况下, 近似结果和数值对角化的结果符合得很好, 可以看作是微扰情况下对体系真实能量的较好描述.

同样地, 将体系的本征态展开到$J_x^{1/3}$的二阶, 得到本征态的近似表达式为

$$|\psi_n\rangle = \left|\psi_n^{(0)}\right\rangle + \left|\psi_n^{(1)}\right\rangle J_x^{1/3} + \left|\psi_n^{(2)}\right\rangle J_x^{2/3}, \tag{6}$$

其中$n = 1, 2, 3$, 零阶近似为$|\psi_n^{(0)}\rangle = |\phi_n\rangle = (-1, -i, -i, 1)^{\mathrm{T}}$, 一阶近似为$|\psi_n^{(1)}\rangle = c_{n,(1)}(-2i, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}/2J$, 二阶近似为$|\psi_n^{(2)}\rangle = c_{n,(1)}^2(1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}/2J^2$. 为了方便起见, 这里选择将初态制备在$|\psi(t=0)\rangle = |\downarrow_1\downarrow_2\rangle = \sum_n \alpha_n |\psi_n\rangle$上, 叠加系数为

$$\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{-2J^2 + \displaystyle\prod_{m\neq n}\varepsilon_m - 2\mathrm{i}J\sum_{m\neq n}\varepsilon_m}{\varepsilon_n^2 - \varepsilon_n\displaystyle\sum_{m\neq n}\varepsilon_m + \prod_{m\neq n}\varepsilon_m}, & n = 1, 2, 3; \\ 0, & n = 4. \end{cases} \tag{7}$$

在这里, 下标m的取值范围为$m = 1, 2, 3$. 由此得到t时刻$|\downarrow_1\downarrow_2\rangle$上的占据数为

$$\begin{aligned} P(|\downarrow_1\downarrow_2\rangle, t) &= |\langle\downarrow_1\downarrow_2|\boldsymbol{U}(t)|\downarrow_1\downarrow_2\rangle|^2 \\ &= \left|\sum_{n=1,2,3}\alpha_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_n t}\right|^2, \end{aligned} \tag{8}$$

其中, $\boldsymbol{U}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}$为非厄米哈密顿量$\hat{H}$对应的演化算符. 将用哈密顿量演化得到的占据数的数值结果和上述近似解析表达式的结果做对比. 图 2(a) 中, 黑色和红线实线分别是$J_x/J = 0.01$和$J_x/J = 0.1$的数值结果, 与它们几乎重叠的灰色虚线为对应参数下近似表达式 (8) 给出的结果. 可以看出, 表达式 (8) 给出了和理论结果几乎一样的数值结果, 可以看作很好的近似.

非常重要的是, 我们注意到$P(|\downarrow_1\downarrow_2\rangle, t)$的近似表达式只与$J$以及前 3 个本征值$\varepsilon_{1,2,3}$有关. 因此, 可以通过占据数的时间演化测量提取出体系的本征值. 首先, 可以将系统制备在初态$|\downarrow_1\downarrow_2\rangle$上, 在具有伊辛型相互作用的两量子比特哈密顿量的作用下进行演化, 并通过荧光探测t时刻该态上占据数. 最后通过在$|\downarrow_1\downarrow_2\rangle$上粒子数随时间变化的表达式拟合出$J$和本征值$\varepsilon_{1,2,3}$. 考虑到 3 个本征值之间的关系, 在实际处理中可以把本征值的实部和虚部作为独立的参数分开拟合, 则只需要拟合 4 个实数参数$\{J, a, b, c\}$. 通过这一方法, 可以测定本征值的实部和虚部对J_x的依赖关系, 从而验证 EP 点的三阶响应.

此外, EP 的态聚合现象也可以通过测量系统的长时间演化来验证. 在非厄米体系中, 态的演化通常用密度矩阵来描述[33], 密度矩阵定义为

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \frac{\boldsymbol{U}(t)\boldsymbol{\rho}(0)\boldsymbol{U}^{\dagger}(t)}{\mathrm{tr}[\boldsymbol{U}(t)\boldsymbol{\rho}(0)\boldsymbol{U}^{\dagger}(t)]}. \tag{9}$$

可以证明, 当体系处于 PT 对称性破缺的区域, 且演化时间趋于无穷时, 有$\boldsymbol{\rho}(t\to+\infty) = |\bar{\psi}_1\rangle\langle\bar{\psi}_1|$, 及$\boldsymbol{\rho}(t\to-\infty) = |\bar{\psi}_2\rangle\langle\bar{\psi}_2|$, 且满足$\boldsymbol{\rho}(t\to-\infty) = \mathcal{PT}[\boldsymbol{\rho}(t\to+\infty)](\mathcal{PT})^{-1}$(见附录 A3). 因此, 在 PT 对称性破缺相, 可以通过密度矩阵的长时间演化得到体系的本征态, 并定量测算它们之间的区分度, 从而判定是否发生聚合. 为了方便, 可以将初态选为$|\downarrow_1\downarrow_2\rangle$. 在演化足够长时间后, 得到密度矩阵$|\bar{\psi}_1\rangle\langle\bar{\psi}_1|$的全部信息. 在此基础上, 对$|\bar{\psi}_1\rangle\langle\bar{\psi}_1|$进行$\mathcal{PT}$变换, 从而得到第二个本征态对应的密度矩阵, 即$|\bar{\psi}_2\rangle\langle\bar{\psi}_2| = \mathcal{PT}|\bar{\psi}_1\rangle\langle\bar{\psi}_1|(\mathcal{PT})^{-1}$. 此外, 第四个态对应的密度矩阵$|\bar{\psi}_4\rangle\langle\bar{\psi}_4|$是已知的. 至此, 可以测量 1 态与 2 态, 以及 1 态与 4 态之间的区分度, 从而验证 EP 点上存在本征态的聚合.

作为例子, 图 2(b)—(d) 给出了当$J_x/J = 0.1$时, 系统从初态$|\downarrow_1\downarrow_2\rangle$出发演化的结果. 图 2(b) 的子图分别展示了 4 个直积态$|\sigma_1\sigma_2\rangle$的占据数$P(|\sigma_1\sigma_2\rangle, t)$随时间的变化. 其中蓝色点划线和紫色点线分别是$|\uparrow_1\uparrow_2\rangle$和$|\downarrow_1\downarrow_2\rangle$的占据数演化, 红色实线和黄色虚线分别对应$|\uparrow_1\downarrow_2\rangle$和$|\downarrow_1\uparrow_2\rangle$. 这 4 个态上的占据数均随时间指数增长, 从$tJ\sim 5$开始, 4 个态上的占据数曲线在对数坐标下斜率相同, 但高度不同, 说明不同直积态上的占据数比例固定, 系统演化到了一个长时间的稳态. 图 2(b)主图为每个态上归一化的粒子数$\bar{P}(|\sigma_1\sigma_2\rangle, t) = P(|\sigma_1\sigma_2\rangle, t)/P(t)$, 其中$P(t) = \sum_{\sigma_1,\sigma_2} P(|\sigma_1\sigma_2\rangle, t)$为$t$时刻体系的总粒子数. 可以清晰地看出, $\bar{P}(|\sigma_1\sigma_2\rangle, t)$在时间

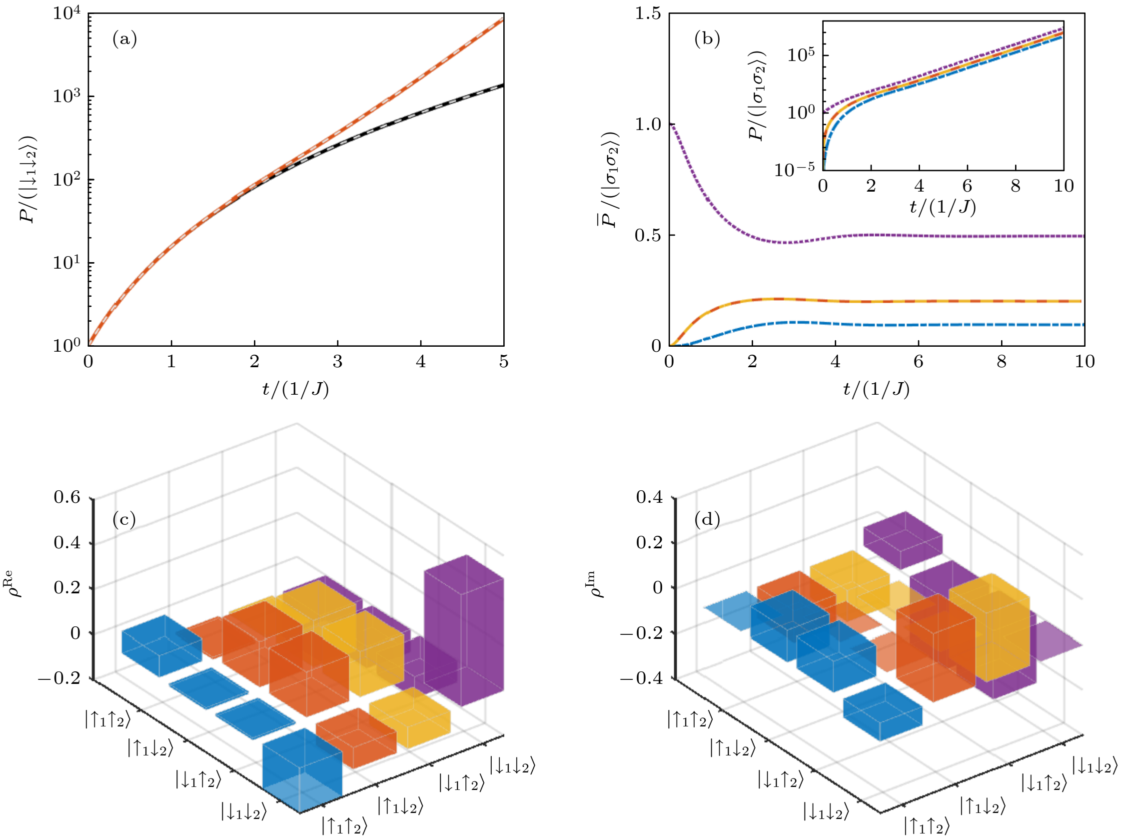


图 2 系统从初态 $|{\downarrow_1\downarrow_2}\rangle$ 演化的量子态布据数结果 (a) 从上到下红色和黑色的实线分别代表 $J_x/J=0.1$ 和 $J_x/J=0.01$ 时, 初态 $|{\downarrow_1\downarrow_2}\rangle$ 的占据数随时间演化的结果. 两条几乎重合的灰色虚线为相应参数下的微扰近似值. (b) 主图和子图分别展示了 4 个直积态 $|\sigma_1\sigma_2\rangle$ 的归一化占据数和未归一化的占据数随时间的变化. 蓝色点划线和紫色点线分别代表 $|{\uparrow_1\uparrow_2}\rangle$ 和 $|{\downarrow_1\downarrow_2}\rangle$ 的演化, 红色实线和黄色虚线分别对应 $|{\uparrow_1\downarrow_2}\rangle$ 和 $|{\downarrow_1\uparrow_2}\rangle$. (c), (d) 演化时间为 $tJ=10$ 时密度矩阵的实部 ((c)) 和虚部 ((d)). 这里选取 $J_x/J=0.1$

Fig. 2. (a) The evolution of $|{\downarrow_1\downarrow_2}\rangle$ state population with $J_x/J=0.1$ (red, top) and $J_x/J=0.01$ (black, bottom). The gray lines on the top are the approximate results up to the second order. (b) The evolution of normalized spin product state population $|\sigma_1\sigma_2\rangle$ and the corresponding unnormalized populations (inset) with initial state $|{\downarrow_1\downarrow_2}\rangle$. From top to bottom, the four lines represent results for states $|{\downarrow_1\downarrow_2}\rangle$ (purple dotted), $|{\uparrow_1\downarrow_2}\rangle$ (red solid), $|{\downarrow_1\uparrow_2}\rangle$ (yellow dashed), and $|{\uparrow_1\uparrow_2}\rangle$ (blue dot-dashed), respectively. (c) The real part and (d) the imaginary part of all density matrix elements at $tJ=10$. For panels (a)–(d), the coupling strength of Ising interaction is $J_x/J=0.1$.

$tJ\sim5$之后趋于一个常数, 说明态演化到了一个不随时间变化的态, 即哈密顿量的一个本征态. 这是由于在非厄米体系中, 系统和环境耦合必然带来信息的交换. 在 PT 破缺的相中, 信息不停地从系统流向环境, 因此长时间演化过后, 体系会丢失关于初态的全部信息, 最终演化到体系的一个本征态上[34]. 图 2(c) 和图 2(d) 给出了演化时间为$tJ=10$时密度矩阵的实部和虚部. 密度矩阵中的对角项即为 4 个直积态上的归一化占据数, 与图 2(b) 主图对应. 同时, 密度矩阵在演化一段时间后, 各矩阵元的大小不再发生变化, 也说明了体系处在 PT 对称性破缺的相, 信息会从体系流向环境, 直至丧失初态的全部信息.

4 实验方案设计

实验中利用囚禁在保罗型阱中的 $^{171}Yb^+$ 离子的超精细结构能级来编码量子比特. 如图 3(a) 所示, 对于每一个比特, 其自旋上下态分别对应 $^{171}Yb^+$ 的 $^2S_{1/2}$ 中的两个超精细态, 即 $|{\uparrow}\rangle=|F=1,m_F=0\rangle$, $|{\downarrow}\rangle=|F=0,m_F=0\rangle$, 它们之间的超精细劈裂能量为 $\omega_0=12.6$ GHz. 此自旋比特系统可以通过多普勒冷却和光泵浦过程实现态的初始化, 利用依赖自旋状态的荧光收集来进行量子态的探测和区分. 可以将 PT 对称的哈密顿量映射到一个纯耗散的两离子系统: 首先使用谐振的微波操作耦合每个比特的能级来实现哈密顿量中的自旋翻转部分, 其耦合

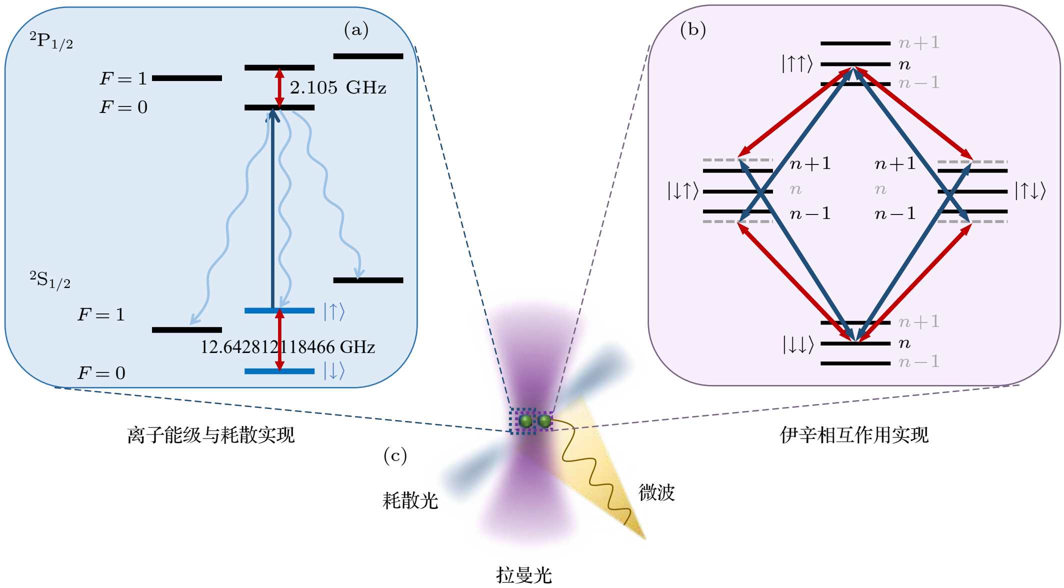


图 3 实验方案设计 (a) ^{171}Yb$^+$的能级结构及耗散过程; (b) 伊辛相互作用的实现过程; (c) 两离子系统中 PT 对称的哈密顿量与伊辛相互作用的实现. 可以利用微波 (黄色) 实现自旋态的翻转; 利用 370 nm 激光 (蓝色) 实现自旋上态的耗散; 利用基于拉曼激光 (紫色) 操作的 MS 门实现伊辛相互作用

Fig. 3. Experimental scheme: (a) The energy level of ^{171}Yb$^+$ and dissipation process; (b) realization of Ising interaction; (c) realization of $\mathcal{PT}$ symmetric Hamiltonian and Ising interaction in a two-ion system: we can use microwave (yellow color) to achieve spin state inversion, shine a 370 nm laser (blue color) to realize dissipation of the spin-up state, and apply Raman laser (purple color) operation for MS gates to implement Ising interaction.

强度 J 可通过拟合拉比频率测定, 并可由通过施加的微波功率来调节大小; 然后利用一束 370 nm 的耗散光实现哈密顿量中的耗散部分, 该激光将处于$|\uparrow\rangle$的离子激发到^{2}P$_{1/2}$态上, 处于^{2}P$_{1/2}$的离子可以自发辐射到^{2}S$_{1/2}$的 3 个塞曼态, 并分别放出$\sigma_\pm$或 π 偏振的光子 (图 3(a) 中的 3 个自发跃迁曲线), 最终导致$|\uparrow\rangle$态的耗散[34], 其耗散率 $\varGamma$ 可以通过耗散光的功率调节. 实验系统等效的哈密顿量 $\hat{H}_{\text{exp}}$ 和 (1) 式中的两比特 PT 对称哈密顿量只相差了一个单位矩阵, 即 $\hat{H}_{\text{exp}}=\hat{H}_{PT}-2\mathrm{i}\varGamma\boldsymbol{I}$, 因此实验上占据数的测量只需乘上一个指数因子 $\mathrm{e}^{4\varGamma t}$ 即可映射到 $\hat{H}_{PT}$ 的结果.

为了实验测量高阶 EP 点附近微扰诱导的高阶响应, 可以利用离子阱平台中的 Mølmer-Sørensen (MS) 方案[35] 实现两比特操作的伊辛相互作用 $\hat{H}_{\text{int}}=J_x\hat{\sigma}_{x,1}\otimes\hat{\sigma}_{x,2}$ 来施加微扰. 该方案基于双光子受激拉曼跃迁过程, 利用略微失谐的红蓝边带操作耦合两个离子的自旋比特和声子系统, 整个门操作的最小时间和失谐量成倒数关系. 同时由于失谐的存在, 离子自旋不会向红蓝边带的声子能级跃迁, 只会积累一个和自旋初态相关的几何相位. 在门操作结束时, 自旋系统和声子能够完全解耦, 相空间积累的几何相位会产生自旋比特的纠缠, 从而实现伊辛相互作用. 如图 3(b) 所示, 伊辛相互作用可以通过图中的跃迁路径实现自旋$|\downarrow\downarrow\rangle$与$|\uparrow\uparrow\rangle$的纠缠, 其中 n 为离子振动的声子能级, 红色和蓝色箭头分别为其与相邻声子能级 ($n-1$ 和 $n+1$) 失谐的红边带和蓝边带跃迁, 并且由于失谐的存在, $n-1$ 和 $n+1$ 的声子能级在门操作结束时并不会有布居, 系统仍处于和初态相同的声子数 n, 即自旋态和声子态实现解耦. 此方案理论上不要求声子初态处于基态上 ($n=0$), 对声子振动能级有很强的鲁棒性. 而实际实验过程中, 为了对声子有更好的控制, 还是可以通过成熟的边带冷却过程将声子初态制备在基态上. 另外, $|\downarrow\uparrow\rangle$与$|\uparrow\downarrow\rangle$的纠缠实现是一样的, 只需制备相关的自旋初态即可. 实验中可以通过皮秒脉冲激光器产生的双色拉曼光束驱动横向 x 方向的运动模式, 将失谐量设为两个简正运动模式频率的正中间, 并实现速度最快的伊辛相互作用操作, 其强度 J_x 可以通过所加红蓝边带激光的强度来调节.

整个实验过程如下: 首先通过多普勒冷却, 光泵浦过程以及边带冷却将两个离子制备到自旋基态$|\downarrow_1\downarrow_2\rangle$和声子基态上; 然后施加两离子 PT 对称

的哈密顿量和伊辛相互作用的小扰动, 如图 3(c) 所示, 通过调节对应微波和激光的强度来分别控制自旋耦合强度 J, 耗散率 $\varGamma$ 以及扰动大小 J_x, 使 $J=\varGamma$ 和 $J_x/J=0.1$; 最后通过电子倍增电荷耦合设备 (EMCCD) 来探测每个离子的荧光, 进而得到两个离子的 4 个直积态的概率分布. 可以记录基态在 $|{\downarrow_1\downarrow_2}\rangle$ 随时间演化的占据数, 通过在 $|{\downarrow_1\downarrow_2}\rangle$ 上粒子数随时间变化的表达式拟合出体系本征值来实验上验证 EP 点的三阶响应. 同时也可以将系统演化足够长的时间, 直至系统处于 PT 对称破缺的本征态 $|\bar{\psi}_1\rangle$ 时, 通过单比特门操作改变测量基, 实现对两个离子比特的态层析测量, 从而得到其对应的密度矩阵, 验证本征态的聚合现象.

5 结 论

理论模拟并验证了具有 PT 对称性的两量子比特系统中存在三阶 EP 点, 并且两个量子比特间的伊辛相互作用可以诱导三阶 EP 点附近能量的三阶响应. 其次, 探究了该体系在 PT 对称性破缺相的密度矩阵的相关性质, 发现体系本征态在 EP 点存在聚合现象. 此外, 利用微扰理论研究了该体系的三阶 EP 点处能量对微扰的响应, 提出了利用基态占据数拟合体系本征值的方法; 并利用 PT 对称性破缺相的态在长时间演化后会演化到体系的一个本征态上的特性, 提出了利用密度矩阵的演化判断 EP 点处态聚合的方法. 最后, 将理论的两量子比特的哈密顿量映射到两离子实验系统中, 并基于 $^{171}\mathrm{Yb}^+$ 囚禁离子系统设计实现和调控 EP 点, 验证三阶响应的实验方案.

附录A1 无相互作用两量子比特系统本征值的测量

无相互作用的具有 PT 对称性的两量子比特系统可以由正文中 (1) 式的哈密顿量描述, 其本征值的实部和虚部分别如图 A1(a) 和图 A1(b) 所示. 在该系统中, 态的时间演化由演化算符 $\boldsymbol{U}_{PT}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_{PT}t}$ 来描述. 引入两个物理量 P_J 和 $P_\varGamma$, 它们的时间演化分别为

$$P_J(t)=\left|\frac{\langle{\uparrow_1\downarrow_2}|+\langle{\downarrow_1\uparrow_2}|}{\sqrt{2}}\boldsymbol{U}_{PT}\frac{|{\uparrow_1\uparrow_2}\rangle+|{\downarrow_1\downarrow_2}\rangle}{\sqrt{2}}\right|^2 =\frac{4J^2\sin^2(\varepsilon_0 t)}{\varepsilon_0^2}, \tag{A1}$$

$$P_\varGamma(t)=\left|\frac{\langle{\uparrow_1\uparrow_2}|-\langle{\downarrow_1\downarrow_2}|}{\sqrt{2}}\boldsymbol{U}_{PT}\frac{|{\uparrow_1\uparrow_2}\rangle+|{\downarrow_1\downarrow_2}\rangle}{\sqrt{2}}\right|^2 =\frac{4\varGamma^2\sin^2(\varepsilon_0 t)}{\varepsilon_0^2}, \tag{A2}$$

其中, $\varepsilon_0=2\sqrt{J^2-\varGamma^2}$ 为体系的一个本征值. 这里 $P_J(t)$ 和 $P_\varGamma(t)$ 的时间演化均能通过正文提到的实验方案在囚禁离子阱系统中测定.

这两个物理量的差值为

$$\Delta P=P_J-P_\varGamma=\sin^2(\varepsilon_0 t) =\begin{cases}\sin^2(|\varepsilon_0|t), & J>\varGamma\\ 0, & J=\varGamma\,.\\ -\sinh^2(|\varepsilon_0|t), & J<\varGamma\end{cases} \tag{A3}$$

当体系处于 PT 对称的区域时, $\Delta P>0$; 处于 PT 对称性破缺的区域时, $\Delta P<0$; 在 EP 点处, $\Delta P=0$.

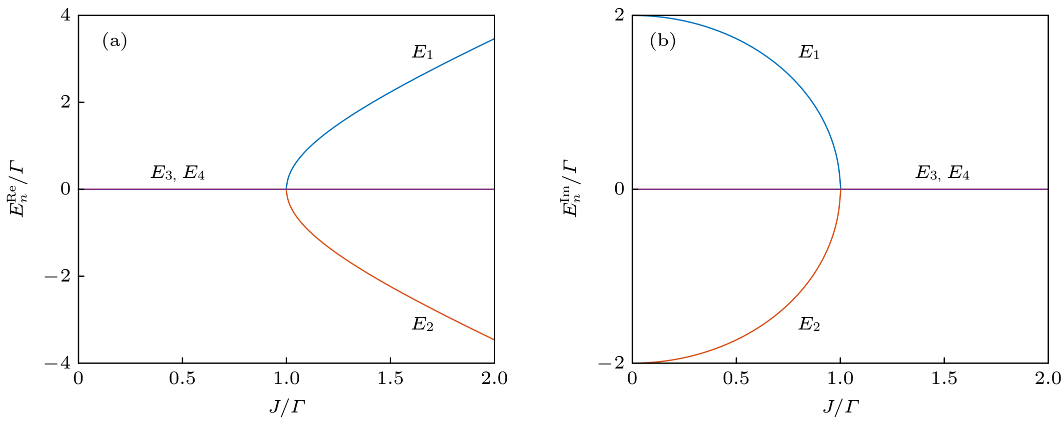


图 A1 无相互作用两量子比特系统的本征值的 (a) 实部和 (b) 虚部随耦合强度 $J/\varGamma$ 的变化

Fig. A1. (a) The real and (b) imaginary parts of eigenvalues of a non-interacting two-qubit system as functions of coupling strength $J/\varGamma$.

因此, ΔP的正负性能够作为判断体系处于哪个相的标准. 另外, 可以通过 (A3) 式计算 $(\sin^{-1}\sqrt{\Delta P(t)})/t$或$(\sinh^{-1}\sqrt{-\Delta P(t)})/t$, 直接得到本征值的大小; 或者通过$\sin^{-1}\sqrt{\Delta P(t)}$或$\sinh^{-1}\sqrt{-\Delta P(t)}$的时间演化线性拟合出参数$|\varepsilon_0|$, 即本征值的大小. 这种测量方法可以辅助调节$J$和$\varGamma$, 使体系较为精准地调节到$J\approx\varGamma$的相变点上.

附录A2 具有伊辛型相互作用的两量子比特系统中 EP 点附近的微扰处理

这部分把两量子比特之间的伊辛相互作用当作微扰, 在无相互作用的两量子比特的哈密顿量的三阶 EP 点上做微扰展开, 保留低阶项, 从而得到有相互作用的两量子比特体系的本征值和本征态的近似表达式[7,14]. 具有伊辛相互作用的两量子比特体系满足的定态本征方程为$\hat{H}|\psi\rangle=\varepsilon|\psi\rangle$. 哈密顿量$\hat{H}$本征值所满足的特征方程为

$$(\varepsilon+J_x)(\varepsilon^3-J_x\varepsilon^2-J_x^2\varepsilon+J_x^3-8J^2J_x)=0,\quad\text{(A4)}$$

其中$\varepsilon_4=-J_x$是上述特征方程的一个解, 对应的本征态为$|\psi_4\rangle=(0,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, 另外 3 个本征值满足$\varepsilon^3-J_x\varepsilon^2-J_x^2\varepsilon+J_x^3-8J^2J_x=0$. 利用 Newton-Puiseux 级数将$\varepsilon$展开到$J_x^{1/3}$的二阶, 即$\varepsilon=c_{(0)}+c_{(1)}J_x^{1/3}+c_{(2)}J_x^{2/3}$, 其中零阶项系数为 EP 点处的本征值, 即$c_{(0)}=0$, 一阶项和二阶项的展开系数$c_{(1)}$和$c_{(2)}$均为复数. 由于$J_x\ll1$, 因此$J_x$的高阶项可以被忽略. 代入对应的特征方程可得

$$\begin{aligned}&(c_{(1)}^3-8J^2)J_x+3c_{(1)}^2c_{(2)}J_x^{4/3}\\&+(-c_{(1)}^2+3c_{(1)}c_{(2)}^2)J_x^{5/3}\\&+(-2c_{(1)}c_{(2)}+c_{(2)}^3)J_x^2-(c_{(1)}\\&+c_{(2)}^2)J_x^{7/3}-c_{(2)}J_x^{8/3}+J_x^3=0.\end{aligned}\quad\text{(A5)}$$

忽略$J_x^{1/3}$的高阶项, 令 (A5) 式中前两阶的系数为 0, 可以得到 3 组微扰的一阶和二阶的展开系数的取值, 即

$$\begin{cases}c_{(1)}=\{2J^{2/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3},2J^{2/3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3},2J^{2/3}\},\\c_{(2)}=0.\end{cases}\quad\text{(A6)}$$

于是, 三阶 EP 点附近的本征能量的近似表达式为

$$\begin{cases}\varepsilon_1=2J^{2/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}J_x^{1/3},\\\varepsilon_2=2J^{2/3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3}J_x^{1/3},\\\varepsilon_3=2J^{2/3}J_x^{1/3},\\\varepsilon_4=-J_x.\end{cases}\quad\text{(A7)}$$

对于上述提到的本征值满足的三次方程, 也可以通过求根公式得到其解析表达式, 再对J_x进行展开, 保留低阶项. 但是对于更高阶的 EP 点, 高次特征方程的解无法解析得到, 因此, 这里使用了更为普适的近似方法. 图 A2(a) 和 A2(b) 分别给出了在对数坐标下本征值的实部和虚部随微扰强度的变化, 这里的颜色和线型均与正文图 1(a) 和图 1(b) 对应. 其中, ε_1和ε_2的实部和虚部以及ε_3的实部对应的曲线的斜率为 1/3, 说明与J_x呈现三次方根的依赖关系. 同时, 在图 A2(c) 和图 A2(d) 中给出了更大相互作用强度范围$J_x/J\in[0,5]$内, 体系本征值的实部和虚部的数值结果. 可以看到, 在J_x/J更大的区域存在一个二阶 EP 点, 体系发生从 PT 对称性破缺到对称性保持的相变.

对于该体系的 4 个本征态, 可以注意到其中一个本征态不随微扰J_x变化, 即$|\psi_4\rangle=(0,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$. 另外 3 个本征态满足如下形式

$$|\psi_n\rangle=\begin{pmatrix}-1+\dfrac{2\mathrm{i}J(J_x-\varepsilon_n)-J_x^2}{2J^2+J_x(-J_x+\varepsilon_n)}\\-\mathrm{i}+\dfrac{J(J_x+\varepsilon_n)-\mathrm{i}J_x(J_x-\varepsilon_n)}{2J^2+J_x(-J_x+\varepsilon_n)}\\-\mathrm{i}+\dfrac{J(J_x+\varepsilon_n)-\mathrm{i}J_x(J_x-\varepsilon_n)}{2J^2+J_x(-J_x+\varepsilon_n)}\\1\end{pmatrix},$$

$$n=1,2,3.\quad\text{(A8)}$$

将上述本征态展开到$J_x^{1/3}$的二阶, 体系的本征态可近似地表示为

$$|\psi_n\rangle=\left|\psi_n^{(0)}\right\rangle+\left|\psi_n^{(1)}\right\rangle J_x^{1/3}+\left|\psi_n^{(2)}\right\rangle J_x^{2/3},$$

$$n=1,2,3,\quad\text{(A9)}$$

其中零阶近似为微扰为零时哈密顿量的本征态$|\psi_n^{(0)}\rangle=|\phi_n\rangle=(-1,-i,-i,1)^{\mathrm{T}}$, 一阶近似为$|\psi_n^{(1)}\rangle=c_{n,(1)}(-2i,1,1,0)^{\mathrm{T}}/2J$, 二阶近似为$|\psi_n^{(2)}\rangle=c_{n,(1)}^2(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}/2J^2$. 至此, 得到体系在 EP 点附近的全部定态信息, 包括本征能量和本征矢量的近似表达式.

附录A3 PT 对称性破缺相中密度矩阵的含时演化

考虑处于 PT 对称性破缺区域的初态$|\psi\rangle$, 其可被正文中 (2) 式的哈密顿量$\hat{H}$的本征态线性展开, 即$|\psi\rangle=\alpha_1|\psi_1\rangle+\alpha_2|\psi_2\rangle+\alpha_3|\psi_3\rangle+\alpha_4|\psi_4\rangle$. 其中$|\psi_1\rangle$和$|\psi_2\rangle$对应的本征值互为复共轭, 记为$\varepsilon_1=a+bi$和$\varepsilon_2=a-bi$, 并假设$b>0$. 另外两个本征值均为实数, 记为$\varepsilon_3=c$和$\varepsilon_4=d$. 则态$|\psi\rangle$的时间演化为

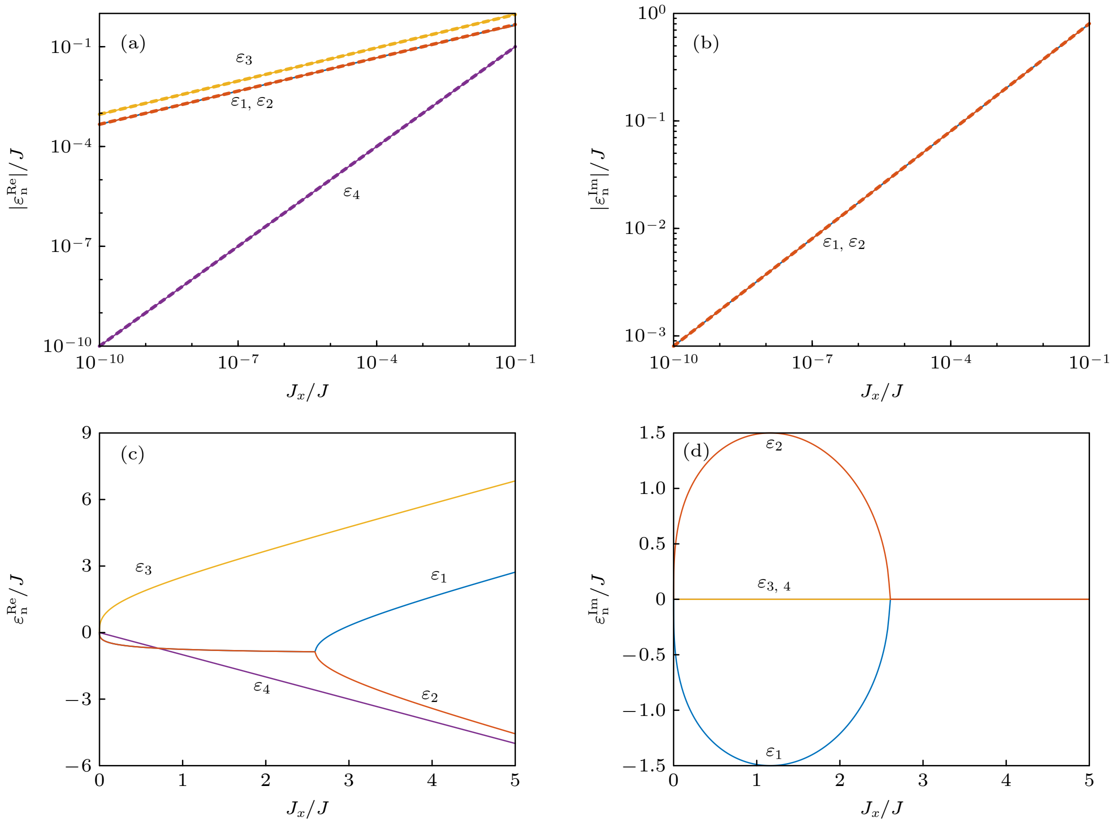


图 A2 对数坐标系下具有伊辛相互作用的两量子比特体系本征值的 (a) 实部和 (b) 虚部的绝对值随相互作用强度 J_x/J 的变化. 以及在更大的相互作用强度范围内, 该体系的本征值的 (c) 实部和 (d) 虚部随相互作用强度的变化

Fig. A2. The absolute values of (a) the real and (b) imaginary parts of eigenvalues of a two-qubit system with Ising interaction versus the interaction strength J_x/J. (c) The real and (d) the imaginary parts of eigenvalues of such a system versus J_x/J in an extended range of the interaction strength.

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \alpha_1 \mathrm{e}^{-i\varepsilon_1 t}|\psi_1\rangle + \alpha_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_1^* t}|\psi_2\rangle + \alpha_3 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_3 t}|\psi_3\rangle + \alpha_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_4 t}|\psi_4\rangle \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_1 t}\Big[\alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varepsilon_1^*-\varepsilon_1)t}|\psi_2\rangle + \alpha_3 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varepsilon_3-\varepsilon_1)t}|\psi_3\rangle + \alpha_4 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varepsilon_4-\varepsilon_1)t}|\psi_4\rangle\Big] \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_1 t}\Big[\alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2 \mathrm{e}^{-2bt}|\psi_2\rangle + \alpha_3 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(c-a)t}\mathrm{e}^{-bt}|\psi_3\rangle + \alpha_4 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(d-a)t}\mathrm{e}^{-bt}|\psi_4\rangle\Big], \qquad \text{(A10)}\end{aligned}$$

式中后三项均含有随时间衰减的指数因子, 在 $t\to+\infty$ 时均趋向于零, 使得

$$|\psi(t\to+\infty)\rangle = \alpha_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_1 t}|\psi_1\rangle. \qquad \text{(A11)}$$

而初态为 $\boldsymbol{\rho}(0) = |\psi\rangle\langle\psi|$ 的密度矩阵的长时间演化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(t\to+\infty) &= \frac{\boldsymbol{U}(t\to+\infty)\boldsymbol{\rho}(0)\boldsymbol{U}^\dagger(t\to+\infty)}{\mathrm{tr}\big[\boldsymbol{U}(t\to+\infty)\boldsymbol{\rho}(0)\boldsymbol{U}^\dagger(t\to+\infty)\big]} \\ &= \frac{|\psi(t\to+\infty)\rangle\langle\psi(t\to+\infty)|}{\mathrm{tr}\big[|\psi(t\to+\infty)\rangle\langle\psi(t\to+\infty)|\big]} \\ &= |\bar{\psi}_1\rangle\langle\bar{\psi}_1|. \qquad \text{(A12)}\end{aligned}$$

因此, PT 对称性破缺区域的态演化在长时间之后会演化到体系能量虚部为正数的本征态上.

能量与之互为复共轭的本征态 $|\psi_2\rangle$ 可以通过将时间演化到 $t\to-\infty$ 得到, 即 $\boldsymbol{\rho}(t\to-\infty) = |\bar{\psi}_2\rangle\langle\bar{\psi}_2|$. 实际上, 也可以通过 PT 变换得到 $|\psi_2\rangle$. 由于哈密顿量和 $\mathcal{PT}$ 算符满足对易关系 $[\hat{H},\mathcal{PT}] = 0$, 如果 $|\psi_1\rangle$ 是 $\hat{H}$ 的本征态, 满足 $\hat{H}|\psi_1\rangle = (a+b\mathrm{i})|\psi_1\rangle$. 那么有

$$\begin{aligned}&\hat{H}(\mathcal{PT}|\psi_1\rangle) = \mathcal{PT}(\hat{H}|\psi_1\rangle) \\ &= \mathcal{PT}(a+b\mathrm{i})|\psi_1\rangle = (a-b\mathrm{i})(\mathcal{PT}|\psi_1\rangle). \quad \text{(A13)}\end{aligned}$$

即 $|\psi_2\rangle = \mathcal{PT}|\psi_1\rangle$ 也是 $\hat{H}$ 的一个本征态, 对应的密度矩阵满足 $|\bar{\psi}_2\rangle\langle\bar{\psi}_2| = \mathcal{PT}|\bar{\psi}_1\rangle\langle\bar{\psi}_1|(\mathcal{PT})^{-1}$.

参考文献

[1] Kato T 1966 *Perturbation Theory for Linear Operators* (Berlin: Springer) pp62–86

[2] Teller E 1937 *J. Phys. Chem.* **41** 109
[3] Heiss W D 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 444016
[4] Ashida Y, Gong Z, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
[5] Berry M V 2004 *Czech. J. Phys.* **54** 1039
[6] Chen W, Kaya Özdemir S K, Zhao G, Wiersig J, Yang L 2017 *Nature* **548** 192
[7] Hodaei H, Hassan A U, Wittek S, Garcia-Gracia H, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2017 *Nature* **548** 187
[8] Lai Y H, Lu Y K, Suh M G, Yuan Z, Vahala K 2019 *Nature* **576** 65
[9] Chu Y, Liu Y, Liu H, Cai J 2020 *Phys. Rev. Lett* **124** 020501
[10] Ding L, Shi K, Zhang Q, Shen D, Zhang X, Zhang W 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 083604
[11] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, Morandotti R, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902
[12] Peng B, Özdemir S K, Rotter S, Yilmaz H, Liertzer M, Monifi F, Bender C M, Nori F, Yang L 2014 *Science* **346** 328
[13] Gao T, Estrecho E, Bliokh K Y, Liew T C H, Fraser M D, Brodbeck S, Kamp M, Schneider C, Höfling S, Yamamoto Y, Nori F, Kivshar Y S, Truscott A G, Dall R G, Ostrovskaya E A 2015 *Nature* **526** 554
[14] Kanki K, Garmon S, Tanaka S, Petrosky T 2017 *J. Math. Phys.* **58** 092101
[15] Wu Y, Zhou P, Li T, Wan W, Zou Y 2021 *Opt. Express* **29** 6080
[16] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
[17] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, Musslimani Z H, Rotter S, Christodoulides D N 2018 *Nat. Phys.* **14** 11
[18] Dembowski C, Gräf H D, Harney H L, Heine A, Heiss W D, Rehfeld H, Richter A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 787
[19] Peng B, Özdemir S K, Lei F, Monifi F, Gianfreda M, Long G L, Fan S, Nori F, Bender C M, Yang L 2014 *Nat. Phys.* **10** 394
[20] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
[21] Doppler J, Mailybaev A A, Böhm J, Kuhl U, Girschik A, Libisch F, Milburn T J, Rabl P, Moiseyev N, Rotter S 2016 *Nature* **537** 76
[22] Schindler J, Li A, Zheng M C, Ellis F M, Kottos T 2011 *Phys. Rev. A* **84** 040101(R)
[23] Bender N, Factor S, Bodyfelt J D, Ramezani H, Christodoulides D N, Ellis F M, Kottos T 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 234101
[24] Naghiloo M, Abbasi M, Joglekar Y N, Murch K W 2019 *Nat. Phys.* **15** 1232
[25] Xiao L, Zhan X, Bian Z H, Wang K K, Zhang X, Wang X P, Li J, Mochizuki K, Kim D, Kawakami N, Yi W, Obuse H, Sanders B C, Xue P 2017 *Nat. Phys.* **13** 1117
[26] Li J, Harter A K, Liu J, de Melo L, Joglekar Y N, Luo L 2019 *Nat. Commun.* **10** 855
[27] Wang W C, Zhou Y L, Zhang H L, Zhang J, Zhang M C, Xie Y, Wu C W, Chen T, Ou B Q, Wu W, Jing H, Chen P X 2021 *Phys. Rev. A* **103** L020201
[28] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press) p399-416
[29] Gilchrist A, Langford N K, Nielsen M A 2005 *Phys. Rev. A* **71** 062310
[30] Fuchs C A, van de Graaf J 1999 *IEEE Trans. Inf. Theory* **45** 1216
[31] Kawabata K, Ashida Y, Ueda M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 190401
[32] Wang Y T, Li Z P, Yu S, Ke Z J, Liu W, Meng Y, Yang Y Z, Tang J S, Li C F, Guo G C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 230402
[33] Brody D C, Graefe E M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 230405
[34] Ding L, Shi K, Wang Y, Zhang Q, Zhu C, Zhang L, Yi J, Zhang S, Zhang X, Zhang W 2022 *Phys. Rev. A* **105** L010204
[35] Sørensen A, Mølmer K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1971

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

High-order exceptional point in a quantum system of two qubits with interaction*

Shi Ting-Ting [1)] Zhang Lu-Dan [1)] Zhang Shuai-Ning [1)2)†] Zhang Wei [1)2)]

1) (*Department of Physics, Renmin University of China, Beijing* 100872, *China*)

2) (*Beijing Academy of Quantum Information Sciences, Beijing* 100193, *China*)

(Received 17 April 2022; revised manuscript received 22 May 2022)

Abstract

As one of the essential features in non-Hermitian systems coupled with environment, the exceptional point has attracted much attention in many physical fields. The phenomena that eigenvalues and eigenvectors of the system simultaneously coalesce at the exceptional point are also one of the important properties to distinguish from Hermitian systems. In non-Hermitian systems with parity-time reversal symmetry, the eigenvalues can be continuously adjusted in parameter space from all real spectra to pairs of complex-conjugate values by crossing the phase transition from the parity-time reversal symmetry preserving phase to the broken phase. The phase transition point is called an exceptional point of the system, which occurs in company with the spontaneous symmetry broken and many novel physical phenomena, such as sensitivity-enhanced measurement and loss induced transparency or lasing. Here, we focus on a two-qubit quantum system with parity-time reversal symmetry and construct an experimental scheme, prove and verify the features at its third-order exceptional point, including high-order energy response induced by perturbation and the coalescence of eigenvectors.

We first theoretically study a two-qubit non-Hermitian system with parity-time reversal symmetry, calculate the properties of eigenvalues and eigenvectors, and prove the existence of a third-order exceptional point. Then, in order to study the energy response of the system induced by perturbation, we introduce an Ising-type interaction as perturbation and quantitatively demonstrate the response of eigenvalues. In logarithmic coordinates, three of the eigenvalues are indeed in the cubic root relationship with perturbation strength, while the fourth one is a linear function. Moreover, we study the eigenvectors around exceptional point and show the coalescence phenomenon as the perturbation strength becomes smaller.

The characterization of the response of eigenvalues at high-order exceptional points is a quite difficult task as it is in general difficult to directly measure eigenenergies in a quantum system composed of a few qubits. In practice, the time evolution of occupation on a particular state is used to indirectly fit the eigenvalues. In order to make the fitting of experimental data more reliable, we want to determine an accurate enough expressions for the eigenvalues and eigenstates. To this aim, we employ a perturbation treatment and show good agreement with the numerical results of states occupation obtained by direct evolution. Moreover, we find that after the system evolves for a long enough time, it will end up to one of the eigenstates, which gives us a way to demonstrate eigenvector coalescence by measuring the density matrix via tomography and parity-time reversal transformation.

To show our scheme is experimentally applicable, we propose an implementation using trapped $^{171}Yb^{+}$ ions. We can map the parity-time reversal symmetric Hamiltonian to a purely dissipative two-ion system: use microwave to achieve spin state inversion, shine a 370 nm laser to realize dissipation of spin-up state, and apply Raman operation for Mølmer-Sørensen gates to implement Ising interaction. By adjusting the corresponding microwave and laser intensity, the spin coupling strength, the dissipation rate and the perturbation strength can be well controlled. We can record the probability distribution of the four product states of the two ions and measure the density matrix by detecting the fluorescence of each ion on different Pauli basis.

Keywords: non-Hermitian system, exceptional point, parity-time reversal symmetry, ion trap

PACS: 03.65.Yz, 05.30.Rt, 03.65.Aa **DOI:** 10.7498/aps.70.20220716

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2018YFA0306501), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12074428), the Key Research Program of Beijing, China (Grant No. Z180013), and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant Nos. BX20200379, 2021M693478).

† Corresponding author. E-mail: zhangshuaining@ruc.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

基于线性与非线性干涉仪的量子精密测量研究进展

孙思彤 丁应星 刘伍明

Research progress in quantum precision measurements based on linear and nonlinear interferometers

Sun Si-Tong Ding Ying-Xing Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 130701 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220425
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20220425
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

专题: 非厄米物理前沿

基于线性与非线性干涉仪的量子精密测量研究进展*

孙思彤# 丁应星# 刘伍明†

(中国科学院物理研究所, 北京 100190)

(2022 年 3 月 9 日收到; 2022 年 4 月 1 日收到修改稿)

量子精密测量根据量子力学的基本原理, 利用光、原子、磁之间的相互作用对待测物理量进行测量. 随着实验条件和技术的成熟, 如何利用干涉仪进一步提高位相信号这一物理量的测量精度从而打破散粒噪声的限制、突破标准量子极限并逼近海森伯极限成为研究的前沿课题. 本文阐述了利用线性干涉仪 (包括原子/光子干涉仪) 与非线性干涉仪调用不同阶段的量子资源在测量过程中提高参数评估精度的几种方法, 通过向干涉仪中输入非经典态来实现高精度测量, 如压缩态、双数态、NOON 态等, 还介绍了为直接观测量子态而发展出的弱测量及其在非厄米系统中的应用和为消除参数之间精度制衡而提出的多参数测量. 最后, 对几种测量方法进行了分析比较, 并展望了量子精密测量的发展前景.

关键词: 量子精密测量, 干涉仪, 海森伯极限, 标准量子极限, 非厄米系统

PACS: 07.60.Ly, 42.50.Dv **DOI:** 10.7498/aps.71.20220425

1 引 言

计量学与量子力学的结合产生了量子精密测量这一前沿领域, 对前沿技术的发展具有重要意义, 它不仅能够提高普朗克常数 h, 万有引力常数 G 等基本物理学常数的测量精度, 而且能应用于设计并制造各种量子仪器如原子钟、陀螺仪、原子重力仪、原子磁强计等来提高时间、频率、重力加速度、磁场等参数的测量精度[1–8]. 量子精密测量主要研究在量子力学原理允许的条件下如何实现高精度测量, 具体测量分为两个方面, 一种是利用统计规律的经典测量方法所能达到的最高测量精度, 被称为标准量子极限; 另一种是利用系综中不同粒子之间的量子纠缠和关联的手段达到的最高测量精度, 被称为海森伯极限. 这些都是可观测到的量子涨落所允许的最大精度. 因干涉仪具有的高分辨率和高稳定性, 使得基于干涉仪的量子精密测量成为量子精密测量领域的主要发展方向. 目前, 量子精密测量广泛应用于离子系综[9–11]、冷原子系综[12,13]、光子系综[14,15] 以及核磁共振系综[16–18] 等物理体系, 其中, 冷原子系综拥有较高的可控性和稳固的量子相干性, 因此具有较高的测量精度.

由于量子力学中不确定性原理的条件限制, 测量结果会有误差, 为了减小误差带来的影响, 一般进行多次实验, 重复测量, 取测量结果的平均值. 根据中心极限定理, 重复 N 次 (N 远大于 1) 独立的测量, 其测量结果满足正态分布, 测量误差可以达到 $1/\sqrt{N}$, 该比例因子即为标准量子极限, 这就是经典力学框架下的测量极限. 而量子测量则可以

* 国家重点研发计划资助项目 (批准号: 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1400243) 和国家自然科学基金 (61835013) 的资助.

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn

利用粒子之间的量子关联来突破该极限, 在体系中使用更少的原子数即达到相同的精度. 如将输入态制备成最大纠缠态, 使 N 个粒子的量子态相互纠缠, 则可以把测量精度提高到 $1/N$, 比标准量子极限允许的精度提高了 $\sqrt{N}$ 倍, 该比例因子被称为海森伯极限. 向干涉仪中注入非经典态可以使位相测量精度达到海森伯极限. 在原子干涉测量领域中, 在捕获离子系统、低温气体、超冷原子中, 也已经证明了超过标准量子极限的测量精度. 对于数量巨大的粒子来说, 灵敏度的增长幅度也是巨大的.

本文将介绍量子精密测量的几种典型方法, 主要从线性干涉中的原子/光子干涉仪精密测量与非线性干涉仪精密测量两个方面介绍近年来突破标准量子极限和逼近海森伯极限的进展.

2 基于线性干涉仪的精密测量

线性干涉仪是利用线性光学分束器 BS 作为干涉器件进行分束合束. 向其中输入相干态压缩噪声从而提高信噪比. 系综越大求平均值的置信度越高, 对于一个较大的系综来说, 相位由时间来积累. 线性干涉仪的测量过程可以分为:将探针制备到所需的输入态, 再将待测量放入干涉仪与探针进行动力学演化, 然后有区分地测量多个粒子的输出态, 进行这 3 个过程的数据处理. 假设输入态为 $\rho_{\rm in}$, 在零时刻给定一个系综, 进行相位衍化 $U(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}G\varphi}$, 若测量对象为距离, 则 G 为动量, 若测量对象为时间, 则 G 为哈密顿量. 若输入态为不同能量的叠加态, 则随着时间的变化, 不同态上有不同的时间相位积累, 两个能级差积累在与 φ 对应的相位上, 故得到输出态 $\rho_{\rm out}(\varphi)=U(\varphi)\rho_{\rm in}(0)U^{\dagger}(\varphi)$, 根据误差传递公式, 可以得到待测量 $\theta=\langle I(\theta)\rangle^{-1}$ 的相位灵敏度 $\delta\theta=\dfrac{\delta I(\theta)}{\mathrm{d}\langle I(\theta)\rangle/\mathrm{d}\theta}$, 其中, $\delta \mathrm{I}(\theta)$ 是观测量的标准偏差, $\mathrm{d}\langle \mathrm{I}(\theta)\rangle/\mathrm{d}\theta$ 为信号变化率. 通过将指向北极的自旋相干态作为输入状态, 当 $\theta=\pi/2$ 时, 状态旋转到自旋相干态指向 $I(\theta)_x$, 故给出 $\delta I(\theta)=\sqrt{N}/2$, $\mathrm{d}\langle I(\theta)\rangle/\mathrm{d}\theta=N/2$, 可得 $\delta\theta=1/\sqrt{N}$.

初末态相位之差称为 Hellinger 距离, 量化两个分布之间的相似性, 对于任意可观测量, Hellinger 距离为

$$d_{\rm H}^2(\varphi)=\frac{1}{2}\sum_x\left[\sqrt{P_x(q)}-\sqrt{P_x(0)}\right]^2, \tag{1}$$

当 φ 非常小时

$$d_{\rm H}^2(\varphi)=\frac{F}{8}\varphi^2+O\left(\varphi^3\right), \tag{2}$$

F 为 Fisher 信息 [19]

$$F=\sum_{\rm x}P_x(\varphi)\left[\frac{\partial LnP_x(\varphi)}{\partial\varphi}\right]^2, \tag{3}$$

对于纯态来讲

$$\rho_{\rm in}=|\lambda\rangle\langle\lambda|. \tag{4}$$

Fisher 信息本质上为 G 的方差, G 在干涉仪输入态的涨落应为最大, 则

$$F_{\rm Q}=4\left\langle\Delta G^2\right\rangle=4\left(\left\langle\lambda\left|G^2\right|\lambda\right\rangle-\left\langle\lambda\left|G\right|\lambda\right\rangle^2\right). \tag{5}$$

对于混态来讲

$$\rho_{\rm in}=\sum_n P_n|\phi_n\rangle\langle\phi_n|, \tag{6}$$

则

$$F_{\rm Q}(\rho_{\rm in})=\sum_{m,n}\frac{2(P_m-P_n)^2|\langle\phi_m|G|\phi_n\rangle|^2}{P_m+P_n}. \tag{7}$$

在量子力学的框架中, 单参数估计的测量精度极限是用量子 Fisher 信息的倒数来决定的, 在一个 N 粒子的纠缠态中, 随着量子 Fisher 信息的增大, 其相位测量精度极限越高, 进而可能会突破标准量子极限, 多于多粒子体系, Fisher 信息也描述多粒子的纠缠度. 在参量估计中, 最高量子 Fisher 信息对应最高的测量精度极限, 即相对相位不确定度 $\Delta\varphi\geqslant\Delta\varphi_{\rm cR}=1/\sqrt{F_{\rm Q}(\varphi)}$, 通过干涉仪测量的标准量子极限 (standard quantum limit, SQL) $\Delta\phi\geqslant 1/[(M-1)\sqrt{N}]$, 其中 N 为系综数. 干涉仪工作的过程是: 一束波 (电磁波或者物质波) 通过分束器后变成两束波, 两束波分为不同的路径, 进行一定的相位演化后再进行合束, 实现相干叠加, 最后使用探测器探测干涉信号, 根据干涉信号的强度推算相位的变化, 进而得出待测量的参数大小.

2.1 光子干涉仪

光子干涉仪以光波干涉原理为基础, 是目前在光学系统、光学元件的检测中具有高效性和高准确性的手段, 光子线性干涉仪以最典型的 Mach-Zehnder (M-Z) 干涉仪为例, 结构示意图如图 1 所示.

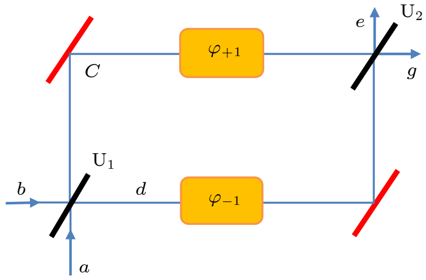


图 1 Mach-Zehnder 干涉仪. a, b 为入射端; e, g 为输出端; U_1 为分束镜; U_2 为合束镜. 入射光 a 和 b 经过第一个分束镜 U_1 后, 产生的光场线性映射到 c 和 d 两个路径上, 然后进行相位积累后再合束在一起, 实现相干态叠加, 最后输出探测场是 e 和 g

Fig. 1. Schematic diagram of Mach-Zehnder interferometer. a, b are incident end; e, g are output end; U_1 is the beam-splitting mirrors; U_2 is the beam-closing mirrors. After the incident light a and b pass through the first beam division mirror U_1, the resulting light field is linearly mapping to the two paths c and d, then phase accumulation and then beam together to achieve coherent state superposition, and the final output detection fields are e and g.

由于作为探测光的相干态光场的光子数满足泊松分布, 干涉仪输出光强会存在一定的起伏. 这个起伏的大小为干涉仪最小可测量位相 (振幅) 信号的大小, 被称为经典测量系统的散粒噪声极限.

线性干涉仪又叫 Ramsey 干涉仪[20,21], 它是光子 Mach-Zehnder 干涉仪的一部分, Ramsey 干涉仪由两个分束器和一个在其间积累相位的演化时间组成. Ramsey 干涉仪的序列可以用广义 Bloch 球表示, 如图 2 所示.

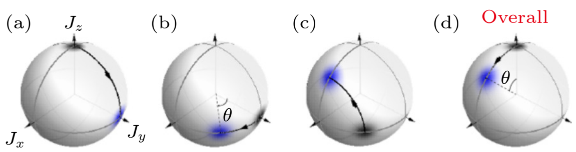


图 2 在 Bloch 球上的 Ramsey 干涉仪的序列 (a) 第一个光束对应于一个量子态围绕 J_x 轴旋转 $\pi/2$, 输入态为指向北极的自旋相干态; (b) 自由演化得到相位差 θ, 即围绕 J_z 旋转 θ; (c) 第二个分束器再次围绕 J_x 轴旋转 $\pi/2$; (d) Ramsey 序列的整体效应是初始状态沿 J_y 轴旋转一个角度 θ. 通过测量 J_z 即可读出 θ[22]

Fig. 2. Sequences of the Ramsey interferometer are illustrated with the Bloch sphere: (a) First beam corresponds to a $\pi/2$ rotation of the quantumstate around the J_x axis, and he input state is a CSS pointing toward the north pole; (b) free evolution picks up a phase difference θ, which corresponds to a rotation around the J_z by an angle of θ; (c) second beam splitter again revolve around J_x axis of $\pi/2$; (d) overall effect for the Ramsey sequence is a rotation of the initial state by an angle θ along the J_y axis. By measuring the J_z can read θ[22].

测量相位 θ 代表在 Bloch 球上甄别两个不同的方向, 一个为初始态方向, 另一个为转动方向. 线性干涉仪的映射可用下式来表示:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}J_x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta J_z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}J_x}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta J_y}. \tag{8}$$

还有一种常用的干涉仪——Michelson 干涉仪, 线性干涉仪的一个重要应用就是 LIGO 干涉仪, 目前国际上分辨率最高的引力波探测器是 LIGO, 它是全光 Michelson 干涉仪 2016 年, 在美国 Hangford 的 LIGO 利用 Michelson 干涉仪探测到了由两个黑洞合并产生的引力波, 验证了爱因斯坦 1916 年的预言. LIGO 的有效臂长为 1120 km, 有效探测光强为 750 W, 最终相位分辨率可以达到 10^{-19} m[23]. 同年, Henning 等[24] 在 LIGO 的基础上使用了压缩光, 在 15 dB 的纠缠元下经过干涉仪后获得了 3 dB 的信噪比增强. LIGO 探测结果如图 3 所示.

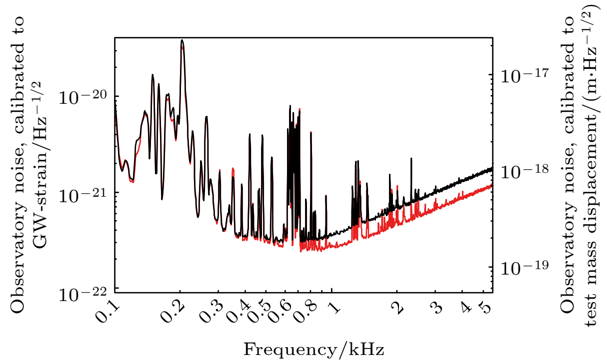


图 3 LIGO 探测结果[25], 红线有压缩光的观测噪声, 黑线为无压缩光的观测噪声

Fig. 3. Detection results of LIGO detector, red line compression light observation noise, black line for no compression light observation noise.

2.2 原子干涉仪

不同于光学干涉仪, 原子干涉仪是物质波干涉仪. 而光-原子混合的 SU(2) 型干涉仪的工作原理与 Mach-Zehnder 干涉仪有相似之处, 但 SU(2) 混合干涉仪不使用分束器, 而是利用线性拉曼转换过程来实现原子、光自旋波的相干叠加[26]. 干涉仪的两条路径对应一个粒子, 实际上为一个量子比特, 一条路径为 0, 一条路径为 1, 路径 1 对应路径 0 有一个相位, 而对原子来说两条路径分别代表基态和激发态, 相位为时间相位, 自旋相干态分布趋近于标准的正态分布, 量子比特可以完美地映射到一个 Bloch 球上, 如图 4 所示.

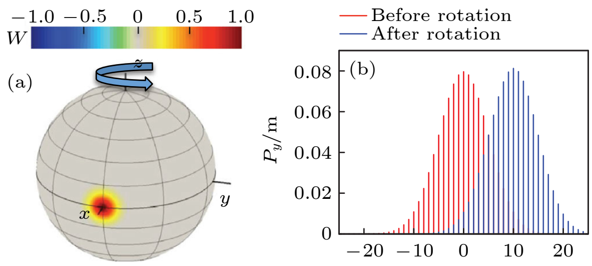


图 4 (a) 一个沿正 x 轴的自旋相干态在 Bloch 球上的旋转; (b) 对应的沿 y 方向的的自旋概率为 $P_y(m)=|\langle m_y|\varPsi\rangle|^2$ (右图)[27]

Fig. 4. (a)A coherent spin state along the x axis in the rotation of the Bloch sphere; (b) spin probability $P_y(m)=|\langle m_y|\varPsi\rangle|^2$ along the y direction[27].

由自旋相干态提供的相位灵敏度即是所谓的标准量子极限. 它可以通过引入物体的位置/动量不确定性反射光的光子数/相位不确定性之间的相关性来克服.

与光波干涉仪类似, 原子干涉仪作为量子传感器, 在测量重力加速度 g、重力梯度 e、转动引力常数 G 等方面显示出巨大的应用潜力, 大大提升了测量灵敏度. 原子 M-Z 干涉仪中, 物质波被拉曼激光束的驻波分裂、反射和结合, 原子的内部状态与路径纠缠在一起. 与光学 Ramsey 干涉仪类似, 原子 Ramsey 干涉仪使用两对 $\pi/2$ 拉曼激光束作为振荡场. 拉曼原子干涉仪同样由 4 个阶段组成: 原子的磁光囚禁与冷却、形成原子喷泉、拉曼光与原子的相互作用以及探测阶段. 1991 年, 美国斯坦福大学朱棣文团队采用受激拉曼跃迁技术实现了原子 M-Z 干涉仪[28]. 2009 年, 詹明生团队实现了一个冷原子 M-Z 干涉仪, 并在此之前观察到对比度为 37% 的干涉条纹. 此外, 该团队还利用 Ramsey 原子干涉仪进行实验, 观察到了清晰的 Ramsey 条纹. 在此基础上, 基于冷原子干涉仪的重力仪、陀螺仪等得到迅速发展. 冷原子重力仪的灵敏度 σ 与两次脉冲的周期间隔 T 以及噪声有关[29], 表达式为 $\sigma=\dfrac{1}{\text{SNR}}\dfrac{1}{k_{\text{eff}}T^2}$, SNR 为冷原子重力仪的信噪比. 目前, 中国科学技术大学研究组在安静的山洞环境中[30], 在不使用其他减振平台和数据修正的情况下, 实现了 70 $\mu\text{Gal}/\sqrt{\text{Hz}}$ 以下的测量精度. 此外, 在地面与微重力环境下, 对冷原子内部展现出的量子磁性测量是探寻冷原子领域通向更低温的重要手段, 在经过两级冷却后, 通过态转移, 将玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensations, BECs)[31] 制备到预期的磁量子数态上, 便可进行量子磁性相变的测量, 在原子和光的相互作用后通过"非破坏性"成像测量技术, 如吸收成像或色散成像进行探测. 2005 年, Higbie 等[32] 对 $_{37}{}^{87}$Rb 冷原子团进行了磁敏相衬成像. 2010 年, Sadler 等[33] 将该成像用于铁磁域的动力学实验中. 在微重力情况下, 一方面冷原子的温度可以降低到 PK 量级, 使量子磁性效应显著, 更容易测量; 另一方面 BEC 的寿命被延长, 从而满足绝热磁性相变的测量条件.

线性 SU(2) 光-原子混合干涉仪基于光和原子的相互作用, 其输出信号兼具对光场和原子的相位敏感性, 相比经典干涉仪具有更广泛的应用场景. 光学干涉仪具有更高的动态高速测量、空间分辨率和更宽的波段. 但由于光学干涉仪可见单色光干涉条纹的分辨率较小, 而且在测量过程中存在空气阻尼、光电探测器中的非线性效应、仪器自身的摆动误差、时间和位移测量的不确定度等, 这些都会影响干涉光的质量, 影响测量精度. 相比于光学干涉仪, 冷原子干涉仪具有更高的可操作性, 得以较好地控制冷原子的量子态, 而冷原子的速度较低, 从而增加了干涉的作用时间, 可以得到较好的干涉条纹, 使得重力测量方面的测量精度至少提高一个数量级, 且应用范围更加广泛.

3 基于非线性干涉仪的精密测量

经典干涉仪的测量灵敏度主要受限于散粒噪声极限, 而量子增强的精密测量可以超越这一极限. 量子干涉是一种常用的参数测量手段, 但线性干涉仪在测量时的灵敏度受限于探测噪声, 1985 年 Yurke 等[34] 提出非线性干涉仪, 克服了这一困难. 利用非线性光学分束器 NBS 作为干涉器件, 代替干涉仪中的 BS, 将干涉仪的输入状态进行压缩纠缠, 从而利用压缩噪声提高信噪比, 进而提高测量精度. 基于非线性物理过程的非线性干涉仪又叫 SU(1, 1) 干涉仪. 但探测光场的平均光子数受限于放大器的增益, 导致灵敏度无法达到具有实际测量价值的水平, 2010 年, Plick 等[35] 提出通过在非线性干涉仪的输入端口注入相干态来提高系统的测量灵敏度. 2013 年, Kong 等[36] 利用四波混频过程实现了 SU(1, 1) 干涉仪, 在实验上, 四波混频的 SU(1, 1) 干涉仪有 90% 以上的对比度, 与传统的

M-Z 干涉仪相比, SU(1, 1) 干涉仪提高了 (4.1±0.3) dB 的信噪比. 除了全光干涉仪, 还有原子波构成的原子干涉仪, 以及光原子混合干涉仪. 华东师范大学张卫平团队[26,37,38] 利用原子和光的受激拉曼散射过程实现了一种新的光-原子混合 SU(1, 1) 干涉仪, 基于光和原子的相互作用, 实现广域原子之间的干涉, 并且在混合干涉仪的输出端观测到对比度为 95% 左右的干涉条纹. 在原子干涉测量领域, 在俘获离子系统、冷热气体和冷原子中已经证明了超过标准量子极限的测量精度.

干涉仪的 3 个阶段都可以通过量子资源的调用来实现标准量子极限的突破. 对于第一个阶段, 不同的输入态会导致不同的灵敏度. 经典情况下输入为相干态, 即对应标准量子极限, 若输入为量子态, 如压缩态、纠缠态、NOON 态、双 FOCK 态等, 则可以提升灵敏度达到海森伯极限, 但由于光子数的限制, 实际上在绝对灵敏度上与经典测量仍然存在一定差距; 第二个阶段是分/合束过程. 传统的 M-Z 干涉仪是一个线性过程, 不会涉及到信号的衰减或者放大, 通过一个非线性过程 (如参量转换和四波混频过程) 来代替线性的合束器与分束器, 这样可以带来信号的增益, 提升灵敏度; 第三个阶段是探测过程, 常用的探测手段主要是通过强度探测 (intensity detection, ID), 平衡零拍探测 (homodyne detection, HD), 宇称探测 (parity detection, PD) 这 3 种探测手段来提升灵敏度.

非线性干涉仪以 SU(1, 1) 为例. 利用一个非线性衍化 (即在一束经典光的作用下使两个光子同时产生或同时湮灭) 进行映射, 也可以说对于量子模式下两个均为真空态的输入态, 通过参量转换、四波混频来产生一对有关联的光子, 则对 U_1 来说, 哈密顿量 $H_1 = \mathrm{i}\hbar k(a_1 a_{-1} - a_1^{\dagger} a_{-1}^{\dagger})$, 在没有相位衍化时, 干涉仪从输入真空态到输出真空态, 进行时间的反演产生负哈密顿量, 即 $U_2 = U_1^{\dagger}$; $H_2 = -H_1$, 测量两个相位加和 U_{φ}; $\varphi = \varphi_{+1} + \varphi_{-1}$, U_1 为分束镜, U_2 为合束镜. 非线性干涉仪原则上即指在合束阶段进行时间反演的操作, 此时的输出态为经典态, 从而放大信号, 提高测量精度. 原理如图 5 所示. 非线性干涉仪映射可用下式表示:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}H\tau/\hbar}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta G}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\tau/\hbar}, \tag{9}$$

在海森伯表象里 G 对应的涨落越大, 则测量精度越高.

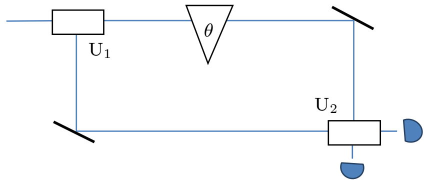


图 5 非线性干涉仪. 将分束镜和合束镜用非线性的哈密顿量压缩到哈密顿量来产生, U_1 为分束镜, U_2 为合束镜. 将相同的压缩机制进行反压缩成真空态后, 信号便得到了放大

Fig. 5. Schematic diagram of the nonlinear interferometer. The beam-splitting mirrors and beam-closing mirrors are produced by squeezing to the Hamiltonian with a nonlinear Hamiltonian, U_1 is the beam-splitting mirrors, U_2 is the beam-closing mirrors. After the same compression mechanism is inversely compressed into a vacuum state, the signal is amplified.

非线性 SU(1, 1) 光-原子混合干涉仪的分/合束过程采用参量型拉曼散射的方式, 非线性与线性光-原子混合干涉仪都可使测量精度突破标准量子极限. 理论研究表明, 在理想条件下, 通过非线性过程产生的光场会处于非经典量子态. 这样的干涉仪的测量精度都允许达到海森伯极限. 下面主要针对这几个不同的阶段来讨论如何利用非线性干涉仪在非经典态中突破标准量子极限达到海森伯极限.

3.1 压缩态 (单模压缩) 测量

3.1.1 输入阶段

压缩态是指光场或粒子某一物理量的不确定度小于散粒噪声极限下的量子态. 量子压缩光降低了量子噪声. 真空态经过压缩算符 $\hat{S}(\zeta) = \exp[(\zeta\hat{a}^2 - \zeta^*\hat{a}^{2\dagger})/2]$ 作用可以得到压缩真空态, $\zeta = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 为各因素的相关系数. 压缩态光场作为一种非典型光场, 一般包括光子数压缩、正交压缩和强度差压缩等, 单模压缩态光场是指正交压缩态光场 (即光场的一个正交分量噪声被压缩) 可以低于标准量子极限, 此时, 由于海森伯测不准原理的限制, 光场的另一个正交分量噪声高于标准量子极限. 量子压缩的程度直接决定了它对物理系统性能的提高程度. 在量子力学中, 限定了测量系统精度的不确定性关系针对的是一对不对易物理量, 如光场的振幅、位相分量算符和 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$, 它们的涨落特性可以由海森伯不确定关系表述:

$$\Delta\hat{X}\cdot\Delta\hat{Y} \geqslant 1, \tag{10}$$

压缩态的相位和振幅的不确定度不相等, 因而在相

空间中是一个压缩的椭圆. 描述光的不确定度在一个自由度上变小时在另一个自由度上变大, 故在测量其中一个物理量的精度时, 不考虑另一个物理量的精度要求, 便能使该物理量的精度达到更高. 对于压缩态, 其平均光子数不为零, 基于压缩态的相位最小测量值为

$$\Delta\phi^{\mathrm{sqz}}=\frac{\left[|\alpha|^2\mathrm{e}^{-2r}+\sinh^2 r\right]^{\frac{1}{2}}}{|\alpha|^2-\sinh^2 r},\qquad(11)$$

式中, $\sinh^2 r$ 为压缩光光子数, r 为压缩因子, 相位灵敏度 $(1/\Delta\phi)$ 随着 r 的增大而提高, r 的增大也导致 $\sin(h^2 r)$ 的增大, 当满足 $\sinh^2 r\approx\sqrt{N}/2$ 时, 得到最小测量值的最优解 $\Delta\phi\approx N^{-\frac{3}{4}}$[39–41], 可到达海森伯极限的测量灵敏度.

自 1979 年 Yuen 和 Shapiro[42] 首次提出使用简并四波混频效应产生压缩态光场的概念后, 1986 年 Wu 等[43] 利用光学参量下转换在实验中观测到了单模压缩态. 此后, 随着研究的不断深入, 实现了不同类型的压缩, 压缩精度也在不断提高. 1992 年, 山西大学彭堃墀教授团队首次在国内成功制备了单模压缩态[44]. 2008 年, LIGO 实验室 Goda 等[45] 通过向 Michelson 干涉仪中注入压缩光将测量的精度提高了 44%. 2013 年, LIGO 研究团队[46] 利用压缩光在 150 Hz 处得到了 40% 的宽带精度提高. 2016 年, 德国汉诺威大学 Vahlbruch 等[47] 获得了目前最高的单模压缩态, 达 15 dB . 2020 年, 麻省理工学院 Yu 等[48] 对比了 3 种不同 ϕ 值的压缩测量值, 如图 6 所示.

减法后推断在注入压缩态时进行测量的量子噪声的表达式 $Q(\varOmega)$ 为

$$Q(\varOmega)=D_{\mathrm{s}}(\varOmega)-[D_{\mathrm{r}}(\varOmega)-M_{\mathrm{r}}(\varOmega)],\qquad(12)$$

式中, D_{r}, D_{s} 和 M_{r} 分别表示参考和压缩操作情况下的频率相关数据和模型光谱密度.

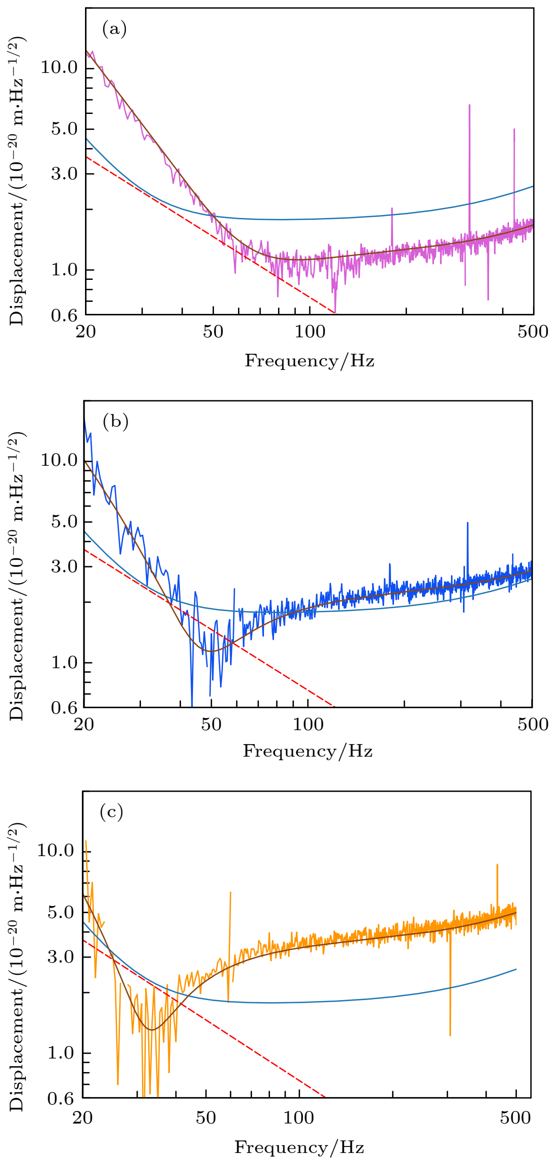


图 6 不同压缩角时的量子噪声谱 (a)7°; (b) 24°; (c)46°. 每个数据集都采用经典噪声减法绘制, 并绘制了有注入压缩态时相应的量子噪声模型曲线 (铜线) 和没有注入压缩态的模型 (蓝线) 以进行比较. 结果表明随着注入状态的变化, 量子辐射压力噪声的贡献可以增加和减少[48]

Fig. 6. Quantum noise spectra at different additional squeezing angles: (a) 7°; (b)24°; (c) 46°. Each dataset is plotted with the classical noise subtraction, The corresponding quantum noise model curve (copper line) with the injected compressed state and the uninjected compressed state model (blue line) are also plotted for comparison. The results show that, the quantum radiation pressure noise contribution can be increased and decreased as the injected state is varied[48].

3.2 纠缠态 (双模压缩) 测量

3.2.1 分/合束阶段

纠缠态又叫 EPR 态或双模压缩态, 是两个光场模式的正交分量之间存在纠缠. 当光子经过第一个分束器后有两种路径的选择, 假如 N 个光子依次经过分束器, 如果输入的光子之间相互独立, 那么前后两个光子的路径选择没有关联. 如果光子之间存在纠缠, 就会使所有的光子选择保持一致, 然后在经过第一个分束器后, 便会有两种结果: 即所有的光子都选择第一条路径或所有的光子都选择第二条路径. 这两种可能的结果之间相差一个相位,

比单个光子的实验信号放大了 N倍, 由此可获得的测量灵敏度达到海森伯极限. 原子在相对较短的时间内可以产生自旋压缩态. 如果一个垂直于平均自旋分量的方差小于相干自旋态给出的散粒噪声 $J/2$, 则认为量子态被自旋压缩. 存在子系统的态和另一个子系统的态有一定的关联, 这样的态我们称为量子纠缠态. 对于二能级原子组成的冷原子系综, 纠缠态需满足 $F_{\rm Q} > N$的条件.

自发参量下转换是一个利用二阶非线性效应的过程. 非线性干涉仪基于参量放大过程也可以显著提高相位测量精度. 利用光学参量放大器 (optical parametric amplifier, OPA) 输出光场的纠缠特性, 使探测光场由相干态转为压缩态, 从而实现突破标准量子极限的测量精度. OPA 的变换算符被称为纠缠算符, 又叫双模压缩算符, 表达式为 $\hat{S}\,({\rm z}) = \exp\left[\left(\zeta\hat{a}_1\hat{a}_2 - \zeta^*\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\right)/2\right]$. 双模真空态光场 $|0,0\rangle_{a,b} = |0\rangle_a|0\rangle_b$ 在该算符作用下变为纠缠态$|r\rangle_{a,b} = \hat{S}_{a,b}|0,0\rangle_{a,b}$.

有相干态注入的非线性干涉仪理论模型以及具体过程如图 7 所示. 通过将被测量合理地调制在具有纠缠特性的光场的一臂或两臂, 该信号在噪声下降的同时得到放大, 与线性干涉仪相比, 非线性干涉仪系统在小信号测量时可以获得显著提升的信噪比[49].

当输入态为相干态和压缩真空态时, 经过 OPA1

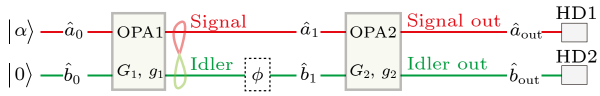


图 7 非线性干涉仪原理图. OPA1-2, 光学参量放大器; HD1-2, 平衡零拍探测器, $\hat{a}_0$为信号光场, $\hat{b}_0$为闲频光场; G_1, g_1, G_2, g_2为参量放大器振幅增益系数[49]. 将相干态 $|\alpha\rangle$光场和真空态 $|0\rangle$光场同时输入 OPA1 中进行非相敏放大, 利用产生的具有纠缠特性的闲频光场与信号光场作为探测光场, 将被测信号加载到纠缠光上, 然后将携带被测信号的两束光同时输入 OPA2 中进行相敏放大

Fig. 7. Principle diagram of the nonlinear interferometer. OPA1-2, optical parametric amplifier; HD1-2, setup of balanced homodyne detection, $\hat{a}_0$ is signal light field, $\hat{b}_0$ is idle frequency light field; G_1, g_1, G_2, g_2 are parametric amplifier amplitude gain coefficient. The coherent state $|\alpha\rangle$ light field and vacuum state $|0\rangle$ light field simultaneously input in OPA1 for nonphase sensitive amplification, using the entanglement of idle frequency light field and signal light field as detection light field, the measured signal on the entangled light, and then carry the two light of the measured signal simultaneously input OPA2 for phase sensitive amplification[49].

之后, 其中一个模式的光束会产生一个相移ϕ, 而另一个模式的参考光束则保持固定的相位, 然后再经过 OPA2 合束/分束. 当$\phi = 0$时即为最优的相敏点, 根据实际测得的信号涨落计算得到最优相位敏感度为

$$(\Delta\phi')^2 = \frac{1}{{\rm e}^{2r}}\frac{1}{N_\alpha}\frac{1}{N_{\rm OPA}\left(N_{\rm OPA}+2\right)}, \qquad (13)$$

式中, ${\rm e}^{2r}$为输入的压缩真空, $N_\alpha = |\alpha|^2$为输入的相干态, $N_{\rm OPA} = 2{\rm sinh}^2 g$是 OPA1 在真空输入下输出的光子数, 即自发辐射光子数. 随着正交分量r的增大, 测量的相位灵敏度越高. 在最优条件下, 当$N_{\rm OPA} \gg 1$时, 非线性干涉仪的相位测量精度可接近海森伯极限$(\Delta\phi')^2 \approx 1/N^2$.

四波混频作为一个三阶非线性相互作用的过程, 不需要与外部腔进行耦合, 具有空间多模的特性. 被广泛应用于量子精密测量和量子信息. 四波混频基于铷原子的超精细能级结构, 其中两个强光与非线性介质相互作用, 从而产生一对光子. 在原子系综的四波混频过程满足动量守恒和能量守恒, 在非简并情况下可得到纠缠态, 得到更高的压缩度. 1985 年, Slusher 等[50] 发现通过钠原子蒸汽中的四波混频过程可观测到双模压缩态. 1999 年, 彭堃墀教授团队[51] 成功制备了连续变量 EPR 纠缠态. 2008 年, Lett 团队[52] 利用基于铷原子系综中双Λ型能级结构的四波混频过程制备了双模压缩态. 2011 年, Glorieux 等[53] 利用铷原子气体四波混频效应得到纠缠态. 2019 年, 华东师范大学刘胜帅等[54] 基于碱金属原子系综过程中的四波混频过程得到了 10.13 ± 0.21 的量子压缩强度, 是目前获得的最高强度差压缩. 此外, 在多体系统中, 时间反演这一操作的实现难度阻碍了非线性干涉仪的发展. 2021 年 12 月, 清华大学尤力教授团队[55] 提出了使用相互作用系统内禀的周期性演化的方法, 以此代替时间反演, 并成功观测到突破标准量子极限, 约增加了 5 dB 的相位灵敏度.

3.2.2 探测阶段

强度测量是经典干涉测量中探测噪声最常用的测量手段, 其工作原理为对两个输出端口中任意一个端口的输出强度进行测量. 在输入态为两束相干光$|\alpha\rangle$和$|\beta\rangle$的情况下, 强度探测的最优相位灵敏度为[56]

$$\left(\Delta\phi^{\mathrm{I}}\right)^2=\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{4|\alpha|^2|\beta|^2N_{\mathrm{OPA}}\left(N_{\mathrm{OPA}}+2\right)},\tag{14}$$

1983 年, Yuen 和 Chan[57] 提出了测量光场量子态正交分量值的方法, 被称为平衡零拍探测 (balanced homodyne detection, BHD), 并在同年由 Abbas 等[58] 实现. 当干涉仪的输入状态完全等于输出状态时, 称为平衡条件, 平衡零拍探测的基本原理如图 8 所示.

在平衡零拍探测情况下, 最优相位敏感度为

$$\left(\Delta\phi^{\mathrm{H}}\right)^2=\frac{1}{|\alpha|^2N_{\mathrm{OPA}}^2+|\beta|^2N_{\mathrm{OPA}}\left(N_{\mathrm{OPA}}+2\right)+2\left|\alpha\right|\left|\beta\right|N_{\mathrm{OPA}}\sqrt{N_{\mathrm{OPA}}\left(N_{\mathrm{OPA}}+2\right)}}.\tag{15}$$

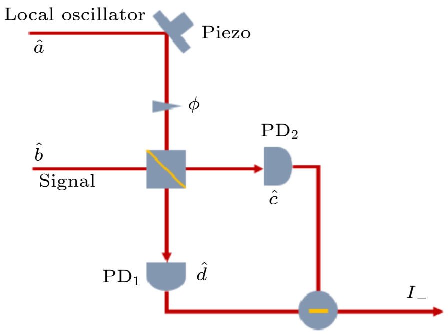


图 8 平衡零拍探测装置[59]. 将输入光场 a 与待测光场 b 通过 50∶50 分束器进行合束, 合束后, 用光电探测器分别对输出的两束光场 c 与 d 进行光强探测, 然后将探测信号相减, 得到的即为待测光场的正交分量值

Fig. 8. Setup of balanced homodyne detection [59]. The input light fields a and b light fields to be measured are combined through a 50∶50 beam splitter. After the beam combined, the two output light fields c and d are detected by photodetector, and then let the detection signal subtraction. The result is the orthogonal component value of the light field to be measured.

宇称测量也被称为奇偶测量, 1996 年, 由 Bollinger 等[60] 在研究囚禁离子实验中首次提出, 后被 Gerry[61] 应用到光学干涉测量. 这种测量手段是对任意一个输出端口中光子数的奇偶性进行统计, 从而估计所要进行测量的相位信息. 当光子数为偶数时, 测量结果记为 1, 当光子数为奇数时, 测量结果为–1. 因此, 以输出端为例奇偶测量的测量算符可表示为

$$\varPi_{\mathrm{A}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a^{\dagger}a}.\tag{16}$$

在输入态为一束相干态和一束压缩真空态的 SU(1, 1) 非线性干涉仪中, 宇称探测在 $\phi=0$、相干态的初始相位 $\theta_\alpha=0$ 时具有最优相位灵敏度[60]:

$$\Delta\phi_{\mathrm{P}}=\frac{1}{\left[\left(N_{\alpha}\mathrm{e}^{2r}+N_{\mathrm{s}}+1\right)N_{\mathrm{OPA}}\left(N_{\mathrm{OPA}}+2\right)\right]^{\frac{1}{2}}},\tag{17}$$

式中, $N_\alpha=|\alpha_0|^2$是相干光的平均光子数, $N_{\mathrm{s}}=\sinh^2 r$是压缩真空态的平均光子数, $N_{\mathrm{OPA}}=2\sinh^2 g$是 OPA1 自发辐射光子数.

当输入的相干态和压缩真空态的平均光子数大约相等时, 非线性干涉仪的相位灵敏度可接近海森伯极限, 通过参量之间的约束关系可得宇称探测的相位灵敏度为

$$\Delta\phi_{\mathrm{P}}=\frac{1}{\sqrt{4N_{\alpha}^2N_{\mathrm{OPA}}^2}}\approx\frac{1}{N}.\tag{18}$$

当输入压缩真空态, 且独立测量次数比较小时, 宇称探测的相位灵敏度为

$$\Delta\phi_{\mathrm{P}}=\frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{OPA}}\left(N_{\mathrm{OPA}}+2\right)}},\tag{19}$$

可突破$1/\langle\hat{N}_{\mathrm{Tot}}\rangle=1/N_{\mathrm{OPA}}$[62].

综上所述, 当输入态不同时, 最适用的探测手段各不相同, 宇称探测适用于输入态为一束压缩真空态和一束相干态, 平衡零拍探测适用于两束相干态, 且这两束相干态光强需相等. 在理想情况下, 两者测量方法都可接近海森伯极限测量精度.

3.2.3 其他形式纠缠态测量

1992 年, Kitagawa 和 Ueda[63] 首次提出了自旋压缩的概念, 自旋压缩是在干涉测量法中见证大尺度量子纠缠突破标准量子极限的最成功的方法之一. 对于自旋为 J 的系统, 当一个量子态沿某个自旋方向的涨落 $(\Delta\hat{J}_{\perp})^2$小于$|\langle J_k\rangle|/2$ (k 为平均自旋方向), 则该量子态被称为自旋压缩态. 常见的自选压缩参数分为 3 种, 第一种根据海森伯不确定原理定义为: $\xi_{\mathrm{H}}^2=\dfrac{2(\Delta\hat{J}_\alpha)^2}{|\langle\hat{J}_\gamma\rangle|}$, $\alpha\neq\gamma\in(x,y,z)$; 第二种定义为 $\xi_{\mathrm{S}}^2=\dfrac{\min(\Delta\hat{J}_{n_\perp})^2}{J/2}=\dfrac{4\min(\Delta\hat{J}_{n_\perp})^2}{N}$, 即自旋分量涨落 (与平均自旋方向垂直) 与平均自旋长度的比值; 第三种为 $\xi_{\mathrm{R}}^2=\dfrac{\Delta\phi}{(\Delta\phi)_{\mathrm{SCS}}}=\dfrac{N(\Delta\hat{J}_{n_\perp})^2}{|\langle\hat{J}\rangle|^2}$, $\langle\hat{J}\rangle$为

平均自旋长度, 即给定的量子态相位不确定度与参考的自旋相干态相位不确定度的比值, 当压缩系数 $\xi_m^2<1$, $(m=\mathrm{H,S,R})$时, 体系产生自旋压缩. 将输入的自旋压缩态进行 Ramsey 干涉, 其$F_{\mathrm{Q}}>N$, 故测量精度可以实现标准量子极限的突破. 2020 年, Szigeti 等[64] 证明, 玻色-爱因斯坦凝聚态 (BEC) 原子间的相互作用可以提高冷原子重力仪的灵敏度. BEC 的原子间相互作用可利用干涉仪通过 OAT 产生自旋压缩, 对于N个不相关原子产生的最小压缩态为

$$\xi_{\min}\approx\frac{1-\dfrac{1}{2}|Y|N\lambda\left(\sqrt{4+|Y|^2N^2\lambda^2}-|Y|N\lambda\right)}{|Y|^2},\tag{20}$$

式中, $\lambda\equiv\int_0^{2T_{\mathrm{OAT}}}\mathrm{d}t'\chi(t')$, $\chi(t)=\chi_{11}(t)+\chi_{12}(t)-2\chi_{12}(t)$, $Y\equiv|Y|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}u_1^*(\boldsymbol{r},2T_{\mathrm{OAT}})u_2(\boldsymbol{r},2T_{\mathrm{OAT}})$, 量化了干涉仪两条路径在BS2上的空间匹配程度.

当$T\gg T_{\mathrm{OAT}}$时, 该方案可使重力仪的灵敏度从原来的$\Delta g=\dfrac{1}{\sqrt{N}k_0T^2}$, 变为压缩后的

$$\Delta g=\frac{\xi}{\sqrt{N}k_0T^2}=\frac{1}{\sqrt{N}k_0T^2}\min\left(\frac{N\mathrm{Var}(\hat{J}_{\theta,\phi})}{\left\langle\hat{J}_{\frac{\pi}{2},\phi+\frac{\pi}{2}}\right\rangle^2}\right),\tag{21}$$

式中, $\xi\equiv\min_{\theta,\phi}\xi_{\theta,\phi}$为自旋压缩参数, 测量灵敏度大约超出散粒噪声极限的 2—5 倍. 该方案提供了一条实现量子增强冷原子引力测量的途径.

当N个处于$|\downarrow\rangle$的粒子与N个处于$|\uparrow\rangle$的粒子等概率叠加时被称为最大纠缠态, 又叫 Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ) 态, 可写成

$$|\mathrm{GHZ}\rangle=\frac{\left|\dfrac{N}{2},+\dfrac{N}{2}\right\rangle+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\left|\dfrac{N}{2},-\dfrac{N}{2}\right\rangle}{\sqrt{2}},\tag{22}$$

式中, γ代表一个任意相位, 在干涉仪中当$\gamma=0$时, 输入态为

$$|\varPsi\rangle_{\mathrm{in}}=\frac{\left|\dfrac{N}{2},+\dfrac{N}{2}\right\rangle+\left|\dfrac{N}{2},-\dfrac{N}{2}\right\rangle}{\sqrt{2}},\tag{23}$$

经过自由演化, 处于$|\downarrow\rangle$的粒子积累$+\dfrac{\varphi}{2}$相位, 处于$|\uparrow\rangle$的粒子积累$-\dfrac{\varphi}{2}$相位, 得到输出态为

$$|\varPsi\rangle_{\mathrm{out}}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{N\varphi}{2}}\left|\dfrac{N}{2},+\dfrac{N}{2}\right\rangle+\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{N\varphi}{2}}\left|\dfrac{N}{2},-\dfrac{N}{2}\right\rangle}{\sqrt{2}},\tag{24}$$

故可得$F_{\mathrm{Q}}=N^2$, 相位测量精度可达$1/N$[65–70].

由于最大纠缠态的实验条件较为困难, 形成的纠缠较弱且不易控制, 容易受相关环境因素的影响, 导致粒子数的损失, 从而影响测量精度. 于是自旋猫态这种易于制备且更稳定的多粒子态应运而生.

自旋猫态又叫 NOON 态, NOON 态本质上是一种宏观自旋相干态的叠加[71], 可写为[72]

$$|\varPsi(\theta)\rangle_N=\frac{\sum_{m=-J}^{J}c_m(\theta)(|J,m\rangle+|J,-m\rangle)}{\sqrt{2}}.\tag{25}$$

2018 年研究发现, NOON 态具有海森伯极限标度, 由 (25) 式可得

$$F_{\mathrm{Q}}=\left(1-\frac{2\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}\right)^2N^2,\tag{26}$$

故相位测量精度满足

$$\Delta\phi\geqslant\Delta\phi_{\mathrm{QCR}}\equiv\upsilon^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2\tan^2(\theta/2)}{1-\tan^2(\theta/2)}\right)N^{-1},\tag{27}$$

由此可看出该测量精度接近海森伯极限[72].

相较于最大纠缠态, NOON 态更容易制备, 理论上, 量子力学中相空间的方法可实现混合 NOON 态, 但在实验过程中有着极大的困难和挑战. NOON 态具有鲁棒性的特点, 即系统对参数扰动的不敏感性, 基于该理论被应用于制造实时测量物体的温度、位置等物理量变化的量子传感器, 实现高精度测量.

双数态又叫 balanced spin -1/2 Dicke 态, 一种高度纠缠态, 是自旋朝上和朝下粒子数相等的量子态, 在广义 Bloch 球上表征为一个在赤道上的圆环, 如图 9 所示.

在单粒子 Fock 直积态下, 双数态可表示为

$$|\mathrm{TFS}\rangle_N=\left|\frac{N}{2}\right\rangle_a\left|\frac{N}{2}\right\rangle_b=\left|\frac{N}{2},0\right\rangle,\tag{28}$$

式中, N为偶数, 利用双数态作为输入, 可以实现达到海森伯极限的量子干涉测量, 利用双数态进入分束器的系数进行计算可得其量子 Fisher 信息为

$$F_{\mathrm{Q}}=N(1+N/2),\tag{29}$$

得其相位测量精度满足

$$\Delta\varphi \geqslant 1/\sqrt{N^2/2+N}. \tag{30}$$

因此, 利用双数态进行相位测量, 理论上所能达到的最小相位不确定度几乎正比于总粒子数 N ($N \gg 1$), 具有海森伯极限的测量精度[73]. 在实验方面, 国内外团队在基于冷原子系综的双数态的制备中也取得了先进的实验成果.

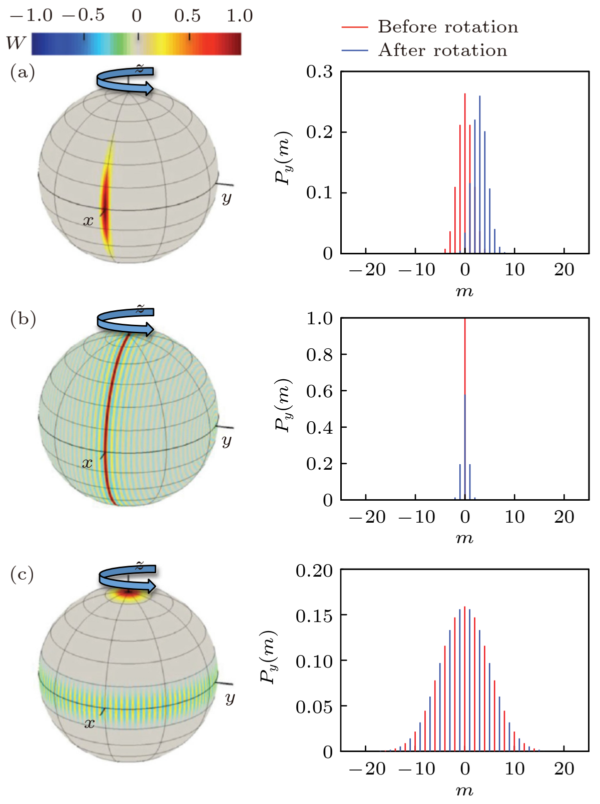


图 9 左图为不同的量子态的旋转, 右图为对应不同量子态沿 y 方向的自旋概率为 $P_y(m)=|\langle m_y|\Psi\rangle|^2$ (a) 自旋压缩态; (b) 双 Fock 态, 由不可区分的玻色粒子组成, $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 的原子数相等, 在 Bloch 球中, 沿纬度方向的量子投影噪声为零即不确定度为零, 但沿经度方向的分布则完全不确定; (c) NOON 态[27]

Fig. 9. Rotation of different quantum states (left), spin probability $P_y(m)=|\langle m_y|\Psi\rangle|^2$ along the y direction of different quantum states (right): (a) Spin-squeezed state. (b) twin-Fock state. Comconsists of indistinguishable Boseonic particles, with equal atomic numbers for $|\uparrow\rangle$ and $|\downarrow\rangle$. The quantum projection noise along the latitude direction is zero and the uncertainty is zero, but the distribution along the longitude direction is completely uncertain. (c) NOON state [27].

4 弱测量

4.1 弱测量的实现

弱测量是通过将测量仪器与量子系统耦合, 并检测由耦合强度决定的仪器态位移水平来实现的, 为直接观察量子态、量子波函数和基本的量子效应提供了可能. 1988 年, Aharonov 和 Alber 等首先提出弱值的概念. 由于量子测量会造成量子态$|\Psi\rangle$坍缩, 为了移除使用$|\Psi\rangle$而造成的时间不对称, 降低 t 时刻的观测对量子系统的影响, 则需要采用弱测量方法, 弱测量被理解为一种间接测量的方式, 利用量子指针对测量结果进行筛选, 一般分为 3 个过程: 选择前初态的制备、系统和探针之间的相互作用以及系统后选择. 不同于强测量, 弱测量会使耦合变弱, 在几乎不干扰量子态的情况下对量子系统进行测量, 不会导致量子系统坍缩. 弱值表示了对由演化算符变化引起的探测概率变化的纠正, 一般来讲, 弱值可取复数. 将测试量子系统后选择的放大程度用弱值来量化, 将其定义为 $A_{\mathrm{w}}=\dfrac{\langle\psi_{\mathrm{f}}|\hat{A}|\psi_{\mathrm{i}}\rangle}{\langle\psi_{\mathrm{f}}|\psi_{\mathrm{i}}\rangle}$, $|\psi_{\mathrm{i}}\rangle$为前选择态, $|\psi_{\mathrm{f}}\rangle$为后选择态, 其原理如图 10. 在量子力学中, 观测量的变化通过哈密顿算符来表示, 在弱测量中, 假设相互作用的哈密顿量为 $\hat{H}=g\delta(t-t_0)\hat{A}$, 从而可得相互作用的时间演化算符为 $\hat{U}=\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\int\hat{H}\mathrm{d}t/\hbar)}=\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}g\hat{A})}$, $\hat{U}$ 用以比较经过演化前后的探测概率的差异.

可通过观察后选择光子数的变化来估计 g. 对于单个探测脉冲, 假设初始状态为相干态, 写为

$$|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\Sigma_k\frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}|k\rangle, \tag{31}$$

对于纯相干态精度探测的尺度, 测量灵敏度计算为

$$\Delta g=\frac{|\alpha|}{\frac{\partial\Delta n}{\partial g}}=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}, \tag{32}$$

式中, $n=|\alpha|^2$为平均光子数, Δn为平均光子数变化量.

文献 [75] 给出了在$n=2$当系统初始状态为最大纠缠态时, 后选择概率为

$$P_{\mathrm{d}}=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2g^2n^2\delta^2}\cos\varepsilon\right), \tag{33}$$

后选择后指针分布为

$$\frac{1}{P_{\mathrm{d}}}\sin^2\left(ngp+\frac{\varepsilon}{2}\right)P(p). \tag{34}$$

当系统初始状态为直积态时, 后选择概率为

$$p'_{\mathrm{d}}=2^{-n}\left(1-\mathrm{e}^{-2g^2n^2\delta^2}\cos\varepsilon\right), \tag{35}$$

后选择后指针分布为

$$\frac{1}{2^{n-1}p'_{\mathrm{d}}}\sin^2\left(ngp+\frac{\varepsilon}{2}\right)P(p). \tag{36}$$

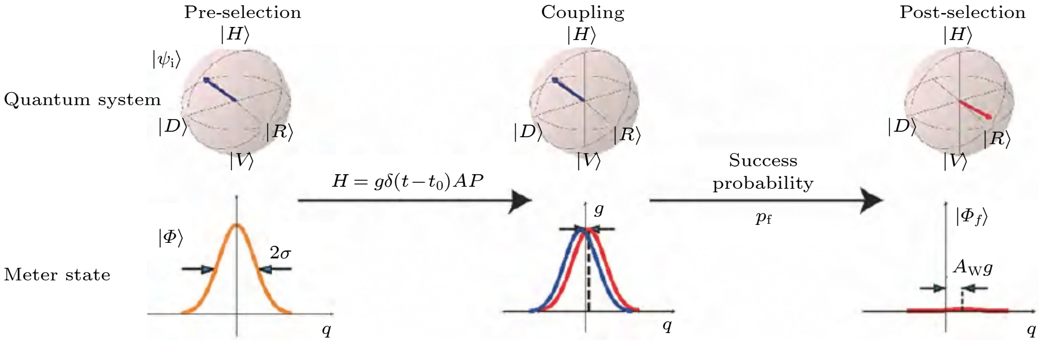


图 10　弱值放大原理图, g 为耦合强度, A 为量子系统的可观测量, P 为测量仪器态的可观测量, $|\psi_i\rangle$ 为测量仪器与量子系统的联合态, $\delta(t-t_0)$ 为该哈密顿量在 t_0 时刻的瞬时相互作用, $|\phi\rangle$ 为仪器态, $|\phi_f\rangle$ 为后选择成功的测量仪器态[74]

Fig. 10. Schematic for the weak-value amplification, the g is the coupling strength, the A is the observable of the quantum system, and the P is the observance of the measured instrumental state, $|\psi_i\rangle$ is the joint state of the measurement instrument and the quantum system, $\delta(t-t_0)$ indicates the instantaneous interaction of this Hamiltonian at time t_0, $|\phi\rangle$ is Instrument state, $|\phi_f\rangle$ is the successfully post selective measurement instrument state[74].

2014 年, Dressel 等[76] 采用光学实验来通过偏振变化来得到弱值. 最初实验装置如图 11(a) 所示, 平行激光束的初始态表示为$|\varphi_i\rangle|\psi_i\rangle$, 其中$|\varphi_i\rangle$为初始光偏振态, $|\psi_i\rangle$表示初始横向位置信息态, 二者表示了初始态的两个维度之间的张量积. 光束通过选择态对应的线性偏振态$|\varphi_f\rangle$之后由 CCD(charge coupled device) 探测器接收. CCD 探测器的每个像素探测光子对应的探测概率表示为

$$P = |\langle\varphi_f|\varphi_i\rangle|^2|\langle\psi_f|\psi_i\rangle|^2, \tag{37}$$

式中, $|\psi_f\rangle$为探测器像素横向位置的后选择态. 对于我们来说后选择态对应的是特定横向位置态 $|x\rangle$ 或者动量态$|p\rangle$, 后选择态取决于 CCD 探测的是位置信息还是动量信息, 称这种探测概率 P 为"非扰动"探测概率.

现将双折射晶体放在初选态和后选择偏振片之间, 如图 11(b) 所示.

双折射晶体的作用可以用对应的时间演化算符表示为$\hat{\boldsymbol{U}}(\varepsilon) = \exp\left(-\mathrm{i}\int \hat{\boldsymbol{H}}\mathrm{d}t\right)$, 其中的相互作用哈密顿量表示为

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \nu\hat{\boldsymbol{A}}\otimes\hat{\boldsymbol{P}}, \tag{38}$$

$\hat{\boldsymbol{A}} = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$表示斯托克斯 (Stokes) 偏振操作符, 对应的$|H\rangle$和$|V\rangle$的特征值分别为 1 和–1. $\hat{\boldsymbol{P}}$为横向动量算符, 表征产生在横向位置对应 x 的变化. 时间演化算符$\hat{\boldsymbol{U}}(\varepsilon)$将光子的偏振变化和光子的位置变化联系起来, 经过该演化过程之后的"扰动"所对应的探测概率表示为

$$P_g = \left|\langle\varphi_f|\langle\phi_f|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\hat{\boldsymbol{A}}\otimes\hat{\boldsymbol{P}}}|\varphi_i\rangle|\psi_i\rangle\right|^2, \tag{39}$$

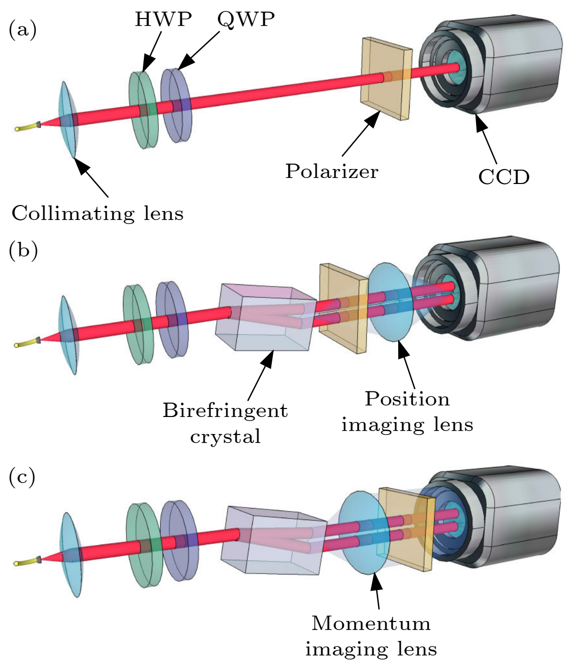


图 11　弱值实现实验装置图　(a) 单模光纤射出的平行光符合高斯强度分布, 由 1/4 波片和半波片实现初始态, 偏振片形成后选择态, CCD 用来检测偏振相关的位移变化情况; (b) 弱值实部的实验装置图; (c) 弱值虚部的实验装置图[76]

Fig. 11. Experimental setup for showing how weak values can be obtained: (a) Light emitted from a single mode fiber is Gaussian distribution, which is collimated by a len and is preselected by an initial polarization state constructed by a quarter-wave plate (QWP) and a half-wave plate(HWP). A polarizer plays an role of postselection and the following CCD then measure the intensity dependent position information. (b) real weak value realization setup. (c) imaginary weak value realization setup[76].

作为实际例子, 考虑光子位置满足高斯分布

$$\langle x|\Psi_{\rm i}\rangle=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right), \tag{40}$$

初始的偏振态的选择为

$$|\varphi_{\rm i}\rangle=\frac{|\varphi_{\rm i}\rangle-{\rm e}^{{\rm i}\phi}|V\rangle}{\sqrt{2}},\ \phi=0.1, \tag{41}$$

对应的后选择偏振态表示为

$$|\varphi_{\rm f}\rangle=\cos\frac{\theta}{2}|H\rangle+\sin\frac{\theta}{2}|V\rangle,\ \theta=\frac{\pi}{2}-0.2, \tag{42}$$

图 12(a) 中整体的探测概率为 $|\langle\varphi_{\rm f}|\varphi_{\rm i}\rangle|^2=0.012$. 当晶体放置在其中 (如图 11(b)), 相互正交的偏振态对应的光在后选择态之前在空间上偏移分量的表示为 ε, 不同 ε 情况下的分布如图 11(a) 中实线所示, 其中的虚线对应“无扰动”情况的分布. 在弱相互作用机制下, 晶体厚度非常小, ε 足够小的情况下, 得到

$$\frac{P_\varepsilon}{P}-1\approx2\tau{\rm Im}\hat{H}_{\rm w}=2\varepsilon\left[{\rm Re}A_{\rm w}{\rm Im}P_{\rm w}+{\rm Im}A_{\rm w}{\rm Re}P_{\rm w}\right], \tag{43}$$

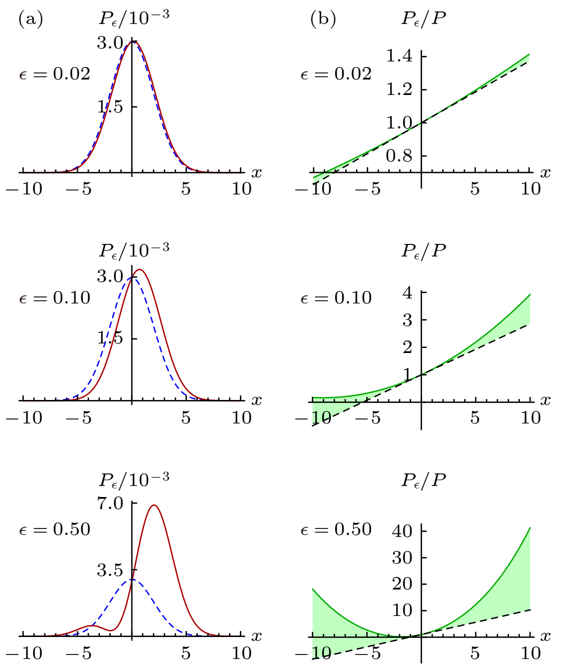


图 12 弱测量结果示意图[76] (a)“扰动”(实线) 和”无扰动“(虚线) 在不同 ε 情况下探测概率比较; (b) 完全阶数情况下的 (实线) 和一阶弱值 (虚线) 在不同 ϵ 情况下的比较, 在 ε 极小时, 二者近似

Fig. 12. (a) Comparisons between perturbed situation (solid) and unperturbed situation (dashed) with different ε; (b) diagram between exact ratio of P_ε/p (solid curve) and the first order approximation in weak measurement linear regime(dashed curve), both of them are approaching when the ϵ is ultra-small[76].

式中, $A_{\rm w}=\dfrac{\langle\varphi_{\rm f}|\hat{\boldsymbol{A}}|\varphi_{\rm i}\rangle}{\langle\varphi_{\rm f}|\varphi_{\rm i}\rangle}$, $P_{\rm w}=\dfrac{\langle\varphi_{\rm f}|\hat{\boldsymbol{P}}|\varphi_{\rm i}\rangle}{\langle\varphi_{\rm f}|\varphi_{\rm i}\rangle}$. 弱值实部 ${\rm Re}A_{\rm w}$ 的实现如图 11(b) 所示, 对应的 $P_{\rm w}=\dfrac{{\rm i}x}{2\sigma^2}$, 后选择态为横向位置 $|x\rangle$. 对应的 (43) 式可化简为

$$\frac{P_\varepsilon}{P}=1+\frac{\varepsilon x}{\sigma^2}{\rm Re}A_{\rm w}. \tag{44}$$

图 12(b) 中实线表明了 P_ε/P 在不同 ε 情况下随 x 的变化曲线. 同样, 通过傅里叶变换得到后选择态 $|\varphi_{\rm f}\rangle=|P\rangle$, 可以得到弱值的虚部 ${\rm Im}A_{\rm w}$ (如图 12(c)所示), 由动量弱值 $P_{\rm w}=p$ 可以推出

$$P_{\rm g}/P=1+2\varepsilon p{\rm Im}A_{\rm w}. \tag{45}$$

结果表明, 可以通过不同的前后选择的设置来得到弱值的实部和虚部的弱测量, 实部和虚部有着不同的物理意义, 同样有着不同的性质. 最开始的弱测量利用的一般是实部的弱测量, 后面的结果表明, 虚部的弱测量可以利用光子位置或者动量的不确定性. 选择何种弱测量方式取决于演化算符和最后测量的光子信息.

2018 年, 中国科学技术大学陈耕等[77] 提出了一种估计纯量子系统与探针之间弱耦合强度测量 (又叫单光子克尔效应测量) 的新方案. 从理论和实验上证明了混合探针态结合纯量子系统的后选择, 可以用来提高精度. 通过混合一系列纯态, 可以使探针状态的不确定性增加, 这种方法即不纠缠也不压缩, 所依赖的量子资源是单光子叠加, 这更加易于生产和操作, 在该方案中, 测量了虚数的弱值 (平均光子数的变化量) 而不是实数的弱值. 将测量探针与弱值虚部结合可得 $\delta P=2g(\Delta P)^2{\rm Im}A_{\rm w}$. 当探针为各种相干态的混合物时, 使用混合态探测大大增加了平均光子数的变化量, 由于混合态可以通过一定相干态 α_0 的振幅调制产生, 因此标准偏差 σ 超过量子涨落 $|\alpha_0|$, 达到 $\sigma\propto N$. 用 υ 入射脉冲数对 g 的估计精度为

$$\Delta g\propto1/(N\sqrt{\tilde{\upsilon}}), \tag{46}$$

式中, N 为所使用的量子资源数量, 由此可以看出, 测量精度 g 可突破标准量子极限达到海森伯极限精度. 计算得 Fisher 信息为 $F_{\rm Q}=4\upsilon\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\propto\tilde{\upsilon}N^2$. 通过绘制 g 与混合态平均光子数 N 的精度, 可以观察到一个明显的海森伯测量尺度, 如图 13 所示

通过测量后选择的概率也可以达到海森伯测量精度, 弱测量的前后选择状态分别为 $|\psi_{\rm i}\rangle=|0\rangle+|1\rangle$ 和 $|\psi_{\rm f}\rangle=|0\rangle-{\rm e}^{-{\rm i}\varepsilon}|1\rangle$. 根据后选择概率可估计出

相互作用强度 g, 则测量灵敏度可通过仪器上的不确定度和仪器态位移灵敏度的比值来预测. 计算可得测量精度为 $\Delta g \approx \dfrac{\Delta p_{\surd}}{s}=\dfrac{1}{n}$, $p_{\surd}$ 为成功后选择概率, $\Delta p_{\surd}=(p_{\surd})^{\frac{1}{2}} \approx \dfrac{(gn+\varepsilon)}{2}$; s 为测量灵敏度.

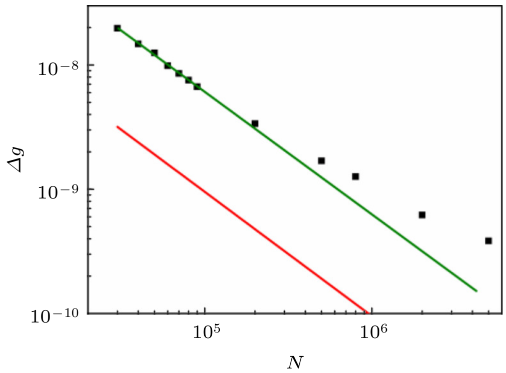


图 13 具有海森伯精度的实验测量结果, 绿色实线表示对点的拟合, 红色实线表示混合态测量精度的一个界限[77]

Fig. 13. Experimentally obtained precision showing Heisenberg scaling. shown as a green line, obtained by fitting these points. The red line is a bound on the precision for mixed state[77].

而后选择概率以及评估测量精度方面, 纠缠系统初态的方案要优于直积系统初态方案. 由于传统的量子层析的方法中量子态有着复杂的重构过程, 因此对高维量子态采用直接层析的方法, 在对一般量子态进行测量时, 直接层析可以得到比弱测量更高的灵敏度和精度. 2019 年, Ogawa 等[78] 利用演化算符 T, 提出了光子空间波函数直接层析的理论方案, 该方案不仅表征效率, 也避免了光子损失.

传统的弱测量一般应用光子的位置和动量信息, 文献 [79] 提出了一种基于相干光的光子统计信息的弱测量方法, 利用相干态作为指针, 光子的统计分布信息随着耦合参数的变化而变化. 文献 [79] 分析了光子数态的分布特性, 不同于探测总光子数变化情况, 可以更为有效地利用弱测量结构. 未来或可应用压缩态的光子统计分布作为一种弱测量的方法.

4.2 弱测量在非厄米系统的应用

在应用方面, 弱测量理论的提出也为测量非厄米系统提供了新的方法. 在量子力学中, 能量的本征值为实数, 哈密顿量在一般情况下为自厄米, 而本征值为虚数的系统被称为非厄米系统, 在某些对称情况下, 非厄米哈密顿量也存在实数本征值. 长期以来, 量子力学中用厄米算符表示可观测物理量是一种根深蒂固的观念. 而事实上可观测物理量只是算符具有厄米性的必要条件, 很多非厄米算符也可以对应正定的实数本征值. 这些非厄米算符也对应一套自洽的量子理论, 这些理论大大地扩展了厄米量子理论的应用范围.

1988 年, PT(parity-time) 对称理论的发表使得量子力学理论得到了迅速发展, 若一个模型既有 PT 对称区, 又有 PT 破缺区, 则该模型被称为赝厄米. 这种具有厄米力学量性质的哈密顿量非厄米被称为赝厄米系统, 赝厄米系统的能谱有两种可能, 即为实数或为一个正虚数对.

非厄米的本质是一个相对权重的变化, 该相对权重等效地用非厄米哈密顿量来表示. 2017 年, Masahito Ueda[80] 给出了真实的计算例子, 如图 14 所示.

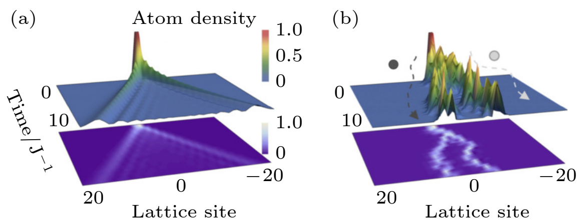


图 14 (a) 无测量的幺正演化; (b) 弱测量下的连续演化[80]. 结果表明, 随着时间的演化, 若在没有进行测量或跃迁时为幺正演化, 会形成一个相对光滑的图形; 若投影到子空间或进行弱测量时, 会形成具有明显跳跃幅度的图形, 即为非厄米哈密顿量最终表达的效果

Fig. 14. (a) Without measurement: unitary evolution; (b) continuous evolution under the weak measurements[80]. The results show that with the evolution of time, a unitary evolution occurs when no measurements or transitions are made, forming a relatively smooth figure, if projected to the subspace or weak measurement, forming a figure with significant jump amplitude, that is, the final expression of the non-Hermitian Hamiltonian.

2020 年, 李传锋教授团队[81] 建立了一个量子弱测量 PT 对称系统, 并将 PT 增强传感器转换为量子版本, 实现了比传统厄米传感器增强 8.856 倍的测量灵敏度. 弱测量可用于构造非厄米量子的 PT 对称系统. 给定一个 PT 对称的哈密顿量 $\boldsymbol{H}_{\rm PT}$ (以下简记为 $\boldsymbol{H}$) 和一个态矢量 $|\varphi\rangle$. 直接测量 $\boldsymbol{H}$ 在 $|\varphi\rangle$ 上的平均值, 即 $\langle\varphi|\boldsymbol{H}|\varphi\rangle_\eta$, 这里 $\langle\varphi_1|\boldsymbol{H}|\varphi_2\rangle_\eta=\langle\varphi_1|\eta\boldsymbol{H}|\varphi_2\rangle$, 代表 η 的内积. 不失一般性, 一个二能级 PT 对称哈密顿量可写为

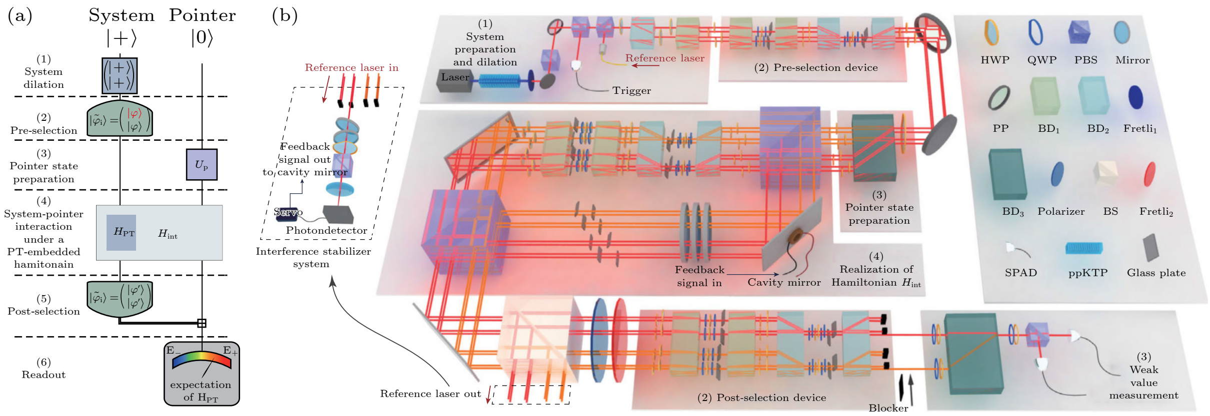


图 15 (a)PT 对称系统构建逻辑图实验装置[81](流程见图). (b) 图表和设置都分为 6 个模块: (1) 系统准备和扩展; (2) 预选状态准备; (3) 指针状态准备; (4) 指针与嵌入了 PT 对称系统的膨胀系统的耦合; (5) 后选; (6) 弱值读出. HWP, 半波片; QWP, 1/4 波片; BS, 分束器; PBS, 偏振分束器; PP, 相位板; BD, 光束置换器; ppKTP, 周期性极化的磷酸氧钛钾; BF, 带通滤波器; SPAD, 单光子雪崩二极管

Fig. 15. (a) Logic diagram of the construction of PT-symmetric system. (b) Experimental setup. Both the diagram and setup are divided into 6 modules: (1) system preparation and dilation; (2) preselection state preparation; (3) pointer state preparation; (4) coupling of the pointer and dilated system in which the PT-symmetric system is embedded; (5) postselection; (6) weak value readout. HWP, half-wave plate; QWP, quarter-waveplate; BS, beam splitter; PBS, polarizing beam splitter; PP, phase plate; BD, beam displacer; ppKTP, periodically poled potassium titanyl phosphate; BF, band-pass filter; SPAD, single-photon avalanche diode[81].

$$\boldsymbol{H}=\left[\begin{array}{cc} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} & s \\ s & r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\end{array}\right], \tag{47}$$

式中, s, r(假设$r>0$), θ 均为实数. 能级为$E_{\pm}=r\cos\theta\pm\sqrt{s^2-r^2\sin^2\theta}$, 当$|s|\geqslant|r\sin\theta|$时, PT 对称满足, 否则破缺. 该方法有两个重要基础, 一是H在$|\varphi\rangle$上的期望值与特殊膨胀哈密顿H在预选态$|\tilde{\varphi}_{\rm i}\rangle=\left[\begin{array}{c}|\varphi\rangle\\|\varphi\rangle\end{array}\right]$和后选态$|\tilde{\varphi}_{\rm f}\rangle=\left[\begin{array}{c}|\varphi\rangle\\|\varphi\rangle\end{array}\right]$上期望值的等价性. 这里, $|\tilde{\varphi}_{\rm i}\rangle$与$|\tilde{\varphi}_{\rm f}\rangle$是态$|\varphi\rangle$的扩展 即$\langle\varphi|\boldsymbol{H}|\varphi\rangle_{\eta}=\dfrac{\langle\tilde{\varphi}_{\rm f}|\tilde{\boldsymbol{H}}|\tilde{\varphi}_{\rm i}\rangle}{\langle\tilde{\varphi}_{\rm f}|\tilde{\varphi}_{\rm i}\rangle}=\langle\tilde{\boldsymbol{H}}\rangle_{\rm W}$. 二是通过弱耦合和检测指针 (这里是量子比特) 推导膨胀哈密顿量 $\boldsymbol{H}$ 的弱值. 构造的 PT 对称系统如图 15 所示.

使用该方法和实验设置路径, 现在可以首先直接描述由 $\boldsymbol{H}(s)$控制的 PT-对称系统的能谱 $\boldsymbol{E}_{\pm}(s)$, 其中r, θ 为固定参数, s 为变量. 能谱见图 16.

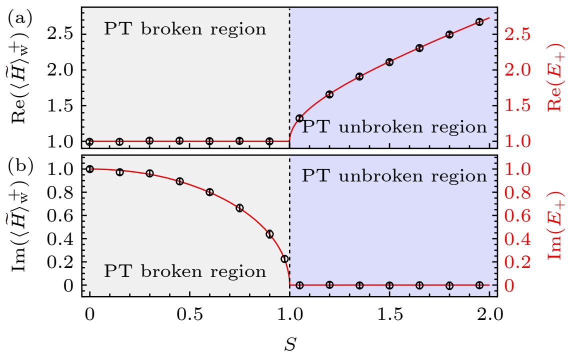


图 16 PT 对称系统的能谱 $E_+(s)$直接由弱值 $\langle\tilde{\boldsymbol{H}}(s)\rangle_{\rm W}^{+}$测量[81]. 带有误差条的黑色圆圈是弱值的实部和虚部, 红线是直接从 PT 对称哈密顿方程计算的相应本征能量. 即 $E_+(s)|_{r=\sqrt{2},\theta=\pi/4}=1+\sqrt{s^2-1}$

Fig. 16. Energy spectrum $E_+(s)$ of the PT-symmetric systemdirectly measured by weak value $\langle\tilde{\boldsymbol{H}}(s)\rangle_{\rm W}^{+}$. The black circles with error bars are real and imaginary parts of the weak value, and the red lines are the corresponding eigenenergy directly calculated from the PT-symmetric Hamiltonian Eq. (1); i.e., $E_+(s)|_{r=\sqrt{2},\theta=\pi/4}=1+\sqrt{s^2-1}$[81].

5 多参数测量

多参数量子估计是指利用量子纠缠和量子控制等量子资源实现海森伯极限精度的多个参数同时精密测量, 表征量子计量学极限精度的一种广泛使用的工具为量子 Cramér-Rao 界. 对于多参数量子估计, 则涉及到多重海森伯不确定度.

2021 年, 中国科学技术大学项国勇等实现了一个最优控制的多参数量子估计的实验演示, 使测量精度提高了 13.27 dB[82]. 利用 SU(2) 中算子 3 个参数的估计, 研究了多个海森伯不确定关系, 同时实现了所有参数的海森伯极限精度测量. 在测量包含 3 个待测参数的量子比特幺正演化算符时, 采用控制增强的次序测量技术, 通过量子控制调控测量

过程, 使得每一份资源中 3 个参数的信息都相干相长积累, 如图 17 所示.

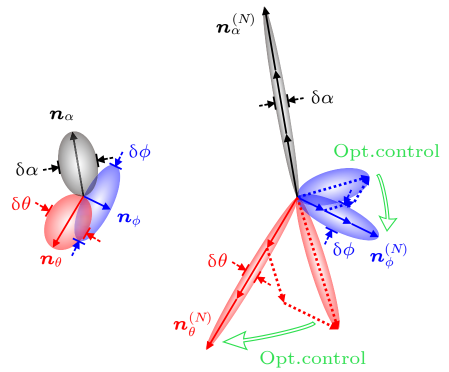


图 17 3 个参数的 bloch 向量. 量子控制使得 3 个参数的信息 bloch 方向上同时相干相长, 最终达到海森伯极限的测量精度[82]

Fig. 17. Bloch vectors of the three generators. Quantum control enables simultaneous growth in the informative bloch direction of the three parameters, eventually reaching the measurement accuracy in the Heisenberg limit[82].

3 个参数的探针都变得更加尖锐灵敏, 同时达到海森伯精度极限, 除控制增强次序方案外, 可将 N 个算符并行排列, 探针状态即可分离也可纠缠. 通用算符可以写为 $U_{\rm s}={\rm e}^{-{\rm i}\alpha\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$, $\boldsymbol{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$, $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 为泡利矩阵对于可使用 N 个演化算符拷贝的所有估计策略, 生成子 $H_x^{(N)}$ 的方差上界都是

$$\left\langle\Delta^2\left[\boldsymbol{H}_x^{(N)}\right]\right\rangle\leqslant N^2\left\langle\Delta^2\boldsymbol{H}_x\right\rangle, \tag{48}$$

可导出海森伯极限

$$\delta\hat{x}^2\geqslant\frac{1}{4N^2\left\langle\Delta^2\boldsymbol{H}_x\right\rangle}, \tag{49}$$

在 n 次重复过程之后, 计算得出最小方差的最终下界

$$\delta\hat{x}^2\geqslant\frac{1}{4nN^2\left\langle\Delta\boldsymbol{H}_x^2\right\rangle}, \tag{50}$$

式中, $\boldsymbol{H_x}\equiv{\rm i}\left(\partial x\boldsymbol{U_{\rm S}}\right)\boldsymbol{U}_{\rm s}^{\dagger}$ 为该参数的对应生成元. 实验分为 3 个步骤, 首先将探针状态制备为最大纠缠态, 偏振量子位, 然后依次通过位置算符 $U_{\rm s}$、控制算符 $\boldsymbol{U}_{\rm c}$, 重复进行 n 次, 最后执行最优测量. 其中 $\boldsymbol{U}_{\rm C}=\boldsymbol{U}_{\rm s}^{\dagger}(\hat{\alpha},\hat{\theta},\hat{\phi})$. 然后对 $\sigma_3\sigma_2,\sigma_1\sigma_3,\sigma_2\sigma_1$ 这 3 个测量值的共同特征向量进行投影测量.

对于 SU(2) 算符 $\boldsymbol{U}_{\rm s}(\alpha,\theta,\phi)$, α,θ 和 ϕ 的生成子分别为

$$\boldsymbol{H}_\alpha=n_\alpha\cdot\sigma,\boldsymbol{H}_\theta=\sin\alpha\, n_\alpha\cdot\sigma,\boldsymbol{H}_\phi=\sin\alpha\sin\theta\, n_\alpha\cdot\sigma, \tag{51}$$

$n_\alpha=n$, $n_\theta=\cos\alpha n_1+\sin\alpha\, n_2$, $n_\varphi=-\sin\alpha\, n_1+\cos\alpha\, n_2$, $n_1=\partial_\theta n=(\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,-\sin\theta)$, $n_2=n\times n_1=(-\sin\phi,\cos\phi,0)$. 此 3 参数的生成子是互相不对易的, 方差上界为

$$\begin{aligned}&\left\langle\Delta^2\boldsymbol{H}_\alpha\right\rangle\leqslant1,\ \left\langle\Delta^2\boldsymbol{H}_\theta\right\rangle\leqslant\sin^2\alpha,\\&\left\langle\Delta^2\boldsymbol{H}_\varphi\right\rangle\leqslant\sin^2\alpha\sin^2\theta,\end{aligned} \tag{52}$$

使用针对各个参数的最优探针态即可取到这些上界. 探测态 $|\varPsi\rangle$ 选择最大纠缠态时可以同时让 3 参数的生成子的方差取最大值, 方差分别为

$$\begin{aligned}\left\langle\Delta^2\boldsymbol{H}_x\right\rangle&=\langle\varPsi|\boldsymbol{H}_x^2|\varPsi\rangle-\langle\varPsi|\boldsymbol{H}_x|\varPsi\rangle^2\\&=\frac{1}{2}{\rm tr}\left(\boldsymbol{H}_x^2\right)-\frac{1}{4}({\rm tr}\boldsymbol{H}_x)^2,\end{aligned} \tag{53}$$

对于 (49) 式的 3 个生成子, 可得

$$\begin{aligned}&\left\langle\Delta^2\boldsymbol{H}_\alpha\right\rangle=\frac{1}{2}{\rm tr}\left(\boldsymbol{H}_\alpha^2\right)=1,\\&\left\langle\Delta^2\boldsymbol{H}_\theta\right\rangle=\frac{1}{2}{\rm tr}\left(\boldsymbol{H}_\theta^2\right)=\sin^2\alpha,\\&\left\langle\Delta^2\boldsymbol{H}_\phi\right\rangle=\frac{1}{2}{\rm tr}\left(\boldsymbol{H}_\phi^2\right)=\sin^2\alpha\sin^2\theta,\end{aligned} \tag{54}$$

即最大纠缠态可以同时取到不等式 (52) 的上限.

生成子不对易并不意味着 3 个参数同时最优估计不可实现. 如果不同参数的最优探针态相同, N 拷贝酉算符的演化过程一致, 并且最优测量互相兼容, 则可以同时实现最小方差. 在最优控制级联方案下这些条件可以满足. 该工作已通过实验实现了控制增强的级联多参数估计方案. 在此方案中, 算符 $\boldsymbol{U}_{\rm s}$ 的 N 个拷贝顺序排列, 同时可在每次 $\boldsymbol{U}_{\rm s}$ 作用后插入控制操作 $\boldsymbol{U}_{\rm c}$ (参见图 18(a)). 于是总演化可表示为 $\boldsymbol{U}_{\rm cs}^N$, 其中 $\boldsymbol{U}_{\rm cs}=\boldsymbol{U}_{\rm c}\boldsymbol{U}_{\rm s}$, 参数 x 的生成子可写为

$$\boldsymbol{H}_x^{(N)}={\rm i}\left(\partial_x\boldsymbol{U}_{\rm cs}^N\right)\left(\boldsymbol{U}_{\rm cs}^N\right)^{\dagger}=\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{U}_{\rm cs}^kH_x\left(\boldsymbol{U}_{\rm cs}^k\right)^{\dagger}, \tag{55}$$

其中 $x\in\{\alpha,\theta,\phi\}$. 若未对演化控制, 如设置 $\boldsymbol{U}_{\rm c}=\boldsymbol{I}$, 则 θ 的生成子的方差无法取到不等式 (48) 的上限, 因为 $\boldsymbol{U}_{\rm s}$ 不与 $\boldsymbol{H}_\theta$ 对易, 图 18(c) 和图 18(d) 对此进行了说明. 但若加入控制, 则可使用适当的控制使 $\boldsymbol{U}_{\rm cs}$ 与 $\boldsymbol{H}_x$ 对易, 然后从表达式 (55) 可得到 $\boldsymbol{H}_x^{(N)}=N\boldsymbol{H}_x$, 最后就可以取到不等式 (48) 的上限. 为了同时取得 3 个参数的最小方差, 需要针对 3 个参数设计相同的控制, 即控制应使 $\boldsymbol{U}_{\rm cs}$ 与 3 个生成子 $\boldsymbol{H}_\alpha,\boldsymbol{H}_\theta$ 和 $\boldsymbol{H}_\phi$ 同时对易. 这种控制确实存在, 可选择 $\boldsymbol{U}_{\rm c}=\boldsymbol{U}_{\rm s}^{\dagger}$, 在这种情况下 $\boldsymbol{U}_{\rm cs}=\boldsymbol{I}$, 它与所有生成

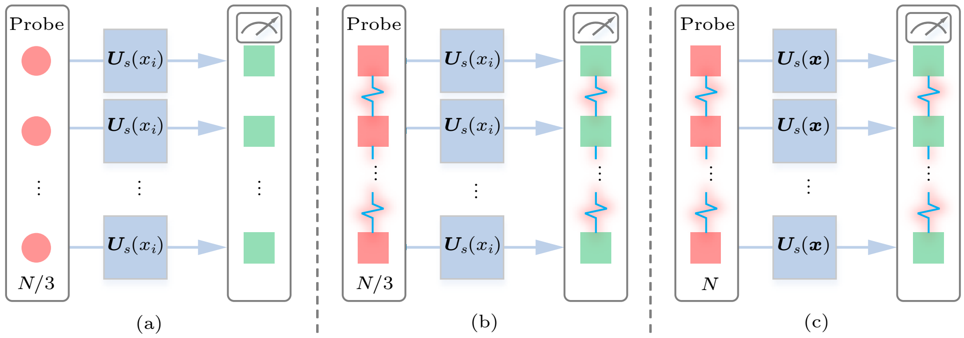


图 18 (a) 经典独立测量; (b) 纠缠独立测量; (c) 纠缠并行测量在 (a) 和 (b) 这两种独立可分的测量方案中, 演化酉算符的 7 V 个拷贝被均匀地分为 3 组, 并且使用一组资源来估计其中一个参数. (a) 和 (b) 之间的区别是 (a) 仅使用可分探针态和可分测量, 而 (b) 允许在每组资源中使用纠缠探针态和集体测量. (c) 中纠缠同时测量未将 N 拷贝酉算符分为 3 组, 而是将它们一起使用以同时估计全部 3 个参数[82]

Fig. 18. (a) Classical independent measurement; (b) entangled independent measurement; (c) entangled simultaneous measurement are divided into three groups and use a set of resources to estimate one of the parameters. The difference between (a) and (b) is that (a) only uses separable probe states and separable measurements, while (b) allows the use of entangled probe states and collective measurements in each set of resources. The simultaneous measurement of entanglement in (c) does not divide the N-copy unitary operators into three groups, but uses them together to estimate all three parameters simultaneously[82].

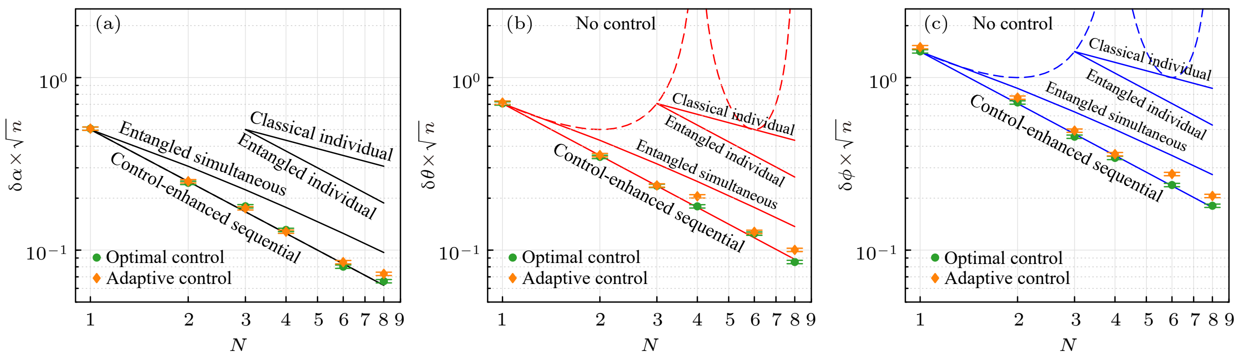


图 19 控制增强次序方案下的精度实验结果[82] (a) α; (b) θ; (c) φ. 将这 3 个参数在 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}, \theta=\phi=\dfrac{\pi}{6}$ 时的实验结果与经典态独立测量、纠缠态独立测量、纠缠态并行测量下可以达到的理论极限进行比较, 每个参数的控制增强次序方案的理论实线也代表了在单参数估计中所能达到的最佳精度

Fig. 19. Experimental results of the precision under the control-enhanced sequential scheme: (a) α; (b) θ; (c) φ. The experimental results of these three parameters at $\alpha=\dfrac{\pi}{4}, \theta=\phi=\dfrac{\pi}{6}$ are compared with the theoretical limits that can be achieved under the classical individual scheme, the entangled individual scheme, and entangled simultaneous estimation, The theoretical solid line of the control-enhanced sequential scheme for each parameter also represents the best precision that can be achieved in the single-parameter estimation[82].

子都对易. 但是, 由于测量之前参数是未知的, 因此实际的控制只能通过自适应的方式选择 $\boldsymbol{U}_{\rm s}(\hat{\alpha},\hat{\theta},\hat{\phi})$, 其中, $\hat{\alpha},\hat{\theta},\hat{\phi}$是基于已有测量数据得到的参数估计值. 在渐进极限情况下, 生成子互相不对易的 3 个参数在不等式 (46) 中的上限是可以取到的. 实验得到的 3 个参数的高精度测量结果如图 19 所示.

以上, 该团队证明了该方案与具有相同损失的经典方案相比提高了 13.27 dB 的测量精度.

2021 年 4 月, 杭州电子科技大学陆晓明教授与浙江大学王晓光教授[83] 通过给出估计不同参数的测量误差之间的限制关系, 将海森伯不确定原理纳入到量子多参数估计中. 得到了限制关系 $\varDelta_j^2+\varDelta_k^2+2\sqrt{1-C_{jk}^2}\varDelta_j\varDelta_k\geqslant C_{jk}^2$ 的联合测量值, 其中对于纯态ρ_θ, $C_{jk}=\dfrac{|{\rm Im}\mathcal{Q}_{jk}|}{\sqrt{\mathcal{F}_{jj}\mathcal{F}_{kk}}}$ 为一个实数, $\mathcal{Q}_{jk}={\rm tr}\,(L_jL_k\rho_\theta)$, L_j 为 θ_j 的对称对数导数算子; 对于混态 ρ_θ, 亦可用变体替换使等式成立. 考虑在相干态中编码的复数 α 的估计, Fisher 信息为

$$\frac{1}{\nu\varepsilon_{11}}+\frac{1}{\nu\varepsilon_{22}}\leqslant 4. \tag{56}$$

(56) 式给出了误差估计的最大信息下限. 就误差估计而言, 结果如图 20 所示.

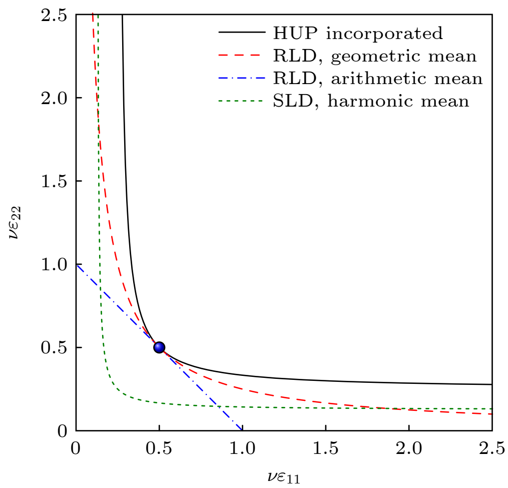


图 20 根据不确定性原理, 曲线左下区域禁止对复数 α 的实部和虚部的使用相干态进行估计的均方误差. 黑色实线为限制关系, 红色虚线为基于右对数导数的几何平均量子 Cramér-Rao 界, 蓝色虚线为基于右对数导数的算术平均量子 Cramér-Rao 界, 绿色虚线为基于对称对数导数的谐波平均量子 Cramér-Rao 界[83]

Fig. 20. Mean-square errors of estimating the real and imaginary parts of a complex number α encoded in a coherent state. The regions below the curves are forbidden by the corresponding inequalities. The black solid curve stands for the regret trade-off relation, the red dashed curve stands for the right logarithmic derivative-based geometric-mean quantum Cramér-Rao bound, the blue dash-dotted curve stands for the right logarithmic derivative -based arithmetic mean quantum Cramér-Rao bound, and the green dotted curve stands for the symmetric logarithmic derivative-based harmonic-mean quantum Cramér-Rao bound[83].

6 总结与展望

本文回顾了线性与非线性干涉仪在量子精密测量方面的技术发展和基本原理. 原子干涉仪的原子速度远远低于光速, 在干涉过程中会经历更长时间的转动, 产生更大的移动条纹, 其灵敏度远高于光子干涉仪, 有极高的应用价值. 其中, 原子干涉仪系统中的光-原子混合干涉仪在光子探测方面表现更为突出, 这意味着相同信号光子数下冷原子系综有更大的相位移动和损耗的承受能力. 在非线性干涉仪的三种探测手段中, 理想情况下当输入态为真空态时, 宇称探测和强度探测测量精度相当, 都可接近量子 Cramér-Rao 界; 当输入态为两束相干态且这两束相干态光强相等时, 三种探测方式都可接近量子 Cramér-Rao 界, 平衡零拍探测的测量精度最高, 宇称探测的测量精度最低; 当输入态为一束真空态和一束相干态时, 宇称探测拥有最优的测量精度, 强度探测的测量精度最低, 当输入态仅为一束相干态的结果同上; 非线性干涉仪中的损耗相对线性干涉仪较小, 但也会导致测量精度降低, 但平衡零拍探测受影响程度最好, 宇称探测受影响程度最大. 总体来说, 当 N 个无关联粒子进行独立测量时, 线性干涉仪的测量精度为标准量子极限, 非线性干涉仪相比而言有着更好的信噪比, 可以达到海森伯极限, 测量精度提升了 $2G^2$ 倍. 线性干涉仪在量子精密测量中有着大量应用, 如探测引力波等, 但在输入态中多粒子纠缠的处理和操作以及测量过程中光子数的损耗和额外噪声的减小都具有一定困难, 虽然非线性干涉仪可以放大信号, 获得更高的探测精度, 但目前为止还没有实际的应用场景.

在非经典量子态测量的实验过程及非线性干涉仪中, 不可避免地存在退相干效应, 使纠缠变弱, 影响测量精度, 不同的退相干机制对测量精度也有不同程度的影响, 在未来这项工作需要更深入的研究. 因此考虑一种既可以放大信号, 又可以容纳一定损耗的高灵敏测量, 2022 年, 张卫平教授团队[84]提出了将线性干涉仪嵌入到非线性干涉仪的混合型干涉仪模型, 获得线性光学干涉仪的 BS 测量相位灵敏度后再结合非线性量子放大器 PA 进行相位信号的放大, 实现了有损耗的情况下量子增强特性的保持.

弱测量在非厄米系统中用于设计高灵敏度量子传感器, 而离子阱方面的应用以及多参数测量在量子比特幺正演化算符和三维磁场矢量测量、陀螺仪等实际问题的研究也可使测量精度进一步提高. 单参数量子精密测量技术目前已比较成熟, 多参数测量则更常用于实际应用. 在多参数估计任务中, 在使用相同资源的前提下, 单独对每个参数设计最优估计方案并进行测量并不能同时达到多参数估计的精度极限, 而且还会浪费量子资源和时间资源. 为了达到每个参数的最优精度极限, 需要最大化相应生成子的方差. 当生成子相互不对易时, 如果不同参数的最优探针态相同, N 拷贝酉算符的演化过程一致, 并且最优测量互相兼容, 则可利用最优控制级联方案以同时实现生成子最小方差. 当生成子不对易, 又不满足上述同时实现最小方差的条件, 利用何种方法可使各个生成子同时取得最小方差还有待研究.

基于上述研究, 我们猜想是否会存在一种基于

原子自旋效应的多原子混合测量或利用其他粒子的探测手段实现精度为 fT 量级甚至 aT 量级的超高灵敏度测量仪器, 希望给予未来发展以启迪. 量子精密测量在量子计算、量子信息等领域也有巨大的应用价值, 此外, 拥有超高灵敏度的电磁场核自旋放大技术可为暗物质的探测提供服务. 由于海森伯不确定原理的限制, 能否实现超海森伯极限测量精度还存有争议, 在未来, 面对这些挑战, 还需进一步实践与探索.

参考文献

[1] Müntinga H, Ahlers H, Krutzik M, Wenzlawski A, Arnold S, Becker D, Bongs K, Dittus H, Duncker H, Gaaloul N, Gherasim C, Giese E, Grzeschik C, Hänsch T, Hellmig O, Herr W, Herrmann S, Kajari E, Kleinert S, Lämmerzahl C, Lewoczko-Adamczyk W, Malcolm J, Meyer N, Nolte R, Peters A, Popp M, Reichel J, Roura A, Rudolph J, Schiemangk M, Schneider M, Seidel S, Sengstock K, Tamma V, Valenzuela T, Vogel A, Walser R, Wendrich T, Windpassinger P, Zeller W, Zoest T, Ertmer W, Schleich W, Rasel E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 093602

[2] Dolde F, Fedder H, Doherty M, Nöbauer T, Rempp F, Balsubramanian G, Wolf T, Reinhard F, Hollenberg L, Jelezko F, Wrachtrup J 2011 *Nat. Phys.* **7** 459

[3] Cooper J, Hallwood D, Dunningham J 2010 *Phys. Rev. A* **81** 043624

[4] Boto A, Kok P, Abrams D, Braunstein S, Williams C, Dowling J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2733

[5] Ockeloen C, Schmied R, Riedel M, Treutlein P 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 143001

[6] Georgescu I 2014 *Nat. Phys.* **10** 474

[7] Wasilewski W, Jensen K, Krauter H, Renema J, Balabas M, Polzik E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 133601

[8] Ke Y, Huang J, Zhuang M, Lu B, Lee C 2018 *Phys. Rev.* A **98** 053826

[9] Wineland D 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1103

[10] Blatt R, Wineland D 2008 *Nature* **453** 1008

[11] Leibfried D, DeMarco B, Meyer V, Rowe M, Ben-Kish A, Britton J, Itano W, Jelenković B, Langer C, Rosenband T, Wineland D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 247901

[12] Riedel M, Böhi P, Li Y, Hänsch T, Sinatra A, Treutlein P 2010 *Nature* **464** 1170

[13] Gross C, Zibold T, Nicklas E, Estève J, Oberthaler M 2010 *Nature* **464** 1165

[14] Huver S, Wildfeuer C, Dowling J 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063828

[15] Afek I, Ambar O, Silberberg Y 2010 *Science* **328** 879

[16] Simmons S, Jones J, Karlen S, Ardavan A, Morton J 2010 *Phys. Rev. A* **82** 022330

[17] Nie X, Li J, Cui J, Luo Z, Huang J, Chen H, Lee C, Peng X, Du J 2015 *New J. Phys.* **17** 053028

[18] Nie X, Huang J, Li Z, Zheng W, Lee C, Peng X, Du J 2018 *Sci. Bull.* **63** 469

[19] Braunstein S 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 3598

[20] Ramsey N F 1949 *Phys. Rev.* **76** 996

[21] Ramsey N F 1950 *Phys. Rev.* **78** 695

[22] Zou Y Q 2018 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Tsinghua University) (in Chinese) [邹奕权 2018 博士学位论文 (北京: 清华大学)]

[23] The LIGO Scientific Collaboration 2011 *Nat. Phys.* **7** 962

[24] Henning V, Moritz M, Karsten D, Roman S 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 110801

[25] Abadie J, Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, Abernathy M, Adams C, Adhikari R, Affeldt C, Allen B, Allen G S, Amador Ceron E, Amariutei D, Amin R S, Anderson S B, Anderson W G, Arai K, Arain M A, Araya M C, Aston S M, Atkinson D, Aufmuth P, Aulbert C, Aylott B E, Babak S, Baker P, Ballmer S, Barker D, Barr B, Barriga P, Barsotti L, Barton M A, Bartos I, Bassiri R, Bastarrika M, Batch J, Bauchrowitz J, Behnke B, Bell A S, Belopolski I, Benacquista M, Berliner J M, Bertolini A, Betzwieser J, Beveridge N, Beyersdorf P T, Bilenko I A, Billingsley G, Birch J, Biswas R, Black E, Blackburn J K, Blackburn L, Blair D, Bland B, Bock O, Bodiya T P, Bogan C, Bondarescu R, Bork R, Born M, Bose S, Brady P R, Braginsky V B, Brau J E, Breyer J, Bridges D O, Brinkmann M, Britzger M, Brooks A F, Brown D A, Brummitt A, Buonanno A, Burguet-Castell J, Burmeister O, Byer R L, Cadonati L, Camp J B, Campsie P, Cannizzo J, Cannon K, Cao J, Capano C D, Caride S, Caudill S, Cavagliá M, Cepeda C, Chalermsongsak T, Chalkley E, Charlton P, Chelkowski S, Chen Y, Christensen N, Cho H, Chua S S Y, Chung S, Chung C T Y, Ciani G, Clara F, Clark D E, Clark J, Clayton J H, Conte R, Cook D, Corbitt T R, Cordier M, Cornish N, Corsi A, Costa C A, Coughlin M, Couvares P, Coward D M, Coyne D C, Creighton J D E, Creighton T D, Cruise A M, Cumming A, Cunningham L, Cutler R M, Dahl K, Danilishin S L, Dannenberg R, Danzmann K, Daudert B, Daveloza H, Davies G, Daw E J, Dayanga T, DeBra D, Degallaix J, Dent T, Dergachev V, DeRosa R, DeSalvo R, Dhurandhar S, DiGuglielmo J, Di Palma I, Díaz M, Donovan F, Dooley K L, Dorsher S, Drever R W P, Driggers J C, Du Z, Dumas J C, Dwyer S Eber 2011 *Nat. Phys.* **7** 962

[26] Qiu C, Chen S Y, Chen L Q, Chen B, Guo J, Ou Z Y, Zhang W P 2016 *Optica* **3** 000775

[27] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005

[28] Kasevich M A, Chu S 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 181

[29] Peters A 1998 *Ph. D. Dissertation* (Palo Alto: Stanford University)

[30] Geiger R, Me´noret V, Stern G, Zahzam N, Cheinet P, Battelier B, Villing A, Moron F, Lours M, Bidel Y, Bresson A, Landragin A, Bouyer P 2011 *Nat. Commun.* **2** 474

[31] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R 1995 *Science* **269** 198

[32] Higbie J M, Sadler L E, Inouye S, Chikkatur A P, Leslie S R, Moore K L, Savalli V, Stamper-Kurn D M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 050401

[33] Sadler L E, Higbie J M, Leslie S R, Vengalattore M, Stamper-Kurn D M 2006 *Nature* **443** 0605351

[34] Yurke B, McCall S L, Klauder J R 1986 *Phys. Rev. A* **33** 4033

[35] Plick W N, Dowling J P, Agarwal G S 2010 *New J. Phys.* **12** 083014

[36] Kong J, Jing J, Wang H, Hudelist F, Liu C, Zhang W 2013 *Appl. Phys. Lett.* **102** 011130

[37] Chen B, Qiu C, Chen S Y, Guo J X, Ou Z Y, Zhang W P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 043602

[38] Ou Z Y 2012 *Phys. Rev. A* **85** 023815

[39] Xiao M, Wu L A, Kimble H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 278

[40] Barnett S M, Fabre C, Maître A 2003 *Eur. Phys. J. D* **22** 513

[41] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)

[42] Yuen H P, Shapiro J H 1979 *Opt. Lett.* **4** 334

[43] Wu L A, Kimble H, Hall J, Wu H 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 2520

[44] Zhang Y, Wang H, Li X Y, Jing J T, Xie C D 2000 *Phys. Rev. A* **62** 023813

[45] Goda K, Miyakawa O, Mikhailov E E, Saraf S, Adhikari R, McKenzie K, Ward R, Vass S, Winstein A J, Maval-vala N 2008 *Nat. Phys.* **4** 472

[46] The LIGO Scientific Collaboration 2013 *Nat. Photonics* **7** 613

[47] Vahlbruch H, Mehmet M, Danzmann K, Schnabel R 2016 *Physical Review Lett.* **117** 110801

[48] Yu H C, McCuller L, Tse M, Kijbunchoo N, Barsotti L, Mavalvala N 2020 *Nature* 583

[49] Liu H Y 2019 *Ph. D. Dissertation* (Tianjin: Tianjin University) (in Chinese) [刘宏宇 2019 博士学位论文 (天津: 天津大学)]

[50] Slusher R E, Hollberg L W, Yurke B, Mertz C J, Valley J F 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 2409

[51] Zhang Y, Su H, Xie C, Peng K C 1999 *Phys. Lett.* **259** 171

[52] Boyer V, Marino A M, Pooser R C, Lett P D 2008 *Science* **321** 544

[53] Glorieux Q, Guidoni L, Guibal S, Likforman J P, Coudreau T 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053826

[54] Liu S, Lou Y, Jing J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 113602

[55] Liu Q, Wu L N, Cao J H, Mao T W, Li W X, Guo F S, Tey K M, You L 2021 *Nat. Phys.* **18** 167

[56] Marino M A, Corzo N V, Trejo, Lett P D 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023844

[57] Yuen H P, Chan V W 1983 *Opt. Lett.* **8**

[58] Abbas G L, Chan V W, Yee T K 1983 *Opt. Lett.* **8**

[59] Pan X Z 2019 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: East China Normal University) (in Chinese) [潘晓州 2019 博士学位论文 (上海: 华东师范大学)]

[60] Bollinger J J, Itano W M, Wineland D J, Heinzen D J 1996 *Phys. Rev. A* **54** R4649

[61] Gerry C C 2000 *Phys. Rev. A* **61** 043811

[62] Li D 2016 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: East China Normal University) (in Chinese) [李栋 2016 博士学位论文(上海: 华东师范大学)]

[63] Kitagawa M, Ueda M 1993 *Phys. Rev. A* **47** 5138

[64] Szigeti S S, Nolan S P, Close J D 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 100402

[65] Lee C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 150402

[66] Lee C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 070401

[67] Hu Y, Feng M, Lee C 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043604

[68] Luo C, Huang J, Zhang X, Lee C 2017 *Phys. Rev. A* **95** 023608

[69] Zhuang M, Huang J, Lee C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 033603

[70] Ma J, Huang Y, Wang X, Sun C 2011 *Phys. Rev. A* **84** 039907

[71] Huang J, Qin X, Zhong H, Ke Y, Lee C 2015 *Sci. Rep.* 517894

[72] Huang J, Zhuang M, Lu B, Ke Y, Lee C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 012129

[73] Braunstein S, Caves C 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439

[74] Xu L, Zhang L J 2021 *Laser & Optoelectronics Progress* **58** 49 (in Chinese) [胥亮, 张利剑 2021 激光与光电子学进展 **58** 49]

[75] Zhang X D, Yu Y F, Zhang Z M 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 240302 (in Chinese) [张晓东, 於亚飞, 张智明 2021 物理学报 **70** 240302]

[76] Dressel J, Malik M, Miatto F M, Filippo M M, Andrew N, Jordan Robert W B 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 307

[77] Chen G, Aharon N, Sun Y 2018 *Nat. Commun.* **9** 1

[78] Ogawa K, Yasuhiko O, Kobayashi H 2019 *New J. Phys.* **21** 043013

[79] Li Q Z 2015 *M. S. Thesis* (Shanghai: Shanghai Jiao Tong University) (in Chinese) [李钦政 2015 硕士学位论文 (上海: 上海交通大学)]

[80] Yuto A, Masahito U 2017 *Phys. Rev. A* **95** 022124

[81] Yu S, Meng Y, Tang J S, Xu X Y, Wang Y T, Yin P, Ke Z J, Liu W, Li Z P, Yang Y Z, Chen G, Han Y J, Li C F, Guo G C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 230402

[82] Hou Z, Tang J F, Chen H 2021 *Sci. Adv.* **7** eabd2986

[83] Lu X M, Wang X G 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 7

[84] Du W, Kong J, Bao G Z, Yang P Y, Jia J, Ming S, Yuan C H, Chen J F, Ou Z Y, Morgan W M, Zhang W P 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 033601

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 71, No. 13 (2022) 130701

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Research progress in quantum precision measurements based on linear and nonlinear interferometers*

Sun Si-Tong # Ding Ying-Xing # Liu Wu-Ming †

(*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

(Received 9 March 2022; revised manuscript received 1 April 2022)

Abstract

Quantum precision measurement is based on the basic principle of quantum mechanics by using the interaction between light, atoms and magnetism to measure physical quantities, also known as precision measurements based on microscopic particle systems and their quantum states. As an important means of quantum precision measurement, interferometer precision measurement technology has great application value in quantum communication. The linear interferometer measures the magnitude of the physical quantity by using the phase change obtained from the measurements, but measurement accuracy is limited and unable to meet the requirements of today's scientific problems for the precision measurement of some physical quantities. On this basis, nonlinear interferometer is able to take advantage of the quantum entangled state, that is, using the two light fields of quantum correlation characteristics to realize quantum enhanced precision measurement, thus greatly improving the measurement sensitivity, Therefore, the scope of application is wider, but the preparation of quantum entangled states has many limitations in practical manipulation. With the maturity of experimental conditions and technology, how to use both of these interferometers to further improve the measurement accuracy of the phase signal so as to break the limitation to shot noise, breaking the standard quantum limit and even approaching to the Heisenberg limit has become a frontier research topic . In this paper, we introduce several methods to improve the accuracy of parameter evaluation in the measurement process by using linear (including an atomic/photon interferometer) and nonlinear interferometer to call quantum resources at different stages. High-precision measurement can be achieved by inputting non-classical states into the interferometer, such as compressed state, bi-fock state, and NOON state. And we also introduce the weak measurement developed for the direct observation of quantum states and its application to non-Hermitian systems, and the multiparameter measurement proposed to eliminate the accuracy balance between parameters. Compared with the first two measurement methods, weak measurement method is based on the weak value amplification principle of an indirect measurement. Measurements are performed virtually without perturbing the quantum system, which does not lead the wave function to collapse, the weak value of the real and virtual part have different physical significance, The combination of weak measurement theory and non-Hermitian system also further improves the measurement sensitivity. Multi-parameter measurement uses quantum entanglement, quantum control and other quantum resources to make the measurement progress reach the Heisenberg limit, which is the current research hotspot in the field of precision measurement. Furthermore, we present a conjecture whether there will be multi-atomic mixing measurements based on atomic spin effects or ultra-high sensitivity measurement instruments with precision of fT or even aT by using other particles detection. Finally, several measurement methods are analyzed and compared with each other, and the development prospect of quantum precision measurement is forecasted.

Keywords: quantum precision measurement, interferometer, Heisenberg limit, standard quantum limit, non-Hermitian system

PACS: 07.60.Ly, 42.50.Dv **DOI:** 10.7498/aps.71.20220425

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1400243) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61835013).

# These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

实验观测非厄米系统奇异点的手性翻转现象

祝可嘉　郭志伟　陈鸿

Experimental observation of chiral inversion at exceptional points of non−Hermitian systems

Zhu Ke-Jia　Guo Zhi-Wei　Chen Hong

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 131101 (2022)　DOI: 10.7498/aps.71.20220842

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20220842

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

专题: 非厄米物理前沿

实验观测非厄米系统奇异点的手性翻转现象*

祝可嘉 1)2) 郭志伟 2)† 陈鸿 2)

1) (同济大学电子与信息工程学院, 上海 200092)

2) (同济大学物理科学与工程学院, 教育部先进微结构材料重点实验室, 上海 200092)

(2022 年 4 月 28 日收到; 2022 年 5 月 28 日收到修改稿)

在非厄米系统参数空间的黎曼曲面上存在简并点, 此时本征值和相应的本征矢量同时合并, 这些非厄米简并点也被称为奇异点. 作为非厄米物理系统的相变临界态, 奇异点会引起诸多违反直觉的现象, 如损耗诱导透明、单向隐身以及非对称的模式转换. 特别有趣的是, 奇异点的本征矢量是自正交的, 并且由于维度的缺失, 特定非厄米系统的奇异点具有固有的手性. 本文基于开口谐振环这种特殊的超构材料谐振子构造了耦合系数符号可以灵活调控的非厄米系统, 并在实验上观测了非厄米系统奇异点的手性翻转现象. 利用耦合系数符号的改变来实现非厄米系统奇异点的手性态调控, 不仅为研究开放系统中的基本非厄米物理开辟了一条新的途径, 而且在设计高效手性模式转换以及手性天线等光子器件方面具有一定的应用价值.

关键词: 非厄米系统, 超构材料谐振子, 奇异点, 手性态

PACS: 11.30.Er, 42.25.Bs, 03.65.Vf **DOI:** 10.7498/aps.71.20220842

1 引 言

量子力学一般情况下用于描述一个封闭的物理系统, 所有可观测的物理量均需要用厄米线性算符表示. 从能量守恒的角度来看, 系统的本征能量是实数, 通常由一个厄米哈密顿量的本征值来描述[1]. 然而, 当由有效哈密顿量描述的封闭系统与周围环境发生能量交换时, 厄米物理系统的动力学就变成了非厄米动力学, 而且一般认为非厄米系统没有实数的本征值[2]. 早在 1998 年, Bender 和 Boettcher[3] 提出, 具有宇称时间 (parity-time, PT) 对称性的非厄米系统在发生相变前系统具有纯实数的能谱, 并且这一非厄米系统能谱的相变点被称为奇异点 (exceptional point, EP)[4]. 非厄米系统 EP 最大的特点是两个或多个本征值和相关本征矢量同时合并, 这是由非相干效应和相干效应的竞争所产生的, 所以在厄米系统中并不存在物理对应[4,5].

最近, 非厄米哈密顿量和相关的 EPs 还被推广到光学[6–9]、声学[10–12]、电路[13–15] 等开放经典波系统中, 用于探索更加丰富的物理性质及应用. EP 会引起诸多违反直觉的现象, 如损耗诱导透明[16]、单向反射[17]、动态无线电能传输[13,18]、非对称模式转换[19,20] 等. 此外, 非厄米系统 EP 具有的诸多新奇物理特性还包括: 1) 一个 N 阶 EP 通常对应于一个开 N 次方的能级间距 $\Delta f \propto \delta^{1/n}$, 其中的 δ 为参数空间里 EP 附近的微扰, 所以高阶 EP 为提升传感器件的灵敏度提供了一个很好的解决方案[21,22]. 最近, 通过将非厄米物理与拓扑物理相结合, 拓扑边界态实现的非厄米系统 EP 也被进行了深入的研究, 并用于构造对结构内部涨落免疫, 但对外界环境变化敏感的新型拓扑传感器件[23,24]. 2) 非厄米系统的 EP 对应于参数空间构成黎曼面的分叉奇点. 当系统在参数空间里环绕 EP 发生绝热演化

* 国家重点研发计划 (批准号: 2021YFA1400602)、国家自然科学基金 (批准号: 12004284, 61621001)、中央高校基本科研业务费 (批准号: 22120210579) 和上海市晨光计划 (批准号: 21CGA22) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: 2014guozhiwei@tongji.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

时, 初始态会发生模式转换, 同时获得确定的几何相位, 这一非厄米系统 EP 的拓扑特性也吸引了人们的广泛关注, 并已经在耦合腔[12]、波导[25,26] 以及超表面[27] 中得到了广泛研究. 3) 对于双谐振的非厄米系统, EPs 还具有一个非常有趣的特性, 就是其自正交的本征矢量[28,29]. 基于回音廊谐振器中的顺时针和逆时针传播模式, 系统 EP 这一合并点处确定的手性态已经被证实对应于一种"维度缺失"[30].

本文聚焦于非厄米系统"维度缺失"的 EP, 对其正交态的手性进行了系统性的研究. 基于开口谐振环这一特殊的超构材料谐振子, 构造了非厄米的光子系统, 并通过改变谐振环的相对转角实现了对耦合系数符号的灵活调控. 进而通过近场探测技术, 探测系统达到 EP 时开口谐振环的相位情况, 完成了 EP 手性翻转的实验观测. 利用转角自由度实现负的耦合系数并观察 EP 的手性翻转的研究结果不仅丰富了 EP 在非厄米系统中的表现形式, 而且也为诸如手性天线等光子器件的构造提供了一个有效设计方案.

2 模型与方法

考虑一对共振原子近场耦合构成的非厄米系统, 如图 1 所示. 基于耦合模理论, 该系统的运动方程可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{a}_1}{\mathrm{d}t}=(-\mathrm{i}f_1+\gamma_1+\varGamma_1)\tilde{a}_1-\mathrm{i}\kappa\tilde{a}_2, \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{a}_2}{\mathrm{d}t}=(-\mathrm{i}f_2+\gamma_2+\varGamma_2)\tilde{a}_2-\mathrm{i}\kappa\tilde{a}_1, \tag{1b}$$

其中, $\tilde{a}_1=|a_1|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 和 $\tilde{a}_2=|a_2|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 为共振原子 a_1 和 a_2 的谐波模式. f_i, γ_i 和 $\varGamma_i\,(i=1,2)$ 分别表示共振原子 1 和共振原子 2 的谐振频率、辐射损耗以及本征损耗. 两个共振原子间的近场耦合系数用来 κ 表示. 图 1 所示系统的动力学方程可以由 (1) 式得到[31]

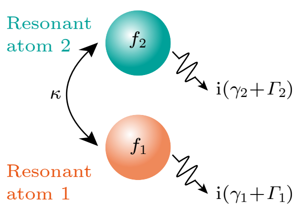


图 1 两个共振原子近场耦合组成的二阶非厄米系统

Fig. 1. A second-order non-Hermitian system composed of two coupled resonant atoms with near-field coupling.

$$\boldsymbol{H}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\omega\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \tag{2}$$

该系统的哈密顿量可以表示为

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}f_1+\mathrm{i}(\gamma_1+\varGamma_1) & \kappa\\ \kappa & f_2+\mathrm{i}(\gamma_2+\varGamma_2)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

为了简化系统, 假设 $f_1=f_2=f_0$ 以及 $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_0$. 此时求解哈密顿量 $\boldsymbol{H}$ 可以得到系统本征值和本征态分别为

$$f_\pm=f_0+\frac{1}{2}(\varGamma_1+\varGamma_2+2\gamma_0)\mathrm{i}\pm\sqrt{4\kappa^2-(\varGamma_1-\varGamma_2)^2}, \tag{4a}$$

$$\psi_\pm=\left(\frac{(\varGamma_1-\varGamma_2)\pm\sqrt{4\kappa^2-(\varGamma_1-\varGamma_2)^2}}{2\kappa},-\mathrm{i}\right). \tag{4b}$$

在耦合系数 κ 和本征损耗因子 $\varGamma_2$ 构成的参数空间内, 非厄米系统本征频率实部和虚部的黎曼表面分别如图 2(a) 和图 2(b) 所示. 从 (4a) 式和 (4b) 式可以发现, 当 $|\kappa|=\dfrac{1}{2}|\varGamma_1-\varGamma_2|$ 时, 系统的本征值和本征矢同时合并, 即对应于此非厄米系统的 EP. 图 2 所示的黎曼面中, 不同参数形成的 EP 将连成两条线, 图中按照手性分别用红色实线和虚线进行表示.

对于没有增益的被动系统而言, $\varGamma_i(i=1,2)>0$. 此时满足非厄米系统 EP 的条件为 $|\kappa|=\left|\dfrac{\varGamma_1-\varGamma_2}{2}\right|$, 相应的系统合并的本征矢可以表示为

$$\psi_{\mathrm{EP}}=\left(\frac{|\kappa|}{\kappa},-\mathrm{i}\right). \tag{5}$$

从 (5) 式可以清楚地看到, 纯被动的二阶系统中 EP 的手性直接取决于两个共振原子的耦合系数符号. 当 $\kappa>0$ 和 $\kappa<0$ 时, 非厄米系统 EP 的手性分别为右旋态 ($\psi_{\mathrm{EP}}=(1,\ -\mathrm{i})$) 和左旋态 ($\psi_{\mathrm{EP}}=(1,\ +i)$).

从上面的分析可以知道, 对于没有增益的非厄米系统而言, EP 的手性会随着耦合系数的符号改变而翻转, 这为实际调控 EP 的手性提供了一个有效手段. 但是对于绝大多数光学振子而言, 其耦合系数的符号都是正的. 最近, 研究者们提出可以在耦合的共振原子间引入附加振子, 通过间接耦合的方式来实现负耦合[32–34]. 但间接耦合等效的负耦合不仅使系统变得复杂, 而且不可避免地给系统带来额外损耗. 超构材料的出现为方便地调控共振原

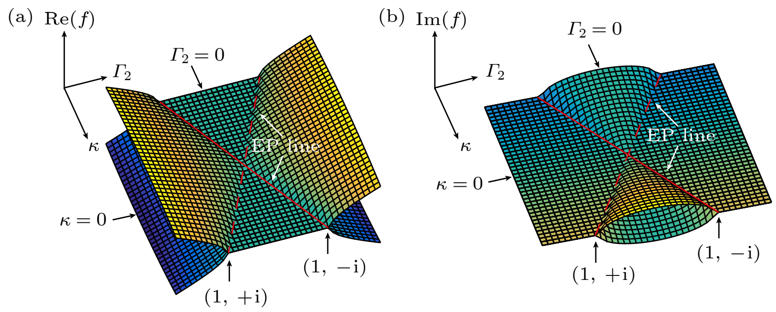


图 2 在耦合系数 κ 和本征损耗因子 Γ_2 构成的参数空间内, 非厄米系统本征频率 (a) 实部和 (b) 虚部的黎曼表面

Fig. 2. The Riemannian surface of the (a) real part and (b)imaginary part of the eigenfrequency of the non-Hermitian system in the parameter space composed of the coupling coefficient κ and the intrinsic loss factor Γ_2.

子的耦合提供了可能, 如双曲谐振腔和零折率谐振腔实现的与腔体积无关的腔模[35]. 本文主要是基于开口谐振环这种特殊的超构材料谐振子, 通过旋转振子间的相对开口角度, 灵活地调控共振原子间耦合系数的符号, 进而用来观测非厄米系统 EP 位置随耦合系数符号变化带来的手性翻转现象.

开口谐振环作为一类具有高品质因子的磁谐振器[36,37], 其阵列结构具有较强的磁响应, 因而可以被用来构造等效磁导率小于零的磁单负超构材料[38]. 当匹配等效介电常数小于零的人工微结构时, 还可以被用来构造具有新奇负折射特性的左手材料等[39]. 除了实现等效介质外, 基于开口谐振环的一维耦合波导结构还被证实具有磁诱导波的特性[40]. 特别是近年来, 随着拓扑光子学的飞速发展, 开口谐振环还被广泛用于构造各种具有复杂耦合排布的拓扑模型, 并挖掘其中丰富的拓扑物理特性[41–43]. 对于耦合的开口谐振环而言, 环内部的电流在开口处会积累电荷, 这就导致了金属环部分以及开口空隙位置可以分别等效为电感 L 及电容 C. 开口谐振环的谐振频率为 $f_0 = 1/\sqrt{LC}$. 另外, 开口谐振环间的耦合 κ 总是包含有电耦合 $\kappa_{\rm E}$ 及磁耦合 $\kappa_{\rm H}$ 两部分, 并且可以通过等效电路参数获得[41]:

$$\kappa_{\rm E} = 2M/L,\ \ \kappa_{\rm H} = -2C/K, \tag{6}$$

其中, M 和 K 分别为开口谐振环之间的互感和互容. 通过调节开口谐振环的相对转角就可以灵活地调控电耦合 $\kappa_{\rm E}$ 和磁耦合 $\kappa_{\rm H}$ 占总耦合的权重.

本文主要围绕开口谐振环相对转角为 $\theta = 180°$ 和 $\theta = 0°$ 这两种特殊的构型开展研究. 当开口谐振环相对转角为 $\theta = 180°$ 时, 磁耦合占主导 ($|\kappa_{\rm H}| > |\kappa_{\rm E}|$), 两个环内的电流反向, 所以开口谐振环实现的是负耦合[44]. 由于近场耦合会导致系统的模式发生劈裂, 两个环内同相位的对称模式处于高频, 而两个环内反相位的反对称模式处于低频, 如图 3(a) 所示. 另一方面, 当开口谐振环相对转角为 $\theta = 0^o$ 时, 电耦合占主导 ($|\kappa_{\rm H}| < |\kappa_{\rm E}|$), 两个环内的电流同向, 所以开口谐振环实现的是正耦合. 由于近场耦合效应, 此时同样会导致系统的模式发生劈裂. 然而不同于图 3(a), 对于正耦合的两个开口谐振环来说, 两个环内同相位的对称模式处于高频, 而两个环内反相位的反对称模式处于低频, 如图 3(b) 所示. 对比图 3(a) 和图 3(b) 可以发现, 当开口谐振环的相对转角发生变化时, 耦合系数的符号也将发生变化, 进而导致了近场耦合模式劈裂的两个模式的对称性发生互换. 对于由开口谐振环构造的非厄米系统而言, 当调节系统的非厄米参量使得系统模式从劈裂演化到合并的 EP 时, 就可以用来观察耦合系数符号的变化对 EP 对应手性态的影响.

3 结果与讨论

3.1 频谱以及本征值测量

在微带线平台上构建了基于开口谐振环构造的耦合系数符号可调的非厄米系统, 并用于实验观测 EP 的手性态的翻转现象. 典型的工作于微波频段的微带传输线为一种由底部金属衬底、中间电介质层以及上表面具有特定图案的金属结构组成的三明治结构. 在微波光子学领域, 利用加载集总电路元件的微带线平台是实现多样化电磁谐振单元和特殊晶格的理想平台. 此外, 由于微带线平台具有平面化和开放性的优点, 可以方便地获得系统的振幅和相位信息. 到目前为止, 许多高性能的微带结构已经被构建, 以调控各种新颖的光学响应, 并实现一些特殊场景的应用, 如超透镜[45,46]、近场光子路由[47]、远程原子相互作用[48]、以及拓扑光子学[49,50].

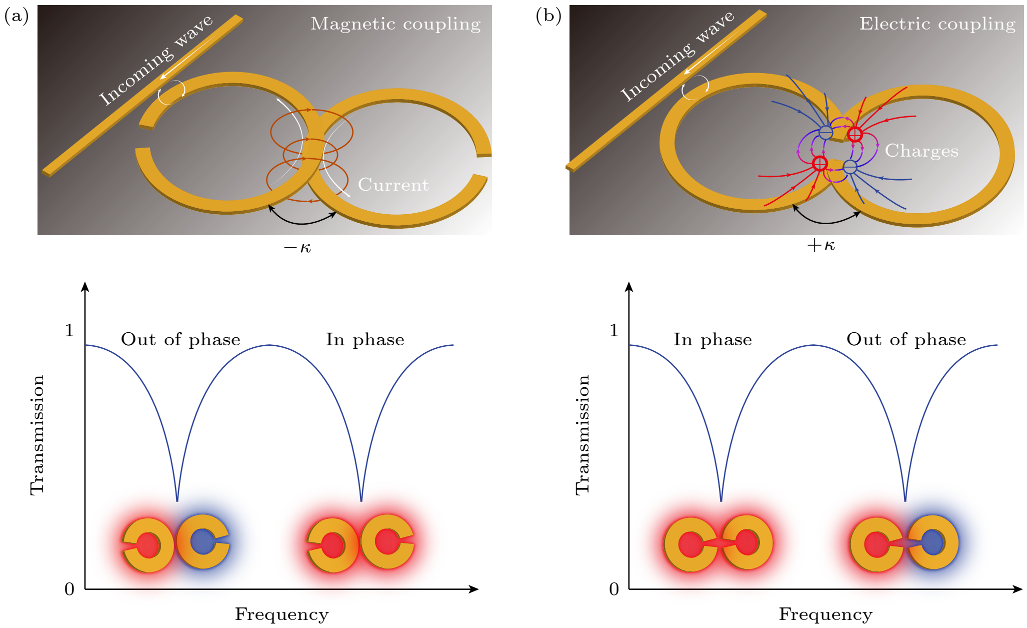


图 3 开口谐振环不同相对转角下的耦合情况 (a) 开口谐振环相对夹角为 $\theta = 180°$ 时的负耦合; (b) 开口谐振环相对夹角为 $\theta = 0°$ 的正耦合

Fig. 3. The coupling of the split-ring resonator under different relative rotation angles: (a) The negative coupling when the relative rotation angle of the split-ring resonators is $\theta = 180°$; (b) the positive coupling when the relative rotation angle of the split-ring resonators is $\theta = 0°$.

本文通过在微带线上表面刻蚀出开口谐振环的金属结构, 构造了第 2 节介绍的开口谐振环相对转角不同时实现的耦合系数符号不同的两类非厄米系统. 其中磁耦合占主导 ($\theta = 180^o$) 及电耦合 ($\theta = 0°$) 占主导的两类非厄米系统分别如图 4(a) 和图 4(b) 所示. 文中使用的板材为 FR4 的微带线基板, 相对介电常数为 $\varepsilon_r = 4.35$, 厚度为 $t = 1.6\,\mathrm{mm}$, 基板损切角为 $\tan\theta = 0.009$. 微带线的金属损耗可以被忽略, 对应的电导率为 5.8×10^7 S/m. 在实验中, 激励信号由矢量网络分析仪 (Agilent N5222A) 产生, 并通过微带波导输入到系统. 具体来说, 信号从矢量网络分析仪的输入端输出, 并通过同轴电缆由 50 Ω 阻抗的 SubMiniature version A(SMA) 接头连接宽度为 3.5 mm 的微带波导的上下导体 (接头的内芯接触上表面金属, 接头的接地端连接微带线的底层金属), 从而把探测信号输入系统. 类似的方法在微带波导的另一侧接入 SMA 接头, 并通过矢量网络分析仪的输出端接收探测信号, 实现对样品传输特性的测试. 为了方便表述, 把通过微带波导输入的入射波 $S_{\rm in}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 直接近场耦合激励的开口谐振环称为“共振原子 1”. 微带波导与“共振原子 1”的间距为 $h = 0.2$ mm. 而把仅能通过近场耦合 κ 被“共振原子 1”间接激励的开口谐振环称为“共振原子 2”. 实验中开口谐振环的几何结构是完全相同的, 几何参数分别为半径 $r = 12$ mm, 元件间距 $s = 4$ mm, 线宽 $w = 0.3$ mm, 开口缝宽 $g = 0.8$ mm. 开口谐振环的分布式电感和加载的集总电容分布为 $L = 457$ nH 和 $C = 2.7$ pF, 确定的开口谐振环的共振频率为 $f_0 = 0.9$ GHz. 在开口谐振环中均加载了集总的可调电阻元件用以调节共振原子的本征损耗 $\varGamma_i = 0.018 + 0.001R_i\,(i = 1, 2)$. 此外, 在开口谐振环相对转角为 $\theta = 180°$ 对应的负耦合系统及 $\theta = 0°$ 对应的正耦合系统中, “共振原子 1”和“共振原子 2”的间距分别为 $x_1 = 2$ mm, $x_2 = 0.2$ mm, 相应的耦合系数分别为 $\kappa_1 = -0.0154$ GHz, $\kappa_2 = 0.011$ GHz.

实验测得的 $\theta = 180°$ 对应的非厄米系统的传输谱线如图 4(c) 所示. 当开口谐振环中的电阻为 $R_1 = R_2 = 0\,\Omega$ 时, 由于两个开口谐振环的近场耦合, 两个劈裂的谐振模式将具有不同的本征频率. 保持“共振原子 1”中的电阻 $R_1 = 0\,\Omega$ 不变, 当“共振原子 2”中的电阻 R_2 逐渐增大时, 由于非相干效应的增强, 两个劈裂的共振峰将逐渐靠近. 可以清楚地看到, 当电阻增大到 $R_2 = 12\,\Omega$ 时 ($\varGamma_2 = 0.031$ GHz), 两个共振模式发生合并, 即对应于系统的 EP1($|\varGamma_2|/2 \approx |\kappa| = 0.0154$), 如图 4(c) 的箭头所示.

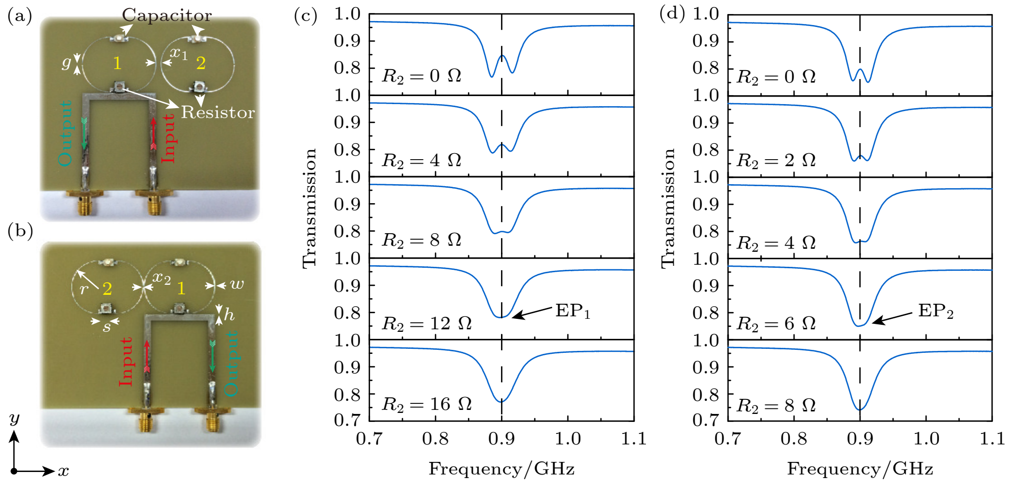


图 4 开口谐振环相对夹角为 (a) $\theta = 180°$ 和 (b) $\theta = 0°$时构造的非厄米系统实验样品图; (c) $\theta = 180°$ 和 (d) $\theta = 0°$对应的非厄米系统中, 调节集总电阻的阻值 R_2时测得的透射谱

Fig. 4. Sample photos of the non-Hermitian system with relative rotation angle between split-ring resonators is (a) $\theta = 180°$ and (b) $\theta = 0°$; The corresponding transmittance spectrum of the non-Hermitian system with (c) $\theta = 180°$ and (d) $\theta = 0°$ as a function of lumped resistance R_2.

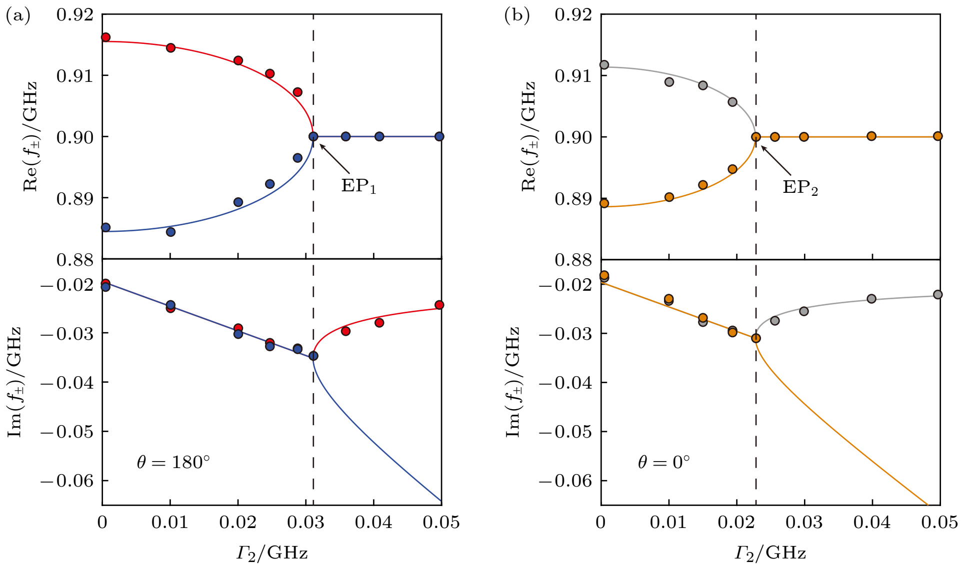


图 5 实验观测当 Γ_2 变化时, 开口谐振环相对夹角为 (a) $\theta = 180°$ 和 (b) $\theta = 0°$构成的非厄米系统的本征频率实部 (上图) 和虚部 (下图)

Fig. 5. Experimental measured the eigenfrequeies of the non-Hermitian system as a function of Γ_2 when the relative rotation angle between split-ring resonators is (a) $\theta = 180°$ and (b) $\theta = 0°$. The upper and lower rows denote the real part and imaginary part, respectively.

类似地, 图 4(d) 为实验测得的 $\theta = 0^o$对应的非厄米系统的传输谱线. 此时, 系统的 EP 出现在电阻增大到 $R_2 = 6\ \Omega$时 ($\Gamma_2 = 0.024$ GHz), 两个共振模式发生合并, 即对应于系统的 EP2($|\Gamma_2|/2 \approx |\kappa| = 0.011$), 如图 4(d) 的箭头所示.

为了更加直观地展示非厄米系统本征模式的演化以及 EP, 图 5 给出了本征模式随着不同本征损耗因子 Γ_2 而发生的改变. 对于 $\theta = 180°$对应的非厄米系统得到的本征频率谱中, 可以清晰地观察到系统中劈裂的两个共振频率的实部随本征损耗因子 Γ_2 的增加而逐渐靠近, 并在 EP1 合并为一个简并模式, 如图 5(a) 的上部分所示. 相对应的本征频率的虚部也是在 EP1 位置发生从模式简并到劈裂的相变, 如图 5(b) 的下部分所示. 图中理论计算的结果和实验测试的结果分别用实线和点来表示, 可以发现实验测试结果与理论计算结果可以很好地

符合. 类似地, $\theta = 0°$对应的非厄米系统得到的本征频率谱中, 本征频率的实部和虚部分别如图 5(b) 的上部分和下部分所示. 同样可以观察到劈裂的两个共振频率随Γ_2的增加而逐渐靠近, 并在 EP2 合并. 对比图 5(a) 和图 5(b) 系统, 可以发现开口谐振环相对转角不同的两个非厄米系统, 随着Γ_2增加, 系统本征值均可以在各自的 EP 实现模式的合并. 需要特别说明的是, 由于$|\kappa_1| > |\kappa_2|$, 所以$\theta = 180°$对应的非厄米系统相比$\theta = 0°$对应的非厄米系统需要更大的损耗因子Γ_2来达到 EP.

3.2 EP 的手性测量与表征

3.1 小节已经在实验上观测了耦合系数符号不同的两个非厄米系统均可以通过调节系统的本征损耗因子Γ_2实现 EP. 本小节进一步通过高阻抗磁探针 (直径为 8 mm) 在实验中观测本征频率处系统内两个开口谐振环的相位差$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$来对 EP 的手性进行表征, 其中的$\varphi_1$和$\varphi_2$分别表示在“共振原子 1”及“共振原子 2”中测得的相位. 图 6 给出了开口谐振环相对转角$\theta = 180°$(上图) 和$\theta = 0°$(下图) 对应的非厄米系统的相位差, 其中实线和点分别为理论计算结果与实验测试结果. 从图 6 可以清楚地看到, 当本征损耗因子Γ_2比较小时, $\theta = 180°$对应的非厄米系统劈裂的本征频率在低频是对称态 ($\Delta\varphi 0°$), 在高频是反对称态 ($\Delta\varphi 180°$). 随着本征损耗因子Γ_2增大, 系统的本征模式在 EP1 合并, 此时模式是自正交的 ($\Delta\varphi 90°$). 考虑到正交态的手性, 可以确定$\theta = 180°$对应的非厄米系统 EP1 是手性态$\psi_{\rm EP} = (1, -{\rm i})$右旋的. 然而对于$\theta = 0°$对应的非厄米系统, 其在本征损耗因子$\Gamma_2$比较小时, 劈裂的本征频率在低频是反对称态 ($\Delta\varphi - 180°$), 在高频是对称态 ($\Delta\varphi 0°$). 随着本征损耗因子$\Gamma_2$增大, 系统的本征模式在 EP2 合并, 此时模式同样是自正交的 ($\Delta\varphi - 90°$). 但是考虑到正交态的手性, 可以确定$\theta = 180°$对应的非厄米系统 EP2 是手性态$\psi_{\rm EP} = (1, +i)$左旋的. 图 6 所示的结果清楚地展示了非厄米系统通过改变耦合系数的符号可以实现 EP 位置的手性翻转. 当系统增益可以通过外场控制时, 还可以实现系统 EP 手性态的主动调控[23].

最后利用 CST(computer simulation technology) 全场仿真软件对开口谐振环相对转角$\theta = 180°$和$\theta = 0°$对应的两种非厄米系统中 EP 处手性态的能量振荡演化进行了仿真模拟, 分别如图 7(a) 和图 7(b) 所示. 图 7(a) 所示的$\theta = 180°$对应的非厄米系统中, 以振荡相位 0° 为例, 此时“共振原子 1”相位超前“共振原子 2” $\Delta\varphi = 90°$. 随着振荡相位的变化, 系统的本征态发生演化, 但是始终可以清楚地观察到, 系统中一个共振单元内场强处于峰值时, 另外一个共振单元内能量将完全消失, 说明了

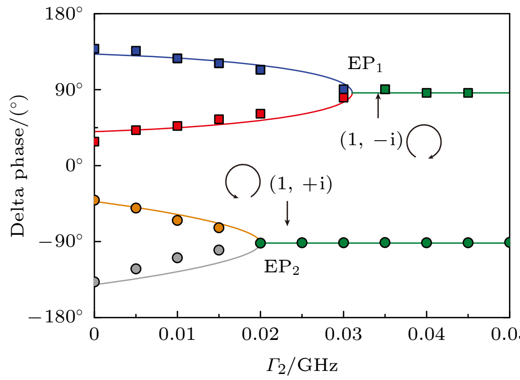


图 6 实验测得开口谐振环相对夹角为 $\theta = 180°$(上图) 和 $\theta = 0°$(下图) 构成的非厄米系统中, 不同的本征损耗因子 Γ_2 两个振子的相位差 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

Fig. 6. Measured phase difference between two resonant atoms $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ for different intrinsic loss factor Γ_2 in the non-Hermitian systems exhibiting the intrinsic chirality of EP. The upper and lower figures denote the relative rotation angle between split-ring resonators is $\theta = 180°$ and $\theta = 0°$, respectively.

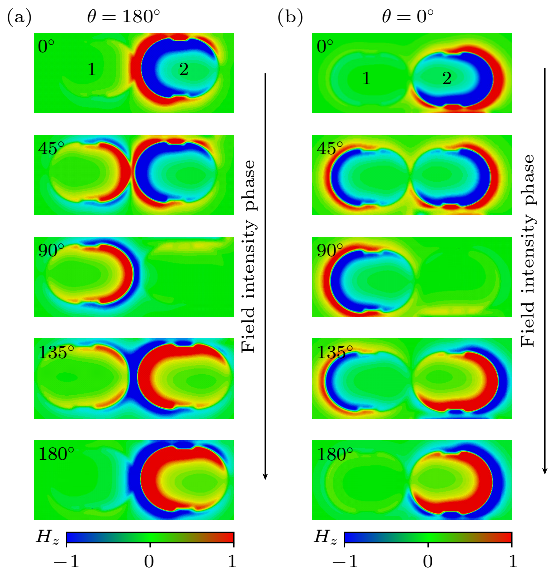


图 7 全场数值仿真得到的开口谐振环相对夹角为 (a) $\theta = 180°$ 和 (b) $\theta = 0°$ 构成的非厄米系统中, EP 位置手性态的场分布仿真演化图

Fig. 7. Full-wave numerical simulated evolution of field distribution for the non-Hermitian system with the relative rotation angle between split-ring resonators is (a) $\theta = 180°$ and (b) $\theta = 0°$.

非厄米系统的 EP 位置, 两个开口谐振环在振荡演化过程中始终存在 90°的相位差. 然而对于图 7(b) 所示的 $\theta = 0°$ 对应的非厄米系统中, 同样以振荡相位 0° 为例, "共振原子 1" 相位落后 "共振原子 2" $\Delta\varphi = -90°$. 随着振荡相位的变化, 系统的本征态发生演化, 但是始终保持着固定的相位差. 图 7 所示的结果更进一步展示了在具有不同耦合系数符号的非厄米系统中, 奇异点的手性态是发生了翻转的.

4 结 论

本文提出了利用开口谐振环来研究非厄米系统中自正交 EP 的手性翻转现象. 从双谐振系统的耦合模理论出发建立的二阶非厄米哈顿量分析得到了非厄米系统 EP 的手性取决于耦合系数的符号. 开口谐振环作为一种超构材料谐振子, 其耦合包含了互容提供的耦合系数为正的电耦合以及互感提供的耦合系数为负的磁耦合, 为构建不同耦合符号的非厄米系统提供了理想平台. 本文通过调节开口谐振环的相对转角就可以灵活地调控总耦合系数的符号, 并通过近场探测技术在实验上观测了非厄米系统奇异点的手性翻转现象. 所以微带线平台构造的开口谐振环为实验研究其他非厄米物理的新奇物理特性提供了一个很好的研究平台. 此外, 本文对 EP 手性态的实验观测一方面丰富了人们对于非厄米系统 EP 的认识. 另外一方面, 可灵活调控的自正交态在手性天线设计方面也具有一定的应用价值.

参考文献

[1] Berry M V 2004 *Czech. J. Phys.* **54** 1039

[2] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, Musslimani Z H, Rotter S, Christodoulides D N 2018 *Nat. Phys.* **14** 11

[3] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243

[4] Heiss W D 2012 *J. Phys. A:Math. Theor.* **45** 444016

[5] Zeng C, Guo Z, Zhu K, Fan C, Li G, Jiang J, Li Y, Jiang H, Yang Y, Sun Y, Chen H 2022 *Chin. Phys. B* **31** 010307

[6] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, et al. 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902

[7] Feng L, El-Ganainy R, Ge L 2017 *Nat. Photonics* **11** 752

[8] Özdemir K, Rotter S, Nori F, Yang L 2019 *Nat. Mater.* **18** 783

[9] Miri M, Alù A 2019 *Science* **363** eaar7709

[10] Shi C, Dubois M, Chen Y, Cheng L, Ramezani H, Wang Y, Zhang X 2016 *Nat. Commun.* **7** 11110

[11] Ding K, Ma G, Xiao M, Zhang Z Q, Chan C T 2016 *Phys. Rev. X* **6** 021007

[12] Tang W, Jiang X, Ding K, Xiao Y X, Zhang Z Q, Chan C T, Ma G 2020 *Science* **370** 1077

[13] Assawaworrarit S, Yu X, Fan S 2017 *Nature* **546** 387

[14] Choi Y, Hahn C, Yoon J W, Song S H 2018 *Nat. Commun.* **9** 2182

[15] Xiao Z, Li H, Kottos T, Alù A 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 213901

[16] Peng B, Özdemir K, Rotterh S, Yilmaz H, Liertzer M, Monifi F, Bender C, Nori F, Yang L 2014 *Science* **346** 328

[17] Lin Z, Ramezani H, Eichelkraut T, Kottos T, Cao H, Christodoulides D N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 213901

[18] Song J, Yang F, Guo Z, Wu X, Zhu K, Jiang J, Sun Y, Li Y, Jiang H, Chen H 2021 *Phys. Rev. Appl.* **15** 014009

[19] Shu X, Li A, Hu G, Wang J, Alù A, Chen L 2022 *Nat. Commun.* **13** 2123

[20] Schumer A, Liu Y, Leshin J, Ding L, et al. 2022 *Science* **375** 884

[21] Hodaei H, Hassan A U, Wittek S, et al. 2017 *Nature* **548** 187

[22] Chen W J, Özdemir K, Zhao G M, Wiersig J, Yang L 2017 *Nature* **548** 192

[23] Guo Z, Zhang T, Song J, Jiang H, Chen H 2021 *Photonics Res.* **9** 574

[24] Guo Z, Jiang J, Jiang H, et al. 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 013122

[25] Doppler J, Mailybaev A, Böhm J, et al. 2016 *Nature* **537** 76

[26] Liu Q, Li S, Wang B, Ke S, Qin C, Wang K, Liu W, Gao D, Berini P, Lu P 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 153903

[27] Song Q H, Odeh M, Zúñiga-Pérez J, Kanté B, and Genevet P 2021 *Science* **373** 1133

[28] Dembowski C, Dietz B, Gräf H D, Harney H L, Heine A, Heiss W D, Richter A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 034101

[29] Cao Q T, Wang H M, Dong C H, Jing H, Liu R S, Chen X, Ge L, Gong Q H, Xiao Y F 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 033901

[30] Chen H, Liu T, Luan H, et al. 2020 *Nat. Phys.* **16** 571

[31] Wang C Q, Sweeney W R, Stone A D, Yang L 2021 *Science* **373** 1261

[32] Keil R, Poli C, Heinrich M, Arkinstall J, Weihs G, Schomerus H, Szameit A 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 213901

[33] Fu N, Fu Z, Zhang H, Liao Q, Zhao D, Ke S 2020 *Opt. Quantum Electron.* **52** 61

[34] Ke S, Wang B, Qin C, Long H, Wang K, Lu P 2016 *J. Lightwave Technol.* **34** 5258

[35] Guo Z, Jiang H, Chen H 2022 *J. Phys. D:Appl. Phys.* **55** 083001

[36] Liang H, Li J S, Guo Y S 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 144101 (in Chinese) [梁浩, 李剑生, 郭云胜 2014 物理学报 **63** 144101]

[37] Zhang M L, Qin Z F, Chen Z 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 054206 (in Chinese) [张萌徕, 覃赵福, 陈卓 2021 物理学报 **70** 054206]

[38] Pendry J B, Holden A J, Robbins D J, Stewart W J 1999 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47** 2075

[39] Pendry J B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966

[40] Shamonina E 2008 *Phys. Status Solidi B* **245** 1471

[41] Jiang J, Guo Z, Ding Y, Sun Y, Li Y, Jiang H, Chen H 2018 *Opt. Express* **26** 12891

[42] Guo Z, Jiang H, Sun Y, Li Y, Chen H 2018 *Opt. Lett.* **43** 5142

[43] Jiang J, Ren J, Guo Z, Zhu W, Long Y, Jiang H, Chen H 2020 *Phys. Rev. B* **101** 165427

[44] Liu H, Genov D A, Wu D M, Liu Y M, Liu Z W, Sun C, Zhu S N, Zhang X 2007 *Phys. Rev. B* **76** 073101

[45] Grbic A, Eleftheriades G V 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 117403

[46] Guo Z, Jiang H, Zhu K, Sun Y, Li Y, Chen H 2018 *Phys. Rev. Appl.* **10** 064048

[47] Guo Z, Long Y, Jiang H, et al. 2021 *Adv. Photonics* **3** 036001

[48] Guo Z, Jiang H, Li Y, et al. 2018 *Opt. Express* **26** 627

[49] Li Y, Sun Y, Zhu W, et al. 2018 *Nat. Commun.* **9** 4598

[50] Hadad Y, Soric J C, Khanikaev A B, Alù A 2018 *Nat. Electron.* **1** 178

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Experimental observation of chiral inversion at exceptional points of non-Hermitian systems*

Zhu Ke-Jia [1)2)] Guo Zhi-Wei [2)†] Chen Hong [2)]

1) (Department of Electrical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

2) (Key Laboratory of Advanced Micro-structured Materials, Ministry of Education, School of Physics Sciences and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

(Received 28 April 2022; revised manuscript received 28 May 2022)

Abstract

Based on the quantum mechanics, the physical observables are represented by Hermitian linear operators. Derived from the conservation of energy, these Hermitian operators exhibit real eigenvalues. However, when a closed system described by an effective Hamiltonian is coupled with the surrounding environment, the dynamics of the system itself becomes non-Hermitian dynamic. In general, the eigenvalues of an open optical non-Hermitian system are complex. Parity-time symmetric structure is the system composed of complex potentials, which is neither parity symmetric nor time reversal symmetric alone but is symmetric after operations of parity inversion and time reversal have been combined. The eigenvalue of the parity-time symmetric Hamiltonian can be found to be real, despite the non-Hermitian nature of the system. One of the most attractive properties of non-Hermitian system is the exceptional point, which is degenerate at which two or more eigenvalues and eigenstates of a non-Hermitian physical system coalesce. The unique topological features of EPs, forming a self-intersecting Riemann surface, have given rise to several exotic physical properties. As a kind of phase singularity in a physical system, exceptional point of non-Hermitian system gives rise to a plethora of counterintuitive phenomenon, such as the loss-induced transmission enhancement, unidirectional reflection and asymmetric state transfer. Especially, the eigenvectors of exceptional point are self-orthogonal and an inherent chirality can be determined because of the missing dimension. Chirality lies at the heart of the most fascinating and fundamental phenomena in modern physics, and how to impose a strong chirality and a switchable direction of light propagation in an optical system by steering it to an exceptional point is an interesting research topic. In this work, a non-Hermitian system is constructed based on the special metamaterial resonator of split-ring resonator, in which the sign of coupling coefficient can be flexibly controlled. Especially, the chiral inversion at an exceptional point of non-Hermitian system is observed experimentally. This sign of coupling coefficient controlled exceptional point not only paves a new way for studying the fundamental non-Hermitian physics in an open system, but also holds great potential in the applied photonic devices such as the efficient chiral mode converter and chiral antennas.

Keywords: non-Hermitian system, metamaterial resonator, exceptional point, chirality

PACS: 11.30.Er, 42.25.Bs, 03.65.Vf **DOI:** 10.7498/aps.71.20220842

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2021YFA1400602), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12004284, 61621001), the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. 22120210579), and the Shanghai Chenguang Plan, China (Grant No. 21CGA22).

† Corresponding author. E-mail: 2014guozhiwei@tongji.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

里德伯原子中非厄米电磁诱导光栅引起的弱光孤子偏折及其操控

高洁　杭超

Deflection and manipulation of weak optical solitons by non–Hermitian electromagnetically induced gratings in Rydberg atoms

Gao Jie　Hang Chao

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 133202 (2022)　DOI: 10.7498/aps.71.20220456
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20220456
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

专题: 非厄米物理前沿

里德伯原子中非厄米电磁诱导光栅引起的弱光孤子偏折及其操控*

高洁[1)] 杭超[1)2)3)†]

1) (华东师范大学, 精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200241)

2) (纽约大学-华东师范大学联合物理研究所, 上海 200122)

3) (山西大学, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

(2022 年 3 月 14 日收到; 2022 年 4 月 6 日收到修改稿)

基于里德伯-电磁感应透明系统实现了具有宇称-时间对称的电磁感应诱导光栅, 并研究了系统中探测光场在到达光栅前形成孤子的过程以及经过光栅时引起的偏折现象. 发现由于里德伯-电磁感应透明系统具有很强的非线性光学效应, 因此只需要很少的输入探测光能量就能形成稳定的光孤子. 此外还发现, 通过改变电磁感应诱导光栅的增益/损耗系数、光栅周期、以及体系的克尔非线性非局域度都可以有效地改变探测光孤子的偏折程度和状态, 实现对弱光孤子偏折的主动操控. 本文的研究结果可为未来利用宇称-时间对称的电磁感应诱导光栅实现全光控制和光信息处理等相关应用提供一定的理论依据.

关键词: 里德伯原子, 宇称-时间对称, 光孤子, 光偏折

PACS: 32.80.Ee, 42.50.Gy, 42.65.Tg **DOI:** 10.7498/aps.71.20220456

1 引 言

宇称-时间 (parity-time, PT) 对称的概念最初是在量子力学的框架下提出的. 1998 年, Boettcher 和 Bender[1] 发现满足 PT 对称的一系列非厄米哈密顿算符, 也能支持全实的能量本征谱, 开辟了研究开放量子系统的新途径. 事实上, PT 对称对于具有全实本征谱的非厄米哈密顿算符来说是一个充分而非必要条件, 因此当哈密顿算符的非厄米程度增加时 (通常增加算符中的增益/损耗项来实现), 一部分实的本征谱会成为复的, 这种现象被称为自发 PT 对称性破缺[2]. 注意到 Maxwell 方程在傍轴近似下导出的光场传输方程与量子力学中的薛定谔方程在数学形式上非常相似, PT 对称的概念很快被人们引入光学领域中[3,4]. 通过类比, 光学 PT 对称系统可以通过构造一个依赖于空间坐标的光学势 $V(\boldsymbol{r})$, 且使该光学势满足 PT 对称条件: $V(\boldsymbol{r})=V(-\boldsymbol{r})^*$ 来实现. 由于光学势的实部对应系统的折射率, 虚部对应系统的增益或损耗, 因而条件 $V(\boldsymbol{r})=V(-\boldsymbol{r})^*$ 等价于系统的折射率分布为偶对称, 增益/损耗分布为奇对称. 近年来, 随着光学实验技术的不断发展以及光学新材料的不断涌现, 人们在不同的光学 PT 对称系统中发现了许多新奇的物理现象并且实现了很多重要的应用, 包括光学放大[5]、非互易光传播[6,7]、完美吸收与无阈值激光[8–13]、增强灵敏度[14–16] 及量子信息处理[17,18] 等. 此外, 人们还研究了 PT 对称条件下非线性光学系统中光孤子的形成、传播及操控特性[19–29], 为利用光孤子实现信息传输与处理打下了理论基础.

另一方面, 近年来大量关于里德伯原子系统的研究工作涌现出来. 里德伯原子是指主量子数非常

* 国家自然科学基金 (批准号: 11974117) 和国家自然科学基金重点项目 (批准号: 2017YFA0304201) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: chang@phy.ecnu.edu.cn

大的高激发态原子[30], 里德伯原子的轨道半径、碰撞截面、原子寿命、电偶极矩、电极化率等都与主量子数的幂次成正比, 较普通原子大得多. 通过调节原子密度等参数, 里德伯原子之间的偶极-偶极相互作用不仅可以很强, 而且可以改变 12 个数量级, 从而呈现出许多十分有趣的物理现象. 特别地, 由于激光冷却与囚禁技术的发展, 使得里德伯原子的研究进入了一个崭新的发展阶段. 超冷里德伯原子不仅为实现高分辨、高灵敏、高精度量子调控与精密测量提供了新的有力手段[31], 而且为探索各种重要的量子多体效应以及量子信息与计算提供了十分有效的研究平台[32]. 尤其值得注意的是, 通过和电磁感应透明 (electromagnetically induced transparency, EIT)[33] 相结合, 里德伯-EIT 系统中的非线性光学效应不仅能比传统 EIT 系统大 4—5 个数量级, 还具有可调非局域特性, 为非局域非线性光学[34,35]、非线性量子光学[36,37] 等研究开辟了新的研究方向.

本文在里德伯-EIT 系统中实现了具有 PT 对称的电磁感应诱导光栅 (electromagnetically induced grating, EIG)[38–42], 即实现了光栅的折射率分布是偶函数, 增益/损耗分布是奇函数, 并研究了系统中探测光场在到达 EIG 前形成孤子的过程以及经 e 过 EIG 时引起的偏折现象. 我们发现, 由于里德伯-EIT 系统具有很强的非线性光学效应 (可比通常的非线性光学介质大 10 个数量级以上), 因此只需要很少的输入探测光能量 (几个纳瓦的输入能量) 就能形成稳定的光孤子. 另外还发现, 通过改变 EIG 的增益/损耗系数、EIG 周期、以及原子的克尔非线性非局域度都可以有效地改变探测光孤子的偏折程度和状态, 实现对弱光孤子偏折的主动操控. 本文的研究结果可为未来利用 PT 对称 EIG 实现全光控制和光信息处理等相关应用提供一定的理论依据.

2 物理模型

考虑超冷倒 Y 型四能级原子气体与激光场相互作用的系统, 如图 1(a) 所示. 在该系统中, 与原子相互作用的激光场可以写为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\rm p}+\boldsymbol{E}_{\rm c}+\boldsymbol{E}_{\rm a}$, 其中 $\boldsymbol{E}_j=\boldsymbol{e}_j\mathcal{E}_j\exp\left[{\rm i}\left(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r}-\omega_jt\right)\right]+{\rm c.c.}$ $(j={\rm p},{\rm c},{\rm a}$; p 表示探测场, c 表示控制场, 以及 a 表示辅助场). 这里, $\boldsymbol{e}_j$ 为光场的极化方向单位矢量; $\mathcal{E}_j$ 为光场的振幅; $\omega_{\rm p}$ 为弱探测场的角频率 (对应波矢为 $k_{\rm p}$, 半拉比频率为 $\varOmega_{\rm p}$), 耦合能级 $|1\rangle$ 与 $|3\rangle$ 之间的跃迁; $\omega_{\rm c}$ 为强控制场的角频率 (对应波矢为 $k_{\rm c}$, 半拉比频率为 $\varOmega_{\rm c}$), 耦合能级 $|2\rangle$ 与 $|3\rangle$ 之间的跃迁; $\omega_{\rm a}$ 为较强辅助场的角频率 (对应波矢为 $k_{\rm a}$, 半拉比频率为 $\varOmega_{\rm a}$), 耦合能级 $|3\rangle$ 与 $|4\rangle$ 之间的跃迁. 此外, 探测光与控制光沿 z 轴的正方向传播, 辅助光沿 z 轴的负方向传播. 为了实现 PT 对称的光学势, 引入了非相干泵浦 (泵浦率为 $\varGamma_{21}$), 将原子布居数从能级 $|1\rangle$ 泵浦到能级 $|2\rangle$ 上, 使探测光可以工作在受激辐射模式, 从而获得光学增益. 在具体的实验中, 非相干泵浦可以通过入射一束中心频率与相关能级跃迁共振但是线宽很宽的激光来实现[43]. 考虑到能级 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 是基态的精细分裂, 可采用入射线宽很宽的微波场来实现.

在电偶极近似和旋转波近似下, 包含原子间相互作用 (里德伯-里德伯相互作用) 的体系哈密顿量写作: $H=N_{\rm a}\displaystyle\int{\rm d}^3r\mathcal{H}(r,t)$, 其中 $N_{\rm a}$ 是原子气体密度, $\mathcal{H}(r,t)$ 是哈密顿量密度, 在相互作用表象下可进一步写成:

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(r,t)\\&=\sum_{\alpha=1}^{4}\hbar\Delta_\alpha\hat{S}_{\alpha\alpha}(r,t)-\hbar[\varOmega_{\rm p}\hat{S}_{13}(r,t)\\&\quad+\varOmega_{\rm a}S_{34}(r,t)+\varOmega_{\rm c}S_{23}(r,t)+{\rm h.c.}]\\&\quad+N_{\rm a}\int{\rm d}^3r'\hat{S}_{44}(r',t)\hbar V_{\rm vdw}(r'-r)\hat{S}_{44}(r,t),\end{aligned}\tag{1}$$

其中与能级 $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ 相关的跃迁算符 $\hat{S}_{\alpha\beta}$ 定义为 $\hat{S}_{\alpha\beta}=|\beta\rangle\langle\alpha|{\rm e}^{{\rm i}[(\boldsymbol{k}_\beta-\boldsymbol{k}_\alpha)\cdot\boldsymbol{r}-(\omega_\beta-\omega_\alpha+\Delta_\beta-\Delta_\alpha)t]}$, 该算符满足对易关系 $[S_{\alpha\beta}(r,t),S_{\mu\nu}(r',t)]=(1/N_{\rm a})\delta(r-r')$ $[\delta_{\alpha\nu}S_{\mu\beta}(r',t)-\delta_{\mu\beta}\hat{S}_{\alpha\nu}(r',t)]$; $\varDelta_\alpha$ 为失谐量, 定义为 $\varDelta_2=\omega_{\rm p}-\omega_{\rm c}-(\omega_2-\omega_1)$, $\varDelta_3=\omega_{\rm p}-(\omega_3-\omega_1)$,以及 $\varDelta_4=(\omega_4-\omega_1)-\omega_{\rm p}-\omega_{\rm a}$, 其中 ω_α 是能级 $|\alpha\rangle$ 的本征频率; 控制场、探测场和辅助场的半拉比频率分别定义为 $\varOmega_{\rm p}=(\boldsymbol{e}_{\rm p}\cdot\boldsymbol{p}_{31})\,\mathcal{E}_{\rm p}/\hbar$, $\varOmega_{\rm c}=(\boldsymbol{e}_{\rm c}\cdot\boldsymbol{p}_{32})\,\mathcal{E}_{\rm c}/\hbar$, 和 $\varOmega_{\rm a}=(\boldsymbol{e}_{\rm a}\cdot\boldsymbol{p}_{43})\,\mathcal{E}_{\rm a}/\hbar$, 其中 $\boldsymbol{p}_{\alpha\beta}$ 是能级 $|\alpha\rangle$ 与 $|\beta\rangle$ 之间的电偶极矩阵元. 哈密顿量表达式中的最后一项表示两个激发到里德伯态的原子分别在位置 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 之间的远程相互作用, 由范德瓦耳斯相互作用势 $\hbar V_{\rm vdw}\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right)$ 表示, 其中 $V_{\rm vdw}\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right)=C_6/\left|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right|^6$, C_6 为色散系数.

相干原子的演化动力学由密度矩阵方程 (Bloch 方程) 来描述, 具体形式如下:

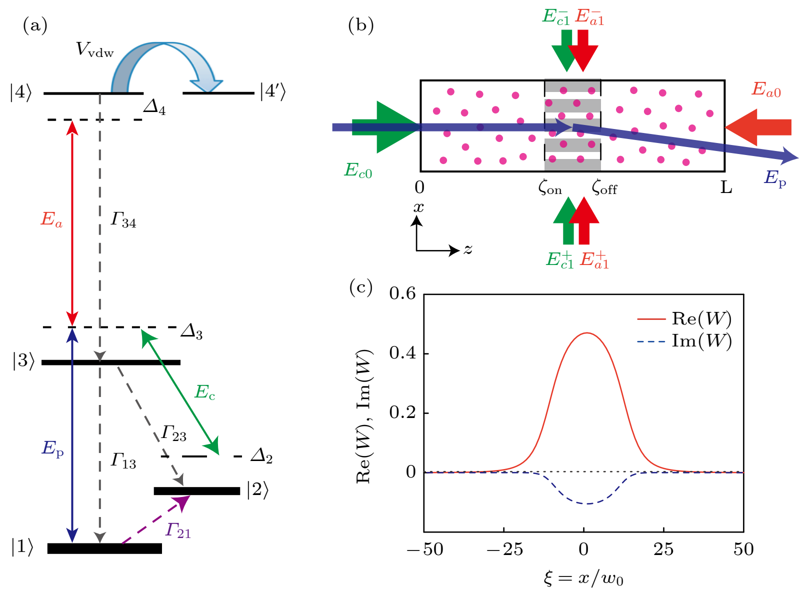


图 1 里德伯-EIT 系统的能级图、装置示意图、以及非线性响应函数的空间分布 (a) 里德伯-EIT 系统的能级图. 能级 $|1\rangle$, $|2\rangle$, 和 $|3\rangle$构成经典的 Λ 型 EIT, 其中探测场 $E_{\rm p}$耦合能级跃迁 $|1\rangle\leftrightarrow|2\rangle$, 控制场耦合能级跃迁 $|2\rangle\leftrightarrow|3\rangle$, Δ_j为失谐量, Γ_{jl}为能级 $|l\rangle$到能级 $|j\rangle$的自发辐射衰减率. 里德伯能级 $|4\rangle$通过辅助光场 $E_{\rm a}$与能级 $|3\rangle$远共振耦合. 引入非相干泵浦 (泵浦率 Γ_{21}) 将原子从能级 $|1\rangle$泵浦到能级 $|2\rangle$. 里德伯原子之间的相互作用 (即里德伯- 里德伯相互作用) 由范德瓦耳斯相互作用势 $V_{\rm vdw}$ 描述 ($V_{\rm vdw}$ 的表达式在文中给出). (b) 里德伯-EIT 系统的装置示意图. (c) 非线性响应函数实部和虚部的空间分布, Re$(W(\xi))$(红色实线表示) 和 Im$(W(\xi))$(蓝色虚线表示); 横坐标为 $\xi=x/w_0$. 图中所用的系统参数在正文中给出

Fig. 1. Level diagram and excitation scheme of the Rydberg-EIT, possible setting, and spatial distributions of the nonlinear response function. Energy levels $|1\rangle$, $|2\rangle$, and $|3\rangle$ constitute a Λ-type EIT configuration, where the probe laser field $E_{\rm p}$ couples the transition $|1\rangle\leftrightarrow|2\rangle$ and the control laser field $E_{\rm c}$ couples the transition $|2\rangle\leftrightarrow|3\rangle$. Δ_j are detunings and Γ_{jl} are the spontaneous-emission decay rate from $|l\rangle$ to $|j\rangle$. The Λ-type EIT is dressed by a high-lying Rydberg state $|4\rangle$, which is far-off-resonantly coupled to state $|3\rangle$ through an assistant laser field $E_{\rm a}$. An incoherent pumping (with the pumping rate Γ_{21}) is introduced to pump the atoms from $|l\rangle$ to $|2\rangle$. The interaction between two Rydberg atoms is described by the van der Waals potential $V_{\rm vdw}$ (given in the text). (b) Possible setting of the Rydberg-EIT system. (c) Spatial distributions of the real and imaginary parts of the nonlinear response function, Re(W) (the red solid line) and Im(W) (the blue dashed line), as functions of $\xi=x/w_0$.

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\rho_{11}+\mathrm{i}\Gamma_{21}\rho_{11}-\mathrm{i}\Gamma_{13}\rho_{33}-\varOmega_{\rm p}\rho_{13}+\varOmega_{\rm p}^*\rho_{31}=0, \quad (2a)$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\rho_{22}+\mathrm{i}\Gamma_{21}\rho_{11}-\mathrm{i}\Gamma_{23}\rho_{33}-\varOmega_{\rm c}\rho_{23}+\varOmega_{\rm c}^*\rho_{32}=0, \quad (2b)$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\rho_{33}+\mathrm{i}\Gamma_{3}\rho_{33}-\mathrm{i}\Gamma_{34}\rho_{44}+\varOmega_{\rm p}\rho_{13}-\varOmega_{\rm p}^*\rho_{31}$$
$$+\varOmega_{\rm c}\rho_{23}-\varOmega_{\rm c}^*\rho_{32}-\varOmega_{\rm a}\rho_{34}+\varOmega_{\rm a}^*\rho_{43}=0, \quad (2c)$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\rho_{44}+\mathrm{i}\Gamma_{34}\rho_{44}+\varOmega_{\rm a}\rho_{34}-\varOmega_{\rm a}^*\rho_{43}=0, \quad (2d)$$

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+d_{21}\right)\rho_{21}+\varOmega_{\rm c}^*\rho_{31}-\varOmega_{\rm p}\rho_{23}=0, \quad (2e)$$

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+d_{31}\right)\rho_{31}+\varOmega_{\rm p}(\rho_{11}-\rho_{33})+\varOmega_{\rm c}\rho_{21}+\varOmega_{\rm a}^*\rho_{41}=0, \quad (2f)$$

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+d_{41}\right)\rho_{41}+\varOmega_{\rm a}\rho_{31}-\varOmega_{\rm p}\rho_{43}$$
$$-N_{\rm a}\int\mathrm{d}^3r'V_{\rm vdw}(r'-r)\rho_{44,41}(r',r,t)=0, \quad (2g)$$

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+d_{32}\right)\rho_{32}+\varOmega_{\rm c}(\rho_{22}-\rho_{33})+\varOmega_{\rm p}\rho_{12}+\varOmega_{\rm a}^*\rho_{42}=0, \quad (2h)$$

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+d_{42}\right)\rho_{42}+\varOmega_{\rm a}\rho_{32}-\varOmega_{\rm c}\rho_{43}$$
$$-N_{\rm a}\int\mathrm{d}^3r'V_{\rm vdw}(r'-r)\rho_{44,42}(r',r,t)=0, \quad (2i)$$

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+d_{43}\right)\rho_{43}+\varOmega_{\rm a}(\rho_{33}-\rho_{44})-\varOmega_{\rm p}^*\rho_{41}-\varOmega_{\rm c}^*\rho_{42}$$
$$-N_{\rm a}\int\mathrm{d}^3r'V_{\rm vdw}(r'-r)\rho_{44,43}(r',r,t)=0, \quad (2j)$$

其中 $d_{\alpha\beta}=\Delta_\alpha-\Delta_\beta+\mathrm{i}\gamma_{\alpha\beta}$, 并且 $\gamma_{\alpha\beta}=(\Gamma_\alpha+\Gamma_\beta)/2+\gamma_{\alpha\beta}^{\rm dep}$. 这里, $\Gamma_\beta=\sum_{\alpha<\beta}\Gamma_{\alpha\beta}$表示能级 $|\beta\rangle$

的总自发辐射衰减率, 其中$\varGamma_{\alpha\beta}$是能级$|\beta\rangle$到能级$|\alpha\rangle$的自发辐射衰减率; $\gamma_{\alpha\beta}^{\text{dep}}$是能级$|\beta\rangle$到能级$|\alpha\rangle$的退相干衰减率, 通常由原子间碰撞等因素引起. 在上面的公式中, 我们使用了记号$\rho_{\alpha\beta,\mu\nu}(r',r,t)\equiv\langle\hat{S}_{\alpha\beta}(r,t)\hat{S}_{\mu\nu}(r',t)\rangle$来表示两体关联子的平均值, 两体关联效应来自原子的里德伯-里德伯相互作用.

探测光场的传播动力学由 Maxwell 方程来描述, 在慢变包络近似下可写为

$$\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varOmega_{\rm p}+\frac{1}{2k_{\rm p}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varOmega_{\rm p}+\kappa_{13}\rho_{31}=0, \tag{3}$$

其中耦合系数$\kappa_{13}\equiv N_{\rm a}\omega_{\rm p}|\boldsymbol{p}_{13}|^2/(2\varepsilon_0 c\hbar)$, $N_{\rm a}$表示原子密度. 方程中关于横向坐标x和y的二阶导数项表示探测场在传播过程具有衍射效应.

如果探测场随时间变化很慢, 可以令 Maxwell-Bloch 方程 (2) 和 (3) 中的时间求导项为零 (即求稳态解), 此时方程将简化为代数方程. 此外, 辅助场与能级$|3\rangle$, $|4\rangle$之间的跃迁为远共振耦合, 即满足条件$|\varDelta_3-\varDelta_4|\gg\varOmega_{\rm a}$, 因此只有很小一部分原子能被激发到里德伯态. 由于探测场的强度比控制场和辅助场都小得多, 可使用渐进展开: $\varOmega_{\rm p}=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\varOmega_{\rm p}^{(m)}$以及$\rho_{\alpha\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\rho_{\alpha\beta}^{(n)}$来求解方程, 其中$\varepsilon$是一个正比于$\varOmega_{\rm p}/\varOmega_{\rm c}$的小量. 将渐进展开式代入 Maxwell-Bloch 方程 (2) 和 (3), 可对方程逐级求解[44,45]. 注意到在首级 ($\mathcal{O}(1)$) 近似下, 探测场约为零, 且处于里德伯态$|4\rangle$上的原子布居数也近似为零, 方程 (2) 和 (3) 的零级解为

$$\begin{aligned}
\rho_{11}^{(0)}&=-\varGamma_{13}X/[\varGamma_{21}\varGamma_{13}-(\varGamma_{21}+\varGamma_{13})X+\varGamma_{21}(\varGamma_{23}+Y)],\\
\rho_{22}^{(0)}&=\varGamma_{21}(\varGamma_{13}+\varGamma_{23}+Y)/[\varGamma_{21}\varGamma_{13}-(\varGamma_{21}+\varGamma_{13})X+\varGamma_{21}(\varGamma_{23}+Y)],\\
\rho_{33}^{(0)}&=-\varGamma_{21}X/[\varGamma_{21}\varGamma_{13}-(\varGamma_{21}+\varGamma_{13})X+\varGamma_{21}(\varGamma_{23}+Y)],\\
\rho_{32}^{(0)}&=\left[-\left(d_{42}d_{43}-|\varOmega_{\rm c}|^2\right)\rho_{22}^{(0)}+\left(d_{42}d_{43}-|\varOmega_{\rm c}|^2+|\varOmega_a|^2\right)\rho_{33}^{(0)}\right]\varOmega_{\rm c}/Z,\\
\rho_{42}^{(0)}&=\left[d_{43}\rho_{22}^{(0)}-(d_{32}+d_{43})\rho_{33}^{(0)}\right]\varOmega_{\rm c}\varOmega_{\rm a}/Z,\\
\rho_{43}^{(0)}&=\left[|\varOmega_{\rm c}|^2\rho_{22}^{(0)}-\left(d_{32}d_{42}+|\varOmega_{\rm c}|^2-|\varOmega_{\rm a}|^2\right)\rho_{33}^{(0)}\right]\varOmega_{\rm a}/Z,
\end{aligned}\tag{4}$$

其中$X=2{\rm Im}[(d_{42}d_{43}-|\varOmega_{\rm c}|^2)|\varOmega_{\rm c}|^2/Z]$, $Y=-2{\rm Im}\times[(d_{42}d_{43}-|\varOmega_{\rm c}|^2+|\varOmega_{\rm a}|^2)|\varOmega_{\rm c}|^2/Z]$, 及$Z=d_{32}d_{42}d_{43}-|\varOmega_{\rm c}|^2d_{32}-|\varOmega_{\rm a}|^2d_{43}$. 其他密度矩阵元的零级解均为零, $\rho_{21}^{(0)}=\rho_{31}^{(0)}=\rho_{41}^{(0)}=0$. 从上面的结果还可以看到, 当没有非相干泵浦 ($\varGamma_{21}=0$) 时, $\rho_{11}^{(0)}=1$而其他密度矩阵元零级解均为零. 因此, 当系统中不引入非相干泵浦时, 探测场将无法工作在受激辐射模式从而获得光学增益.

描述探测场传播的非线性方程可以在三级 ($\mathcal{O}(\varepsilon^3)$) 近似下得到. 为了方便后面的讨论, 将探测场传播方程写成无量纲的形式:

$$\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial\zeta}+\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}+V(\xi)U+\int{\rm d}\xi' W(\xi'-\xi)\left|U(\xi',\zeta)\right|^2U(\xi,\zeta)=0, \tag{5}$$

其中, 探测场的无量纲振幅$U=\varOmega_{\rm p}/\varOmega_{\rm p0}$ ($\varOmega_{\rm p0}$是探测场的特征半拉比频率), 无量纲坐标$\zeta=z/L_{\rm diff}$ ($L_{\rm diff}=2k_{\rm p}w_0^2$是特征衍射长度; w_0是探测光束的束腰半径), 以及$(\xi,\xi')=(x,x')/w_0$. 无量纲的光学势$V(\xi)$可表达为

$$V(\xi)=\frac{N_{\rm a}(\boldsymbol{e}_{\rm p}\cdot\boldsymbol{p}_{13})^2\varOmega_{\rm p}^2w_0^2}{\varepsilon_0c^2\hbar}\times\frac{d_{21}d_{41}(\rho_{33}^{(0)}-\rho_{11}^{(0)})-d_{41}\varOmega_{\rm c}\rho_{23}^{(0)}-d_{21}\varOmega_{\rm a}^*\rho_{43}^{(0)}}{D}, \tag{6}$$

其中$D=d_{21}d_{31}d_{41}-|\varOmega_{\rm c}|^2d_{41}-|\varOmega_{\rm a}|^2d_{21}$; 非局域非线性响应函数$W(\xi'-\xi)$可表达为

$$W(\xi'-\xi)=2\frac{N_{\rm a}^2(\boldsymbol{e}_{\rm p}\cdot\boldsymbol{p}_{13})^2\varOmega_{\rm p}^3w_0^6}{\varepsilon_0c^3\hbar}\frac{d_{21}\varOmega_{\rm a}^*\varOmega_{\rm p0}^2}{D}\times\iint{\rm d}\eta{\rm d}\zeta G(\xi'-\xi,\eta,\zeta), \tag{7}$$

其中

$$G=\sum_{j=0}^{3}A_jV(\xi'-\xi,\eta,\zeta)^j\bigg/\sum_{j=0}^{4}B_jV(\xi'-\xi,\eta,\zeta)^j,$$

(系数 A_j, B_j 可由具体的系统参数确定[44,45], $\eta = y/w_0$. 在方程 (5) 的推导中, 为了进一步简化问题, 假设输入探测场在 y 和 z 方向上的空间分布远大于原子的里德伯-里德伯相互作用范围 (该范围可用里德伯阻塞半径来刻画, 见下面方程 (9) 中的定义). 因此, 非局域非线性响应函数在 y, z 方向上可近似为局域响应函数, 仅保留 x 方向上的非局域性. 其次, 方程 (5) 中忽略了由于光子- 原子相互作用引起的克尔非线性, 这是因为在通常的原子密度下, 光子-原子相互作用引起的克尔非线性比里德伯-里德伯相互作用引起的克尔非线性要小好几个数量级 (前者与原子密度成正比; 后者与原子密度的平方成正比).

为了更好地比较各种不同效应的重要性, 下面以处于低温的锶 87 (^{87}Sr) 原子气体为例, 原子能级选为 $|1\rangle = |5s^2\,{}^1S_0,\ F = 9/2,\ m_F = -1/2\rangle$, $|2\rangle = |5s^2\,{}^1S_0,\ F = 9/2,\ m_F = 3/2\rangle$, $|3\rangle = |5s5p\,{}^1P_1\rangle$, 以及 $|4\rangle = |5s\,ns\,{}^1S_0\rangle$. 主量子数选为 $n = 60$, 对应的系统色散系数 $C_6 \approx 2\pi \times 10.9\ \text{GHz} \cdot \mu\text{m}^6$; 非相干泵浦率取为 $\varGamma_{21} \approx 2\pi \times 0.1$ MHz; 自发辐射衰减率分别为 $\varGamma_2 = \varGamma_{12} \approx 2\pi \times 0.1$ MHz, $\varGamma_3 = \varGamma_{13} + \varGamma_{23} \approx 2\pi \times 16$ MHz ($\varGamma_{13} \approx \varGamma_{23}$), 以及 $\varGamma_4 = \varGamma_{34} \approx 2\pi \times 16.7$ kHz; 原子气体密度取为 $\mathcal{N}_a = 1.0 \times 10^{12}\ \text{cm}^{-3}$; 失谐量分别为 $\varDelta_2 = -1.186$ MHz, $\varDelta_3 = 50$ MHz, 以及 $\varDelta_4 = -100$ MHz; 控制场以及辅助场的半拉比频率分别取为 $\varOmega_c = \varOmega_{c0} = 15$ MHz 以及 $\varOmega_a = \varOmega_{a0} = 10$ MHz. 从以上参数的取值可以看到远共振耦合条件可以得到满足, 即 $|\varDelta_3 - \varDelta_4|/\varOmega_a = 15 \gg 1$. 选取探测光在 x 方向上的束腰半径为 $w_0 = 10$ μm (光在 y 方向上的束腰半径大于 w_0, 即探测光的横截面是椭圆形的, 短轴在 x 方向上, 长轴在 y 方向上), 可以得到系统的衍射特征长度为 $L_{\text{diff}} = 1.4$ mm.

使用以上参数并进一步选取 $\varOmega_{p0} \approx 0.1$ MHz, 可以得到非线性响应函数的近似表达式:

$$W(\xi' - \xi) \approx 0.02 \iint \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \times \left\{ 1 + \mathrm{i}0.41 + \frac{\left[(\xi' - \xi)^2 + \eta^2 + 2k_p w_0^2 \zeta^2 \right]^3}{(0.48 R_b)^6} \right\}^{-1}, \tag{8}$$

其中里德堡阻塞半径 R_b 为

$$R_b = (|C_6|/|\delta_{\text{EIT}}|)^{1/6} \approx 5.6\ \mu\text{m}, \tag{9}$$

$\delta_{\text{EIT}} = |\varOmega_a|^2/|\varDelta_3 - \varDelta_4|$ 表示 EIT 透明窗口的频率宽度. 注意, 方程 (8) 所给出的非线性响应函数是归一化的, 即 $\int \mathrm{d}\xi W(\xi) \approx 1$, 这与局域极限情况下 $W(\xi' - \xi) \to \delta(\xi' - \xi)$ 保持一致. 由于锶 87 原子具有相互吸引的里德伯-里德伯相互作用 ($C_6 > 0$), 因此可以得到 $\text{Re}(W) > 0$, 即方程 (5) 中的克尔非线性是自聚焦的, 这对于亮孤子的形成至关重要. 图 1(c) 给出了非线性响应函数的实部和虚部在 x 方向上的分布, 即 $\text{Re}(W(\xi))$ 和 $\text{Im}(W(\xi))$. 从图中可以看到, 虽然 W 是个复数, 但是其实部大虚部一个数量级以上, 因此 W 可近似地视为实数. 此外, 为了更好地显示克尔非线性的非局域程度, 定义非局域度 $\sigma = R_b/w_0$. 由上面的参数可得非局域度 $\sigma \approx 0.56$, 值得注意的是 σ 的控制可以通过改变里德伯阻塞半径 R_b 或探测光束腰半径 w_0 来实现.

到目前为止, 方程 (5) 中的光学势并不依赖于空间位置, 为了使光学势依赖于空间坐标并满足周期性和 PT 对称, 令控制场和辅助场都具有空间分布. 事实上, 本文所要实现的光学势 (目标势) 具有如下形式:

$$V(\xi, \zeta) = V_0 - [V_1 \cos(K\xi) - \mathrm{i}V_2 \sin(K\xi)]\, f(\zeta), \tag{10}$$

其中 V_0 是常数, V_1 (V_2) 是光学势空间调制部分实部 (虚部) 的深度, K 是空间调制的频率 (周期为 $\varLambda = 2\pi w_0/K$); 分布函数 $f(\zeta)$ 写为

$$f(\zeta) = \frac{1}{2} \left[\tanh\left(\frac{\zeta - \zeta_{\text{on}}}{\zeta_s} \right) - \tanh\left(\frac{\zeta - \zeta_{\text{off}}}{\zeta_s} \right) \right], \tag{11}$$

表示光学势空间调制部分在 z 方向上的范围, 其中 ζ_{on}, ζ_{off} 和 ζ_s 分别表示势的调制部分打开和关闭的位置以及打开和关闭所需要的距离. 光学势的空间调制部分所起的作用相当于 EIG, 而且满足条件 $V(\xi, \zeta) = V(-\xi, \zeta)^*$, 即 $V(\xi, \zeta)$ 在 x 方向具有 PT 对称. 特别地, 在线性情况下 (即不考虑克尔非线性项时), 当 $V_2 > V_1$ 时, EIG 发生自发 PT 对称破缺.

有了上面给出的系统参数, 目标光学势 (10) 式可以通过设计控制场和辅助场的空间分布来实现. 通过使用文献 [46, 47] 中提出的方法, 能够得到控制场和辅助场的具体形式取为

$$\varOmega_c(\xi, \zeta)/\varOmega_{c0} = 1 + 0.03 V_2 \sin(K\xi) f(\zeta), \tag{12a}$$

$$\varOmega_a(\xi, \zeta)/\varOmega_{a0} = 1 + [3.44 V_1 \cos(K\xi) - 5.02 V_2 \sin(K\xi)]\, f(\zeta). \tag{12b}$$

从 (12) 式可以看到, 当 $\zeta_{\rm on} \leqslant \zeta \leqslant \zeta_{\rm off}$ 时 (即在光学势的空间调制部分或 EIG 区域内), 控制场和辅助场的半拉比频率分别在 $\Omega_{\rm c0}$ 和 $\Omega_{\rm a0}$ 附近变化. 在具体的实验中, 控制场和辅助场的空间分布可以通过在 EIG 区域内采用具有驻波形式的额外的控制场和辅助场来实现, 即需要在 EIG 区域内沿 x 方向额外入射一对相向传播的控制场和一对相向传播的辅助场 (见图 1(b) 中的 $E_{\rm c1}^{\pm}$ 以及 $E_{\rm a1}^{\pm}$).

事实上, 控制场和辅助场的空间分布也会使方程 (5) 中的克尔非线性项产生空间调制. 然而, 考虑到克尔非线性与线性折射率和增益/损耗相比是高阶效应, 并且克尔非线性的空间调制部分远小于空间不变的部分, 因此可以忽略其空间调制部分, 将其视为一个空间不变的量.

图 2(a) 给出了 EIG 实部和虚部在 x 方向上的分布, 即 ${\rm Re}(V(\xi))$ 和 ${\rm Im}(V(\xi))$, 调制系数取为 $V_1 = V_2 = 0.01$. 可以看到 EIG 的实部在 x 方向上是偶对称的, 虚部在 x 方向上是奇对称的, 符合 PT 对称的要求. 图 2(b) 给出了控制场和辅助场在 x 方向上的分布, 即 $\Omega_{\rm c}(\xi)$ 和 $\Omega_{\rm a}(\xi)$.

3 光孤子偏折与导引

讨论完探测场传播方程 (5) 并得到目标光学势 (10) 式后, 本节继续研究探测场如何形成弱光孤子以及如何在满足 PT 对称的 EIG 作用下发生孤子的偏折. 本文研究的物理模型可分成三个部分: 第一部分 ($0 < \zeta < \zeta_{\rm on}$) 和第三部分 ($\zeta_{\rm off} < \zeta < L$; L 表示介质的总长度) 都是由光学势为常数的原子气体组成的, 中间部分 ($\zeta_{\rm on} \leqslant \zeta \leqslant \zeta_{\rm on}$) 原子气体的折射率和增益/吸收特性同时满足周期性和 PT 对称性, 构成 PT 对称的 EIG. 当探测场未到达光栅区域, 即 $0 < \zeta < \zeta_{\rm on}$ 时, 方程 (5) 具有亮孤子解. 特别地, 当克尔非线性的非局域度趋向于零 ($\sigma \to 0$), 即原子的克尔非线性为局域克尔非线性时, 方程 (5) 退化为标准的非线性薛定谔方程, 亮孤子解的形式为

$$U(\xi,\zeta) = A{\rm sech}[A(\xi-\xi_0)]{\rm e}^{{\rm i}\zeta+{\rm i}V_0}, \tag{13}$$

其中 A 是孤子的振幅, ξ_0 表示孤子的中心位置. 当克尔非线性的非局域度趋向于无穷大 ($\sigma \to \infty$), 即原子的克尔非线性为强非局域时, 方程 (5) 中的非线性项可近似为简谐势[48]:

$$\begin{aligned} &\int {\rm d}\xi' W(\xi'-\xi)\,|U(\xi',\zeta)|^2\, U(\xi,\zeta) = \left(Q_0 - Q_2\xi^2\right) U, \\ &Q_0 = {\rm Re}(W)|_{\xi=0} \int {\rm d}\xi |U|^2, \\ &Q_2 = -(\partial^2{\rm Re}(W)/\partial\xi^2)|_{\xi=0} \int {\rm d}\xi |U|^2, \end{aligned} \tag{14}$$

在这种情况下, 方程退化为变系数线性方程, 孤子解可写为

$$U(\xi,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}{\rm e}^{-\sqrt{Q_2}(\xi-\xi_0)^2/2+{\rm i}Q_0}. \tag{15}$$

一般情况下, 克尔非线性的非局域度大于零 ($\sigma > 0$)

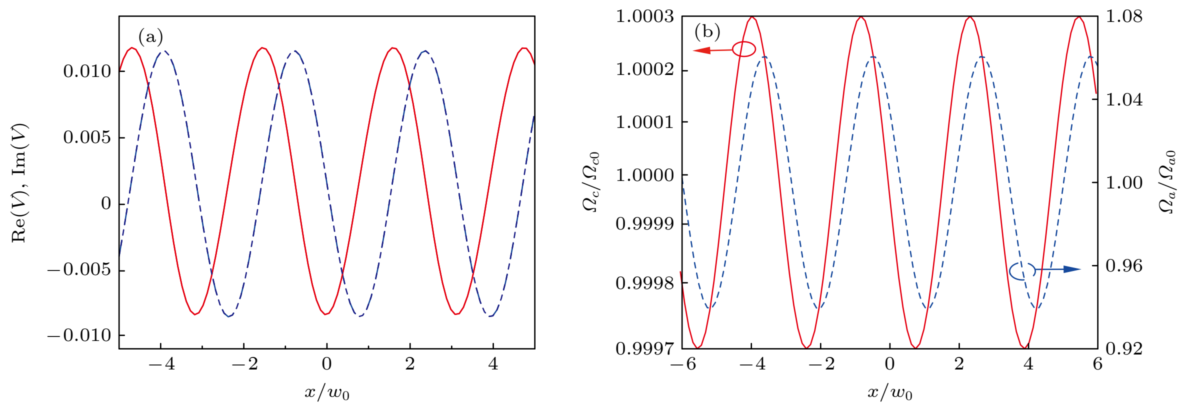


图 2 EIG 以及控制场和辅助场的空间分布 (a) EIG 的实部和虚部在 x 方向上的分布, ${\rm Re}(V(\xi))$(红色实线表示) 和 ${\rm Im}(V(\xi))$(蓝色虚线表示); (b) 控制场和辅助场在 x 方向上的分布, $\Omega_{\rm c}(\xi)/\Omega_{\rm c0}$(红色实线表示) 和 $\Omega_a(\xi)/\Omega_{a0}$(蓝色虚线表示). 图中, 横坐标为 $\xi = x/w_0$, 调制系数取值为 $V_1 = V_2 = 0.01$, 其他系统参数在文中给出

Fig. 2. Spatial distributions of the optical potential and the control and assistant fields: (a) Real and imaginary parts of the optical potential, ${\rm Re}(V)$ (solid red line) and ${\rm Im}(V)$ (blue dashed line), as functions of $\xi = x/w_0$; (b) half Rabi frequencies of the control and assistant fields, $\Omega_{\rm c}$ (red solid line) and $\Omega_{\rm a}$ (blue dashed line), as functions of $\xi = x/w_0$. In all panels, $V_1 = V_2 = 0.01$. Other system parameters are given in the text.

但不是很大, 这种情况下无法找到方程的严格解析解, 只能使用数值方法来进行研究.

为了进一步简化问题, 假设输入探测场的形式为 $U(\xi,0)=A\mathrm{sech}(A\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_0}$, 因此输入光的功率为 $P_0=\int\mathrm{d}\xi|U(\xi,0)|^2=2A$. 同时, 固定 EIG 的折射率 (实部) 为 $V_1=0.1$, EIG 的厚度为 $\zeta_{\rm on}-\zeta_{\rm off}=1$ (对应 1.4 mm), 以及介质的总长度 $L=10$ (对应 1.4 cm), 仅仅改变输入探测场的振幅 A, EIG 的增益/损耗系数 (虚部) V_2, EIG 的周期 $2\pi/K$, 以及克尔非线性的非局域度 σ, 以此研究探测光经过光栅后发生的偏折程度与这些参数之间的关系. 为了更好地表征探测光的偏折程度, 定义偏折角 θ, 即探测光发生偏折后的传播方向与原来的传播方向 (z 方向) 之间的夹角为

$$\theta=\arctan(\Delta\xi/\Delta\zeta),\tag{16}$$

其中 $\Delta\xi$ 是探测光发生偏折并传播一段距离后中心位置在 x 方向上发生的移动, $\Delta\zeta$ 是偏折后探测光传播的距离在 z 方向上的投影. 偏折角 θ 越大, 表示探测场发生偏折的程度越大.

图 3 给出了取不同输入探测场振幅 A 时探测光的传播结果, 其他参数固定为 $V_2=0$, $K=1$, 以及 $\sigma=0$(对应局域克尔非线性). 结果显示, 当 $A=0.1$ ($P_0=0.02$) 时, 由于输入探测场的振幅太小, 无法产生足够的非线性来平衡衍射效应, 探测光在到达光栅前已经发生显著的扩散, 无法形成孤子 (见图 3(a)). 当 $A=1$ ($P=2$) 时, 输入探测场能够产生足够的非线性来平衡衍射效应, 探测光在到达光栅前能够形成孤子并稳定地传播 (见图 3(b)). 在后面的研究中, 将锁定 $A=1$, 即只研究输入探测场能形成稳定孤子的情况.

值得注意的是, 由于里德伯-EIT 系统具有很强的克尔非线性 (较普通 EIT 系统的克尔非线性效应大 4—5 个数量级, 参考文献 [44,45], 探测场仅需极小的输入能量就能产生光孤子. 为了估计产生图 3(b) 所示的孤子所需的输入能量, 计算了探测场的能流密度矢量 (坡印廷矢量), 得到:

$$P_{\rm gen}=2\varepsilon_0 c n_{\rm p}S_0\left(\frac{2\hbar}{\boldsymbol{e}_{\rm p}\cdot\boldsymbol{p}_{13}}\right)^2|\Omega_{\rm p}|^2\approx1.8\,\mathrm{nW},\tag{17}$$

其中 $n_{\rm p}$ 表示原子气体对于探测场的折射率, 约等于 1; S_0 表示探测光束的横截面积, 约为 $10^4\ \mu\mathrm{m}^2$.

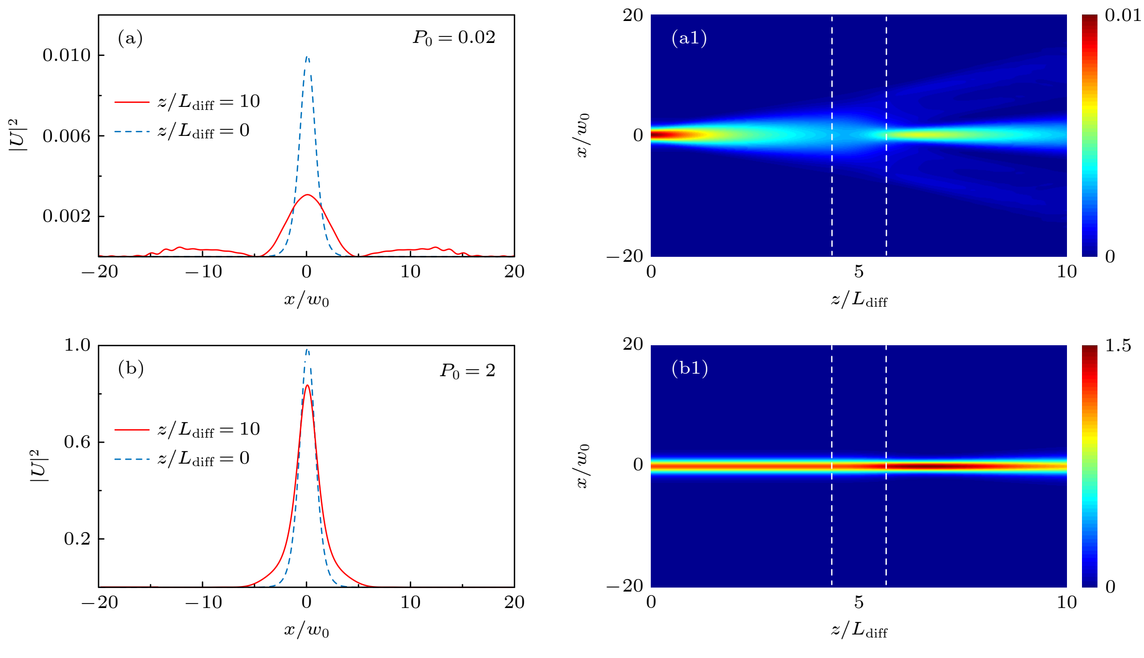


图 3 改变输入探测场振幅时探测光的传播结果 (a) 输入探测场振幅 $A=0.1$ (输入探测场能量 $P_0=0.02$); (b) $A=1$ ($P_0=2$). 其他参数取为 $V_2=0$, $K=1$, 以及 $\sigma=0$ (对应于局域克尔非线性). 图 (a) 和图 (b) 中蓝色虚线和红色实线分别表示探测场的输入 ($z=0$) 与输出 ($z=10L_{\rm diff}=1.4$ cm) 波形.与图 (a) 和图 (b) 对应的传播过程分别在图 (a1) 和图 (b1) 中显示, 图 (a1) 和图 (b1) 中的垂直白色虚线表示 EIG 所在的区域

Fig. 3. Propagation of probe laser field with different input amplitude: (a) $A=0.1$ ($P_0=0.02$); (b) $A=1$ ($P_0=2$). Other system parameters are chosen as $V_2=0$, $K=1$, and $\sigma=0$. Panel (a1) and panel (b1) show propagation results corresponding to panel (a) and panel (b), respectively. The vertical white dashed lines in panel (a1) and panel (b1) represent the EIG regions.

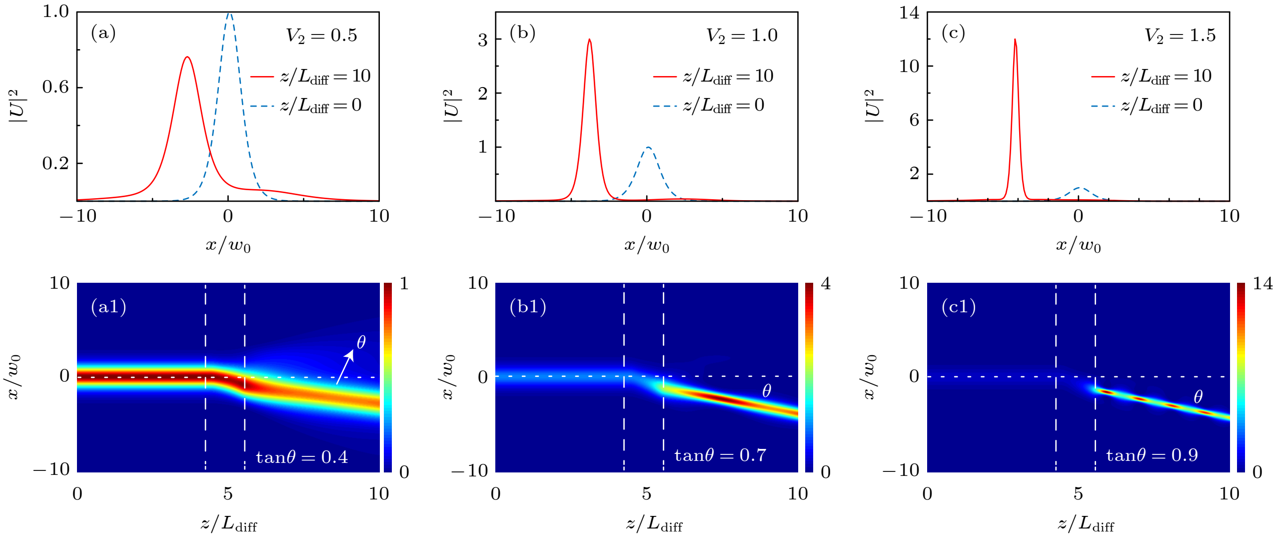


图 4 探测光孤子随 EIG 增益/吸收系数增大引起的偏折 (a) 增益/吸收系数 $V_2 = 0.5$, 偏折角 $\theta \approx \arctan 0.4$; (b) $V_2 = 1$, $\theta \approx \arctan 0.7$; (c) $V_2 = 1.5$, $\theta \approx \arctan 0.9$. 其他参数固定为 $K = 1$ 以及 $\sigma = 0$. 图 (a)—(c) 中蓝色虚线和红色实线分别表示探测场的输入 ($z = 0$) 与输出 ($z = 10L_{\rm diff} = 1.4$ cm) 波形; 与图 (a)—(c) 对应的传播过程分别在图 (a1)—(c1) 中显示, 图 (a1)—(c1) 中的垂直白色虚线表示 EIG 所在的区域

Fig. 4. Deflection of the probe soliton due to the increase of gain/loss coefficient of the EIG: (a) $V_2 = 0.5$, the deflection angle $\theta \approx \arctan 0.4$; (b) $V_2 = 1$, the deflection angle $\theta \approx \arctan 0.7$; (c) $V_2 = 1.5$, the deflection angle $\theta \approx \arctan 0.9$. Other system parameters are chosen as $K = 1$ and $\sigma = 0$. Panels (a1)–(c1) show propagation results corresponding to panel (a)–(c), respectively. The vertical white dashed lines in panels (a1)–(c1) represent the EIG regions.

当 EIG 的增益/损耗系数不为零时, 探测光孤子经过该 EIG 会发生偏折现象. 图 4 给出了探测光孤子随 EIG 增益/损耗系数 V_2 增大引起的偏折, 其他参数固定为 $K = 1$ 以及 $\sigma = 0$. 从图 4 给出的结果可以发现, 当 $V_2 = 0$ 时, 探测光孤子在经过光栅后不发生偏折 (见图 4(a)). 随着 V_2 从零开始慢慢增大, 孤子在经过光栅后发生越来越明显的偏折, 且偏折角 θ 逐渐变大 (见图 4(b) 和 图 4(c)). 此外, 当 EIG 的 PT 对称性还未破缺 ($V_2 < V_1$) 时, 经过光栅后的孤子与到达光栅前的孤子相比能量有微小的衰减; 反之, 当 EIG 的 PT 对称性发生破缺 ($V_2 > V_1$) 时, 经过光栅后的孤子与到达光栅前的孤子相比能量有显著的增强, 且 PT 对称的破缺程度越深, 孤子能量增加的程度也越大. 值得注意的是, 由于系统的克尔非线性较强, 光栅的 PT 对称破缺点较线性情况下发生了一定的偏移[28,49]. 当 $V_2 = V_1$ 时, PT 对称已经发生破缺, 因此 EIG 的增益/损耗不为零, 导致孤子经过 EIG 后光强的峰值发生了近 3 倍的增加 (见图 4(b)). 从图 4(c1) 可以看到, 孤子在经过光栅后不仅发生了较大的偏折, 还出现了光强的周期性振荡 (呼吸现象), 这是由于经过光栅后的孤子获得了较大的能量增强.

与改变 EIG 的增益/损耗系数相比, 改变 EIG 周期所引起的孤子偏折变化更加显著. 图 5 给出了改变 EIG 周期 ($2\pi/K$) 引起的探测光孤子的偏折变化, 其他参数固定为 $V_2 = 1$ 以及 $\sigma = 0$. 从图 5 给出的结果可以看到, 当 EIG 的周期趋于无穷大, 即 $K \to 0$ 时, 孤子在经过光栅后不发生偏折. 这是因为当 $K = 0$, EIG 的增益/损耗 (虚部) 将为零 (见图 5(a)). 随着 EIG 周期逐渐减小 (K 逐渐增大), 孤子在经过光栅后开始发生偏折, 且偏折角 θ 逐渐变大. 当 EIG 周期约为 π ($K \approx 2$) 时, θ 达到最大值 (见图 5(b)). 此后, 偏折角 θ 随着 EIG 周期的继续减小 (K 的继续增大) 反而逐渐变小 (见图 5(c)). 这是由于 EIG 的折射率和增益/损耗变化过快时, 可以对其做平均且平均值为零, 此时 EIG 没有任何贡献.

改变里德伯原子的克尔非线性非局域度能够改变探测光孤子的偏折状态. 图 6 给出了克尔非线性非局域度 σ 发生改变时对孤子偏折带来的影响, 其他参数固定为 $V_2 = 1$ 以及 $K = 1$. 从图 6 给出的结果可以看到, 当非局域度 σ 的取值较小时 (如 $\sigma = 1$, 对应弱非局域情况, 见图 6(a)), 孤子发生偏折的情况和 $\sigma = 0$ 时的结果类似 (如 $\sigma = 1$, 见图 6(a)). 然而, 当非局域度 σ 的取值较大时 (如 $\sigma = 10$, 对应强非局域情况, 见图 6(b)), 孤子在遇

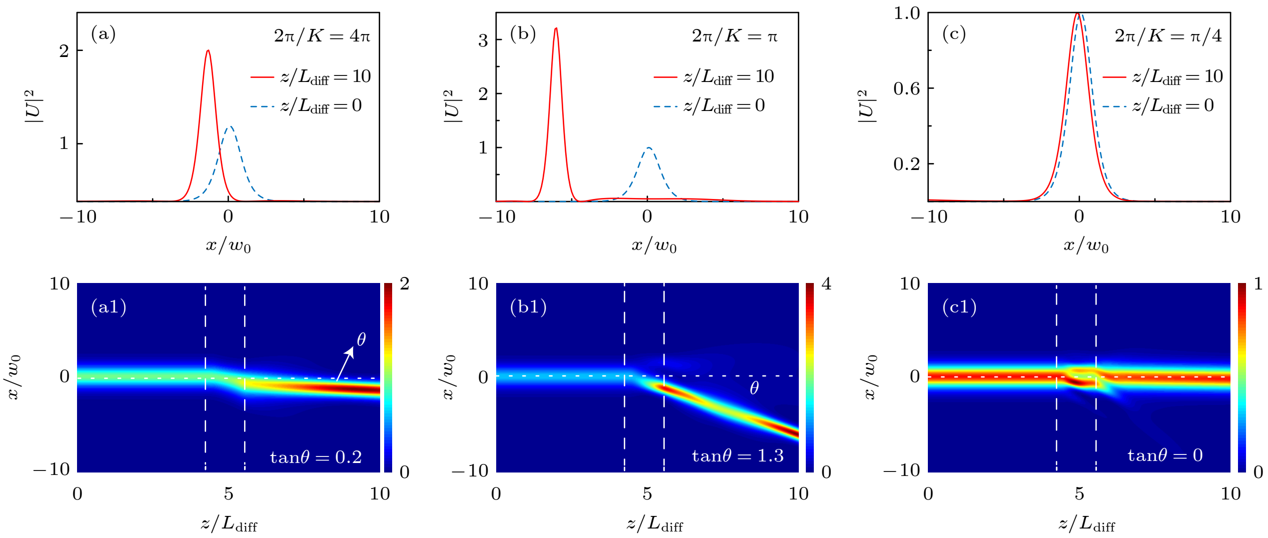


图 5　改变 EIG 周期引起的探测光孤子的偏折变化　(a) EIG 周期为 4π ($K=0.5$), 偏折角 $\theta\approx\arctan 0.2$; (b) EIG 周期为 π ($K\approx 2$), $\theta\approx\arctan 1.3$; (c) EIG 周期为 $\pi/4$ ($K=8$), $\theta\approx 0$. 其他参数固定为 $V_2=1$ 以及 $\sigma=0$. 图 (a)—(c) 中蓝色虚线和红色实线分别表示探测场的输入 ($z=0$) 与输出 ($z=10L_{\rm diff}=1.4$ cm) 波形. 与图 (a)—(c) 对应的传播过程分别在图 (a1)—(c1) 中显示, 图 (a1)—(c1) 中的垂直白色虚线表示 EIG 所在的区域

Fig. 5. Deflection of the probe soliton due to the change of the EIG period: (a) EIG period is 4π ($K=0.5$), the deflection angle $\theta\approx\arctan 0.2$; (b) EIG period is π ($K=2$), the deflection angle $\theta\approx\arctan 1.3$; (c) EIG period is $\pi/4$ ($K=8$), the deflection angle $\theta\approx 0$. Other system parameters are chosen as $V_2=1$ and $\sigma=0$. Panels (a1)–(c1) show propagation results corresponding to panels (a)–(c), respectively. The vertical white dashed lines in panels (a1)–(c1) represent the EIG regions.

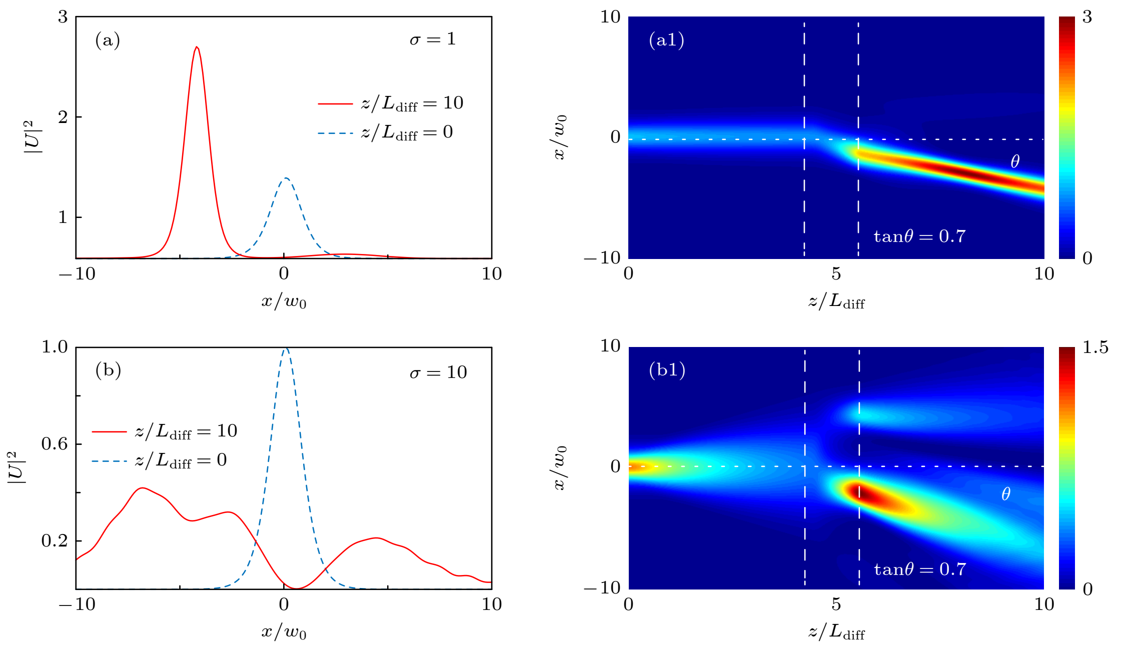


图 6　克尔非线性非局域度发生改变时对孤子偏折带来的影响　(a) 非局域度 $\sigma=1$ (弱非局域情况), 偏折角 $\theta\approx\arctan 0.7$; (b) $\sigma=10$ (强非局域情况), θ 不变. 其他参数固定为 $V_2=1$ 以及 $K=1$. 图 (a) 和图 (b) 中蓝色虚线和红色实线分别表示探测场的输入 ($z=0$) 与输出 ($z=10L_{\rm diff}=1.4$ cm) 波形. 与图 (a) 和图 (b) 对应的传播过程分别在图 (a1) 和图 (b1) 中显示, 图 (a1) 和图 (b1) 中的垂直白色虚线表示 EIG 所在的区域

Fig. 6. Deflection of the probe soliton due to the change of nonlocality degree of the Kerr nonlinearity: (a) $\sigma=1$ (weak nonlocality), the deflection angle $\theta\approx\arctan 0.7$; (b) $\sigma=10$ (strong nonlocality), the deflection angle is the same. Other system parameters are chosen as $V_2=1$ and $K=0$. Panels (a1) and (b1) show propagation results corresponding to panels (a) and (b), respectively. The vertical white dashed lines in panels (a1) and (b1) represent the EIG regions.

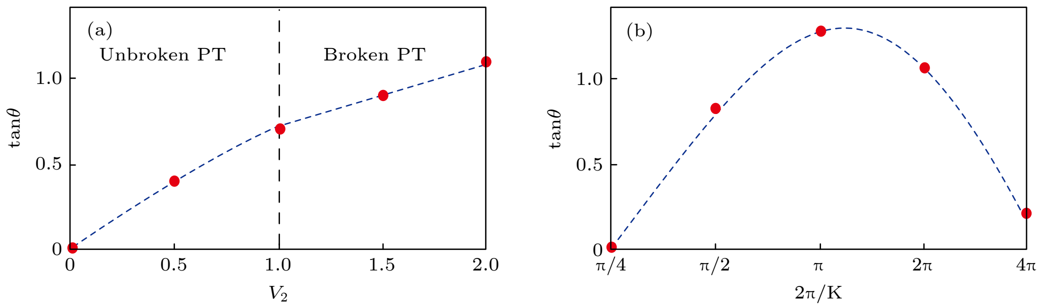


图 7 孤子偏折角与 EIG 的增益/损耗系数以及周期的依赖关系 (a) 偏折角 θ 与 EIG 的增益/损耗系数 V_2 的依赖关系, 其他参数固定为 $K=1$ 以及 $\sigma=0$; (b) θ 与 EIG 周期 $2\pi/K$ 的依赖关系, 其他参数固定为 $V_2=1$ 以及 $\sigma=0$. 图 (a) 和图 (b) 中的红色圆点表示数值结果, 蓝色虚线表示拟合结果

Fig. 7. Deflection angle versus the gain/loss coefficient and period of the EIG: (a) The deflection angle θ as a function of the gain/loss coefficient V_2. Other system parameters are chosen as $K=1$ and $\sigma=0$. (b) θ as a function of the period $2\pi/K$. Other system parameters are chosen as $V_2=1$ and $\sigma=0$. The solid red circles in panels (a) and (b) represent the numerical result while the blue dashed lines are the fit ones.

到光栅前会发生一定程度的扩散, 这是因为当 σ 较大时方程 (5) 中的克尔非线性可近似为简谐势, 所以初始解在传播过程中将从正割双曲函数变为高斯函数 (见方程 (15)), 从而发生扩散. 扩散后的孤子宽度将覆盖几个光栅周期, 因此会发生分裂并出现多光束偏折的现象. 同时, 发生偏折后的每束光能量较小, 无法产生足够的非线性来平衡衍射效应, 因此在传播过程中会进一步扩散.

通过以上分析可以发现, 本文提出的里德伯-EIT 系统可用来有效地操控孤子的传输方向. 与其他系统相比, 里德堡-EIT 系统中形成光孤子所需的输入光能量更低 (大约仅为几个纳瓦), 且能够用于操控孤子传输方向的参数也更多 (包括使用 EIG 的增益/损耗系数 V_2, EIG 的周期 $2\pi/K$, 克尔非线性的非局域度 σ), 操控更加灵活, 因此具有更加广阔的应用前景. 最后, 图 7 给出了孤子偏折角 θ 与 EIG 增益/损耗系数 V_2 和周期 $2\pi/K$ 的依赖关系. 改变非局域度 σ 所引起的 θ 变化不大, 因此在图 7 中没有显示.

4 结 论

本文在里德伯-EIT 系统中实现了具有 PT 对称的 EIG, 并研究了系统中探测光场在到达 EIG 前形成孤子的过程以及经过 EIG 时引起的偏折现象. 我们发现, 由于里德伯-EIT 系统具有很强的非线性光学效应 (可比通常的非线性介质大 10 个数量级以上), 因此只需要很少的输入探测光能量 (几个纳瓦的输入能量) 就能形成稳定的光孤子. 另外还发现探测光孤子的偏折程度会随着 EIG 增益/损耗系数的增加而增加, 并且会在某个特定的 EIG 周期达到峰值. 改变里德伯原子的克尔非线性非局域度也可以改变孤子的偏折状态. 特别地, 当克尔非线性非局域度增大时会发生多光束偏折以及光束的扩散. 因此, 利用文中提出的里德伯-EIT 系统可实现对弱光孤子偏折的主动操控. 本文的研究结果可为未来利用 PT 对称 EIG 实现全光控制和光信息处理等相关应用提供一定的理论依据.

参考文献

[1] Boettcher S, Bender C M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
[2] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
[3] Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Musslimani Z H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 103904
[4] Feng L, El-Ganainy R, Ge L 2017 *Nat. Photonics* **11** 752
[5] Konotop V V, Shchesnovich V S, Zezyulin D A 2012 *Phys. Lett. A* **376** 2750
[6] Feng L, Ayache M, Huang J, Xu Y L, Lu M H, Chen Y F, Fainman Y 2011 *Science* **333** 729
[7] Lin Z, Ramezani H, Eichelkraut T, Kottos T, Cao H, Christodoulides D N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 213901
[8] Longhi S 2010 *Phys. Rev. A* **82** 031801(R)
[9] Chong Y D, Ge L, Stone A D 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 093902
[10] Sun Y, Tan W, Li H, Li J, Chen H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143903
[11] Feng L, Wong Z J, Ma R, Wang Y, Zhang X 2014 *Science* **346** 972
[12] Hodaei H, Miri M A, Heinrich M, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2014 *Science* **346** 975
[13] Jin L 2018 *Phys. Rev. A* **97** 033840
[14] Hodaei H, Hassan A U, Wittek S, et al. 2017 *Nature* **548** 187
[15] Chen W, Ozdemir Ş K, Zhao G, Wiersig J, Yang L 2017 *Nature* **548** 192
[16] Jin L 2018 *Phys. Rev. A* **97** 012121
[17] Xiao L, Zhan X, Bian Z H, et al. 2017 *Nat. Phys.* **13** 1117

[18] Naghiloo M, Abbasi M, Joglekar Y N 2019 *Nat. Phys.* **15** 1232
[19] Musslimani Z H, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 030402
[20] Hu S M, Ma X, Lu D, Yang Z, Zheng Y, Hu W 2011 *Phys. Rev. A* **84** 043818
[21] Shi Z, Jiang X, Zhu X, Li H 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053855
[22] He Y, Zhu X, Mihalache D, Liu J, Chen Z 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013831
[23] Li C Y, Huang C M, Dong L W 2013 *Chin. Phys. B* **22** 074209
[24] Hu S M, Hu W 2013 *Chin. Phys. B* **22** 074201
[25] Hang C, Huang G 2015 *Phys. Rev. A* **91** 043833
[26] Yan Z, Wen Z, Hang C 2015 *Phys. Rev. E* **92** 022913
[27] Zhou K, Wei T, Sun H, He Y, Liu S 2015 *Opt. Express* **23** 16903
[28] Hang C, Huang G 2018 *Phys. Rev. A* **98** 043840
[29] Chen Y, Yan Z, Mihalache D 2020 *Phys. Rev. E* **102** 012216
[30] Gallagher T F 2008 *Rydberg Atoms* (England: Cambridge University Press) pp1–9
[31] Mohapatra A K, Bason M G, Butscher B 2008 *Nat. Phys.* **4** 89
[32] Saffman M, Walker T G, Mølmer K 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 2313
[33] Fleischhauer M, Imamoglu A, Marangos J P 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 633
[34] Sevincli S, Henkel N, Ates C, Pohl T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 153001
[35] Pritchard J D, Weatherill K J, Adams C S 2013 *Annu. Rev. Cold At. Mol.* **1** 301
[36] Firstenberg O, Adams C S, Hofferberth S 2016 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **49** 152003
[37] Murray C, Pohl T 2016 *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics* (New York: Academic Press) pp321–372
[38] Zhu X Y, Xu Y L, Zou Y, Sun X C, He C, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Appl. Phys. Lett.* **109** 111101
[39] Liu Y M, Gao F, Fan C H, Wu J H 2017 *Opt. Lett.* **42** 4283
[40] Shui T, Yang W X, Liu S, Li L 2018 *Phys. Rev. A* **97** 033819
[41] Ma D, Yu D, Zhao X, Qian J 2019 *Phys. Rev. A* **99** 033826
[42] Hang C, Li W, Huang G 2019 *Phys. Rev. A* **100** 043807
[43] Agarwal G S, Vemuri G, Mossberg T W 1993 *Phys. Rev. A* **48** R4055(R)
[44] Bai Z, Huang G 2016 *Opt. Express* **24** 4442
[45] Bai Z, Li W, Huang G 2019 *Optica* **6** 309
[46] Hang C, Huang G, Konotop V V 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 083604
[47] Hang C, Huang G 2017 *Adv. Phys. X* **2** 737
[48] Królikowski W, Bang O, Rasmussen J J, Wyller J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016612
[49] Lumer Y, Plotnik Y, Rechtsman M C, Segev M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 263901

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Deflection and manipulation of weak optical solitons by non-Hermitian electromagnetically induced gratings in Rydberg atoms*

Gao Jie [1)] Hang Chao [1)2)3)†]

1) (*State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, East China Normal University, Shanghai* 200241, *China*)

2) (*NYU-ECNU Institute of Physics, New York University at Shanghai, Shanghai* 200122, *China*)

3) (*Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

(Received 14 March 2022; revised manuscript received 6 April 2022)

Abstract

Based on a Rydberg-electromagnetically-induced-transparency (Rydberg-EIT) system, an electromagnetically induced grating (EIG) with parity-time ($\mathcal{PT}$) symmetry is realized. The formation of solitons before the probe laser field reaching the EIG as well as its deflection when passing through the EIG are both investigated. It is found that due to the enhanced nonlinear optical effect of the Rydberg-EIT system, stable optical soliton can be formed with a very weak input light energy. In addition, it is found that by changing the gain/absorption coefficient of EIG, the period of EIG, and the nonlocality degree of optical Kerr nonlinear of the system, the deflection degree of the optical soliton can be effectively changed and manipulated. The research results of this work can provide a theoretical basis for the future applications of $\mathcal{PT}$-symmetric EIG and may be useful in the fields of all-optical manipulation and optical information processing.

Keywords: Rydberg atoms, parity-time symmetry, optical solitons, light deflection

PACS: 32.80.Ee, 42.50.Gy, 42.65.Tg **DOI:** 10.7498/aps.71.20220456

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11974117) and the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2017YFA0304201).

† Corresponding author. E-mail: chang@phy.ecnu.edu.cn

专题: 非厄米物理前沿

非厄米线性响应理论及其应用*

潘磊†

(清华大学高等研究院, 北京 100084)

(2022 年 5 月 2 日收到; 2022 年 6 月 19 日收到修改稿)

线性响应理论是现代物理实验尤其是量子物态测量实验的理论基础, 其核心是将物理系统的探测信号作为微扰, 利用系统在未受扰动时的关联函数来刻画物理可观测量的响应. 半个多世纪以来, 基于封闭量子系统的线性响应理论在量子物态测量实验上取得了巨大的成功. 随着超冷原子实验在光场与系统相互作用精确操控方面的快速进展, 近年来高精度的冷原子实验已经具备研究耗散量子多体系统的条件, 新奇的物理现象在实验中层出不穷, 这使得国内外研究者对量子开放系统及其非厄米物理的研究与日俱增. 基于此, 我们发展了一个量子开放系统的线性响应理论——非厄米线性响应理论. 该理论将耗散带来的非厄米效应与量子噪声作为外部探测输入来探测量子系统的性质, 并将实验可观测量的含时演化与系统未受扰动状态时的关联函数及其谱函数联系了起来, 提供了区分正常物态和奇异物态的一种新手段, 所得到的结果与最近冷原子系统实验的结果高度吻合. 本文介绍了非厄米线性响应理论, 并讨论该理论在量子多体系统以及具有时间反演对称性的量子系统中的应用.

关键词: 非厄米, 线性响应理论, 量子多体系统, 时间反演对称性

PACS: 03.65.Yz, 03.65.Vf, 05.70.Jk, 31.15.xp **DOI:** 10.7498/aps.71.20220862

1 引言

非平衡态物理尤其是非平衡态动力学是物理学中古老而经久不衰的研究主题. 在量子系统中有两类典型的非平衡动力学过程: 一类是封闭系统的非平衡动力学, 此类过程描述的是系统本身从非平衡态弛豫到平衡态的动力学演化; 另一类是开放系统中的量子耗散动力学, 此类过程描述的是一个与环境热库相互作用的量子系统趋于稳态的动力学演化. 与平衡态物理不同, 量子多体系统中的非平衡动力学演化原则上涉及系统所有的自由度, 这使得量子多体非平衡动力学成为当今物理学中的一大挑战. 近年来, 得益于冷原子实验在精密计时技术与测量手段方面的进步, 高精度的冷原子实验已经具备了研究封闭系统和开放系统的非平衡动力学的条件, 并发现了许多新奇的物理现象, 冷原子系统逐渐成为非平衡动力学方面研究的理想平台[1–10], 也使得量子耗散及其非厄米物理在近几年来受到国内外研究者越来越多的研究与关注[11,12]. 通过对外部光场与系统耦合的精确操控, 实验上成功实现了诸多量子开放系统, 并测量了几种典型的量子耗散动力学演化, 为非平衡动力学的理论研究提供了新的机遇和挑战. 2020 年, 法国巴黎高师 Brossel 实验室的 Gerbier 研究组[13] 通过精确调控激光场与光晶格系统中玻色子的耦合, 研究了二维 Bose-Hubbard 模型在不同相互作用强度下的两体耗散动力学, 他们发现随着粒子之间相互作用的增强, 在动量分布的宽度变化中出现了亚扩散 (subdiffusion) 现象, 并且在动量分布峰值的演化中出现了反常的非指数衰减行为. 针对这些新奇的实验现象, 基于量子物态实验中广泛运用的线性响

* 北京卓越青年科学家计划和中国博士后基金 (批准号: 2020M680496) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: panlei@mail.tsinghua.edu.cn

应理论, 我们提出了将耗散作为外部输入的量子开放系统版本的响应理论, 并将其命名为"非厄米线性响应理论"[14].

本文首先对非厄米线性响应理论做简单介绍, 然后利用该理论解释耗散二维 Bose-Hubbard 模型中的实验现象, 给出一维相互作用量子气体中的预言, 并应用于具有时间反演对称性保护的量子系统.

2 非厄米线性响应理论简介

测量一个系统的物理性质时, 通常的做法是给待测系统施加一个扰动, 然后探测系统对扰动是如何响应的. 这个外加的扰动强度在能够观测到信号的前提下要尽量小, 以保证系统本身的物理性质不被破坏. 线性响应理论的精神就在于此. 设系统在外场作用下的总哈密顿量为

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \hat{\boldsymbol{H}}_0 + \hat{\boldsymbol{H}}_{\text{ext}}(t), \tag{1}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{H}}_0$ 是系统未受扰动的哈密顿量, $\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{ext}}(t) = \sum_j f_j(t)\hat{O}_j$ 为微扰哈密顿量, $\hat{O}_j$ 表示系统与外场耦合的算符, $f_j(t)$ 为含时耦合函数, 下标 j 表示与系统耦合的模式. 按照线性响应的精神, 对外场做微扰处理. 首先引入时间演化算符:

$$\hat{\boldsymbol{U}}(t,t_0) = \hat{\boldsymbol{T}}\exp\left(-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{ext}}(t')\,\mathrm{d}t'\right), \tag{2}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 为编时算符, 在相互作用绘景下, 密度矩阵的含时演化为

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(t) = \hat{\boldsymbol{U}}(t,t_0)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}_0\hat{\boldsymbol{U}}^{-1}(t,t_0). \tag{3}$$

对于系统的某个可观测量算符 $\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}$, 其平均值为

$$\begin{aligned}\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t)\rangle &= \operatorname{Tr}\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t) = \operatorname{Tr}\hat{\boldsymbol{\rho}}_0\hat{\boldsymbol{U}}^{-1}(t)\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t)\hat{\boldsymbol{U}}(t)\\ &= \operatorname{Tr}\hat{\boldsymbol{\rho}}_0\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t) + \mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\left[\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{ext}}(t'),\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t)\right] + \dots\right)\\ &\approx \left\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t)\right\rangle_0 + \mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\left\langle\left[\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{ext}}(t'),\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t)\right]\right\rangle_0,\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{ext}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{H}}_0 t}\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{ext}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{H}}_0 t}$ 为相互作用绘景下的算符演化. 这里将微扰哈密顿量近似到了线性阶. 定义可观测量的响应 $\delta\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}\rangle = \langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}\rangle - \langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}\rangle_0$, 则有

$$\begin{aligned}\delta\left\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}\right\rangle = \mathrm{i}\sum_j\int_{t_0}^{+\infty}&\mathrm{d}t'\theta(t-t')\\ &\times\left\langle\left[\hat{\boldsymbol{O}}_j(t'),\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t)\right]\right\rangle_0 f_j(t'),\end{aligned} \tag{5}$$

这就是线性响应理论的公式[15], 也称为久保公式 (Kubo formula). (5) 式表明, 近似到外场扰动的线性阶, 系统的响应正比于推迟格林函数 $\mathrm{G}(t,t') = \theta(t-t')\times\langle[\hat{\boldsymbol{O}}_j(t'),\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t)]\rangle_0$. 线性响应理论是实验测量的基础, 它的重要意义在于从系统中测量到的响应被包含在了系统的关联函数中. 这种关联在量子物态的测量中尤为显著. 常见的谱学测量, 如非弹性中子散射信号由系统的自旋-自旋关联函数决定; 而输运测量, 如电导的测量由流-流关联函数决定等[16]. 以上是传统的针对封闭系统的线性响应理论, 现在介绍非厄米线性响应理论. 对于一个与环境自由度耦合的开放系统, 其受到的影响不再是一个简单的含时外场 (如 (1) 式的哈密顿量), 而是一个由如下非厄米哈密顿量描述的系统:

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \hat{\boldsymbol{H}}_0 + \sum_j\left(-\mathrm{i}\gamma_j\hat{\boldsymbol{O}}_j^\dagger\hat{\boldsymbol{O}}_j + \hat{\boldsymbol{O}}_j^\dagger\hat{\xi}_j + \hat{\xi}_j^\dagger\hat{\boldsymbol{O}}_j\right), \tag{6}$$

其中 $\gamma_j\hat{\boldsymbol{O}}_j^\dagger\hat{\boldsymbol{O}}_j$ 表示系统受到的耗散 ($\gamma_j \geqslant 0$ 为耗散强度), $\hat{\boldsymbol{O}}_j^\dagger\hat{\xi}_j + \hat{\xi}_j^\dagger\hat{\boldsymbol{O}}_j$ 表示系统受到的噪声[17]. $\hat{\xi}(t)$, $\hat{\xi}^\dagger(t)$ 称为朗之万噪声 (Langevin noise)[18], 满足以下性质:

$$\begin{aligned}&\left\langle\hat{\xi}_j(t)\hat{\xi}_\ell^\dagger(t')\right\rangle_{\text{noise}} = 2\gamma_j\delta_{j\ell}\delta(t-t'),\\ &\left\langle\hat{\xi}_j^\dagger(t)\hat{\xi}_l^\dagger(t')\right\rangle_{\text{noise}} = \left\langle\hat{\xi}_j(t)\hat{\xi}_\ell(t')\right\rangle_{\text{noise}}\\ &= \left\langle\hat{\xi}_j^\dagger(t)\hat{\xi}_\ell(t')\right\rangle_{\text{noise}} = \left\langle\hat{\xi}_j^\dagger(t)\right\rangle_{\text{noise}}\\ &= \left\langle\hat{\xi}_j(t)\right\rangle_{\text{noise}} = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\langle\cdot\rangle_{\text{noise}}$ 表示对噪声做平均. 值得指出的是, 用来描述量子开放系统的哈密顿量不能是仅仅包含耗散部分 ($\gamma_j\hat{\boldsymbol{O}}_j^\dagger\hat{\boldsymbol{O}}_j$) 的非厄米哈密顿量, 因为此时产生湮灭算符的等时对易子 $[\hat{\boldsymbol{a}}(t),\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(t)] = \mathrm{e}^{-\gamma t}$ 不再满足正则对易关系 $[\hat{\boldsymbol{a}}(t),\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(t)] = 1$, 而朗之万噪声的引入能保证正则对易关系的成立. 对于任意可观测量算符 $\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}$, 其时间演化为

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_H(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{H}}^\dagger t}\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{H}}t}. \tag{8}$$

与之前的讨论类似, 引入时间演化算子

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}(t) = \hat{\boldsymbol{T}}\left[\exp\left(-\mathrm{i}\int_0^t\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{diss}}(t')\boldsymbol{d}t'\right)\right], \tag{9}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{diss}} = \sum_j\left(-\mathrm{i}\gamma\hat{\boldsymbol{O}}_j^\dagger\hat{\boldsymbol{O}}_j + \hat{\boldsymbol{O}}_j^\dagger\hat{\xi}_j + \hat{\xi}_j^\dagger\hat{\boldsymbol{O}}_j\right)$. 按照线性响应理论的精神, 将 $\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{diss}}$ 视作微扰

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{W}}_H(t) = \\
&\hat{\mathcal{W}}(t) - \sum_j \gamma_j \int_0^t \{\hat{\mathcal{W}}(t), \hat{\mathcal{O}}_j^\dagger(t')\hat{\mathcal{O}}_j(t')\}\mathrm{d}t' \\
&- \mathrm{i}\sum_j \int_0^t \left[\hat{\mathcal{W}}(t), \hat{\mathcal{O}}_j^\dagger(t')\xi_j + \xi_j^\dagger\hat{\mathcal{O}}_j(t')\right]\mathrm{d}t' \\
&+ \sum_{j,\ell} \iint_0^t \left(\hat{\mathcal{O}}_j^\dagger(t')\hat{\xi}_j(t') + \hat{\xi}_j^\dagger(t')\hat{\mathcal{O}}_j(t')\right)\hat{\mathcal{W}}(t) \\
&\times \left(\hat{\mathcal{O}}_\ell^\dagger(t'')\hat{\xi}_\ell(t'') + \hat{\xi}_\ell^\dagger(t'')\hat{\mathcal{O}}_\ell(t'')\right)\mathrm{d}t'\mathrm{d}t'' + \cdots, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

对噪声做平均, 并利用关系式 (7) 式, 保留到 γ_j 的一阶, 可得

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{W}}_H(t) = \hat{\mathcal{W}}(t) + \int_0^t \sum_j \gamma_j \Big(&2\hat{\mathcal{O}}_j^\dagger(t')\hat{\mathcal{W}}(t)\hat{\mathcal{O}}_j(t') \\
&- \left\{\hat{\mathcal{W}}(t), \hat{\mathcal{O}}_j^\dagger(t')\hat{\mathcal{O}}_j(t')\right\}\Big)\mathrm{d}t'. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

对系统做系综平均 ($\langle\cdots\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_0\cdots)$), 定义可观测量的响应 $\delta\mathcal{W}(t) \equiv \langle\hat{\mathcal{W}}_H(t)\rangle - \langle\hat{\mathcal{W}}(t)\rangle$, 则有

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{W}(t) = 2\int_0^t \sum_j \gamma_j \Big\langle &\hat{\mathcal{O}}^\dagger(t')\hat{\mathcal{W}}(t)\hat{\mathcal{O}}_j(t') \\
&- \left\{\hat{\mathcal{W}}(t), \hat{\mathcal{O}}_j^\dagger(t')\hat{\mathcal{O}}_j(t')\right\}\Big\rangle\mathrm{d}t', \qquad (12)
\end{aligned}
$$

这就是非厄米线性响应公式[14]. 尽管从形式上与厄米版本的线性响应公式有所不同, 但两者的本质相同, 即系统的响应都由系统的关联函数决定. 得到这一理论公式之后, 下面将把它应用在不同的物理系统中.

3 非厄米线性响应理论在量子多体系统中的应用

本节介绍非厄米线性响应理论在量子多体系统中的应用, 包括二维 Bose-Hubbard 模型和一维相互作用量子气体.

3.1 二维 Bose-Hubbard 模型

2020 年, 法国巴黎高师的冷原子实验组测量了二维光晶格中 Bose-Hubbard 模型在两体耗散下的动量分布的耗散动力学演化, 观测到了非指数衰减和亚扩散现象. 针对其实验结果, 本文从如下的哈密顿量出发:

$$
\hat{\boldsymbol{H}} = \hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{BH}} + \sum_j \left(-\mathrm{i}\gamma\hat{n}_j^2 + \hat{n}_j^\dagger\hat{\xi}_j + \hat{\xi}_j^\dagger\hat{n}_j\right), \qquad (13)
$$

其中 $\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{BH}}$ 表示 Bose-Hubbard 模型的哈密顿量, 该模型从弱相互作用逐渐到强相互作用过程中会出现超流——Mott 绝缘体相变[19]. 这里 $\hat{\mathcal{O}}_j = \hat{\boldsymbol{n}}_j$, $\hat{\boldsymbol{n}}_j$ 代表格点 j 上的密度算符, 假设耗散强度在空间上是均匀的 $\gamma_j = \gamma$, 后面会看到这类耗散对应着系统被加热的过程. 根据非厄米线性响应理论的公式, 可以计算出动量分布 $n_{\boldsymbol{k}}(t)$ 的时间演化:

$$
\begin{aligned}
\delta n_{\boldsymbol{k}}(t) = \gamma\sum_j \bigg[&\int_0^t \mathrm{d}t' 2\left\langle\hat{n}_j^\dagger(t')\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\hat{n}_j(t')\right\rangle \\
&- \int_0^t \mathrm{d}t' \Big\langle\hat{n}_j^\dagger(t')\hat{n}_j(t')\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t) \\
&+ \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\hat{n}_j^\dagger(t')\hat{n}_j(t')\Big\rangle\bigg]. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

此时可以发现动量的响应由系统的多点关联函数决定. 通常量子多体系统中的多点关联函数是无法严格计算的, 为此采用维克分解[20], 将多点关联函数分解为两点关联函数:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\hat{n}_j^\dagger(t')\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\hat{n}_j(t')\right\rangle \\
\approx &\left\langle a_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t')\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t')\right\rangle + \left\langle\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t')\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)a_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t')\right\rangle \\
&+ \left\langle\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t')\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t')\right\rangle + \left\langle\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t')\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t')\right\rangle + \bar{n}^2 n_{\boldsymbol{k}} \\
= &\ \bar{n}\ (\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k},j}^{>}(t-t')\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k},j}^{<}(t-t')) + \bar{n}\ (\mathrm{i}G_{j,\boldsymbol{k}}^{>}(t'-t)\mathrm{i}G_{j,\boldsymbol{k}}^{<}(t'-t)) + \bar{n}^2 n_{\boldsymbol{k}} \\
&+ \bar{n}(\mathrm{i}G_{j,\boldsymbol{k}}^{<}(t'-t)\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k},j}^{<}(t-t')) + (1+\bar{n})(\mathrm{i}G_{j,\boldsymbol{k}}^{>}(t'-t)\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k},j}^{>}(t-t')),
\end{aligned}
$$

其中$G_{\boldsymbol{k}}^{>}(t_1-t_2)\equiv-\mathrm{i}\left\langle\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t_1)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t_2)\right\rangle$, $G_{\boldsymbol{k}}^{<}(t_1-t_2)\equiv-\mathrm{i}\left\langle\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t_1)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t_2)\right\rangle$, 以及平均占据数$\langle n_i\rangle_\beta=\bar{n}$. 同样可计算出

$$\begin{aligned}&\left\langle\hat{n}_j^{\dagger}(t')\hat{n}_j(t')\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\right\rangle\\&\approx(2\bar{n}+1+2\bar{n})\left(\mathrm{i}G_{j,\boldsymbol{k}}^{>}(t'-t)\mathrm{i}G_{j,\boldsymbol{k}}^{<}(t'-t)\right)\\&\quad+\bar{n}^2n_{\boldsymbol{k}},\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\left\langle\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\hat{n}_j^{\dagger}(t')\hat{n}_j(t')\right\rangle\\&\approx(2\bar{n}+1+2\bar{n})\left(\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k},j}^{>}(t-t')\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k},j}^{<}(t-t')\right)\\&\quad+\bar{n}^2n_{\boldsymbol{k}}.\end{aligned}\tag{17}$$

将 (15)—(17) 式代入 (14) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\delta n_{\boldsymbol{k}}(t)\\&\approx\gamma(2\bar{n}+1)\int_0^t\left(\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k}}^{<}(t-t')-\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k}}^{>}(t'-t)\right)\\&\quad\times\left(\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k}}^{>}(t-t')-\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k}}^{<}(t'-t)\right)\mathrm{d}t'\\&\quad+\gamma\int_0^t\left[\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k}}^{>}(t'-t)\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k}}^{>}(t-t')\right.\\&\quad\left.-\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k}}^{<}(t'-t)\mathrm{i}G_{\boldsymbol{k}}^{<}(t-t')\right]\mathrm{d}t'\\&\approx-2\gamma(n_{\boldsymbol{k}}(0)-\bar{n})\int_0^t g_{\boldsymbol{k}}(t')g_{\boldsymbol{k}}(-t')\mathrm{d}t',\end{aligned}\tag{18}$$

这里$g(\boldsymbol{k},t)\equiv\int\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathcal{A}_{\mathrm{k}}(\omega)$, $\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(\omega)$为谱函数. 在准静态近似下可以得到:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta n_{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{d}t}=-2\gamma f(\boldsymbol{k},t)\Delta n_{\boldsymbol{k}}(t),\tag{19}$$

其中$\Delta n_{\boldsymbol{k}}=n_{\boldsymbol{k}}(t)-\bar{n}, f(\boldsymbol{k},t)=g(\boldsymbol{k},t)g(\boldsymbol{k},-t)$. 由此可得动量分布的演化:

$$n_{\boldsymbol{k}}(t)-n_{\boldsymbol{k}}(0)=-\left(1-\mathrm{e}^{-2\gamma\mathcal{F}(\boldsymbol{k},t)}\right)\Delta n_{\boldsymbol{k}}(0),\tag{20}$$

其中$\mathcal{F}(\boldsymbol{k},t)=\displaystyle\int_0^t f(\boldsymbol{k},t')\mathrm{d}t'$. 可以看出系统动量分布的稳态是均匀分布$n_{\boldsymbol{k}}(t\to\infty)=\bar{n}$, 意味着系统最终会被加热到无穷高温. 更重要的是, 动量分布的耗散动力学演化与系统的谱函数有关, 而谱函数的形式与系统所处的量子相有关. 对于二维 Bose-Hubbard 模型, 当系统处在超流相时, 系统具有良好定义的准粒子激发, 谱函数具有如下形式的洛伦兹型:

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma_{\boldsymbol{k}}}{(\omega-\varepsilon_{\boldsymbol{k}})^2+\Gamma_{\boldsymbol{k}}^2},\tag{21}$$

其中$1/\Gamma_{\boldsymbol{k}}$代表准粒子的寿命. 此时,

$$f(\boldsymbol{k},t)=\mathrm{e}^{-2t\Gamma_{\boldsymbol{k}}},\ \mathcal{F}(\boldsymbol{k},t)=\frac{1-\mathrm{e}^{-2t\Gamma_{\boldsymbol{k}}}}{2\Gamma_{\boldsymbol{k}}},\tag{22}$$

当准粒子寿命足够长时$\Gamma_{\boldsymbol{k}}\to0$ ($1/\Gamma_{\boldsymbol{k}}$大于所有的时间尺度), 则$\mathcal{A}(\omega)=\delta(\omega-\varepsilon_{\boldsymbol{k}})$, $\mathcal{F}(\boldsymbol{k},t)=t$, 这将给出传统的指数衰减行为:

$$n_{\boldsymbol{k}}(t)=n_{\boldsymbol{k}}(0)\mathrm{e}^{-2\gamma t}+\bar{n}\left(1-\mathrm{e}^{-2\gamma t}\right).\tag{23}$$

理论结果表明, 对于处在准粒子激发的系统, 其耗散动力学是指数衰减的, 这就解释了为什么指数衰减在自然界如此常见, 因为自然界中的绝大多数量子物态可以被准粒子激发描述, 如费米液体、玻色超流体等. 而冷原子实验已具备精确测量谱函数的技术条件[21], 基于时间飞行 (time-of-flight) 测量和射频谱 (radiofrequency spectroscopy) 技术[22–25], 实验可以精确测出动量和频率依赖的谱函数$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(\omega)$. 以此可从谱学测量上为我们的理论预言提供实验验证.

当系统处于量子临界相时[26], 系统的激发不再是良好定义的准粒子激发, 而是集体激发, 谱函数的解析性质从极点变为割线[27]:

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(\omega)\propto\frac{\Theta(\omega-\varepsilon_{\boldsymbol{k}})}{(\omega-\varepsilon_{\boldsymbol{k}})^{\eta}},\tag{24}$$

其中$\Theta(x)=1$, 当$x>0$时; $\Theta(x)=0$, 当$x<0$时. η代表系统在量子临界相的临界指数. 此时可得:

$$n_{\boldsymbol{k}}(t)=n_{\boldsymbol{k}}(0)\mathrm{e}^{-(t/\tau_0)^{2\eta-1}}+\bar{n}\left[1-\mathrm{e}^{-(t/\tau_0)^{2\eta-1}}\right],\tag{25}$$

这种形式的衰减 ($\mathrm{e}^{-(t/\tau_0)^{2\eta-1}}$) 称为伸展指数衰减 (stretched exponential decay), 广泛存在于经典玻璃系统中, 用来表征玻璃态中的长时间弛豫过程[28,29]. 根据动量分布函数, 可以得出动量宽度随时间的演化行为$\left(\langle k^2\rangle_t=\int k^2n_{\boldsymbol{k}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\Big/\int n_{\boldsymbol{k}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\right)$:

$$\langle k^2\rangle_t-\langle k^2\rangle_0=\left(1-\mathrm{e}^{-2\gamma\mathcal{F}(t)}\right)\left(\langle k^2\rangle_\infty-\langle k^2\rangle_0\right).\tag{26}$$

基于上面相同的分析, 可以发现当系统处于超流相时, 动量宽度在短时区域属于正常的扩散行为: $\Delta\langle k^2\rangle_t\sim\sqrt{t}$; 而在量子临界区域, 动量宽度的变化则出现反常的亚扩散行为: $\Delta\langle k^2\rangle_t\sim t^{\eta-\frac{1}{2}}$. 我们即将看到, 这一理论可为实验结果提供一个统一的解释.

如图 1(a) 所示, 我们发现理论曲线无论是动量高度还是动量分布的宽度都与实验数据符合得很好, 并且高度和宽度可以被同一个函数描述.

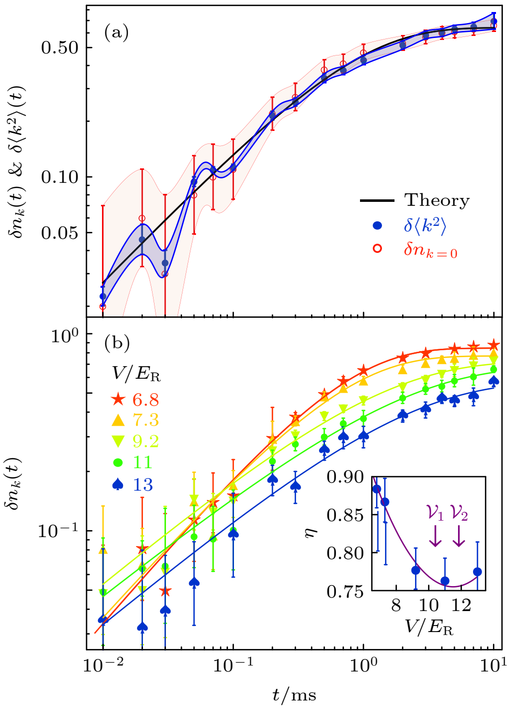


图 1 二维 Bose-Hubbard 模型耗散动力学实验[13] 和理论对比图 (a) 在固定光晶格势阱深度下的动量分布的峰值和宽度随时间的改变, 实线是理论公式拟合的结果; (b) 在不同光晶格势阱深度下的动量峰值随时间的演化图 (以 $\delta n_{\boldsymbol{k}=0}(0)$ 为单位). 实线是理论公式拟合结果, 插图画出了每条曲线对应不同的临界指数 η, 其中误差棒来源于标准的拟合误差 (95% 的置信区间). 两个箭头标注的分别是填充因子 $\nu=1$ 和 $\nu=2$ 的超流-Mott 绝缘体转变的临界值. 所有的实验数据 (包括误差棒) 均取自实验文章[13]

Fig. 1. Experimental data reported in Ref. [13] versus theory on dissipative two-dimensional Bose-Hubbard Model: (a) Two sets of data $\delta n_{\boldsymbol{k}=0}(t)$ and $\delta\langle k^2\rangle(t)$ perfectly coincide with each other by a properly chosen scaling factor. Solid line is fitting with our theory. (b) Fit experimental data of $\delta n_{\boldsymbol{k}=0}(t)$ (scaled by $\delta n_{\boldsymbol{k}=0}(0)$) at different lattice depths with our theory, which yields η for different lattice depths shown in the inset where the error bar comes from the standard fitting error (95% confidence interval). Two arrows label the critical value for superfluid-Mott insulator transition for filling number $\nu=1$ and $\nu=2$, respectively. All experimental data are taken from Ref. [13].

不仅如此, 在不同光晶格势阱深度下的实验数据可以估计出临界指数 η, 如图 1(b) 所示. 值得指出的是, 对于二维 Bose-Hubbard 模型, 理论上很难得到精确的 η 值[27], 对于量子蒙特卡罗的计算也是一个挑战[30]. 通过理论公式与实验数据的对比拟合, 我们发现随着势阱深度的增加, 系统从超流区域到 Mott 绝缘体转变的过程中临界区域 η 先减小后增大, 这一结果解释了实验在弱势阱区域观测到的指数衰减和正常扩散行为, 以及在深势阱区域观察到的非指数衰减和亚扩散现象. 而且临界指数 η 在超流-Mott 绝缘体转变的临界区域达到最低值 (约为 $3/4$), 此时系统动量分布以 $\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ 的形式衰减, 同时动量宽度出现 $t^{1/4}$ 形式的亚扩散. 这一结果也在实验中得到了验证.

因此, 基于理论对实验现象的诠释, 实验出现的非指数衰减和反常的亚扩散行为起源于系统在量子临界区域的集体激发. 更重要的是, 非厄米线性响应理论提供了一种通过耗散动力学在实验上区分正常物态 (准粒子激发) 和量子临界态 (集体激发) 的手段, 利用实验结果确定系统的临界指数, 对量子物态的实验测量具有重要意义.

3.2 一维相互作用量子气体

在 3.1 节可以看到非厄米线性响应理论在耗散二维 Bose-Hubbard 模型中的应用并很好地解释了实验结果. 但一个成功的理论不仅能够解释已有的实验, 还应该具有预言能力. 通过前面的讨论可以发现, 理论预言的反常动力学行为与系统的谱函数的奇异行为有关. 因此, 只要找到类似于 (25) 式的谱函数即可得到这种反常动力学. 我们知道, 一维相互作用系统中费米液体理论失效, 其低能激发不再是准粒子激发, 而是集体激发, 此时谱函数具有类似 (25) 式的幂律形式[31]. 基于这一点, 我们将非厄米系统应用于严格可解的一维相互作用量子气体当中, 精确地计算出临界指数, 以此来预言此类系统动量分布的耗散动力学演化.

以一维相互作用玻色气体 (Lieb-Liniger 模型) 为例[32], 系统的哈密顿量为

$$H_{\rm s}=-\sum\nolimits_j\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+2g\sum\nolimits_{i,j}\delta\left(x_i-x_j\right),\qquad(27)$$

其中 g 为相互作用强度, 这里令 $\hbar=2m=1$. 这一模型的低能物理可以被如下形式的有效哈密顿量描述:

$$H_{\rm LL}=\int\mathrm{d}x\left[\frac{\pi v_{\rm s}K}{2}\varPi^2+\frac{v_{\rm s}}{2\pi K}\left(\partial_x\phi\right)^2\right],\qquad(28)$$

其中正则动量 $\varPi$ 与相位 ϕ 满足标准的玻色对易关系; K 和 $v_{\rm s}$ 分别为 Luttinger 参数和声速, 刻画了系统低能和长波极限下的行为. 根据 Luttinger 液体理论, 一维 Bose 气体的谱函数一般写为如下形式[33]:

$$A(k,\omega)\sim\frac{\theta\left(\omega-\xi_k\right)}{\left(\omega-\xi_k\right)^{1-\frac{1}{4K}}},\qquad(29)$$

亦即 $\eta=1-1/(4K)$. 这意味着一旦求出 Luttinger 参数, 就可以确定临界指数的大小, 而 K 的精确解

可以通过 Bethe ansatz 方法得到. 写出 Lieb-Liniger 玻色气体的 Bethe ansatz (BA) 方程[34],

$$\rho(k)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\mathrm{d}q\rho(q)\frac{2g}{g^2+(k-q)^2}=\frac{1}{2\pi}, \tag{30}$$

其中 Λ 表示动量截断, $\rho(k)$ 为准动量的密度分布, 满足条件 $\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\mathrm{d}k\rho(k)=\frac{N}{L}=n$ (N 是总粒子数, L 为系统长度). 系统的基态能量为

$$E_0=L\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\mathrm{d}k\rho(k)k^2. \tag{31}$$

为方便起见, 对系统的参数进行无量纲化:

$$k=\Lambda x,\quad g=\Lambda\lambda,\quad \rho(\Lambda x)=\tilde{g}(x), \tag{32}$$

此时 BA 方程重新表示为

$$\tilde{g}(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\tilde{g}(y)\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-y)^2}=\frac{1}{2\pi}, \tag{33}$$

同时满足 $\frac{g}{n}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\tilde{g}(x)=\lambda$. 一旦将 BA 方程求解, 立即可得无量纲的基态能 $e(\gamma)\equiv\frac{E_0}{Nn^2}=\left(\frac{\tilde{\gamma}}{\lambda}\right)^3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\tilde{g}(x)x^2$ 以及其他物理量作为无量纲相互作用参数 $\tilde{\gamma}=\frac{g}{n}$ 的函数, 其中 Luttinger 参数为[35]

$$K=\frac{\pi}{\sqrt{3e(\tilde{\gamma})-2\tilde{\gamma}\frac{\mathrm{d}e(\tilde{\gamma})}{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}+\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^2\frac{\mathrm{d}^2e(\tilde{\gamma})}{\mathrm{d}\tilde{\gamma}^2}}}. \tag{34}$$

由此可将得到的临界指数 η 代入动量分布的响应公式 (25), 从而得到动量分布在整个相互作用范围内的耗散动力学演化. 在精确求解 BA 方程之前, 先来看系统在强弱相互作用极限的行为. 在弱相互作用极限, 无量纲能量可展开为

$$e(\tilde{\gamma})=\left(1-\frac{4}{3\pi}\sqrt{\tilde{\gamma}}+O(\tilde{\gamma})\right),\quad \gamma\gg 1, \tag{35}$$

则 Luttinger 参数和临界指数的渐进行为是

$$K\approx\frac{\pi}{\sqrt{\tilde{\gamma}}}\left(1-\frac{\sqrt{\tilde{\gamma}}}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\eta\approx 1-\frac{\sqrt{\tilde{\gamma}}}{4\pi}+\frac{\tilde{\gamma}}{16\pi^2},\quad \tilde{\gamma}\ll 1. \tag{36}$$

而在强排斥相互作用极限 (Tonks-Giradeau 极限) 下

$$e(\gamma)=\frac{\pi^2}{3}\left(1-\frac{4}{\tilde{\gamma}}+\frac{12}{\tilde{\gamma}^2}+O\left(\tilde{\gamma}^{-3}\right)\right),\quad \tilde{\gamma}\gg 1. \tag{37}$$

Luttinger 参数和临界指数的渐进形式是

$$K\approx 1+\frac{4}{\tilde{\gamma}}+\frac{4}{\tilde{\gamma}^2},\quad \eta\approx\frac{3}{4}+\frac{1}{\tilde{\gamma}}-\frac{3}{\tilde{\gamma}^2},\quad \tilde{\gamma}\gg 1. \tag{38}$$

此时可以发现, 在 Tonks-Giradeau 极限下, 系统在两体耗散时的动量分布会以如下函数形式随时间演化:

$$n_{\boldsymbol{k}}(t)=n_{\boldsymbol{k}}(0)\mathrm{e}^{-\sqrt{t/\tau_0}}+\bar{n}\left(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{t/\tau_0}}\right). \tag{39}$$

并且给出 $t^{\frac{1}{4}}$ 形式的亚扩散行为. 进一步, 通过精确求解 BA 方程, 可以得到整个相互作用区间的临界指数, 如图 2 插图所示, 临界指数 η 随相互作用的增加而单调递减, 最终趋于 3/4.

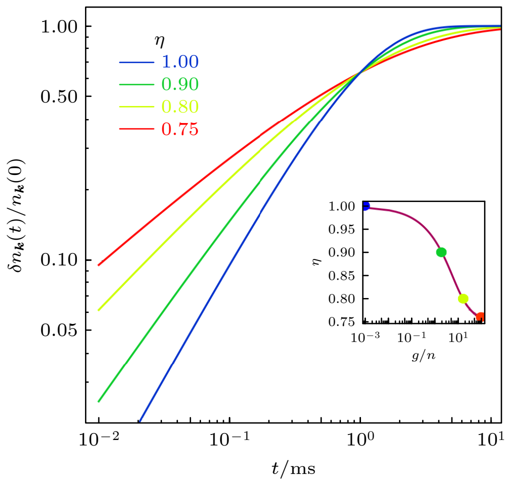


图 2 一维相互作用玻色气体 (Luttinger 液体) 中的动量分布 $\delta n_{\boldsymbol{k}}(t)$ 从弱相互作用极限 (蓝线) 到强相互作用极限 (红线) 的含时演化的理论预测. 这里所有的曲线均取 $\tau_0=1.0$ ms. 插图表示的是临界指数 η 随相互作用强度的变化曲线

Fig. 2. Prediction of $\delta n_{\boldsymbol{k}}(t)$ for a one-dimensional Bose gas (Luttinger liquid) from the weakly interacting limit (blue line) to the Tonks limit (red line). Here $\tau_0=1.0$ ms is fixed for all plots. The inset shows how η changes with the one-dimensional interaction parameter g/n.

图 2 给出了 4 个不同相互作用强度下的动量演化曲线, 可以看出随着相互作用的增强, 临界指数 η 逐渐下降, 使得动量分布的衰减逐渐减慢. 由于实验已经完成了关于 Lieb-Linger 模型的临界行为的精确测量[36], 因此这一结果提供了清晰的理论预言并可以用当今的超冷原子实验进行检验.

还可以将非厄米线性响应理论应用于一维费米气体当中, 对于无自旋或具有 $SU(2)$ 对称性的两分量费米气体, 临界指数 $\eta=3/2-1/4\left(K+K^{-1}\right)$[37], 在强排斥极限下 ($K=1/2$), $\eta=7/8$, 此时系统将会出现 $\mathrm{e}^{-(t/\tau)^{3/4}}$ 型的衰减和 $\Delta k\sim t^{3/8}$ 形式的亚扩散, 这种不同于玻色气体的指数可以作为实验验证费米系统耗散动力学的证据.

到此, 可以看到非厄米线性响应理论不仅成功地解释了实验, 还提出了进一步的理论预言. 读者可以很容易想到, 任何没有准粒子激发的非正常量子物态都可以出现非指数的耗散动力学行为, 如 Luttinger 液体、非费米液体等. 我们的非厄米线性响应理论最近受到一些理论研究者的关注, 并被推广到更一般的情况[38], 同时也促使了关于非厄米 Luttinger 液体等非厄米量子多体理论的研究[39–41]. 此外, 这一响应理论还被用来研究黑洞的信息丢失佯谬[42,43].

4 时间反演对称性保护的量子系统

对称性是 20 世纪物理学的主旋律之一, 贯穿于现代物理学的各个领域. 根据著名的 Noether 定理, 如果 (经典) 系统有连续的对称性, 则一定有相对应的守恒量①. 对称性在量子物理当中显示出了巨大的威力, 对称性决定相互作用, 对称性自发破缺等观念早已深入人心. 在凝聚态物理中, 对称性在相和相变中扮演着重要角色. 根据 Landau 理论, 物质的相可以用局域序参量来描述, 而局域序参量从零 (无序相) 变到非零 (有序相) 则对应于系统的对称性发生了自发破缺. 因此, 理论上可以用不同的对称群来区分不同的物相. 描述不同物相之间相变的 Ginzburg-Landau 理论对相和相变的描述是普适的, 只与系统的对称性有关, 而不依赖于其微观的细节. 这一点也显示出了对称性的巨大威力.

我们知道在量子力学中, 如果一个系统具有某种对称性, 那么系统的能级往往会具有简并. 如我们熟知的氢原子中的旋转对称性导致的能级简并, 费米子系统中的时间反演对称性导致的 Kramers 简并等. 如果对系统外加一个微扰, 假如微扰也具有导致能级简并的对称性, 那么能级仍是简并的; 假如微扰不具有这种对称性 (对称性更低), 那么相应的能级简并也会被破除. 这一基本的事实来源于 Schur 引理[44]: 如果一个对称操作的矩阵表示与某个幺正群的所有群元的不可约表示矩阵都对易, 那么该矩阵一定正比于单位矩阵.

根据量子力学中的 Wigner 定理, 量子系统的对称变换有两类, 一类是幺正对称, 另一类是反幺正对称. 对于反幺正对称, 也有相应的 Schur 引理[45]: 如果一个厄米矩阵与某个幺正群的所有群元的不可约表示矩阵都对易, 那么该矩阵一定正比于单位矩阵. 也就是说, 对于反幺正对称性导致的简并 (如时间反演对称性导致的 Kramers 简并), 如果能级简并不被外加微扰破除的话, 除了要求微扰具有该对称性之外还需要微扰算符必须是厄米的. 将会看到, 反幺正对称性与幺正对称性的这一差别在物理上会产生巨大的不同 (这一点最先由 McGinley 和 Cooper 在文献 [46] 中指出).

本节以量子自旋霍尔效应和相互作用拓扑态为例, 将非厄米线性响应理论应用于具有时间反演对称性 (反幺正对称性) 的系统当中.

4.1 非厄米线性响应理论在量子自旋霍尔效应中的应用

在传统的凝聚态物理中, 物质的属性主要由两个理论所描述: 其一是能带论和费米液体理论, 其二是相和相变的对称性破缺理论. 在 20 世纪 80 年代之前, 这两个理论几乎描述了所有的凝聚态物质. 前文提到, 物质的相及其分类可以由 Ginzburg-Landau 理论描述. 然而自 80 年代起, 伴随着整数霍尔效应、分数量子霍尔效应、铜氧化物高温超导现象的出现, 人们陆续发现了一系列超出 Landau 范式的量子物态, 这些奇异的量子物态的出现并没有伴随着对称性的自发破缺, 不能通过局域序参量来刻画. 如整数量子霍尔效应中的量子化电导平台由体态的拓扑数刻画, 当霍尔电导值从一个整数变到另一个整数时, 系统并没有发生对称性破缺, 而是伴随着拓扑数的改变. 而拓扑数的变化需要体态能隙的关闭, 因而量子霍尔电导平台具有鲁棒性, 不会被外界杂质、缺陷等因素所破坏. 随后, 在 1988 年, Haldane[47] 提出了一个六角晶格模型 (Haldane 模型), 在没有外磁场的情况下也可以发生量子霍尔效应, 即量子反常霍尔效应. 与整数量子霍尔效应一样, 量子反常霍尔效应的出现同样破坏了时间反演对称性. 而时间反演对称性会导致重要的物理结果, 在 2005 年和 2006 年, Kane 和 Mele[48] 以及 Bernevig 和张首晟[49] 进一步考虑自旋轨道耦合效应, 独立地提出了实现量子自旋霍尔效应的模型. 量子自旋霍尔效应中量子化的电导受到时间反演对称性的保护. 理论研究表明, 在没有磁性杂质等

① 在量子力学层面上 Noether 定理可能会失效, 造成守恒被破坏的物理机制称为"量子反常"(quantum abnormal).

破坏时间反演对称性因素干扰的情况下, 实验可以在足够纯净的样品上观测到自旋霍尔效应的量子化电导平台. 然而, 事情远没有理论想象得那么简单. 图 3是实验在 HgTe 量子阱中测量到的自旋霍尔电导的结果[50], 可以看出在线性标度下电导的测量值并未明显地出现量子化的值 ($G=2e/h^2$), 尽管实验样品具有很高的纯度和高迁移率. 而我们知道, 早在 20 世纪 80 年代实验就能够非常清晰地观测到量子霍尔效应的量子化电导了, 但是在半导体工艺发展二十多年之后, 实验并未观测到量子自旋霍尔效应中的量子化电导 (至少远未达到量子霍尔效应的精度), 这似乎造成了一个疑难, 本节试图从理论上来解释这一疑难出现的物理原因.

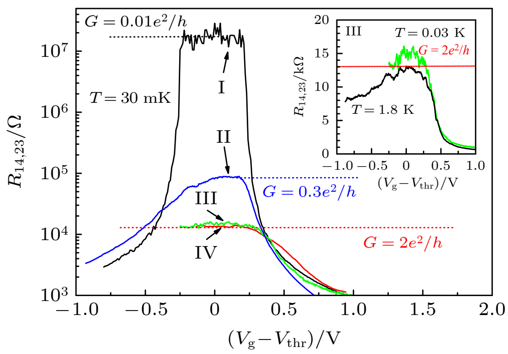


图 3 实验测量纵向四端电阻随门电压变化曲线 (对数坐标). 插图为线性坐标. 图片取自文献 [50]

Fig. 3. The longitudinal four-terminal resistance as a function of the gate voltage. The inset shows as a linear scale. The figure is copied from the Ref. [50].

首先, 需要指出的是, 与量子霍尔效应不同的是, 量子自旋霍尔效应的拓扑态是受时间反演对称保护的 Kramers 简并态, 而时间反演对称操作是反幺正的, 这一点是理论解释的关键.

下面以著名的 Kane-Mele 模型为例来说明量子自旋霍尔效应的量子化电导为什么那么脆弱. Kane-Mele 模型是定义在二维蜂窝格子上的哈密顿量[48]:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{KM}}=&J\sum_{\langle i,j\rangle,s}\hat{c}_{i,s}^{\dagger}\hat{c}_{j,s}+\mathrm{i}\lambda_{\mathrm{SO}}\sum_{\langle\langle i,j\rangle\rangle,s,s'}\nu_{ij}\hat{c}_{i,s}^{\dagger}\sigma_{ss'}^{z}\hat{c}_{j,s'}\\&+\mathrm{i}\lambda_{\mathrm{R}}\sum_{\langle i,j\rangle,s,s'}\hat{c}_{i,s}^{\dagger}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{d}_{ij})_{ss'}^{z}\hat{c}_{j,s'}\\&+\lambda_{\nu}\sum_{i,s}\xi_{i}\hat{c}_{i,s}^{\dagger}\hat{c}_{i,s},\end{aligned}\tag{40}$$

其中 i, j是格点指标; s, s'代表自旋指标; $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$表示 Pauli 矩阵. 哈密顿量中第一项是最近邻的跃迁项 (跃迁强度为 J); 第二项是次近邻的自旋轨道耦合项 (强度为 λ_{SO}), 其中 $\nu_{ij}=\pm 1$; 第三项是最近邻的 Rashba 耦合项 (强度为 λ_{R}), 其中 $\boldsymbol{d}_{ij}$是从 i 格点到 j 格点的空间矢量; 最后一项是交错势 (强度为 λ_ν, 对于不同的子格 $\xi_i=\pm1$). 为了更清楚地研究需要论述的物理, 我们将系统的参数区间选择在非平庸的拓扑绝缘态中, 并破坏掉镜像对称和反射对称等幺正对称性, 使得能级的简并性仅来源于时间反演对称性.

然后, 问一个基本的问题, 由时间反演对称保护的拓扑态 (或更一般的 Kramers 简并态) 在外界耗散的影响下是否是稳定的? 容易想到, 如果与外界环境自由度耦合的系统算符也具有时间反演对称性, 那么由时间反演对称保护的拓扑态就应该不被破坏, 除非耦合的算符本身不再具有时间反演对称性. 换句话说, 只要在实验上尽量排除掉破坏系统时间反演对称性的因素 (如外加磁场、磁性杂质等), 那么实验就能观测到简并拓扑态带来的物理结果.

然而下面将会看到, 这一基于对称性分析的结论对于反幺正对称性的情形并不成立. 设系统受到外界环境的影响, 按照前面的讨论, 其非厄米哈密顿量为

$$\hat{\boldsymbol{H}}=\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{KM}}+\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{diss}},\tag{41}$$

其中$\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{diss}}$是 Kane-Mele 哈密顿量, $\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{diss}}=\sum_m\left(-\mathrm{i}\gamma_m\hat{\boldsymbol{O}}_m^{\dagger}\hat{\boldsymbol{O}}_m+\hat{\boldsymbol{O}}_m^{\dagger}\hat{\xi}_m+\hat{\xi}_m^{\dagger}\hat{\boldsymbol{O}}_m\right)$. 为方便起见, 在 y 方向上采用周期边界条件, 在 x 方向取开边界条件. 假设系统在边界上受到环境影响产生耗散, 即耗散耦合算符 $\hat{\boldsymbol{O}}_m$ 位于 x 方向的边界上, 如图 4 所示. 如前所述, 这里考虑最理想的情况, 即耗散耦合算符都是时间反演对称的. 不失一般性, 定义两种类型的局域耗散算符: 当 m 为偶数时, $\hat{\boldsymbol{O}}_m$ 定义在连接 (link) $\langle i_m,j_m\rangle$上:

$$\hat{\boldsymbol{O}}_m=\sum_{s}\hat{c}_{i_m,s}^{\dagger}\hat{c}_{j_m,s},\tag{42}$$

其中, i_m表示边界上的 B 子格 $x_{i_m}=N_x$, $y_{i_m}=m$, j_m表示边界上的A 子格$x_{j_m}=N_x$, $y_{j_m}=m+1$. 当 m 为奇数时, $\hat{\boldsymbol{O}}_m$ 定义在格点 i_m 上:

$$\hat{\boldsymbol{O}}_m=\sum_{s,s'}i\hat{c}_{i_m,s}^{\dagger}\sigma_{ss'}^{y}\hat{c}_{i_m,s'},\tag{43}$$

这里i_m代表边界上的B 子格$x_{i_m}=N_x$, $y_{i_m}=m+1$. 容易看出上述耗散算符 $\hat{\boldsymbol{O}}_m$ 是时间反演对称的.

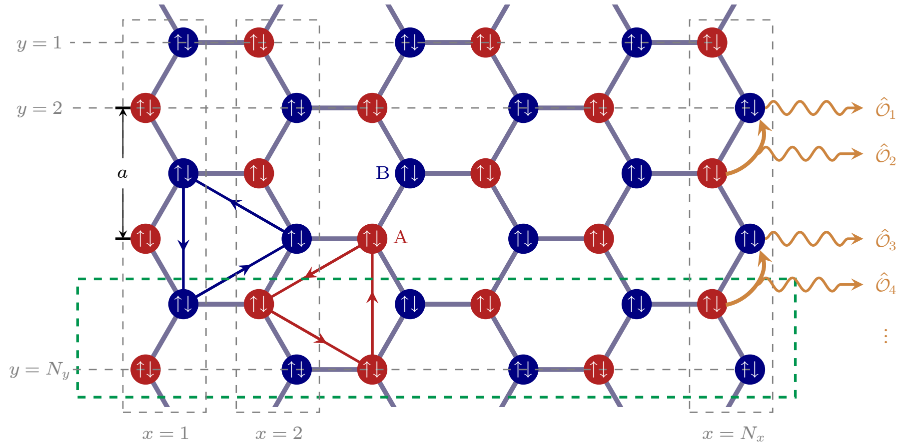


图 4 蜂窝格子上的 Kane-Mele 模型, 其中 x 方向取开边界条件, y 方向上取周期边界条件. 系统尺寸为 $N_x\times N_y$. 耗散耦合算符 $\hat{\boldsymbol{O}}_m$ 位于右边界, 奇偶分别作用在连接和格点上

Fig. 4. Honeycomb lattice of the tight-binding Kane-Mele model with open boundary condition along x-axis and with periodical boundary condition along y-axis. The sample size is $N_x\times N_y$. The coupling operators $\hat{\boldsymbol{O}}_m$ are located on the right edge, which are defined on links for odd m and defined on sites for even m.

有了以上这些定义就会看到, 即使系统与外界环境耦合的是时间反演对称的算符, 时间反演对称保护的简并拓扑态也是不稳定的, 以如下三个方面来论述这种不稳定性.

4.1.1 量子相干性的丢失

首先来看系统在时间反演对称保护拓扑态的子空间 (Kramers 空间) 内的相干性. 本文利用 von Neumann 熵刻画其子空间内相干性的变化. 为此要计算系统约化密度矩阵的响应. 在 Schrödinger 绘景下, 密度矩阵的含时演化为

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)=\hat{\boldsymbol{U}}_{\text{eff}}(t)\hat{\boldsymbol{\rho}}_0(t)\hat{\boldsymbol{U}}_{\text{eff}}^{\dagger}(t), \tag{44}$$

其中$\hat{\boldsymbol{U}}_{\text{eff}}(t)=\widetilde{\boldsymbol{T}}\exp\left[-\mathrm{i}\int_0^t\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{diss}}(t')\mathrm{d}t'\right]$, $\widetilde{\boldsymbol{T}}$为反时序算符 (anti-time-ordered operator), $\hat{\boldsymbol{\rho}}_0(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{H}}_0t}\hat{\boldsymbol{\rho}}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{H}}_0t}$代表系统哈密顿量演化的密度矩阵, 这里取系统的哈密顿量为 Kane-Mele 哈密顿量 $\hat{\boldsymbol{H}}_0=\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{KM}}$. 与第 2 节类似, 将 $\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{diss}}$ 作为微扰展开并对 Langevin 噪声做平均后可得密度矩阵为

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)&\equiv\langle\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)\rangle_{\text{noise}}=\left\langle\hat{\boldsymbol{U}}_{\text{eff}}(t)\hat{\boldsymbol{\rho}}_0(t)\hat{\boldsymbol{U}}_{\text{eff}}^{\dagger}(t)\right\rangle_{\text{noise}}\\
&=\left\langle\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^n\int_{t_1<\cdots<t_n}\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{diss}}(t_1)\cdots\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{diss}}(t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}_0(t)\right.\\
&\quad\left.\times\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{i})^n\int_{t_1<\cdots<t_n}\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{diss}}^{\dagger}(t_n)\cdots\hat{\boldsymbol{H}}_{\text{diss}}^{\dagger}(t_1)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\right)\right\rangle_{\text{noise}}\\
&\approx\hat{\boldsymbol{\rho}}_0(t)-\int_0^t\mathrm{d}t'\sum_m\gamma_m\left\{\hat{\boldsymbol{O}}_m^{\dagger}(t')\hat{\boldsymbol{O}}_m(t'),\hat{\boldsymbol{\rho}}_0(t)\right\}+2\int_0^t\mathrm{d}t'\sum_m\gamma_m\hat{\boldsymbol{O}}_m(t')\hat{\boldsymbol{\rho}}_0(t)\hat{\boldsymbol{O}}_m^{\dagger}(t'),
\end{aligned}\tag{45}$$

根据密度矩阵的响应 $\delta\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)\equiv\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)-\hat{\boldsymbol{\rho}}_0(t)$, 可以得到 von Neumann 熵的变化, 以此来刻画相干性的丢失. 将密度矩阵投影到 Krammers 简并子空间 $\mathcal{K}$ 中 $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\text{K}}(t)=\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{K}}\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{K}}$ ($\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)=\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{K}}\hat{\boldsymbol{\rho}}_0(t)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{K}}$), 其中 $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{K}}$ 为 Krammers 空间的投影算子. 设初态的密度矩阵为$\mathcal{K}$空间中纯态, 则相应的 von Neumann 熵变化为

$$\begin{aligned}
\delta S_{\text{v}}(t)=S_{\text{v}}(t)-S_{0,\text{v}}(t)=&-\mathrm{Tr}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)+\delta\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\text{K}}(t)}{\mathrm{Tr}\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)+\delta\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\text{K}}(t)\right)}\times\log\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)+\delta\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\text{K}}(t)}{\mathrm{Tr}\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)+\delta\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\text{K}}(t)\right)}\right)\right]+\mathrm{Tr}\left[\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)\log\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)\right]\\
=&\ \mathrm{Tr}\left[\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)\log\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)-\left(\delta\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)/\,\mathrm{Tr}\,\delta\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)\right)\log\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t)\right]\mathrm{Tr}\,\delta\hat{\boldsymbol{\rho}}_{0,\text{K}}(t).
\end{aligned}\tag{46}$$

可以清楚地看出，当 $\delta\hat{\rho}_{\rm K}(t)\propto\hat{\rho}_{0,{\rm K}}(t)$ (即 $\delta\hat{\rho}_{\rm K}(t)=\hat{\rho}_{0,{\rm K}}(t)\,{\rm tr}\,\delta\hat{\rho}_{\rm K}(t)$)时，则有 $\delta S_{\rm v}(t)=0$. 但是一旦 $\delta\hat{\rho}_{\rm K}(t)\not\propto\hat{\rho}_{0,{\rm K}}(t)$，von Neumann 熵变化不再为零，即 $\delta S_{\rm v}(t)\neq 0$. 根据密度矩阵的响应公式，作用在密度矩阵上的算符有 3 项：$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}$，$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{\dagger}\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{\dagger}\hat{\mathcal{O}}_m\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}$. 根据反幺正群的 Schur 引理，对于非厄米算符 $\hat{\mathcal{O}}_m$ ($\hat{\mathcal{O}}_m^{\dagger}$)，它的不可约表示矩阵不再正比于单位矩阵，即 $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\not\propto\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}$ ($\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{\dagger}\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\not\propto\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}$). 这将导致 $\delta\hat{\rho}_{\rm K}(t)\not\propto\hat{\rho}_{0,{\rm K}}(t)$. 也就是说，由于耗散算符 $\hat{\mathcal{O}}_m$ 在不可约表示空间 ($\mathcal{K}$ 空间) 不正比于单位阵，导致了 von Neumann 熵的改变，从而造成系统初始态的退相干，如图 5(a)所示.

4.1.2 简并性的破坏

我们将看到，由时间反演对称性导致的 Kramers 态的简并性也会被时间反演对称的算符所破坏. 定义推迟格林函数

$$\mathcal{G}_{ij}(t,0)=-{\rm i}\Theta(t)\left\langle\left\{\hat{c}_i(t),\hat{c}_j^{\dagger}(0)\right\}\right\rangle, \tag{47}$$

其中 $\Theta(t)$ 为 Heaviside 阶跃函数，$\hat{c}_j^{\dagger}$ ($\hat{c}_i$) 表示作用在本征态 $|\Psi_j\rangle$($|\Psi_i\rangle$) 上的产生 (湮灭) 算符，$\hat{c}_i(t)={\rm e}^{{\rm i}\hat{\boldsymbol{H}}^{\dagger}t}\hat{c}_i{\rm e}^{-{\rm i}\hat{\boldsymbol{H}}t}$ 为 Heisenberg 绘景下的含时演化. 与前面的计算类似，对格林函数做微扰展开，可得

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_{ij}^{(0)}=-{\rm i}\Theta(t)\left\langle\left\{\hat{c}_i^{\rm I}(t),\hat{c}_j^{\dagger,{\rm I}}(0)\right\}\right\rangle,\mathcal{G}_{ij}^{(1)}\\
&={\rm i}\sum_m\gamma_m\int_0^t{\rm d}t_1\left\langle\hat{c}_i^{\rm I}(t)\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\right\rangle+{\rm i}\sum_m\gamma_m\int_0^t{\rm d}t_1\left\langle\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\hat{c}_i^{\rm I}(t)\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\right\rangle\\
&\quad-2{\rm i}\sum_m\gamma_m\int_0^t{\rm d}t_1\left\langle\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{c}_i^{\rm I}(t)\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\right\rangle-{\rm i}\sum_m\gamma_m\int_0^t{\rm d}t_1\left\langle\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\hat{c}_i^{\rm I}(t)\right\rangle\\
&\quad-{\rm i}\sum_m\gamma_m\int_0^t{\rm d}t_1\left\langle\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\hat{c}_i^{\rm I}(t)\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\right\rangle+2{\rm i}\sum_m\gamma_m\int_0^t\left\langle\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{c}_i^{\rm I}(t)\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{48}$$

其中 $\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t)={\rm e}^{{\rm i}\hat{\boldsymbol{H}}_0t}\hat{\mathcal{O}}_m{\rm e}^{-{\rm i}\hat{\boldsymbol{H}}_0t}$ 表示算符在 Kane-Mele哈密顿量下的演化. 为了检验 Kramers 简并性的破坏，将算符 $\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}$，$\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}$，$\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}$ 以及 $\mathcal{G}_{ij,{\rm K}}^{(1)}$ 投影到 $\mathcal{K}$ 空间中，即

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{ij,{\rm K}}^{(1)}={}&{\rm i}\sum_m\gamma_m\left\{\int_0^t{\rm d}t_1\langle\hat{c}_i^{\rm I}(t)\left[\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\right]\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\rangle\right.\\
&+\int_0^t{\rm d}t_1\left\langle\left[\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\right]\hat{c}_i^{\rm I}(t)\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\right\rangle-2\int_0^t dt_1\left\langle\left[\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\right]\hat{c}_i^{\rm I}(t)\left[\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\right]\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\right\rangle\\
&-\int_0^t{\rm d}t_1\left\langle\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\hat{c}_i^{\rm I}(t)\left[\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\right]\right\rangle-\int_0^t{\rm d}t_1\left\langle\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\left[\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\right]\hat{c}_i^{\rm I}(t)\right\rangle\\
&\left.+2\int_0^t\left\langle\hat{c}_j^{{\rm I},\dagger}(0)\left[\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}(t_1)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\right]\hat{c}_i^{\rm I}(t)\left[\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}(t_1)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\right]\right\rangle\right\}.
\end{aligned} \tag{49}$$

如前所述，由于 $\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}$ 与 $\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}$ 具有时间反演对称性但不是厄米算符，根据反幺正群的 Schur 引理，可知 $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\propto\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K},\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{{\rm I},\dagger}\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\not\propto\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K},\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\hat{\mathcal{O}}_m^{\rm I}\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}\not\propto\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\rm K}$. 这会导致原本简并的谱函数出现劈裂. 将 Kane-Mele 模型和耗散算符代入格林函数然后做傅里叶变换可得:

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}(\omega)=\frac{1}{\omega-E_0+{\rm i}\hat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}, \tag{50}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}$ 为 2×2 矩阵 (更多计算细节可参考文献 [51]). 将 $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\omega)$ 对角化

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(\omega)=\boldsymbol{U}_g^{-1}\begin{pmatrix}\mathcal{G}_{\lambda_1}(\omega) & 0\\ 0 & \mathcal{G}_{\lambda_2}(\omega)\end{pmatrix}\boldsymbol{U}_g, \tag{51}$$

然后定义谱函数 $A_1(\omega)=-\dfrac{1}{\pi}{\rm Im}\left[\mathcal{G}_{\lambda_1}(\omega)\right]$，$A_2(\omega)=-\dfrac{1}{\pi}{\rm Im}\left[\mathcal{G}_{\lambda_2}(\omega)\right]$. 计算结果表明，在耗散算符的影响下，系统在 Kramers 空间的简并谱函数出现了劈裂，如图 5(b) 所示. 也就是说，由时间反演对称保护的简并性受到了破坏.

4.1.3 背散射的出现

除了上述相干性的丢失和简并性的破坏之外，

我们还将看到, 在破坏量子自旋霍尔效应的更重要的一个因素——背散射, 也会因为耗散的存在而出现, 即便耗散算符仍然是时间反演对称的.

首先来看杂质势在 Kramers 简并态之间的矩阵元

$$V_{ij}(t) = \langle \Psi_i | \hat{\boldsymbol{V}}(t) | \Psi_j \rangle , \tag{52}$$

微扰展开并对 Langevin 噪声做平均后可得

$$\begin{aligned} V_{ij}(t) = & \langle \Psi_i | \hat{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{I}}(t) | \Psi_j \rangle - \int_0^t \mathrm{d}t_1 \sum_m \gamma_m \\ & \times \Big[\langle \Psi_i | \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I},\dagger}(t_1) \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I}}(t_1) \hat{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{I}}(t) | \Psi_j \rangle \\ & + \langle \Psi_i | \hat{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{I}}(t) \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I},\dagger}(t_1) \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I}}(t_1) | \Psi_j \rangle \\ & - 2 \langle \Psi_i | \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I},\dagger}(t_1) \hat{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{I}}(t) \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I}}(t_1) | \Psi_j \rangle \Big] . \end{aligned} \tag{53}$$

由于$|\Psi_i\rangle$, $|\Psi_j\rangle$是系统在 Kramers 简并空间的本征态, 那么在无耗散的情况下自然有 $\langle \Psi_i | \hat{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{I}}(t) | \Psi_j \rangle = V_0 \delta_{ij}$, 其中$V_0$是杂质强度. 而对于耗散带来的修正项, 由于 $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{K}} \hat{\boldsymbol{O}}_m \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{K}} \not\propto \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{K}}$, 杂质势会在两个不同Kramers简并态之间产生非零矩阵元, 如图 5(c) 所示.

$$\begin{aligned} V_{ij}(t) = & V_0 \delta_{ij} - \int_0^t \mathrm{d}t_1 \sum_m \gamma_m \\ & \times \Big[\langle \Psi_i | \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{K}} \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I},\dagger}(t_1) \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I}}(t_1) \hat{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{I}}(t) \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{K}} | \Psi_j \rangle \\ & + \langle \Psi_i | \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{K}} \hat{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{I}}(t) \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I},\dagger}(t_1) \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I}}(t_1) \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{K}} | \Psi_j \rangle \\ & - 2 \langle \Psi_i | \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{K}} \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I},\dagger}(t_1) \hat{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{I}}(t) \hat{\boldsymbol{O}}_m^{\mathrm{I}}(t_1) \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{K}} | \Psi_j \rangle \Big] . \end{aligned} \tag{54}$$

这一结果也表明在量子霍尔效应中的拓扑边缘态会被散射到另一个边缘态, 即出现背散射, 导致自旋霍尔电导不再是量子化的.

系统在边缘态中的有效哈密顿量可写为

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{edge}} = v\hat{\boldsymbol{k}}|+\rangle\langle+| - v\hat{\boldsymbol{k}}|-\rangle\langle-|, \tag{55}$$

其中 $v = \partial E(k)/\partial k$ 是边缘态的速度, $|+\rangle$, $|-\rangle$代表两个螺旋通道 (helical channels). 下面考虑边界上存在杂质, 其杂质势为 $\hat{\boldsymbol{V}}$, 根据 Lippmann-Schwinger 方程, 散射态的形式解为 $\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{edge}} + \hat{\boldsymbol{V}}$,

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle + \hat{\mathrm{G}}_0(E)\hat{\boldsymbol{V}}|\psi\rangle, \tag{56}$$

其中 $\hat{\mathrm{G}}_0(E)$ 为自由格林函数 $\hat{\mathrm{G}}_0(E) = (E - \hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{edge}} + \mathrm{i}0^+)^{-1}$. 将方程 (56) 写到坐标表象下:

$$\psi(x,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \delta_{\sigma,+} + \psi_{\mathrm{sc}}(x,\sigma), \tag{57}$$

其中 $\varphi(x,\sigma) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\delta_{\sigma,+}/\sqrt{L}$ 为初态入射波函数, L 为系统尺寸, $\psi_{\mathrm{sc}}(x,\sigma) = \langle x,\sigma|\hat{G}_0(E)\hat{\boldsymbol{V}}|\psi\rangle$ 为散射波函数. 在一阶近似下,

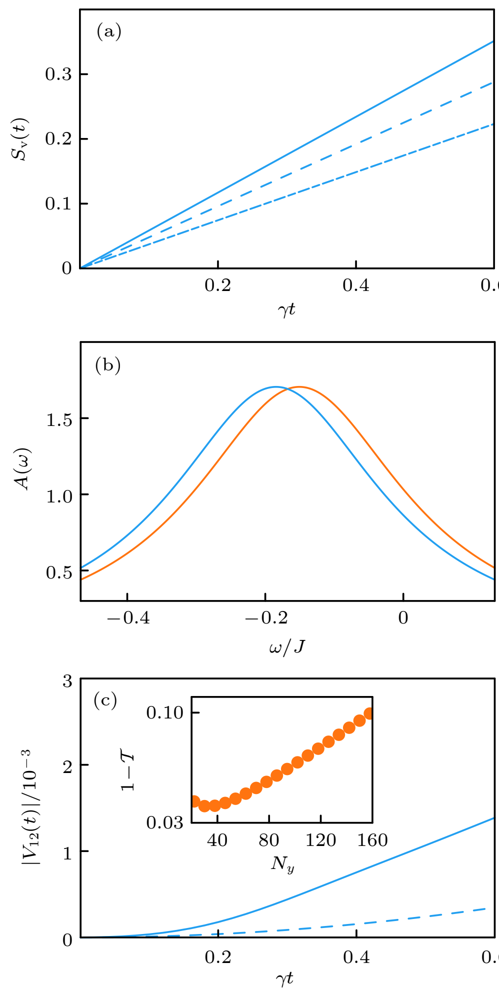


图 5 (a) von Neumann 熵随时间的变化, 三条曲线分别对应不同耗散耦合通道数目: $M=20$ (实线), $M=16$ (虚线) 和 $M=12$ (点虚线); (b) Kramers 简并空间中的谱函数; (c) 杂质势的非对角元 $V_{12}(t)$ 随时间的变化, 实线包含所有态的贡献, 虚线仅包含边缘态的贡献 ($M=20$). 插图表示反射率随样品尺寸的变化. 耗散强度 γ 大小为 $0.2J$ [51]

Fig. 5. (a) The von Neumann entropy $S_{\mathrm{v}}(t)$ as a function of time. Here we choose the number of coupling operators as $M=20$ (solid line), $M=16$ (dashed line), and $M=12$ (dotted dashed line), respectively. (b) The spectral function $A(\omega)$ for two Kramers degenerate states with dissipation, with $M=20$. (c) Time evolution of the matrix element of the impurity potential $V_{12}(t)$ between two degenerate edge states with. The solid line includes contributions from all states and the dashed line only includes contributions from edge states. The inset shows the transmission coefficient as a function of N_y. The dissipation strength γ is taken as $0.2J$ [51].

$$\psi_{sc}(x,\sigma)=\begin{cases}-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\dfrac{\sqrt{L}}{v}\langle k,+|\hat{\boldsymbol{V}}|k,+\rangle, & \sigma=+,\ x\to L/2,\\ -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\dfrac{\sqrt{L}}{v}\langle -k,-|\hat{\boldsymbol{V}}|k,+\rangle, & \sigma=-,\ x\to -L/2.\end{cases}\tag{58}$$

则反射率为

$$\mathcal{R}=\left|-\frac{L}{v}\mathrm{i}\left\langle -k,-\left|\hat{V}\right|k,+\right\rangle\right|^2.\tag{59}$$

由此可得透射率 $\mathcal{T}=1-\mathcal{R}$. 将 $|V_{ij}(t)|$ 的展开式 (54) 式代入 $\langle -k,-|\hat{\boldsymbol{V}}|k,+\rangle$ 并对杂质势做平均, 就能得到反射和透射率.

计算结果表明, 在耗散的作用下, 杂质确实会引起背散射 (透射率不等于 1), 如图 5(c) 中的插图所示. 不仅如此, 反射率的大小也会随着系统尺寸改变而变化, 结果表明系统样品的尺寸越大, 反射率越高. 这一结果与最近的实验观测到的结果[52]定性上是符合的, 如实验图 6 所示, 电导随着尺寸的增大逐渐偏离量子化的值, 尺寸的阈值约为 100 nm. 对于非量子化的电导, 之前有关的理论考虑了有限温度下非弹性散射[53,54]以及电磁噪声导致的散射带来的影响[55]. 而我从理论上对于为什么实验上很难观测到精确的量子化电导[50,52,56,57]给出了另一种不同的物理诠释, 物理系统总是不可避免地受到外界环境的影响, 对于时间反演对称性保护的量子系统来说, 即便与环境耦合的算符也具有时间反演对称性, 这种反幺正对称性保护的物理也是不稳定的①. 正是这种机制使得量子自旋霍尔效应中的背散射几乎不可避免, 导致电导量子化不再是精确的.

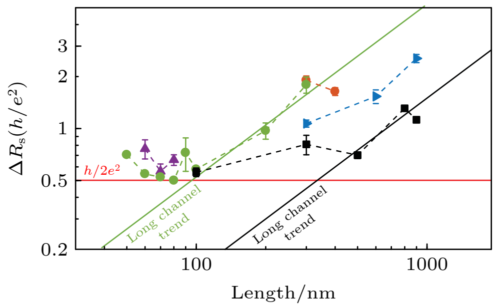


图 6 实验在 WTe_2 样品中测量的未掺杂通道电阻随样品尺寸的变化. 图片取自文献 [52]

Fig. 6. Length dependence of the undoped-channel resistance in WTe_2 sample. The figure is copied from the Ref. [52].

4.2 非厄米线性响应理论在相互作用拓扑态中的应用

除了量子霍尔效应以外, 我们利用非厄米线性响应理论来研究具有时间反演对称性的相互作用拓扑相的稳定性问题. 我们知道, 根据 Mermin-Wagner 定理[58], 对于维数小于等于二维的系统, 不存在有限温度的长程序, 即不会出现对称性自发破缺. 如一维反铁磁 Heisenberg 模型:

$$\hat{H}=J\sum_i \boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1},\tag{60}$$

无论自旋取半奇数还是整数, 系统的基态都没有长程反铁磁序. 但是, Haldane[59,60] 在 1983 年发现, 整数自旋的反铁磁 Heisenberg 模型的磁激发谱与半奇数有着巨大的区别, 即半奇数自旋的激发谱是无能隙的, 而整数自旋的激发谱却是有能隙的 (Haldane gap). 从场论角度出发, Haldane 将反铁磁自旋链的低能有效作用量写为正常的 $O(3)$ 非线性 σ-模型 ($O(3)$ nonlinear σ-model) 部分 $S_0[\boldsymbol{n}]$ 与拓扑项 $S_{\rm top}[\boldsymbol{n}]$ (θ-term) 部分之和:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}[\boldsymbol{n}]&=\mathcal{S}_0[\boldsymbol{n}]+\mathcal{S}_{\rm top}[\boldsymbol{n}]\\&=\frac{1}{\lambda}\int \mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\left(\frac{1}{v_{\rm s}}(\partial_x\boldsymbol{n})^2+v_{\rm s}(\partial_\tau\boldsymbol{n})^2\right)\\&\quad+\mathrm{i}\theta\int \mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\boldsymbol{n}\cdot(\partial_x\boldsymbol{n}\times\partial_\tau\boldsymbol{n}),\end{aligned}\tag{61}$$

其中 $\lambda=4/S$, $\theta=S/2$. $v_{\rm s}$ 表示长波极限下自旋波激发的波速. 对于 $\mathcal{S}_0[\boldsymbol{n}]$ 部分, 在平均场近似下, 体系的低能激发是无能隙的②. 而量子涨落将改变体系的激发谱, 使激发谱出现能隙. 对于拓扑项 $\mathcal{S}_{\rm top}[\boldsymbol{n}]$, 为了看出这一项的影响, 我们将配分函数 ($\mathcal{Z}=\int D\boldsymbol{n}\exp(-\mathcal{S}[\boldsymbol{n}])$) 写为如下求和形式:

$$\mathcal{Z}=\sum_{W\in\mathbb{Z}}\int D\boldsymbol{n}_W\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}SW}\mathrm{e}^{-S_0[\boldsymbol{n}_W]},\tag{62}$$

其中 W 表示缠绕数 (winding number), $\boldsymbol{n}_W$ 代表

① 即便系统被耦合的耗散算符是厄米算符, 也不一定能保证这种稳定性. 原因是可以利用两个厄米算符构造出一个非厄米算符 $\gamma_1\hat{\mathcal{O}}_1\hat{\mathcal{O}}_2+\gamma_2\hat{\mathcal{O}}_2\hat{\mathcal{O}}_1$ (在有限温度下, $\gamma_1\neq\gamma_2$), 同样会导致 Kramers 简并态的不稳定性. 只有一种极特殊的情况才能保持稳定, 即系统只耦合一个算符且该算符是厄米算符.

② 在平均场近似下, $\boldsymbol{n}=\phi$ (ϕ 为标量), 此时于 $\mathcal{S}_0[\boldsymbol{n}]$ 将给出波动方程方程 $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\phi-v_{\rm s}^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\phi=0$, 所以此时系统的激发是无能隙的 ($\varepsilon(\boldsymbol{p})\sim v_{\rm S}|\boldsymbol{p}|$).

缠绕数的场分布. 显然, 拓扑项的贡献只依赖于 $2S$ 的奇偶性. 对于整数自旋 ($2S$ 为偶数), 此时拓扑项的相位贡献全都是 2π 整数倍, 即 $\exp(2\pi \mathrm{i} SW)=1$, 这表明整数自旋的拓扑项对配分函数没有贡献 (与没有这一项的效果一样), 因此可以预期系统的能谱与于 $\mathcal{S}_0[\boldsymbol{n}]$ 给出的能谱一致. 而对于半奇数自旋 ($2S$ 为奇数), $\exp(2\pi \mathrm{i} SW)=(-1)^W$, 即缠绕数 W 为奇数时会贡献一个负号, 这一正负号交替会让相位在求和过程中相干相消, 使得量子涨落对平均场的影响受到抑制, 使系统的激发更接近平均场的无能隙激发. 事实上, 自旋 1/2 反铁磁 Heisenberg 模型的 Bethe ansatz 严格解给出的低能激发确实是无能隙的. 因此 Haldane 提出, 所有整数自旋的反铁磁 Heisenberg 模型的激发谱都是无能隙的, 而整数自旋是有能隙的, 称为 Haldane conjecture. 不仅如此, 能隙是能够稳定存在的, 不受外界扰动或参数的变化 (如将系统改为各向异性的 XXZ 模型) 而消失. 这种有能隙且稳定存在的量子态构成一个非平庸的量子相 (其基态没有对称破缺, 但因为存在边界态, 而与平庸的有能隙的直积态有本质区别), 被称为 Haldane gap. Haldane gap 后来在 90 年代被密度矩阵重整化群的计算所验证[61], 中子散射实验也观察到了这一能隙[62]. Haldane 的这一发现毫无疑问是重要的, 也是令人惊奇的①. 它使人们意识到, 在没有对称性自发破缺和长程序的系统中也可以有不同类别的物相, 这里即是对称性保护的拓扑物相 (Haldane phase). 而且, 事实上自旋的整数和半奇数的区别是量子力学的效应, 并没有经典对应, 这说明 Haldane phase 完全是量子效应在相互作用多体系统中的体现. 在 Haldane conjecture 提出之后, 1987 年由 Affleck, Kennedy, Lieb 和 Tasaki 四位物理学家提出了一个基态为 Haldane phase 并且可以严格求解的模型 (AKLT 模型)[63], 其哈密顿量为

$$\begin{aligned}\hat{H} &= J\sum_{j=1}^{L-1}\left[\boldsymbol{S}_j\cdot\boldsymbol{S}_{j+1}+\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{S}_j\cdot\boldsymbol{S}_{j+1}\right)^2+\frac{2}{3}\right]\\ &= J\sum_{j=1}^{L-1}\hat{P}^{S=2}_{j,j+1},\end{aligned} \tag{63}$$

其中 $\boldsymbol{S}_j=(S_j^x,S_j^y,S_j^z)$ 表示自旋 1 的角动量算符, $\hat{P}^{S=2}_{j,j+1}$ 表示最近邻两个格点自旋 $S=2$ 子空间上的投影算子, L 是系统的尺寸, $J\,(J>0)$ 为相互作用强度. 这里采用了开边界条件, 在这一边界条件下, 该模型的基态是零能的四重简并态. 因为每个投影算子都是正定的, 故基态可以通过排除所有临近两个格点的自旋为 2 的分量来得到, 可以用图 7 来形象地表示.

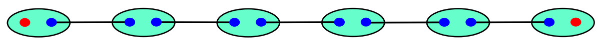


图 7 AKLT 模型基态示意图. 其中每个格点上的自旋 $S=1$ (绿色椭圆) 被分解成两个自旋 $S=1/2$ (蓝色圆点), 被黑色直线连接起来的两个蓝点表示两个自旋 $S=1/2$ 形成的自旋单态. 左右边界上的红色圆点表示自由的自旋 $S=1/2$

Fig. 7. A schematic diagram for groundstate of the AKLT model. The spin $S=1$ (green oval shape) at each site is split into two spin-half (blue dots), and two blue dots connected by black line represents the spin singlet formed by the two spin $S=1/2$. The red dot at each boundary represents free spin-half.

将每个格点的自旋 $S=1$ (图 7 中的黄色圆圈) 分解为两个自旋 1/2 组成的自旋三重态, 则基态可视为临近两格点接触的自旋 1/2 形成的自旋单态, 此时两个边界格点各有一个未配对的自由的 1/2 自旋态, 所以基态是四重简并的零能态. 换句话说, 系统的基态在体内是自旋单态构成的直积态, 而左右边界上则各存有一个 $S=1/2$ 的边界态. 系统的激发是有能隙的, 激发态需要打破自旋单态, 导致正比于 J 的有限能量增加. 与 Haldane phase 一样, AKLT 模型的基态是拓扑非平庸的②, 它受时间反演对称和二面体群 D_2 (关于两个正交轴的 π 旋转) 的保护[64].

本节的目的就是以 AKLT 模型为例, 通过退相干的出现和简并性的破坏, 来表明受时间反演保护的 Haldane phase 在耗散下的不稳定性. 为此, 先将其基态重新表示.

根据自旋算符的 Schwinger 玻色子表示,

$$\hat{S}_j^+=\hat{a}_j^\dagger\hat{b}_j,\quad \hat{S}_j^-=\hat{b}_j^\dagger\hat{a}_j,\quad \hat{S}_j^z=\frac{1}{2}\left(\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j-\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_j\right), \tag{64}$$

① 这个结果令人惊奇的地方就在于, 一方面, 在大自旋极限下 ($S\gg1$), 平均场的结果是越来越精确的, 给出无能系线性色散; 另一方面, 对于 $S=1/2$, Bethe ansatz 的严格结果也给出无能隙的线性色散. 那么自然应该期待对于中间大小的自旋 $S>1/2$, 都应该具有无能隙的激发才对. 但是, $S=1$ 的系统却是有能隙的!

② 其基态没有对称自发破缺, 但是存在边界态, 这与平庸的有能隙的直积态本质上是不同的.

其中满足约束条件$\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j+\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_j=2S=2$. 此时简并的基态可表示为

$$\begin{aligned}
|\phi_g^1\rangle &= \hat{a}_1^\dagger\prod_{j=1}^{L-1}\left(\hat{a}_j^\dagger\hat{b}_{j+1}^\dagger-\hat{b}_j^\dagger\hat{a}_{j+1}^\dagger\right)\hat{a}_L^\dagger|0\rangle,\\
|\phi_g^2\rangle &= \hat{b}_1^\dagger\prod_{j=1}^{L-1}\left(\hat{a}_j^\dagger\hat{b}_{j+1}^\dagger-\hat{b}_j^\dagger\hat{a}_{j+1}^\dagger\right)\hat{a}_L^\dagger|0\rangle,\\
|\phi_g^3\rangle &= \hat{a}_1^\dagger\prod_{j=1}^{L-1}\left(\hat{a}_j^\dagger\hat{b}_{j+1}^\dagger-\hat{b}_j^\dagger\hat{a}_{j+1}^\dagger\right)\hat{b}_L^\dagger|0\rangle,\\
|\phi_g^4\rangle &= \hat{b}_1^\dagger\prod_{j=1}^{L-1}\left(\hat{a}_j^\dagger\hat{b}_{j+1}^\dagger-\hat{b}_j^\dagger\hat{a}_{j+1}^\dagger\right)\hat{b}_L^\dagger|0\rangle. \qquad (65)
\end{aligned}$$

为了讨论这类对称性保护的基态在耗散影响下的稳定性, 从谱的简并性和基态空间的相干性两方面来讨论. 定义格林函数:

$$\mathcal{G}_{ij}(t)=-\mathrm{i}\Theta(t)\sum_{\lambda=1}^{4}\langle\phi_g^\lambda|\,\hat{c}_i^\dagger(t)\hat{c}_j\,|\phi_g^\lambda\rangle, \qquad (66)$$

其中$i,j=1,2$, 取$\hat{c}_1=\hat{S}_1^--\frac{1}{2}\hat{S}_1^-\hat{S}_1^z$, $\hat{c}_2=\hat{S}_1^++\frac{1}{2}\hat{S}_1^+\hat{S}_1^z$以满足条件$\hat{c}_1|\phi_g^1\rangle=|\phi_g^2\rangle$以及$\hat{c}_2|\phi_g^2\rangle=|\phi_g^1\rangle$. 含时算符$\hat{c}_m(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{H}}_{\rm eff}^\dagger t}\hat{c}_m(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{H}}_{\rm eff}t}$是在总哈密顿量

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{\rm eff}=\hat{\boldsymbol{H}}_{\rm AKLT}+\hat{\boldsymbol{H}}_{\rm diss} \qquad (67)$$

下演化的, 其中$\hat{\boldsymbol{H}}_{\rm diss}=\left(-\mathrm{i}\gamma\hat{\boldsymbol{\mathcal{O}}}_1^\dagger\hat{\boldsymbol{\mathcal{O}}}_1+\hat{\boldsymbol{\mathcal{O}}}_1^\dagger\hat{\xi}+\hat{\xi}^\dagger\hat{\boldsymbol{\mathcal{O}}}_1\right)$. 在无耗散的情况下$\hat{\boldsymbol{H}}_{\rm diss}=0$, 容易发现格林函数非对角矩阵元为零, $\mathcal{G}_{12}(t)=\mathcal{G}_{21}(t)=0$, 且对角元相等$\mathcal{G}_{11}(t)=\mathcal{G}_{22}(t)$. 与Kane-Mele模型类似, AKLT模型基态的简并性除了时间反演对称保护以外还受到$Z_2\times Z_2$对称性的保护[64]. 因此选取在边界上的耗散算符$\hat{\boldsymbol{\mathcal{O}}}_1=(S_1^z)^2+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{S}_1$, 以期能够破坏$Z_2\times Z_2$对称性但保持时间反演对称性, 其中$\boldsymbol{S}_1=(S_1^x,S_1^y,S_1^z)$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)$. 与量子自旋霍尔效应类似, 此时耗散算符也会导致系统基态空间内的von Neumann熵的增长谱函数的劈裂, 如图8所示. AKLT模型边缘态的不稳定性也被其他工作利用不同计算的方法所证实[65,66].

事实上, 通过Kane-Mele模型和ALKT模型的计算过程可以发现, 耗散引起时间反演对称保护的量子系统的不稳定性是普适的, 并不依赖于具体的模型, 其背后的数学原因是反幺正群的Schur引理. “光阴似箭, 岁月如梭”, 自人类文明起始以来, 时间可能是最神秘的概念. 我们知道, 宏观热力学系统的时间箭头起源于微观概率的最概然分布, 体现在热力学熵的增加, 但是在微观上, 热力学系统中的单个原子的运动总是可逆的. 然而具有时间反演对称的量子系统中的时间箭头, 则是起源于时间反演对称的反幺正性, 这里的不可逆性体现在Kramers简并空间中von Neumann熵的增加. 从物理上看, 这似乎提供了一种“时间箭头”的可能的微观起源, 即自然界的时间流逝总是单向的原因, 就是时间反演对称性是反幺正的.

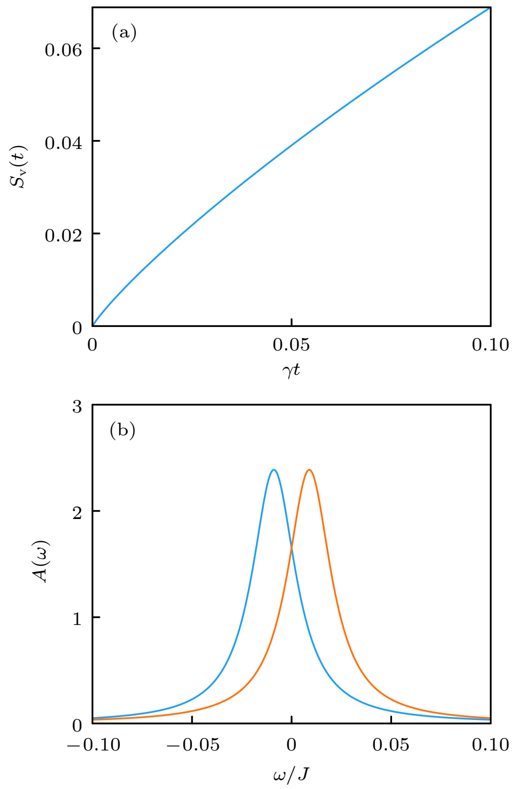


图 8 (a) AKLT模型中的von Neumann熵随时间的变化; (b) 基态空间中的谱函数

Fig. 8. (a) The von Neumann entropy as a function of time in the AKLT model; (b) the spectral function in ground-state subspace.

5 总结与展望

本文简要地综述了非厄米线性响应理论以及该理论在具有耗散量子多体和具有时间反演对称保护的量子系统这两大方面的应用. 在耗散量子多体系统方面, 发现在二维Bose-Hubbard模型中, 当系统处于具有良好定义的准粒子激发状态时, 系统的耗散动力学出现正常的指数衰减和扩散行为; 而当系统处于量子临界状态时, 则会出现非指数衰减的耗散动力学和反常的亚扩散行为, 并且这些反常行为与系统在临界相的临界指数决定. 理论计算

的结果与冷原子实验观测数据高度符合. 另外还发现, 在一维量子气体中, 系统处于 Luttinger 液体态时也会出现类似的非指数和亚扩散行为. 这一理论的结果提供了一种通过实验测量耗散动力学来区分正常量子物态和临界量子物态的手段, 也为实验测量临界指数提供了新的方法. 在时间反演对称的量子系统方面, 以量子霍尔效应和相互作用拓扑态为例, 通过非厄米线性响应的计算, 发现了由时间反演这种反幺正对称性保护的 Kramers 简并及其相关的物理性质在耗散的影响下并不是稳定的, 即便耗散算符也同样具有时间反演对称性. 理论预言了自旋霍尔电导不再是精确的量子化值, 且随实验样品尺寸的变化规律与实验结果定性一致. 从以上两方面的应用来看, 非厄米线性响应理论是成功的. 诚然, 正如前言所讲, 非平衡动力学过程原则上涉及系统所有的自由度, 理论上来说很难通过少数几个参数就能精确刻画多体系统动力学演化. 非厄米线性响应理论处理是系统在耗散影响下的准静态演化过程, 当系统的演化状态非准静态过程的时候, 还没有理论可以有效地处理. 一个具有重要意义的问题是, 非平衡动力学是否有类似于平衡态物理一样的普适性 (如量子相变的普适类)? 有趣的是, 实验在远离准静态的非平衡动力学中发现了一些普适的动力学行为, 验证了这种存在的可能性. 如远离平衡态的普适淬火动力学[67], 以及最近在量子多体系统中观测到的著名的 Kardar-Parisi-Zhang 普适性[68–70]. “平衡态系统都是相似的, 而非平衡系统却各有各的非平衡”. 我们相信, 自然界中的精彩很大程度上来自于非平衡物理. 伴随着实验技术尤其是冷原子实验的蓬勃发展, 我们有理由期待, 非平衡物理系统会带给我们越来越多的惊奇.

本文所介绍的非厄米线性响应理论是作者与多位合作者共同提出的. 借此机会, 作者要感谢清华大学高等研究院的翟荟教授, 正是翟荟教授对物理理论的独到见解以及对实验现象的真知灼见, 非厄米线性响应理论才得以诞生. 感谢中国工程物理研究院的陈宇研究员, 陈教授扎实深厚的物理功底和他那爽朗的笑声, 为本工作的进展过程增辉不少. 感谢清华大学高等研究院的陈鑫博士和邓天舒博士, 和他们的讨论亦使作者受益良多. 作者还要感谢中国科学院物理研究所的陈澍研究员和崔晓玲研究员, 在他们的指引下作者有幸进入了量子开放系统和非厄米物理这一蓬勃发展的领域.

参考文献

[1] Barontini G, Labouvie R, Stubenrauch F, Vogler A, Guarrera V, Ott H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 035302
[2] Patil Y S, Chakram S, Vengalattore M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 140402
[3] Labouvie R, Santra B, Heun S, Ott H 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 235302
[4] Lüschen H P, Bordia P, Hodgman S S, Schreiber M, Sarkar S, Daley A J, Fischer M H, Altman E, Bloch I, Schneider U 2017 *Phys. Rev. X* **7** 011034
[5] Tomita T, Nakajima S, Takasu Y, Takahashi Y 2019 *Phys. Rev. A* **99** 031601(R)
[6] Tomita T, Nakajima S, Danshita S, Takasu S, Takahashi Y, 2017 *Sci. Adv.* **3** e1701513
[7] Sponselee K, Freystatzky L, Abeln B, Diem M, Hundt B, Kochanke A, Ponath T, Santra B, Mathey L, Sengstock K, Becker C 2018 *Quantum Sci. Technol.* **4** 014002
[8] Takasu Y, Yagami T, Ashida Y, Hamazaki R, Kuno Y, Takahashi Y 2020 *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020** 12A110
[9] Yan B, Moses S A, Gadway B, Covey J P, Hazzard K R, Rey A M, Jin D S, Ye J 2013 *Nature* **501** 521
[10] Schäfer F, Fukuhara T, Sugawa S, Takasu Y, Takahashi Y, 2020 *Nat. Rev. Phys.* **2** 411
[11] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
[12] Ashida Y, Gong Z, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
[13] Bouganne R, Aguilera M B, Ghermaoui A, Beugnon J, Gerbier F 2020 *Nat. Phys.* **16** 21
[14] Pan L, Chen X, Chen Y, Zhai H 2020 *Nat. Phys.* **16** 767
[15] Mahan G D 1981 *Many Particle Physics* (New York and London: Plenum Press)
[16] Coleman P 2015 *Introduction to Many-Body Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
[17] Kamenev A 2011 *Field Theory for Non-equilibrium Systems* (Cambridge: Cambridge University Press)
[18] Dalla Torre E G, DiehlS, Lukin M D, Sachdev S, Strack P 2013 *Phys. Rev. A* **87** 023831
[19] Zhai H 2021 *Ultracold Atomic Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
[20] Purfath M 2014 *The Non-Equilibrium Green' s Function Method for Nanoscale Device Simulation* (Verlag Wien: Springer Press)
[21] Vale C J, Zwierlein M 2021 *Nat. Phys* **17** 1305
[22] Stewart J T, Gaebler J P, Jin D S 2008 *Nature* **454** 744
[23] Dao T L, Georges A, Dalibard J, Salomon C, Carusotto I 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 240402
[24] Koschorreck M, Pertot D, Vogt E, Fröhlich B, Feld M, Köhl M 2012 *Nature* **485** 619
[25] Brown P T, Guardado-Sanchez E, Spar B M, Huang E W, Devereaux T P, Bakr W S 2020 *Nat. Phys.* **16** 26
[26] Sachdev S 2011 *Quantum Phase Transitions* (Cambridge: Cambridge University Press)
[27] Zinn-Justin J 2007 *Phase Transitions and Renormalisation Group* (Oxford: Oxford University Press)
[28] Debenedetti P G, Stillinger F H 2001 *Nature* **410** 259
[29] Dyre J C 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 953
[30] Witczak-Krempa W, Sørensen E S, Sachdev S 2014 *Nat. Phys.* **10** 361
[31] Giamarchi T 2004 *Quantum Physics in One Dimension* (New York: Oxford University Press)
[32] Lieb E H, Liniger W 1963 *Phys. Rev.* **130** 1605
[33] Imambekov A, Glazman L I 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 206805
[34] Lieb E H 1963 *Phys. Rev.* **130** 1616
[35] Jiang Y Z, Chen Y Y, Guan X W 2015 *Chin. Phys. B* **24** 050311

[36] Yang B, Chen Y Y, Zheng Y G, Sun H, Dai H N, Guan X W, Yuan Z S, Pan J W 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 165701
[37] Imambekov A, Schmidt T L, Glazman L I 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 1253
[38] Sticlet D, Dóra B, Moca C P 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 016802
[39] Dóra B, Moca C P 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 136802
[40] Bácsi Á, Moca C P, Dóra B 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 136401
[41] Bernier J S, Tan R, Guo C, Kollath C, Poletti D 2020 *Phys. Rev. B* **102** 115156
[42] Chen Y 2021 *J. High Energy Phys.* **04** 215
[43] Su K, Zhang P, Zhai H 2021 *J. High Energy Phys.* **06** 156
[44] Wigner E P 1959 *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (New York: Academic Press)
[45] Dimmock J O 1963 *J. Math. Phys.* **4** 1307
[46] McGinley M, Cooper N R 2020 *Nat. Phys.* **16** 1181
[47] Haldane F D M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015
[48] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
[49] Bernevig B A, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 106802
[50] König M, Wiedmann S, Brüne C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
[51] Deng T S, Pan L, Chen Y, Zhai H 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 086801
[52] Wu S, Fatemi V, Gibson Q D, Watanabe K, Taniguchi T, Cava R J, Jarillo-Herrero P 2018 *Science* **359** 76
[53] Schmidt T L, Rachel S, von Oppen F, Glazman L I 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 156402
[54] Väyrynen J I, Goldstein M, Glazman L I 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 216402
[55] Väyrynen J I, Pikulin D I, Alicea J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 106601
[56] Roth A, Brüne C, Buhmann H, Molenkamp L W, Maciejko J, Qi X L, Zhang S C 2009 *Science* **325** 294
[57] Du L, Knez I, Sullivan G, Du R R 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 096802
[58] Mermin N D, Wagner H 1966 *Phys. Rev. Lett.* **17** 1133
[59] Haldane F D M 1983 *Phys. Lett. A* **93** 464
[60] Haldane F D M 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1153
[61] White S R, Huse D A 1993 *Phys. Rev. B* **48** 3844
[62] Kenzelmann M, Cowley R A, Buyers W J L, Tun Z, Coldea R, Enderle M 2002 *Phys. Rev. B* **66** 024407
[63] Affleck I, Kennedy T, Lieb E H, Tasaki H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 799
[64] Pollmann F, Berg E, Turner A M, Oshikawa M 2012 *Phys. Rev. B* **85** 075125
[65] Wang Z, Li Q, Li W, Cai Z 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 237201
[66] Deng T S, Pan L 2021 *Phys. Rev. B* **104** 094306
[67] Eigen C, Glidden J A, Lopes R, Cornell E A, Smith R P, Hadzibabic Z 2018 *Nature* **563** 221
[68] Scheie A, Sherman N E, Dupont M, Nagler S E, Stone M B, Granroth G E, Moore J E, Tennant D A 2021 *Nat. Phys.* **17** 726
[69] Jepsen P N, Amato-Grill J, Dimitrova I, Ho W W, Demler E, Ketterle W 2020 *Nature* **588** 403
[70] David D, Rubio-Abadal A, Ye B, Machado F, Kemp J, Srakaew K, Simon Hollerith S, Rui J, Gopalakrishnan S, Yao N Y, Bloch I, Zeiher J 2022 *Science* **376** 716

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Non-Hermitian linear response theory and its applications*

Pan Lei †

(*Institute for Advanced Study, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

(Received 2 May 2022; revised manuscript received 19 June 2022)

Abstract

Linear response theory is the theoretical foundation of modern experiments. In particular, it plays a vital role in measuring quantum matters. Its main idea is to take the external probe signal of the physical system as a perturbation and use the correlation function in the unperturbed equilibrium state to depict the response to the observable in system. In recent half century, the linear response theory for the closed quantum system has achieved great success in experiments on quantum matters. In recent years, with the tremendous progress of the precise manipulation of the light-matter interaction, the ultracold atom experiments can precisely control dissipative quantum many-body systems. With the discovery of many novel phenomena, dissipative quantum systems and non-Hermitian physics have attracted extensive attention in theory and experiment. We developed a linear response theory, named non-Hermitian linear response theory, to deal with open quantum systems. This theory takes the non-Hermitian term and quantum noise, which are induced by dissipation, as an external perturbative input, to detect the properties of the quantum system, and relates the time evolution of the observable with the correlation function in the unperturbed state of the system. The non-Hermitian linear response theory provides a new method for distinguishing the exotic quantum phase from the normal phase. The theoretical predictions are highly consistent with the recent experimental results of cold atom systems. This paper will review the non-Hermitian linear response theory and discuss its applications in quantum many-body and time-reversal symmetric quantum systems.

Keywords: non-Hermitian, linear response theory, quantum many-body systems, time-reversal symmetry

PACS: 03.65.Yz, 03.65.Vf, 05.70.Jk, 31.15.xp **DOI:** 10.7498/aps.71.20220862

---

* Project supported by the Beijing Outstanding Young Scientist Program, China and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2020M680496).

† Corresponding author. E-mail: panlei@mail.tsinghua.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

非厄米线性响应理论及其应用

潘磊

Non-Hermitian linear response theory and its applications

Pan Lei

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 170305 (2022)   DOI: 10.7498/aps.71.20220862

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20220862

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 71, No. 17 (2022) 170306

专题: 非厄米物理前沿

畴壁系统中的非厄米趋肤效应

邓天舒†

(清华大学高等研究院, 北京 100084)

(2022 年 6 月 1 日收到; 2022 年 7 月 16 日收到修改稿)

非厄米趋肤效应是近几年非厄米物理研究领域中的热点问题, 它揭示了非厄米系统中体态波函数和能谱计算会敏感依赖于边界条件的新奇现象. 人们提出广义布里渊区的概念用以刻画非厄米系统中的体态波函数和能带性质. 基于广义布里渊区计算的非布洛赫拓扑数可以重新构建非厄米拓扑体边对应关系. 然而, 过去关于非厄米趋肤效应的讨论主要针对开放边界条件, 如果采用畴壁边界条件, 广义布里渊区和非布洛赫拓扑数的计算都需要重新考虑. 本文综述了近几年关于畴壁边界条件下非厄米趋肤效应的若干研究工作, 首先从一般的一维非厄米单带模型出发, 推导广义布里渊区方程的一般形式; 然后回顾了非厄米 SSH (Su-Schieffer-Heeger) 模型中广义布里渊区和非布洛赫拓扑数的计算; 最后在一维光量子行走的系统中, 介绍了实验上非厄米趋肤效应的实现和非厄米拓扑边缘态的探测.

关键词: 畴壁边界条件, 非厄米趋肤效应, 非布洛赫能带理论, 非厄米拓扑体边对应关系

PACS: 03.65.Yz, 03.65.Vf, 05.40.Fb, 73.22.Gk **DOI:** 10.7498/aps.71.20221087

1 引 言

在孤立的量子系统中利用厄米型的哈密顿量来研究物相的基本性质是量子物理研究的基本范式. 然而实际上, 绝对孤立的系统是不存在的, 因此人们发展了一系列理论用于描述与环境有相互作用的系统的演化, 其中一个最为经典的描述就是在马尔科夫近似下得到的 Lindblad 量子主方程[1,2]. 量子主方程的研究常常需要涉及到非厄米的哈密顿量: 一方面, 在忽略量子跃迁效应时, Lindblad 型主方程可以直接近似为非厄米哈密顿量下的薛定谔方程[3,4]; 另一方面, 如果把密度矩阵映射为双希尔伯特空间的波函数, 那么其在主方程下的演化可以严格映射为双空间波函数在非厄米哈密顿量下的演化[5–7]. 相较于量子主方程, 非厄米哈密顿量的描述在形式上显得更为简洁, 将之与传统厄米哈密顿量中的各种经典理论结合, 就有可能建立新的理论框架, 做出新的理论预言. 如非厄米拓扑能带理论的发展就是将非厄米哈密顿量与传统拓扑能带结合的典型范例[8–12]. 此外, 近年来随着实验技术的发展, 人们有能力在越来越多的物理系统中模拟非厄米哈密顿量[13–19], 这进一步促使人们探索非厄米系统中的种种新奇现象. 其中广受关注的一个成果就是关于非厄米趋肤效应的研究[20–25].

非厄米趋肤效应指的是在非厄米系统中, 体态波函数局域在边界附近的现象. 为了刻画这种效应, 需要将传统的布洛赫能带理论修正为非布洛赫能带理论. 以一维系统为例, 在传统的布洛赫能带理论中, 无论是开边界条件还是周期边界条件, 体态波函数都满足布洛赫波的形式 $\psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. 然而在非厄米系统中, 周期边界条件下的体态波函数依然是布洛赫波; 但是对于存在边界的系统, 波函数有可能会局域在边界附近, 其体态波函数会满足 $\psi(x) = \beta^x$ 的形式, 其中 $\beta = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}$, r 和 k 都是实数. 这里的 β 会在复平面内形成一条封闭曲线, 被称为广义布里渊区. 在不同的系统中, 不同边界条件下求解这条封闭曲线的方程被称为广义布里渊区方

† 通信作者. E-mail: shu500@mail.tsinghua.edu.cn

程. 基于广义布里渊区可以正确地计算不同边界下的实空间连续谱, 即非布洛赫能带. 非布洛赫能带理论最初的一个成功应用就是在非厄米拓扑问题中. 在广义布里渊区上做积分得到的非布洛赫拓扑数, 可以正确地预测系统中拓扑边缘态的产生与消失, 而布洛赫拓扑数做不到这一点[21]. 这一案例表明, 广义布里渊区和非布洛赫能带理论对理解和描述非厄米系统有着重要的意义.

非厄米趋肤效应被提出以来就吸引了凝聚态理论各界的广泛关注, 非布洛赫能带理论取得了蓬勃发展, 出现了很多重要成果[26–43], 如开边界条件下一维系统中广义布里渊区方程的一般形式[26]量子主方程中的非厄米趋肤效应[32,34,37,38]、非厄米趋肤效应的拓扑起源[29,30]等. 以上绝大多数的讨论都是针对开边界条件, 而广义布里渊区方程对边界条件的依赖非常敏感, 所以此时研究多种不同边界条件下的广义布里渊区是十分重要且必要的. 本文重点关注畴壁边界条件下的非厄米趋肤效应[17,44]. 畴壁边界条件指的是把两块不同参数的材料拼接在一起形成的一种空间结构, 在拓扑能带理论研究中有着广泛的应用[45–47]. 一方面, 在该系统中研究广义布里渊区可以帮助构建畴壁边界条件下的非厄米体边对应关系; 另一方面, 在很多量子模拟的实验系统中, 畴壁边界条件比开边界条件更容易实现 (如光量子行走系统), 因此对畴壁边界条件下非厄米系统的深入研究也为实验实现非厄米趋肤效应提供了更多的可能.

本文分为以下几个部分对畴壁边界条件下非厄米趋肤效应的相关研究展开综述: 第 2 节介绍在一般的一维单带紧束缚模型中, 广义布里渊区方程的推导; 第 3 节以非厄米 SSH (Su-Schieffer-Heeger) 模型为例, 介绍畴壁边界条件下非布洛赫能带理论的应用, 以及非厄米拓扑体边对应关系的构建; 第 4 节探讨非厄米趋肤效应在一维量子行走体系中的实现方案, 并再次应用非布洛赫能带理构建非厄米拓扑体边对应关系, 最后讨论实验上对拓扑边缘态的探测.

2 畴壁边界条件下广义布里渊区的计算

本节从一维单带模型出发, 推导畴壁边界条件下的广义布里渊区方程. 考虑由两个区域组成的一维单带模型, 两个区域在边界拼接到一起, 形成畴壁边界条件. 如图 1 所示, 其哈密顿量可写作

$$\hat{H} = \sum_{x=1}^{2N} \sum_{n=-m}^{m} t_{x,n} \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_{x+n}, \tag{1}$$

其中

$$t_{x,n} = \begin{cases} t_{\mathrm{L},n}, & x \in X_{\mathrm{L}}, \quad x+n \in X_{\mathrm{L}}, \\ t_{\mathrm{M},n}, & x \in X_{\mathrm{L/R}}, \quad x+n \in X_{\mathrm{R/L}}, \\ t_{\mathrm{R},n}, & x \in X_{\mathrm{R}}, \quad x+n \in X_{\mathrm{R}}. \end{cases} \tag{2}$$

左右两个区域各有 N 个格点, $X_{\mathrm{L}} = \{x|x=1,2,3,\cdots,N\}$, $X_{\mathrm{R}} = \{x|x=N+1,N+2,N+3,\cdots,2N\}$ 分别代表左右两个区域. 系统具有周期环状结构, 即 $\hat{a}_x^\dagger(\hat{a}_x) = \hat{a}_{x+2N}^\dagger(\hat{a}_{x+2N})$. 这里分别用 $t_{\mathrm{L},n}$ 和 $t_{\mathrm{R},n}$

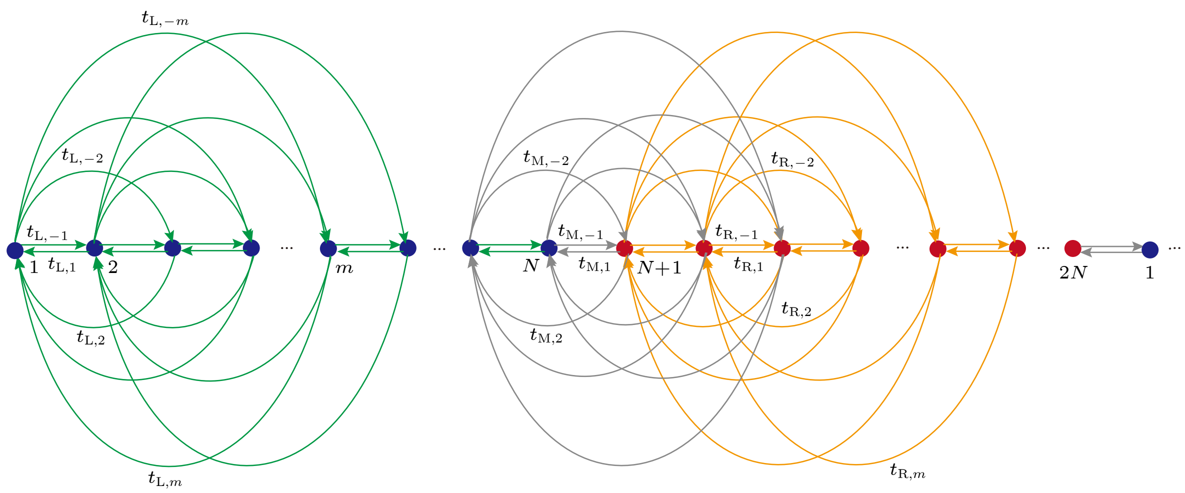


图 1 畴壁边界条件下的一维单带模型示意图, 格点首尾相连形成环状结构. 跃迁距离最远为 m

Fig. 1. Illustration of single-band lattice model under domain-wall configuration. The hopping distance is m at most.

代表左右两个区域内部相差 n 个格点的跃迁, m 代表最大跃迁幅度. 而 $t_{\mathrm{M},n}$ 代表所有跨越边界的跃迁. 图 2 给出了该模型中哈密顿量的所有本征波函数分布图, 可以看到, 当 $t_{\mathrm{L/M/R},n} \neq t^*_{\mathrm{L/M/R},-n}$, 哈密顿量是非厄米的, 波函数局域在了两个畴壁附近, 即非厄米趋肤效应. 在远离边界的左边 (右边) 区域内部, 系统具有平移对称性, 实空间波函数可分别表示为 $\beta^x_{\mathrm{L(R)}}$. 这里的 β^x 可视作厄米哈密顿量中布洛赫波形式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 的推广. 对于给定的能量 E, 通过分析实空间的薛定谔方程可以得到特征方程 $h_\alpha(\beta_\alpha) = E$, 其中

$$h_\alpha(\beta_\alpha) = \sum_{n=-m}^{m} t_{\alpha,n}\beta_\alpha^n, \qquad (\alpha = \mathrm{L,R}), \qquad (3)$$

其中, $h(\beta)$ 可以通过把布洛赫哈密顿量中的 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}$ 替换为 β 得到. 由实空间哈密顿量 (1) 式可知, 左右区域内部各自具有平移不变性, 对应的布洛赫哈密顿量可写作 $h_\alpha(k) = \sum_{n=-m}^{m} t_{\alpha,n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kn}$. 求解特征方程, 可以分别得到关于 β_α 的 $2m$ 个解. 这时得到波函数 $\beta^x_{\mathrm{L},n}$ 和 $\beta^x_{\mathrm{R},n}$ $(n = 1, 2, \cdots, 2m)$ 是满足左右两个区域内部实空间哈密顿量的 $2m$ 个空间模式. 波函数的通解可写作:

$$\psi(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2m} C_n\beta^x_{\mathrm{L},n}, & x \in X_{\mathrm{L}}, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2m} D_n\beta^x_{\mathrm{R},n}, & x \in X_{\mathrm{R}}, \end{cases}$$

其中, $C_n(D_n)$ 是通解中的待定系数. 需要注意的是此时得到的通解形式只考虑了哈密顿量左右区域内部的跃迁 $t_{\mathrm{L},n}$ 和 $t_{\mathrm{R},n}$, 而没有考虑跨越边界的跃迁 $t_{\mathrm{M},n}$. 这是因为 $t_{\mathrm{M},n}$ 作用在了边界附近的 $4m$ 个格点, 只有当讨论边界条件时才会引入 $t_{\mathrm{M},n}$ 的影响.

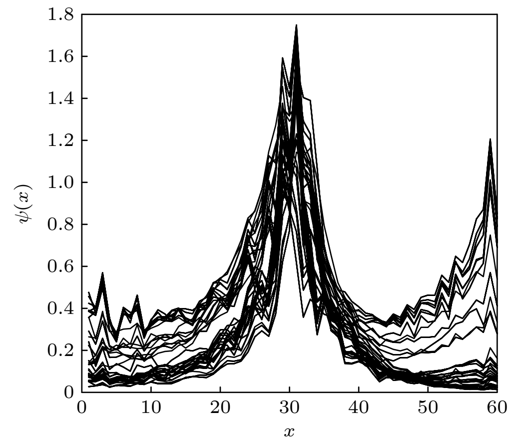


图 2 波函数在实空间的分布图. 其中 $m=2$, $t_{\mathrm{M},1} = t_{\mathrm{M},2} = t_{\mathrm{M},-1} = t_{\mathrm{M},-2} = 1$, $t_{\mathrm{L},-2} = 4$, $t_{\mathrm{L},-1} = -1$, $t_{\mathrm{L},1} = 3$, $t_{\mathrm{L},2} = 2$, $t_{\mathrm{R},-2} = 2$, $t_{\mathrm{R},-1} = 1$, $t_{\mathrm{R},1} = 3$, $t_{\mathrm{R},2} = -2$, $N = 30$
Fig. 2. Wave-function distribution in real space. Here, $m=2$, $t_{\mathrm{M},1} = t_{\mathrm{M},2} = t_{\mathrm{M},-1} = t_{\mathrm{M},-2} = 1$, $t_{\mathrm{L},-2} = 4$, $t_{\mathrm{L},-1} = -1$, $t_{\mathrm{L},1} = 3$, $t_{\mathrm{L},2} = 2$, $t_{\mathrm{R},-2} = 2$, $t_{\mathrm{R},-1} = 1$, $t_{\mathrm{R},1} = 3$, $t_{\mathrm{R},2} = -2$, $N = 30$.

接下来把通解波函数代入到畴壁边界条件下的哈密顿量中, 得到 $4m$ 个边界方程:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2m}\left[\sum_{n'=1-x}^{m} t_{\mathrm{L},n'}C_n\beta^{x+n'}_{\mathrm{L},n} + \sum_{n'=-m}^{-x} t_{\mathrm{M},n'}D_n\beta^{(x+n')+N}_{\mathrm{R},n} - EC_n\beta^x_{\mathrm{L},n}\right] = 0,\ 1 \leqslant x \leqslant m, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2m}\left[\sum_{n'=-m}^{N-x} t_{\mathrm{L},n'}C_n\beta^{x+n'}_{\mathrm{L},n} + \sum_{n'=N-x+1}^{m} t_{\mathrm{M},n'}D_n\beta^{(x+n')-N}_{\mathrm{R},n} - EC_n\beta^x_{\mathrm{L},n}\right] = 0,\ N-m+1 \leqslant x \leqslant N, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2m}\left[\sum_{n'=N-x+1}^{m} t_{\mathrm{R},n'}D_n\beta^{x+n'-N}_{\mathrm{R},n} + \sum_{n'=-m}^{N-x} t_{\mathrm{M},n'}C_n\beta^{(x+n')}_{\mathrm{L},n} - ED_n\beta^{x-N}_{\mathrm{R},n}\right] = 0,\ N+1 \leqslant x \leqslant N+m, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2m}\left[\sum_{n'=-m}^{2N-x} t_{\mathrm{R},n'}D_n\beta^{x+n'-N}_{\mathrm{R},n} + \sum_{n'=2N-x+1}^{m} t_{\mathrm{M},n'}C_n\beta^{(x+n')-2N}_{\mathrm{L},n} - ED_n\beta^{x-N}_{\mathrm{R},n}\right] = 0,\ 2N+1-m \leqslant x \leqslant 2N. \end{cases} \qquad (4)$$

将这 $4m$ 个方程联立, 求解 $4m$ 个未知数 C_n 和 D_n $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m)$. 将线性方程组写成矩阵形式即为

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi}=0, \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}^{(1)} & \boldsymbol{f}^{(1)}\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}} \\ \boldsymbol{g}^{(2)}\boldsymbol{B}^{\mathrm{L}} & \boldsymbol{f}^{(2)} \\ \boldsymbol{f}^{(3)}\boldsymbol{B}^{\mathrm{L}} & \boldsymbol{g}^{(3)} \\ \boldsymbol{f}^{(4)} & \boldsymbol{g}^{(4)}\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

以及 $\boldsymbol{\Psi}=[C_1C_2\cdots C_{2m}D_1D_2\cdots D_{2m}]^{\mathrm{T}}$. 这里 $\boldsymbol{g}^{(i)}$, $\boldsymbol{f}^{(i)}$都是 m 行 $2m$ 列的矩阵, 矩阵元均是从 (4) 式中提取的系数, 具体的表达式为

$$\begin{aligned}
g^{(1)}_{x,n}&=\sum_{n'=1-x}^{m}t_{\mathrm{L},n'}\beta_{\mathrm{L},n}^{x+n'}-E\beta_{\mathrm{L},n}^{x},\\
f^{(1)}_{x,n}&=\sum_{n'=-m}^{-x}t_{\mathrm{M},n'}\beta_{\mathrm{R},n}^{x+n'},\\
g^{(2)}_{x,n}&=\sum_{n'=-m}^{m-x}t_{\mathrm{L},n'}\beta_{\mathrm{L},n}^{x-m+n'}-E\beta_{\mathrm{L},n}^{x-m},\\
f^{(2)}_{x,n}&=\sum_{n'=-x+m+1}^{m}t_{\mathrm{M},n'}D_n\beta_{\mathrm{R},n}^{x-m+n'},\\
g^{(3)}_{x,n}&=\sum_{n'=1-x}^{m}t_{\mathrm{R},n'}\beta_{\mathrm{R},n}^{x+n'}-E\beta_{\mathrm{R},n}^{x},\\
f^{(3)}_{x,n}&=\sum_{n'=-m}^{-x}t_{\mathrm{M},n'}\beta_{\mathrm{L},n}^{(x+n')},\\
g^{(4)}_{x,n}&=\sum_{n'=-m}^{m-x}t_{\mathrm{R},n'}\beta_{\mathrm{R},n}^{(x-m)+n'}-\beta_{\mathrm{R},n}^{x-m},\\
f^{(4)}_{x,n}&=\sum_{n'=m-x+1}^{m}t_{\mathrm{M},n'}\beta_{\mathrm{L},n}^{x-m+n'},
\end{aligned} \tag{7}$$

而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{L}}$ 是 $2m\times 2m$ 维的对角矩阵, 矩阵元为 $B^{\mathrm{L/R}}_{i,j}=\beta^{N}_{\mathrm{L/R},i}\delta_{i,j}$. $\boldsymbol{M}$ 矩阵整体是 $4m\times 4m$ 维的矩阵. 线性方程组 (4) 有解的条件为 $\det \boldsymbol{M}=0$, 亦可变换为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{g}^{(1)}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{L}})^{-1} & \boldsymbol{f}^{(1)}\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}} \\ \boldsymbol{g}^{(2)} & \boldsymbol{f}^{(2)} \\ \boldsymbol{g}^{(3)} & \boldsymbol{f}^{(3)} \\ \boldsymbol{g}^{(4)}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{L}})^{-1} & \boldsymbol{f}^{(4)}\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}} \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

然后, 需要在 $N\to\infty$热力学极限下分析矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的行列式. 需要注意的是在热力学极限下 $\boldsymbol{g}^{(i)}$, $\boldsymbol{f}^{(i)}$的所有矩阵元的模长都是有限值, 但当 $N\to\infty$ 时, $|\beta^{N}_{\mathrm{R},n}|$ 和 $|\beta^{-N}_{\mathrm{L},n}|$有可能趋于 ∞ 或 0, 因此当考察行列式每一项的大小时, $|\beta^{N}_{\mathrm{R},n}|$ 和 $|\beta^{-N}_{\mathrm{L},n}|$将起到决定性的作用. 可以定义集合

$$\begin{aligned}
&\{\eta_i\mid i=1,2,3,\cdots,4m\}\\
&=\{1/\beta_{\mathrm{L},1},1/\beta_{\mathrm{L},2},\cdots,1/\beta_{\mathrm{L},2m},\\
&\quad\ \beta_{\mathrm{R},1},\beta_{\mathrm{R},2}\cdots,\beta_{\mathrm{R},2m}\},
\end{aligned} \tag{9}$$

并要求 $|\eta_1|\geqslant|\eta_2|\geqslant|\eta_3|\geqslant\cdots\geqslant|\eta_{4m}|$. 那么行列式 $\det\boldsymbol{M}$ 一定可以写成

$$\det\boldsymbol{M}=\sum_{\sum_i s_i=2m,s_i=0,1}A_{\{s\}}\prod_{i=1}^{4m}\eta_i^{s_i}, \tag{10}$$

这里的 $A_{\{s\}}$ 是一些有限大的系数. $\det\boldsymbol{M}$ 中绝对值最大的两项一定是 $A_1(\eta_1\eta_2\cdots\eta_{2m-1}\eta_{2m})^N$ 和 $A_2(\eta_1\eta_2\cdots\eta_{2m-1}\eta_{2m+1})^N$, 所以在热力学极限下 $\det\boldsymbol{M}=0$ 可以近似为

$$A_1\eta_1^N\eta_2^N\cdots\eta_{2m-1}^N\eta_{2m}^N+A_2\eta_1^N\eta_2^N\cdots\eta_{2m-1}^N\eta_{2m+1}^N=0. \tag{11}$$

然后分别讨论两种情况, 一种是 $|\eta_{2m}|>|\eta_{2m+1}|$, 此时当且仅当 $A_1(\eta_1\eta_2\cdots\eta_{2m})^N=0$ 时 $\det\boldsymbol{M}=0$ 才能成立. 对于这种情况只能解出有限个解, 但这无法对应热力学极限下无穷多个体态的解, 因此这种情况得到的结果无法描述非布洛赫能带的性质. 而对于另一种情况, $|\eta_{2m}|=|\eta_{2m+1}|$, (11) 式可求解得到

$$\frac{\eta_{4m}}{\eta_{4m+1}}=\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{1}{N}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{N}}\approx\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{N}}, \tag{12}$$

这里 $n=1,2,3,\cdots,N$, 因此 (12) 式在热力学极限下可求得无穷多个解 [21]. 综上, $|\eta_{2m}|=|\eta_{2m+1}|$ 即为广义布里渊区方程, 据此可以求出畴壁边界条件下的广义布里渊区和非布洛赫能带的能量. 值得注意的一点是, 广义布里渊区的计算与 $t_{\mathrm{M},n}$ 参数的具体取值无关. 这体现出广义布里渊区方程具有抗干扰性, 只要两块材料在边界上相连, 相连处跃迁参数的扰动并不会影响两块体材内部广义布里渊区的计算结果.

上述方法也可以推广到多带系统. 如果每个元胞有 q 个子格点, 最远跃迁距离为 m 个元胞, 特征方程将变为 $\det[\boldsymbol{h}(\beta)-E\boldsymbol{I}]=0$, $\boldsymbol{h}_\alpha(\beta)$ 是一个 $q\times q$ 的矩阵. 对于给定的能量, 理想情况下每个区域中

β 的解的个数最多为 $2mq$ 个. 所以只需将两个集合 $\{\beta_{\mathrm{R},1}, \beta_{\mathrm{R},2}, \cdots, \beta_{\mathrm{R},2mq}\}, \left\{\frac{1}{\beta_{\mathrm{L},1}}, \frac{1}{\beta_{\mathrm{L},2}}, \cdots, \frac{1}{\beta_{\mathrm{L},2mq}}\right\}$ 中的所有元素汇总到一起, 重新标记为 $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{4mq}\}$, 并要求 $\eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \cdots \geqslant \eta_{4mq}$. 那么 $|\eta_{2mq}| = |\eta_{2mq+1}|$ 就是求解多带系统的广义布里渊区的方程. 但是对于实际的模型, 情况可能更复杂, $\det[\boldsymbol{h}(\beta) - E\boldsymbol{I}] = 0$ 解的个数可能小于 $2mq$. 对于这类更为复杂的情况, 将在后面的章节中以畴壁边界条件下的非厄米 SSH 模型和量子行走实验模型为例展开详细论述.

3 非厄米 SSH 模型

本节将回顾畴壁边界条件下的非厄米 SSH 模型[44]. 以此模型为例, 具体阐释广义布里渊区的计算, 并将之应用到非厄米能带理论中, 计算非布洛赫能量和非布洛赫拓扑数, 验证畴壁边界条件下非厄米系统中的体边对应关系.

3.1 模 型

如图 3 所示, 考虑畴壁边界条件下的非厄米 SSH 模型. 开边界条件下的非厄米 SSH 模型过去有过许多讨论[48,49], 而在文献 [21] 中首次利用广义布里渊区概念解释了该模型中反常的体边对应现象. 而畴壁边界条件下非厄米 SSH 模型的哈密顿量可写作

$$H = \sum_{\alpha=\mathrm{L,R}} \sum_{j \in X_\alpha} \left(t_1^\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) a_j^\dagger b_j + \left(t_1^\alpha - \frac{\gamma}{2}\right) b_j^\dagger a_j + t_2 a_{j+1}^\dagger b_j + t_2 b_j^\dagger a_{j+1}, \tag{13}$$

这里 $a_j^\dagger$ (a_j) 和 $b_j^\dagger$ (b_j) 分别代表第 j 个格点 a 子格和 b 子格的粒子产生 (湮灭) 算符. 系统左右两边各包含 N 个格点, $X_\mathrm{L} = \{x|x = 1, 2, 3, \cdots, N\}$, $X_\mathrm{R} = \{x|x = N+1, N+2, N+3, \cdots, 2N\}$. 系统具有周期的环状结构, 所以有 $a_{2N+1}^\dagger(a_{2N+1}) = a_1^\dagger(a_1)$ 以及 $b_{2N+1}^\dagger(b_{2N+1}) = b_1^\dagger(b_1)$. 当 $\gamma \neq 0$ 时, 元胞内部 a 子格到 b 子格和 b 子格到 a 子格的跃迁强度不同, 因此哈密顿量具有非厄米性. 当 $\gamma = 0$ 时, 哈密顿量即退化回传统的厄米 SSH 模型. 在系统内部远离畴壁的区域, 系统具有平移不变性, 因此可以对左右两个区域分别做傅里叶变换, 得到布洛赫哈密顿量 $h_\alpha(k)$:

$$\boldsymbol{h}_\alpha(k) = h_\alpha^x(k)\sigma_x + h_\alpha^y(k)\sigma_y, \tag{14}$$

其中 $h_\alpha^x = t_1^\alpha + t_2\cos k$, $h_\alpha^y = t_2 \sin k + \frac{\gamma}{2}\mathrm{i}$.

该模型具有手征对称性 $\boldsymbol{\sigma}_z \boldsymbol{h}(k) \boldsymbol{\sigma}_z = -\boldsymbol{h}(k)$ 和非厄米趋肤效应, 是一个探讨非厄米趋肤效应和非厄米拓扑能带理论的经典模型. 开边界条件下的非厄米 SSH 模型已经有过详细的讨论[21], 在本节后面的部分, 将集中讨论畴壁边界条件下非厄米 SSH 模型中广义布里渊区的计算方法, 并基于此构建非厄米拓扑体边对应关系.

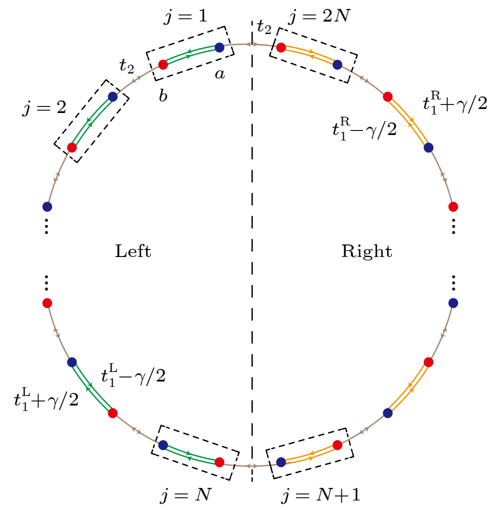


图 3 畴壁边界条件下的非厄米 SSH 模型. 在左边 (右边) 区域元胞内部 a 子格到 b 子格的跃迁是 $t_1^{\mathrm{L(R)}} - \gamma/2$, 而元胞内部 b 子格到 a 子格的是 $t_1^{\mathrm{L(R)}} + \gamma/2$. 此外, 畴壁两边不同区域具有相同的 t_2 和 γ[44]

Fig. 3. A non-Hermitian SSH model with two bulks. For left (right) bulk, the intra-cell hopping from a-site to b-site is $t_1^{\mathrm{L(R)}} - \gamma/2$ while the intra-cell hopping from b-site to a-site is $t_1^{\mathrm{L(R)}} + \gamma/2$. Also, different bulks holds same t_2 and γ[44].

3.2 广义布里渊区

本节采用第 2 节中的方法, 具体探讨广义布里渊区的计算. 首先可以将实空间哈密顿量中特定能量的本征态写作

$$|\varPsi\rangle = \sum_{j=1}^{2N} \left(\psi_{a,j} a_j^\dagger + \psi_{b,j} b_j^\dagger\right) |0\rangle, \tag{15}$$

其中 $\psi_{a,j}$ 和 $\psi_{b,j}$ 代表的波函数通解形式为

$$\begin{pmatrix} \psi_{a,j} \\ \psi_{b,j} \end{pmatrix} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{n_{\max}} \begin{pmatrix} \phi_a^{(1)} \\ \phi_b^{(1)} \end{pmatrix} \beta_{\mathrm{L},n}^{j}, & j \in X_\mathrm{L}, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{n_{\max}} \begin{pmatrix} \varphi_a^{(1)} \\ \varphi_b^{(1)} \end{pmatrix} \beta_{\mathrm{R},n}^{j-N_\mathrm{L}}, & j \in X_\mathrm{R}, \end{cases} \tag{16}$$

这里 β 是能量 E 的函数, 需要通过特征方程来求

解. 为了得到特征方程, 可以将布洛赫哈密顿量(14)式中的e^{ik}替换为β, 得到

$$\boldsymbol{h}_\alpha(\beta)=\begin{pmatrix}0 & (t_1^\alpha+\gamma/2)+t_2\beta^{-1}\\ (t_1^\alpha-\gamma/2)+t_2\beta & 0\end{pmatrix},\tag{17}$$

随后便可由$\det[\boldsymbol{h}_\alpha(\beta)-E\boldsymbol{I}]=0$确定特征方程

$$t_2\left(t_1^\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\beta_{\alpha,n}+t_2\left(t_1^\alpha-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{1}{\beta_{\alpha,n}}+(t_1^\alpha)^2-\frac{\gamma^2}{4}+t_2^2-E^2=0,\tag{18}$$

同时还可以确定$\phi_{a,b}^{(n)}$和$\varphi_{a,b}^{(n)}$之间满足的关系:

$$\frac{\phi_a^{(n)}}{\phi_b^{(n)}}=\frac{E}{(t_1^{\rm L}-\gamma/2)+t_2\beta_{{\rm L},n}}=f_n,\tag{19}$$

$$\frac{\varphi_a^{(n)}}{\varphi_b^{(n)}}=\frac{E}{(t_1^{\rm R}-\gamma/2)+t_2\beta_{{\rm R},n}}=g_n.\tag{20}$$

(18)式可化作一个关于β的一元二次方程, 方程有两个根, 所以(16)式中的$n_{\max}$取2.

将(15)式, (19)式和(20)式代入边界条件:

$$E\psi_{a,1}=\left(t_1^{\rm L}+\gamma/2\right)\psi_{b,1}+t_2\psi_{b,2N},\tag{21}$$

$$E\psi_{b,N}=\left(t_1^{\rm L}-\gamma/2\right)\psi_{a,N}+t_2\psi_{a,N+1},\tag{22}$$

$$E\psi_{a,N+1}=\left(t_1^{\rm R}+\gamma/2\right)\psi_{b,N+1}+t_2\psi_{b,N},\tag{23}$$

$$E\psi_{b,2N}=\left(t_1^{\rm R}-\gamma/2\right)\psi_{a,2N}+t_2\psi_{a,1},\tag{24}$$

得到关于$\phi_b^{(n)}$和$\psi_b^{(n)}$的一系列互相耦合的方程

$$\boldsymbol{M\Psi}=0,\tag{25}$$

其中

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}-t_2 & -t_2 & t_2\beta_{{\rm R},1}^N & t_2\beta_{{\rm R},2}^N\\ -t_2\beta_{{\rm L},1}^{N+1}f_1 & -t_2\beta_{{\rm L},2}^{N+1}f_2 & t_2g_1\beta_{{\rm R},1} & t_2g_2\beta_{{\rm R},2}\\ t_2\beta_{{\rm L},1}^N & t_2\beta_{{\rm L},2}^N & -t_2 & -t_2\\ t_2f_1\beta_{{\rm L},1} & t_2f_2\beta_{{\rm L},2} & -t_2\beta_{{\rm R},1}^{N+1}g_1 & -t_2\beta_{{\rm R},2}^{N+1}g_2\end{pmatrix},\tag{26}$$

以及$\boldsymbol{\Psi}=\left[\phi_b^{(1)}\phi_b^{(2)}\varphi_b^{(1)}\varphi_b^{(2)}\right]^{\rm T}$. (25)式有解则要求:

$$\det\boldsymbol{M}=\frac{\left(1/\beta_{{\rm L},1}^N-\beta_{{\rm R},1}^N\right)\left(1/\beta_{{\rm L},2}^N-\beta_{{\rm R},2}^N\right)}{(\beta_{{\rm L},1}f_1-\beta_{{\rm R},1}g_1)(\beta_{{\rm L},2}f_2-\beta_{{\rm R},2}g_2)}-\frac{\left(1/\beta_{{\rm L},1}^N-\beta_{{\rm R},2}^N\right)\left(1/\beta_{{\rm L},2}^N-\beta_{{\rm R},1}^N\right)}{(\beta_{{\rm L},1}f_1-\beta_{{\rm R},2}g_2)(\beta_{{\rm L},2}f_2-\beta_{{\rm R},1}g_1)}=0.\tag{27}$$

然后, 可以定义集合$\{\eta_i|i=1,2,3,4\}=\{1/\beta_{{\rm L},1},1/\beta_{{\rm L},2},\beta_{{\rm R},1},\beta_{{\rm R},2}\}$, 并对集合中$\eta_i$模长的大小进行排序$|\eta_1|\geqslant|\eta_2|\geqslant|\eta_3|\geqslant|\eta_4|$. 容易看出展开$\det\boldsymbol{M}$后, 其中求和的每一项包含两个不同的$\eta_i^N$相乘. 那么在热力学极限下$N\to\infty$, (27)式便可近似为

$$\det\boldsymbol{M}\approx A_1\eta_1^N\eta_2^N+A_2\eta_1^N\eta_3^N=0.\tag{28}$$

由第2节中相似的逻辑便可判断, 体态的波函数解的数目一定正比于N, 为了满足这一点, 集合$\{\eta_i|i=1,2,3,4\}$中的元素一定满足

$$|\eta_2|=|\eta_3|,\tag{29}$$

这就是畴壁边界条件下非厄米SSH模型的广义布里渊区方程. (29)式与文献[44]中所给的广义布里渊区方程完全一致, 是一个更为简洁的形式.

接下来详细阐述如何由广义布里渊区方程计算得到广义布里渊区和非布洛赫能带. 形式上, (29)式是关于4个变量$\beta_{{\rm L},1},\beta_{{\rm L},2},\beta_{{\rm R},1},\beta_{{\rm R},2}$的方程. 但是从(18)式可以看到, 所有的$\eta_i$都由能量$E$决定, 所以方程(29)中只有一个独立的复变量(在非厄米系统中E和β一般都是复数). 因此在方程(29)的约束下, 便可确定任意一个$\beta_{\alpha,n}$在复平面内形成的封闭曲线. 具体来讲, 可以从$\beta_{{\rm L},1}=r{\rm e}^{{\rm i}p}$出发, 先将完整的复变量$\beta_{{\rm L},1}=r{\rm e}^{{\rm i}p}$形式代入(18)式中, 计算能量$E$, 再通过能量计算$\beta_{{\rm L},2}$, $\beta_{{\rm R},1}$, $\beta_{{\rm R},2}$. 然后把求得的所有$\{1/\beta_{{\rm L},1},1/\beta_{{\rm L},2},\beta_{{\rm R},1},\beta_{{\rm R},2}\}$进行排序, 代入方程(29)中. 于是方程(29)将变成一个关于r和p方程, 遍历$p\in[0,2\pi)$, 便可得到r关于p的函数, 由此便可绘制左边区域的广义布里渊区的其中一支解. 依照此法可求得所有的$\beta_{\alpha,n}$.

图4(c)和图4(d)分别给出了左边区域和右边区域的广义布里渊区. 在开边界条件下的非厄米SSH模型中, 广义布里渊区的方程写作$|\beta_1|=|\beta_2|$, 因此β的两支解会在复平面内重合. 仅将边界条件改为畴壁边界条件后, 就会得到完全不同的广义布里渊区, 这也印证了非厄米趋肤效应对边界条件变化的敏感性.

我们又将广义布里渊区与布里渊区e^{ik}在复平面上形成的单位圆做对比. 需要注意的是, 在两种情况下, 广义布里渊区会退化为单位圆. 一种情况是当哈密顿量为厄米的$\gamma=0$, 另一种情况是系统具有周期边界条件$t_1^{\rm L}=t_1^{\rm R}$. 这表明非厄米趋肤效应是系统非厄米性与边界条件共同作用的结果.

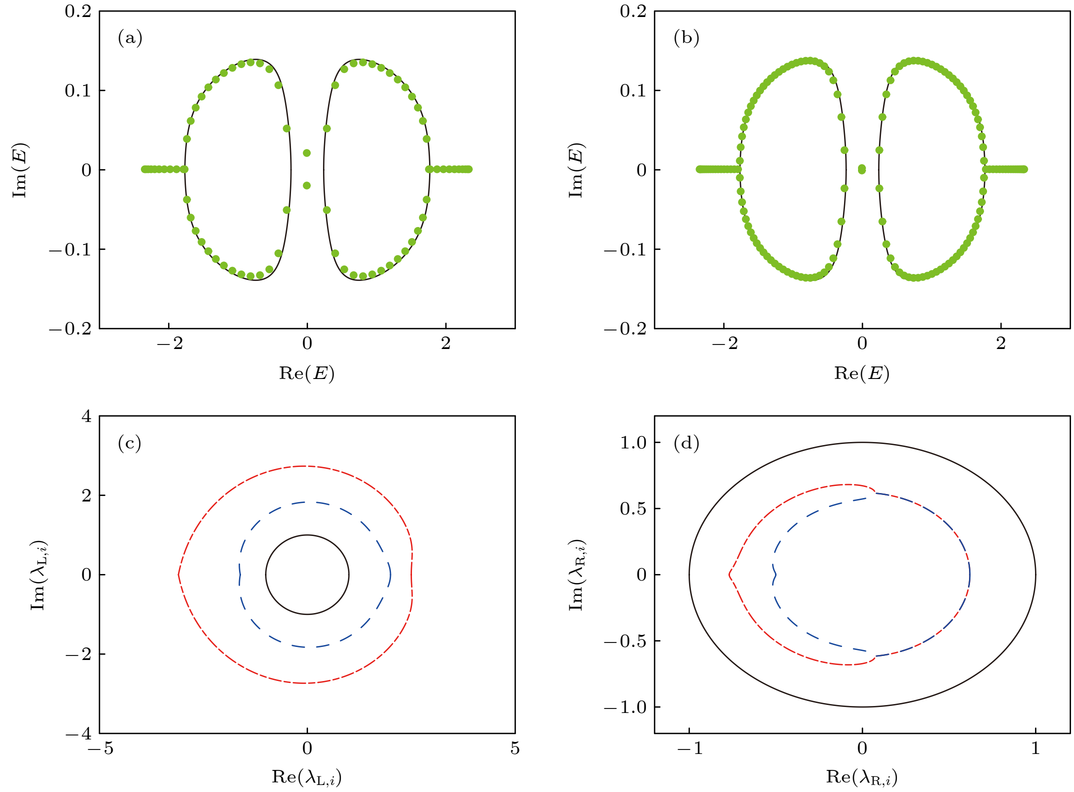


图 4 (a), (b) 体态波函数的理论 (黑线) 和数值 (绿点) 结果, (a) 图的链长为 $N=20$, (b) 图的链长为 $N=40$. (c) 复平面内 $\beta_{\mathrm{L},1}$ (红色点划线) 和 $\beta_{\mathrm{L},2}$ (蓝色虚线) 表示的左链的非布洛赫布里渊区. (d) 复平面内 $\beta_{\mathrm{R},1}$ (红色点划线) 和 $\beta_{\mathrm{R},2}$ (蓝色虚线) 表示的右链的非布洛赫布里渊区. 在图 (c) 和图 (d) 中, 取热力学极限 $N\to\infty$ 并且用黑色实线画出了布洛赫布里渊区作为对比. 在所有的子图中, 选取的参数为 $t_1^{\mathrm{L}}=-t_2$, $t_1^{\mathrm{R}}=1.5t_2$, $\gamma=1.33t_2$[44]

Fig. 4. (a), (b) Theoretical (black lines) and numerical (green dots) results of bulk-state energy spectrum. The length of chain is $N=20$ for panel (a) and $N=40$ for panel (b). (c) Non-Bloch Brillouin zones of the left bulk, represented by $\beta_{\mathrm{L},1}$ (red dash-dotted line) and $\beta_{\mathrm{L},2}$ (blue dashed line) on the complex plane. (d) Non-Bloch Brillouin zones of the right bulk, represented by $\beta_{\mathrm{R},1}$ (red dash-dotted line) and $\beta_{\mathrm{R},2}$ (blue dashed line) on the complex plane. In panels (c) and (d), we take the thermodynamic limit $N\to\infty$, and we also plot the Bloch Brillouin zones with black solid lines for comparison. For all subplots, we take $t_1^{\mathrm{L}}=-t_2$, $t_1^{\mathrm{R}}=1.5t_2$, $\gamma=1.33t_2$[44].

此外, 本文还基于广义布里渊区和特征方程, 绘制了非布洛赫能带 (见图 4(a) 和图 4(b)), 并将之与实空间严格对角化哈密顿量的能谱作对比. 可以看到在 $N=20$ 和 $N=40$ 的情况下, 数值计算的能谱和广义布里渊区的理论得到的非布洛赫能带符合得很好, 并且随着 N 的增大, 两者的差距变得更小. 这充分说明本文计算得到的广义布里渊区在畴壁边界条件下可以精确刻画热力学极限下实空间的本征能谱.

3.3 非布洛赫拓扑数与拓扑体边对应关系

本节基于 3.2 节得到的广义布里渊区, 计算畴壁边界条件下的非布洛赫拓扑不变量, 构建非厄米系统中的拓扑体边对应关系. 由系统的布洛赫哈密顿量 (14) 可知, 系统具有手征对称性, 其拓扑不变量可以由 Zak 相定义:

$$\nu_\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\langle\chi_\alpha\,|\mathrm{i}\partial_k|\,\psi_\alpha\rangle}{\langle\chi_\alpha\mid\psi_\alpha\rangle}\mathrm{d}k, \tag{30}$$

其中 $|\psi_\alpha(k)\rangle$ ($|\chi_\alpha(k)\rangle$) 分别是 $h_\alpha(k)$ 的右 (左) 本征矢, 即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_\alpha(k)\,|\psi_\alpha(k)\rangle&=E_\alpha(k)\,|\psi_\alpha(k)\rangle\,,\\ \boldsymbol{h}_\alpha^\dagger(k)\,|\chi_\alpha(k)\rangle&=E_\alpha^*(k)\,|\chi_\alpha(k)\rangle\,,\end{aligned} \tag{31}$$

这里 ν_{L} 和 ν_{R} 分别代表左边区域和右边区域的拓扑数, 两者之差如果非 0, 畴壁上就会出现边缘态, 这就是传统意义上畴壁边界条件下的体边对应关系. 但是对于非厄米系统来说, 需采用非布洛赫能带理论, 将积分区间从布里渊区修正为广义布里渊区. 因此将 $\beta=r(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}$ 和 $h(\beta)$ 代入 (30) 式便可得到非布洛赫拓扑数的计算公式:

$$\tilde{\nu}_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\langle \tilde{\chi}_\alpha(p)|\mathrm{i}\partial_p|\tilde{\psi}_\alpha(p)\rangle}{\langle \tilde{\chi}_\alpha(p)|\tilde{\psi}_\alpha(p)\rangle}\mathrm{d}p, \tag{32}$$

其中

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{h}_\alpha(\beta)|\tilde{\psi}_\alpha\rangle = E_\alpha(\beta)|\tilde{\psi}_\alpha\rangle, \\ &\boldsymbol{h}_\alpha^\dagger(\beta)\,|\tilde{\chi}_\alpha\rangle = E_\alpha^*(\beta)\,|\tilde{\chi}_\alpha\rangle\,, \end{aligned} \tag{33}$$

这里的β需代入为广义布里渊区方程求得的结果$r(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}$. 在这样的定义下, 根据$\tilde{\nu}_{\mathrm{L}}$和$\tilde{\nu}_{\mathrm{R}}$的差值就可以正确预测畴壁边界条件下的拓扑边缘态, 区分拓扑平庸区和拓扑非平庸区.

需要注意的是, 从图 4(c) 和图 4(d) 可以看出, 广义布里渊区方程一般会求得$r(p)$的两支解, 也就是说 (32) 式中有两个可以选择的积分区间分别对应$\beta_{\alpha,1}$和$\beta_{\alpha,2}$在复平面上形成的封闭曲线. 在非厄米 SSH 模型中可以证明, 同一个参数下求得的两个广义布里渊区上积分得到的非布洛赫拓扑数是一致的[44].

图 5(a)—(c) 在$t_1^{\mathrm{L}}-t_1^{\mathrm{R}}$的参数平面内画出了能谱绝对值最小值. 深蓝色的区域中能量绝对值的最小值为 0, 意味着存在边缘态零模, 对应拓扑非平庸区. 值得注意的一点是, 当左右区域参数相同时 (即在$t_1^{\mathrm{L}}=t_1^{\mathrm{R}}$的黑色实线上), 系统具有周期边界条件, 此时广义布里渊区退化为单位圆, 能隙闭合点的位置也与布洛赫哈密顿量计算得到的结果一致$t_1^{\mathrm{L}}=t_1^{\mathrm{R}}=\pm t_2\pm\dfrac{\gamma}{2}$.

图 5(d)—(f) 分别把布洛赫和非布洛赫拓扑数和数值计算的能谱做对比, 确认了非布洛赫体边对应性. 在厄米的情况下$\gamma=0$, 非布洛赫和布洛赫拓扑数的结果一致, 即当$(|t_1^{\mathrm{L}}|-|t_2|)(|t_1^{\mathrm{R}}|-|t_2|)<0$时系统存在零模. 随着$\gamma$增加, 布洛赫和非布洛赫拓扑数之间的区别便显现出来, 左右区域非布洛赫拓扑数的差值可以正确地预测边缘零模的出现与

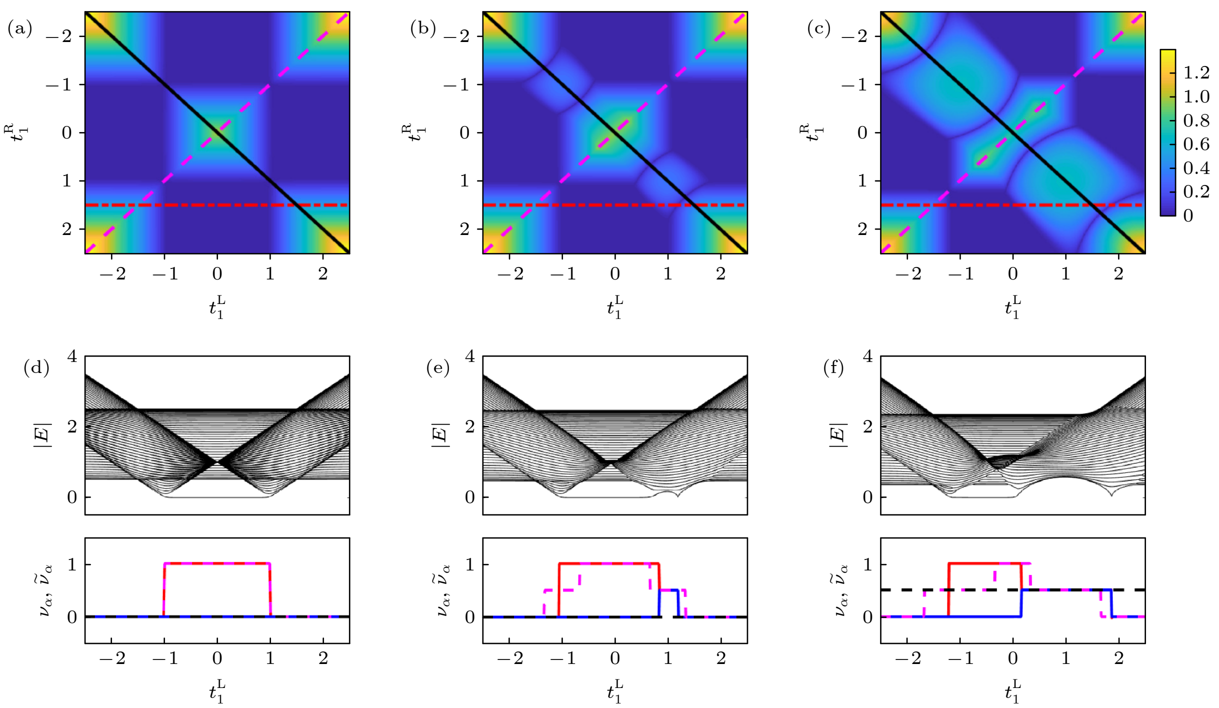


图 5 (a)—(c) 颜色栏在t_1^{L}-t_1^{R}平面能谱绝对值的最小值. 这里选取$N=40$. 图 (a) 中$\gamma=0$, 图 (b) 中$\gamma=0.67\,t_2$, 图 (c) 中$\gamma=1.33\,t_2$. 黑色线对应参数$t_1^{\mathrm{L}}=t_1^{\mathrm{R}}$, 此时畴壁构型会退化回周期边界条件的均匀格点模型. 玫红色的虚线对应的参数为$t_1^{\mathrm{L}}=-t_1^{\mathrm{R}}$. 图 (a)—(c) 里的红色点划线给出了用在图 (d)—(f) 里的参数, 即$t_1^{\mathrm{R}}=1.5\,t_2$. (d)—(f) 能谱绝对值 (上部) 和拓扑数 (下部). 图中下部给出了左链的布洛赫拓扑数ν_{L}(玫红虚线) 和右链的非布洛赫拓扑数ν_{R}(黑色虚线), 以及左链的非布洛赫拓扑数$\tilde{\nu}_{\mathrm{L}}$(红色实线) 和右链的非布洛赫拓扑数$\tilde{\nu}_{\mathrm{R}}$(蓝色实线)[44]

Fig. 5. (a)–(c) Contour plots of absolute values of the energy-spectrum minimum on the t_1^{L}-t_1^{R} plane. Here, we take $N=40$. We also take $\gamma=0$ for (a), $\gamma=0.67\,t_2$ for (b) and $\gamma=1.33\,t_2$ for (c). The black solid lines are given by $t_1^{\mathrm{L}}=t_1^{\mathrm{R}}$, where the domain-wall configuration is reduced to single homogeneous bulk with a periodic boundary condition. The magenta dashed lines are given by $t_1^{\mathrm{L}}=-t_1^{\mathrm{R}}$. The red dashed-dotted line in panels (a)–(c) correspond to parameters we use in panels (d)–(f) with $t_1^{\mathrm{R}}=1.5\,t_2$. (d)–(f) The absolute values of the energy spectrum (upper panels) and various winding numbers (lower panels). In the lower panel, we show the Bloch winding numbers for the left bulk ν_{L} (magenta dashed lines) and the right bulk ν_{R} (black dashed lines), as well as non-Bloch winding numbers for the left bulk $\tilde{\nu}_{\mathrm{L}}$ (red solid lines) and the right bulk $\tilde{\nu}_{\mathrm{R}}$ (blue solid lines)[44].

消失, 而布洛赫拓扑数无法做到这一点. 这进一步说明, 相比于布洛赫拓扑数, 基于广义布里渊区的非布洛赫拓扑数更能正确地判断系统拓扑性质的变化.

此外, 我们还发现, 即使畴壁某一侧的参数不变化, 其非布洛赫拓扑数的计算却依赖于广义布里渊区, 进而会受到另一侧参数的影响. 例如, 图 5(f) 中右侧区域的非布洛赫拓扑数 $\tilde{\nu}_{\mathrm{R}}$ 会在 $t_1^{\mathrm{R}}\approx 0.16$ 附近从 0 变化为 0.5, 而此时右链的参数始终保持不变. 这是畴壁边界条件下的非厄米系统又一个独特的性质.

4 一维量子行走体系中的非厄米趋肤效应

在第 3 节讨论的非厄米 SSH 模型中, 已经从理论上推导了广义布里渊区和非布洛赫拓扑数, 并基于此重新构建了非厄米系统中的拓扑体边对应关系. 但是如何在实验系统中模拟非厄米趋肤效应并验证非厄米体边对应关系, 依然是一个重要的问题. 本节将介绍如何在一维光量子行走的实验平台中模拟具有非厄米趋肤效应的有效哈密顿量, 并在该模型中讨论广义布里渊区和非布洛赫拓扑数的计算, 再次验证非厄米体边对应关系[17].

4.1 模 型

量子行走是一类高度可控的周期驱动系统, 被广泛应用于量子算法[50,51]和量子模拟[52–55]的研究. 近些年来, 人们开始致力于在离散量子行走平台中模拟和研究非厄米拓扑相[56–58], 这为研究具有非厄米趋肤效应的拓扑非平庸模型提供了一个良好的基础.

在本文讨论的一维光量子行走系统中, 以时间演化算符 U 来描述光子态每一步的演化 $|\psi(t)\rangle = \boldsymbol{U}^t|\psi(0)\rangle$, 这里的 $t=0,1,2,3,\cdots$ 代表时间演化的步数. 量子行走中的光子态 $|\psi\rangle$ 一般包含空间和内态两种自由度, 可写作 $|\psi\rangle=\sum_x\sum_{s=0,1}\psi_s(x)|x\rangle\otimes|s\rangle$, 其中 $s=0,1$ 代表光子两种不同的偏振. 由时间演化算符可以定义有效哈密顿量 $\boldsymbol{U}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}}$, 时间演化得到的光子态可以视作其在有效哈密顿量 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}$ 下的演化. $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}$ 具有相同的本征态, 定义为 $\boldsymbol{U}|\psi\rangle=\lambda|\psi\rangle$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}|\psi\rangle=\varepsilon|\psi\rangle$. 这里 $\lambda=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon}$. ε 是系统的准能量, 其取值范围是 $\varepsilon\in[-\pi,\pi)$.

在量子行走系统中, 选定如下的非幺正时间演化算符:

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\boldsymbol{S}_2 R\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\boldsymbol{M}_\gamma\boldsymbol{R}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \tag{34}$$

其中, $\boldsymbol{R}(\theta)=\boldsymbol{I}_{\mathrm{w}}\otimes\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\boldsymbol{\sigma}_y}$ 只改变光子的内态, 被称为旋转算符, $\theta_{1,2}$ 为旋转参数. 如图 6(a) 所示, 在我们选择的环状畴壁结构中, 旋转参数与空间位置有关, 对左边 (右边) 区域, $x=-N,-N-1,\cdots,-1$ $(x=0,1,2,\cdots,N-1)$, $\theta_{1,2}(x)=\theta_{1,2}^{\mathrm{L(R)}}$. $\boldsymbol{S}_{1,2}$ 是位移算符:

$$\boldsymbol{S}_1=\sum_x|x\rangle\langle x|\otimes|0\rangle\langle 0|+|x+1\rangle\langle x|\otimes|1\rangle\langle 1|, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{S}_2=\sum_x|x-1\rangle\langle x|\otimes|0\rangle\langle 0|+|x\rangle\langle x|\otimes|1\rangle\langle 1|, \tag{36}$$

可以将不同的内态和空间位置的跃迁耦合起来. $\boldsymbol{M}_\gamma=\boldsymbol{I}_{\mathrm{w}}\otimes(\mathrm{e}^{\gamma}|0\rangle\langle 0|+\mathrm{e}^{-\gamma}|1\rangle\langle 1|)$ 是一个非幺正算符, γ 控制着有效哈密顿量的非厄米性. 这里, $\boldsymbol{I}_{\mathrm{w}}$ 是实空间的单位矩阵, $\boldsymbol{\sigma}_{x,y,z}$ 是泡利矩阵.

通过对角化实空间的时间演化算符, 得到了所有的本征态波函数, 如图 6(b) 所示. 可以看到, 随着 γ 的增加, 体态波函数会渐渐局域在畴壁边界附近. 由此可以判断系统具有非厄米趋肤效应. 该模型还具有手征对称性, $\boldsymbol{\sigma}_x\boldsymbol{U}\boldsymbol{\sigma}_x=\boldsymbol{U}^{-1}$, 所以也可以在其中探讨非厄米拓扑相变和体边对应关系. 接下来将在第 4.2 节讨论该模型中的广义布里渊区的计算, 在第 4.3 节讨论非布洛赫拓扑数的计算.

4.2 广义布里渊区的计算

为了计算广义布里渊区, 先给出波函数本征态的通解形式:

$$\langle x|\psi\rangle=\sum_{n=1}^{n_{\max}}\beta_{\alpha,n}^x\left|\phi_n^\alpha\right\rangle, \tag{37}$$

这里 $|\phi_n^\alpha\rangle$ 代表光子的内态, $\beta_{\alpha,n}$ 需要通过特征方程求解. 为此将时间演化算符改写为这样的形式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}=\sum_x\Big[&|x\rangle\langle x+1|\otimes\boldsymbol{A}_m(x)+|x\rangle\\&\times\langle x-1|\otimes\boldsymbol{A}_p(x)+|x\rangle\langle x|\otimes\boldsymbol{A}_s(x)\Big],\end{aligned} \tag{38}$$

这里 $\boldsymbol{A}_{m,p,s}$ 都是 2×2 的矩阵, 形式为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_m(x)=\boldsymbol{F}_m(x-1)\boldsymbol{M}_\gamma\boldsymbol{G}_s(x-1),\\&\boldsymbol{A}_p(x)=\boldsymbol{F}_s(x)\boldsymbol{M}_\gamma\boldsymbol{G}_p(x-1),\\&\boldsymbol{A}_s(x)=\boldsymbol{F}_s(x)\boldsymbol{G}_s(x)+\boldsymbol{F}_m(x+1)\boldsymbol{G}_p(x),\end{aligned} \tag{39}$$

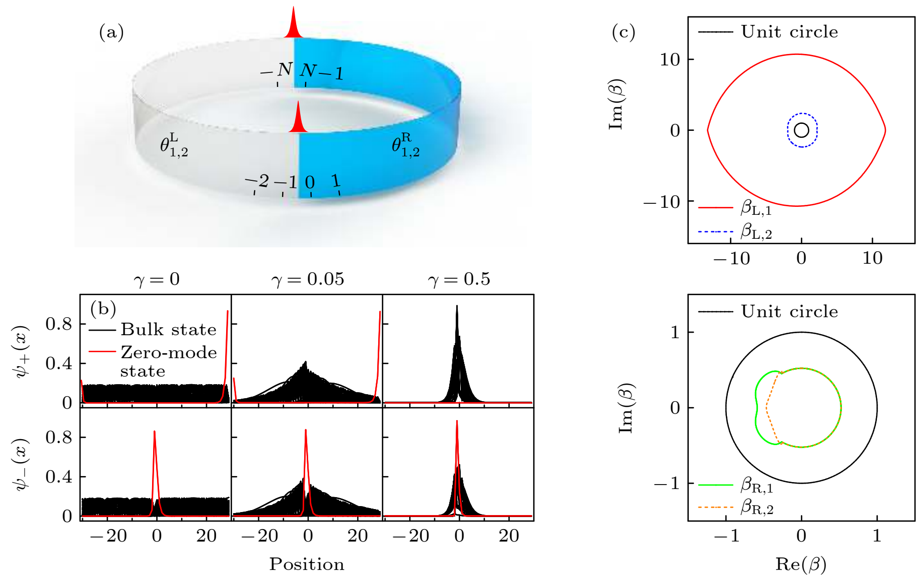


图 6 具有非厄米趋肤效应的量子行走 (a) 畴壁边界条件示意图; (b) 体态波函数 (黑色) 和边缘态波函数 (红色) 的空间分布, 其中 $\psi_\pm(x)=|(\langle x|\otimes\langle\pm|)|\psi\rangle|$, $|\pm\rangle=(|0\rangle\pm|1\rangle)/\sqrt{2}$是手征对称算符的本征态; (c) 左边 (右边) 区域的广义布里渊区 $\beta_{{\rm L(R)},i}$, $i=1,2$代表 β有两支解. 标准的广义布里渊区是单位圆 (黑色实线). 参数选取为 $N=30$, $\theta^{\rm R}_1=0.1875\pi$, $\theta^{\rm L}_1=-0.3333\pi$, $\theta^{\rm R}_2=0.2\pi$, $\theta^{\rm L}_2=-0.6667\pi$, 以及 $\gamma=0.5$ [17]

Fig. 6. Quantum walks with non-Hermitian skin effect: (a) Schematic illustration of the domain-wall configuration. (b) Spatial distribution of the projected norms of bulk (black) and edge (red) states, with $\psi_\pm(x)=|(\langle x|\otimes\langle\pm|)|\psi\rangle|$. Here, $|\pm\rangle=(|0\rangle\pm|1\rangle)/\sqrt{2}$ are eigenstates of the chiral-symmetry operator. (c) Generalized Brillouin zones for left (right) bulk $\beta_{{\rm L(R)},i}$, $i=1,2$ indicates two solutions of β. Whereas the standard Brillouin zones are indicated by unit circles (solid black line). Parameters: $N=30$, $\theta^{\rm R}_1=0.1875\pi$, $\theta^{\rm L}_1=-0.3333\pi$, $\theta^{\rm R}_2=0.2\pi$, $\theta^{\rm L}_2=-0.6667\pi, \gamma=0.5$ [17].

其中

$$\boldsymbol{F}_m(x)=\boldsymbol{R}\left[\frac{\theta_1(x-1)}{2}\right]\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{R}\left[\frac{\theta_2(x)}{2}\right],$$
$$\boldsymbol{F}_s(x)=\boldsymbol{R}\left[\frac{\theta_1(x)}{2}\right]\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{R}\left[\frac{\theta_2(x)}{2}\right],$$
$$\boldsymbol{G}_s(x)=\boldsymbol{R}\left[\frac{\theta_2(x)}{2}\right]\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{R}\left[\frac{\theta_1(x)}{2}\right],$$
$$\boldsymbol{G}_p(x)=\boldsymbol{R}\left[\frac{\theta_2(x+1)}{2}\right]\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{R}\left[\frac{\theta_1(x)}{2}\right],\tag{40}$$

以及 $\boldsymbol{P}_0=|0\rangle\langle 0|$, $\boldsymbol{P}_1=|1\rangle\langle 1|$. 对于远离畴壁边界的左边 (右边) 区域内部可以将 $\boldsymbol{A}_{m,p,s}$中所有的旋转参数替换为左边 (右边) 区域的 $\theta^{\rm L(R)}_{1,2}$. 于是便可得到左右区域分别满足的特征方程:

$$\det\left[\boldsymbol{A}^\alpha_m\beta_\alpha+\boldsymbol{A}^\alpha_p\frac{1}{\beta_\alpha}+\boldsymbol{A}^\alpha_s-\lambda\right]=0.\tag{41}$$

由于 $\det\boldsymbol{A}_{m,p}=0$, 所以等式 (41) 左边 β^2_α和 β^{-2}_α项的系数都是0. (41) 式可以化作关于 β_α的一元二次方程, 因此 (37) 式中 $n_{\max}=2$. 接下来将 (37) 式中波函数的通解代入畴壁边界条件 (即 $x=-N$, $-1,0,N-1$格点的本征态方程), 即可得到 $\boldsymbol{M}[|\phi^{\rm L}_1\rangle_{\rm c},|\phi^{\rm L}_2\rangle_{\rm c},|\phi^{\rm R}_1\rangle_{\rm c},|\phi^{\rm R}_2\rangle_{\rm c}]^{\rm T}=0$, 其中

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}^{\rm L}_p\beta^{-N-1}_{\rm L,1} & -\boldsymbol{A}^{\rm L}_p\beta^{-N-1}_{\rm L,2} & \boldsymbol{A}_p(-N)\beta^{N-1}_{\rm R,1} & \boldsymbol{A}_p(-N)\beta^{N-1}_{\rm R,2}\\ \boldsymbol{W}_1 & \boldsymbol{W}_2 & \boldsymbol{A}_m(-1) & \boldsymbol{A}_m(-1)\\ \boldsymbol{A}_p(0)\beta^{-1}_{\rm L,1} & \boldsymbol{A}_p(0)\beta^{-1}_{\rm L,2} & -\boldsymbol{A}^{\rm R}_p\beta^{-1}_{\rm R,1} & -\boldsymbol{A}^{\rm R}_p\beta^{-1}_{\rm R,2}\\ \boldsymbol{A}_m(N-1)\beta^{-N}_{\rm L,1} & \boldsymbol{A}_m(N-1)\beta^{-N}_{\rm L,2} & \boldsymbol{V}_1\beta^N_{\rm R,1} & \boldsymbol{V}_2\beta^N_{\rm R,2}\end{pmatrix},\tag{42}$$

及 $\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{A}^{\rm L}_p\beta^{-2}_{{\rm L},i}+[\boldsymbol{A}_s(-1)-\beta]\beta^{-1}_{{\rm L},i}$, $\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{A}^{\rm R}_p\beta^{-2}_{{\rm R},i}+[\boldsymbol{A}_s(N-1)-\lambda]\beta^{-1}_{{\rm R},i}$. 方程有解的条件是 $\det\boldsymbol{M}=0$.

同样地, 需要定义集合 $\{\eta_i|i=1,2,3,4\}=\{\beta^{-1}_{\rm L,1}, \beta^{-1}_{\rm L,2},\beta_{\rm R,1},\beta_{\rm R,2}\}$, 并要求 $|\eta_1|\geqslant|\eta_2|\geqslant|\eta_3|\geqslant|\eta_4|$. 那

么在热力学极限下 det $\boldsymbol{M}$ 可近似为

$$\det \boldsymbol{M} \approx A_1\eta_1^{2N}\eta_2^{2N} + A_2\eta_1^{2N}\eta_3^{2N}. \qquad (43)$$

于是便可得到形式上与 (29) 式完全一样的广义布里渊区方程, 并可按照 3.2 节中的方法求解广义布里渊区. 图 6(c) 给出了左右区域广义布里渊区的例子.

4.3 非布洛赫拓扑数与体边对应关系

接下来, 基于广义布里渊区, 计算量子行走模型中的非布洛赫拓扑数. 需要注意的是, 量子行走是周期驱动系统, 即使是对于传统的幺正时间演化算符, 其拓扑性质与静态哈密顿量的情况也有所区别. 对于静态哈密顿量, 如系统满足手征对称性, 那么其能谱一定是关于 $E=0$ 对称分布, 能隙也一定出现在零能处. 但是对于周期驱动的系统来说, 其准能量分布在 $[-\pi,\pi)$ 区间, 如果系统有手征对称性, 那么准能量不仅关于 $E=0$ 对称, 也关于 $E=\pi$ 对称, 所以拓扑绝缘体的能隙会出现在准能量 $\varepsilon=0$ 和 $\varepsilon=\pi$ 两个位置. 因此当系统处于拓扑非平庸区时, 其边缘态能量会有 0 和 π 两个模式, 相应地, 也需计算 0 模和 π 模两种拓扑数 ν_0 和 ν_π. 关于 Floquet 系统中的拓扑理论, 在过往的文章中有过很多讨论[59–63]. 这里先对布洛赫拓扑数 ν_0 和 ν_π 的计算方法做简单介绍. 首先可以定义另一个时间框架下的时间演化算符:

$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{M}_\gamma^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{R}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}(\theta_1)\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{R}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\boldsymbol{M}_\gamma^{\frac{1}{2}}, \quad (44)$$

$\boldsymbol{U}'$ 和 $\boldsymbol{U}$ 相当于选取了不同的时间起始点, 他们具有相同的准能量能谱, 都满足手征对称性, 对称性算符均为 $\boldsymbol{\sigma}_x$. 然后参照 (30) 式中的方法, 分别计算不同时间框架下的布洛赫拓扑数 ν 和 ν'. 注意 (30) 式中的 χ_k 和 ψ_k 分别是时间演化算符的左右本征矢, 定义为

$$\boldsymbol{U}(k)\left|\psi(k)\right\rangle = \lambda(k)\left|\psi(k)\right\rangle,$$
$$\boldsymbol{U}^\dagger(k)\left|\chi(k)\right\rangle = \lambda^*(k)\left|\chi(k)\right\rangle. \qquad (45)$$

将 $\boldsymbol{U}(k)$ 替换为 $\boldsymbol{U}'(k)$ 即可得到另一个时间框架下的 $\chi'(k)$, $\psi'(k)$ 和拓扑数 ν'. 可以证明 $\nu_{0,\pi}$ 和 ν, ν' 之间具有如下关系[59]:

$$\nu_{0(\pi)} = \frac{\nu \pm v'}{2}. \qquad (46)$$

对于传统的幺正量子行走系统, $\nu_{0(\pi)}$ 即可预测系统 0(π) 模的拓扑边缘态, 但是在本文讨论的非幺正量子行走系统中, 布洛赫拓扑数并不能正确地刻画非厄米系统中的拓扑性质, 因此, 还需根据广义布里渊区的计算结果和拓扑数的计算公式 (32), 计算不同框架下的非布洛赫拓扑数 $\tilde{\nu}$ 和 $\tilde{\nu}'$, 进而得到 0(π) 模的非布洛赫拓扑数:

$$\tilde{\nu}_{0(\pi)} = \frac{\tilde{\nu} \pm \tilde{\nu}'}{2}. \qquad (47)$$

这样计算得到的 $\tilde{\nu}_{0(\pi)}$ 便可正确预测畴壁边界上 0 模边缘态和 π 模边缘态. 图 7 中, 将数值对角化的能谱和非布洛赫拓扑数、布洛赫拓扑数分别做对比, 可以清晰地看到 0 模 (π 模) 边缘态产生的区域与布洛赫拓扑数的差值 $\Delta\nu_{0(\pi)} = \nu^{\rm L} - \nu^{\rm R}$ 非零的区域不相符, 而与非布洛赫拓扑数差值 $\Delta\tilde{\nu}_{0(\pi)} = \tilde{\nu}^{\rm L} - \tilde{\nu}^{\rm R}$ 非零的区域一致.

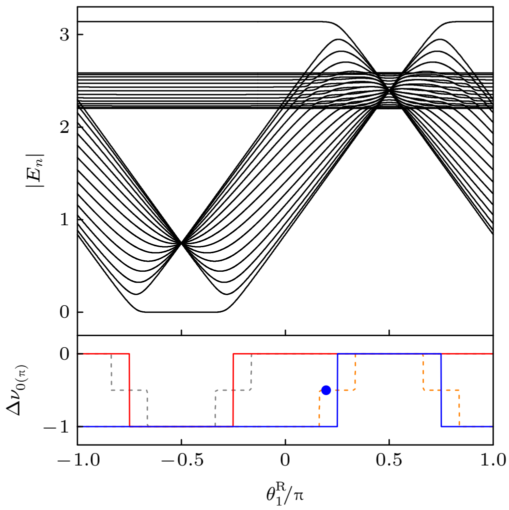


图 7 黑色实线为准能量能谱, 红色实线和蓝色实线分别代表零模拓扑不变量的差值和 π 模拓扑不变量的差值; 灰色虚线和橙色虚线分别代表左右两边零模拓扑不变量的差值和 π 模拓扑不变量的差值; 蓝色点代表图 8 选取的参数. 参数选择: $\theta_1^{\rm L}=9\pi/16$, $\theta_2^{\rm R}=\pi/4$, $\theta_2^{\rm L}=3\pi/4$, 以及 $\gamma=0.2746$ [17]

Fig. 7. Black solid line represents quasienergy spectrum. Red solid line and blue solid line represents zero-mode and π-mode topological invariant difference, respectively. Grey dashed line and orange dashed line represents zero-mode and π-mode topological invariant difference, respectively. The blue dot indicates the parameter for Fig. 8. Parameters: $\theta_1^{\rm L}=9\pi/16$, $\theta_2^{\rm R}=\pi/4$, $\theta_2^{\rm L}=3\pi/4$, and $\gamma=0.2746$ [17].

4.4 实验探测边缘态

前面几节已经在理论上验证了非布洛赫拓扑数与非厄米系统中边缘态的对应关系, 但是如何在实验上探测非厄米系统中的边缘态依然是一个具

有挑战性的问题. 由于非厄米趋肤效应的存在, 边缘态的波函数分布和体态波函数一样, 都是局域在边界上, 因此很难通过直接测量波函数在实空间分布的方法识别出拓扑边缘态. 为了克服这一困难, 我们通过对每一步时间演化的波函数加权求和的方法直接将边缘态模式提取出来. 具体方法如下. 首先定义

$$|\Phi_{\varepsilon}(t)\rangle=\sum_{t'=0}^{t}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t'}}{t+1}|\Phi(t')\rangle,\ (\varepsilon=0,\pi) \tag{48}$$

然后, 把含时演化的波函数在本征态上做展开, 得到

$$|\Phi(t)\rangle=\boldsymbol{U}^{t}|\Phi(0)\rangle=\sum_{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{n}t}\Phi_{n}|\psi_{n}\rangle, \tag{49}$$

其中 $\Phi_n=\langle\chi_n|\Phi(0)\rangle$, $|\psi_n\rangle$ 和 $\langle\chi_n|$ 分别是时间演化算符的本征左矢和右矢, 分别满足 $\boldsymbol{U}|\psi_n\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n}|\psi_n\rangle$ $\langle\chi_n|\boldsymbol{U}^{-1}=\langle\chi_n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_n}$. 将 (49) 式代入 (48) 式得到:

$$|\Phi_{\varepsilon}(t)\rangle=\sum_{n}f_{\varepsilon}(E_n)\Phi_n|\psi_n\rangle, \tag{50}$$

其中

$$f_{\varepsilon}(E_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{t+1}\dfrac{1-\exp[\mathrm{i}(E_n-\varepsilon)(t+1)]}{1-\exp[\mathrm{i}(E_n-\varepsilon)]}, & E_n\neq\varepsilon,\\ 1, & E_n=\varepsilon.\end{cases} \tag{51}$$

如果准能量能谱为纯实数时, 那么对于 $E_n\neq\varepsilon$ 的本征态, 其加权系数 $\lim\limits_{t\to\infty}f_{\varepsilon}(E_n)\to 0$. 也就是说只要时间演化足够长, 加权求和的波函数 $|\Phi_{0,\pi}(t)\rangle$ 中只会留下能量为 $E_n=0,\pi$ 的本征态, 也就是 0 模和 π 模的拓扑边缘态. 需要注意的是, 在非幺正量子行走系统中, 准能量能谱不一定总是纯实数, 所以需要选取准能量为纯实数的参数区间进行探测.

图 8 给出了将该方法应用到实验上得到的观测结果. 在拓扑不变量满足 $(\Delta\tilde{\nu}_0,\Delta\tilde{\nu}_\pi)=(0,-1)$ 的参数点, 对于不同的初态选取, 实验上都探测到了 $\Phi_{\pi,+}(x)$ 的模式, 并且其他模式占据很小. 图 8(d)—(f) 中也将观测所得到的 $\Phi_{\pi,+}(x)$ 与实空间数值对角化得到的边缘态模式波函数做了对比. 由两者相符可以看出 $\Phi_{\pi,+}(x)$ 的确提取到了 $\varepsilon=\pi$ 的本征边缘态

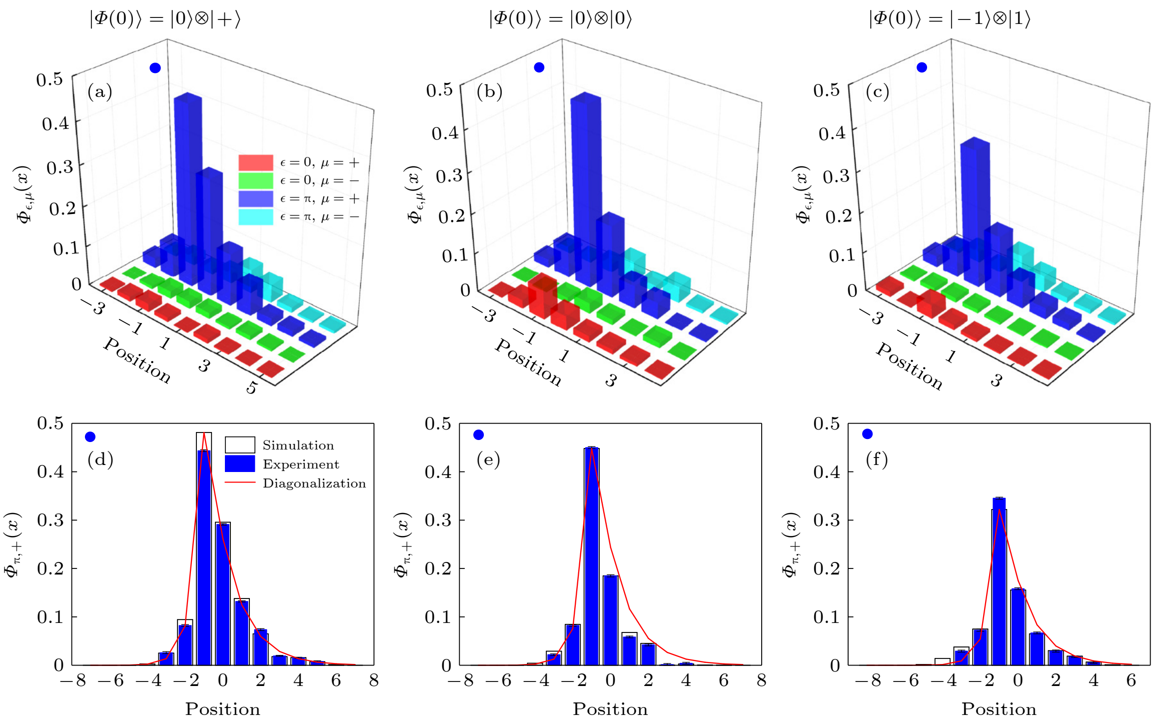


图 8 (a)—(c) 不同初态选择下, 7 步演化之后实验测量得到的 $\Phi_{\varepsilon,\mu}(x)$; (d)—(f) 数值模拟得到 $\Phi_{\pi,+}(x)$ 和实验结果的对比. 图中还给出了数值对角化 $N=15$ 的畴壁系统对峰值进行缩放之后的结果. 对角化得到的边缘态进行缩放的比例通过拟合 $\Phi_{\pi,+}(x)$ 的中心峰值得到. 其他参数与图 7 相同[17]

Fig. 8. (a)–(c) Experimentally measured $\Phi_{\varepsilon,\mu}(x)$ after the seventh step with different initial states; (d)–(f) simulated $\Phi_{\pi,+}(x)$ compared with experimental result. We also show the scaled norms of the edge state with $\varepsilon=\pi$ by diagonalizing a domain-wall system with $N=15$. Norms of the edge states from diagonalization are scaled to fit the central peak of the numerically-simulated $\Phi_{\pi,+}(x)$. Other parameters are as same as Fig. 7[17].

模式. 在实验上观测得到的拓扑边缘态与非布洛赫拓扑不变量一致, 这也再一次印证了基于广义布里渊区构建的非厄米拓扑体边对应关系.

5 总结与展望

本文主要介绍了畴壁边界条件下具有非厄米趋肤效应的系统中广义布里渊区方程的推导与求解, 并由此出发讨论了非布洛赫能带理论在非厄米 SSH 模型和非幺正一维量子行走实验模型中的应用. 基于广义布里渊区计算的非布洛赫拓扑数可以正确预测畴壁系统中的拓扑边缘态, 这印证了非布洛赫能带理论在不同边界条件下非厄米系统中的有效性. 在不同模型中, 畴壁边界条件下的广义布里渊区方程有一个统一的方程形式, 对该方程背后物理内涵的充分理解, 或许可以帮助我们找到一个对多种边界条件都普适的广义布里渊区方程. 此外, 不同边界条件下的高维系统中, 广义布里渊区的计算分析也尚未被充分讨论, 有待于日后进一步探索.

参考文献

[1] Breuer H P, Petruccione F 2006 *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford: Oxford University Press)
[2] Lindblad G 1976 *Commun. Math. Phys.* **48** 119
[3] Dalibard J, Castin Y, Molmer K 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 580
[4] Carmichael H J 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 2273
[5] Prosen T 2010 *J. Stat. Mech. P* 07020
[6] Prosen T 2008 *New J. Phys.* **10** 043026
[7] Zhou Y N, Mao L, Zhai H 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 043060
[8] Shen H, Zhen B, Fu L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 146402
[9] Gong Z, Ashida Y, Kawabata K, Takasan K, Higashikawa S, Ueda M 2018 *Phys. Rev. X* **8** 031079
[10] Kawabata K, Shiozaki K, Ueda M, Sato M 2019 *Phys. Rev. X* **9** 041015
[11] Ghatak A, Das T 2019 *J. Phys. Condens. Matter* **31** 263001
[12] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
[13] Zhen B, Hsu C W, Igarashi Y, et al. 2015 *Nature* **525** 354
[14] Poli C, Bellec M, Kuhl U, Mortessagne F, Schomerus H 2015 *Nat. Commun.* **6** 6710
[15] Zhu W, Fang X, Li D, Sun Y, Li Y, Jing Y, Chen H 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 124501
[16] Li J, Harter A K, Liu J, Melo L D, Joglekar Y N, Luo L 2019 *Nat. Commun.* **10** 855
[17] Xiao L, Deng T, Wang K, Zhu G, Wang Z, Yi W, Xue P 2020 *Nat. Phys.* **16** 761
[18] Ding L, Shi K, Zhang Q, Shen D, Zhang X, Zhang W 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 083604
[19] Zou D, Chen T, He W, Bao J, Lee C H, Sun H, Zhang X 2021 *Nat. Commun.* **12** 7201
[20] Lee T E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 133903
[21] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
[22] Yao S, Song F, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 136802
[23] Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, Bergholtz E J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 026808
[24] Lee C H, Thomale R 2019 *Phys. Rev. B* **99** 201103(R)
[25] Hu Y M, Song F, Wang Z 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 230307 (in Chinese) [胡渝民, 宋飞, 汪忠 2021 物理学报 **70** 230307]
[26] Yokomizo K, Murakami S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 066404
[27] Song F, Yao S, Wang Z 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 170401
[28] Jiang H, Lang L J, Yang C, Zhu S L, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 054301
[29] Okuma N, Kawabata K, Shiozaki K, Sato M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 086801
[30] Zhang K, Yang Z, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
[31] Yang Z, Zhang K, Fang C, Hu J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 226402
[32] Mao L, Deng T, Zhang P 2021 *Phys. Rev. B* **104** 125435
[33] Sun X Q, Zhu P, Hughes T L 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 066401
[34] Liu C H, Zhang K, Yang Z, Chen S 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 043167
[35] Li L, Lee C H, Mu S, Gong J 2020 *Nat. Commun.* **11** 5491
[36] Claes J, Hughes T L 2021 *Phys. Rev. B* **103** L140201
[37] Xue W T, Li M R, Hu Y M, Song F, Wang Z 2021 *Phys. Rev. B* **103** L241408
[38] Okuma N, Sato M 2021 *Phys. Rev. B* **103** 085428
[39] Guo C X, Liu C H, Zhao X M, Liu Y, Chen S 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 116801
[40] Xue W T, Hu Y M, Song F, Wang Z 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 120401
[41] Lv C, Zhang R, Zhai Z, Zhou Q 2022 *Nat. Commun.* **13** 2184
[42] Zhou T G, Zhou Y N, Zhang P, Zhai H 2022 *Phys. Rev. Research* **4** L022039
[43] Zhang K, Yang Z, Fang C 2022 *Nat. Commun.* **13** 2496
[44] Deng T S, Yi W 2019 *Phys. Rev. B* **100** 035102
[45] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
[46] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
[47] Chiu C K, Teo J C Y, Schnyder A P, Ryu S 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035005
[48] Yin C, Jiang H, Li L, Lü R, Chen S 2018 *Phys. Rev. A* **97** 052115
[49] Lieu S 2018 *Phys. Rev. B* **97** 045106
[50] Shenvi N, Kempe J, Birgitta Whaley K 2003 *Phys. Rev. A* **62** 052307
[51] Ambainis A 2003 *Int. J. Quantum. Inform.* **1** 507
[52] Kitagawa T, Rudner M S, Berg E, Demler E 2010 *Phys. Rev. A* **82** 033429
[53] Cardano F, Maffei F, Massa F, et al. 2016 *Nat. Commun.* **7** 11439
[54] Flurin E, Ramasesh V V, Hacohen-Gourgy S, Martin L S, Yao N Y, Siddiqi I 2017 *Phys. Rev. X* **7** 031023
[55] Cardano F, DErrico A, Dauphin A, et al. 2017 *Nat. Commun.* **8** 15516
[56] Xiao L, Zhan X, Bian Z H, et al. 2017 *Nat. Phys.* **13** 1117
[57] Zhan X, Xiao L, Bian Z, et al. 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 130501
[58] Wang K K, Qiu X, Xiao L, et al. 2019 *Nat. Commun.* **10** 2293
[59] Asbóth J K, Obuse H 2013 *Phys. Rev. B* **88** 121406
[60] Asbóth J K, Tarasinski B, Delplace P 2014 *Phys. Rev. B* **90** 125143
[61] Yao S, Yan Z, Wang Z 2017 *Phys. Rev. B* **96** 195303
[62] Roy R, Harper F 2017 *Phys. Rev. B* **96** 155118
[63] Rudner M S, Lindner N H 2020 *Nat. Rev. Phys.* **2** 229

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Non-Hermitian skin effect in a domain-wall system

Deng Tian-Shu †

(*Institute for Advanced Study, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

(Received 1 June 2022; revised manuscript received 16 July 2022)

Abstract

The non-Hermitian skin effect is one of the most striking features in non-Hermitian physics. It reveals a novel phenomenon in a non-Hermitian system that the bulk wave function and energy spectrum are sensitively dependent on the boundary conditions. The concept of generalized Brillouin zones has been proposed to characterize bulk wave functions in such systems . Based on generalized Brillouin zones, non-Bloch topological invariants can reconstruct the non-Hermitian bulk-edge correspondence. Previous discussion of the non-Hermitian skin effect mainly focused on open boundary conditions, and the calculation of generalized Brillouin zones needs to be reconsidered under domain-wall boundary conditions. The paper introduces the related researches of the non-Hermitian skin effect in domain-wall systems, including the general form of the generalized Brillouin zone equation in a one-dimensional single-band model, non-Bloch topological invariants in non-Hermitian SSH (Su-Schieffer-Heeger) model, and the experimental realization of the non-Hermitian skin effect in one-dimensional quantum walk system.

Keywords: domain-wall system, non-Hermitian skin effect, non-Bloch band theory, non-Hermitian bulk-edge correspondence

PACS: 03.65.Yz, 03.65.Vf, 05.40.Fb, 73.22.Gk **DOI:** 10.7498/aps.71.20221087

† Corresponding author. E-mail: shu500@mail.tsinghua.edu.cn

畴壁系统中的非厄米趋肤效应

邓天舒

Non-Hermitian skin effect in a domain-wall system

Deng Tian-Shu

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 170306 (2022)   DOI: 10.7498/aps.71.20221087
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20221087
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 71, No. 17 (2022) 171101

专题: 非厄米物理前沿

宇称-时间对称与反对称研究进展*

唐原江 1)# 梁超 1)# 刘永椿 1)2)†

1) (清华大学物理系, 低维量子物理国家重点实验室, 北京 100084)

2) (教育部量子信息前沿科学中心, 北京 100084)

(2022 年 7 月 4 日收到; 2022 年 8 月 16 日收到修改稿)

在标准量子力学中, 描述物理系统的哈密顿量一般是厄米的,以保证系统具有实能谱及系统演化的幺正性. 近些年来, 研究发现具有宇称-时间 (parity-time, $\mathcal{PT}$) 对称特性的非厄米哈密顿量也具有实能谱, 并且在 $\mathcal{PT}$ 对称相和 $\mathcal{PT}$ 对称破缺相之间存在一个新奇的非厄米奇异点, 这是厄米系统所不具有的. 最近, 人们在各种各样的物理系统中实现了 $\mathcal{PT}$ 对称和 $\mathcal{PT}$ 反对称的非厄米哈密顿量, 并演示了新奇的量子现象, 这不仅加深了对基本量子物理规律的理解, 也促进了应用技术的突破. 本综述将介绍 $\mathcal{PT}$ 对称和 $\mathcal{PT}$ 反对称的基本物理原理, 总结在光学系统和原子系统中实现 $\mathcal{PT}$ 对称和 $\mathcal{PT}$ 反对称的方案, 并回顾利用 $\mathcal{PT}$ 对称系统非厄米奇异点进行精密传感的研究.

关键词: 宇称-时间对称, 宇称-时间反对称, 非厄米, 奇异点

PACS: 11.30.Er, 42.50.–p, 42.60.Da **DOI:** 10.7498/aps.71.20221323

1 引 言

标准的量子力学对系统进行描述时引入了一条基本假设: 系统的哈密顿量为厄米的. 这一基本假设保证了系统的能量本征值为实数, 同时也保证了系统的量子态在演化过程中的概率守恒. 一直以来, 非厄米的哈密顿量仅被用来唯象地描述耗散系统, 然而, 研究者们在非厄米哈密顿量中找到了大量具有实数本征值的算符, 这引发了对非厄米哈密顿量的极大关注 [1]. 1998 年, Bender 和 Boettcher [2] 提出空间反演 ($\mathcal{P}$) 和时间反演 ($\mathcal{T}$) 共同作用下不变的非厄米哈密顿量也可以有实数本征值 (此类算符被简称为 $\mathcal{PT}$ 算符). 随着系统参量的变化, $\mathcal{PT}$ 算符描述的系统可以处于 $\mathcal{PT}$ 对称相或者 $\mathcal{PT}$ 破缺相, 处于 $\mathcal{PT}$ 对称相的系统具有实数的本征值, 处于 $\mathcal{PT}$ 破缺相的系统有一对共轭的本征值, 两个相的分界点为非厄米系统特有的奇异点 (exceptional point, 非厄米奇异点) [3], 在该点处系统的本征态和本征值同时合并在一起.

$\mathcal{PT}$ 对称性的研究引领了理论物理各个领域的新发展, 包括量子场论 [4]、李代数 [5] 等. $\mathcal{PT}$ 对称的概念被引入光学系统后, 很快成为了研究的热点. 随着 $\mathcal{PT}$ 对称光学系统的构建和对其特性的深入研究, 发现了基于 $\mathcal{PT}$ 对称的大量新奇效应和应用, 例如双折射 [6]、功率振荡 [7–9]、非互易性光传播 [10–12]、单向不可见性 [13–15]、单模激光器 [16,17]、轨道角动量激光器 [18,19] 等. 除了光学系统外, 人们也在其他各种系统中对 $\mathcal{PT}$ 对称展开了广泛的研究, 如原子系统 [20,21]、电子学系统 [22–24]、NV 色心系统 [25]、光力学系统 [26,27]、声学系统 [28,29] 和微波系统 [30] 等.

* 广东省重点领域研发计划 (批准号: 2019B030330001)、国家自然科学基金 (批准号: 92050110, 91736106, 11674390, 91836302) 和国家重点研发计划 (批准号: 2018YFA0306504) 资助的课题.

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: ycliu@tsinghua.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

随着对$\mathcal{PT}$对称系统研究的深入, 人们又提出了具有$\mathcal{PT}$反对称特性的新系统[31–41]. $\mathcal{PT}$对称系统的哈密顿量在$\mathcal{P}$和$\mathcal{T}$的联合操作下形式不变, 作为与$\mathcal{PT}$对称相对偶的概念, $\mathcal{PT}$反对称系统的哈密顿量在$\mathcal{P}$和$\mathcal{T}$联合操作下形式与原来相反, 出现一个负号. $\mathcal{PT}$反对称系统呈现出与$\mathcal{PT}$对称系统对偶的特性, 例如$\mathcal{PT}$对称系统中的无损耗传播对应到$\mathcal{PT}$反对称系统中就是无折射传播, 这为光的控制提供了崭新的概念和技术手段, 大大扩展了非厄米光学的研究范围.

目前已有许多相关综述, 例如, 光学和光子学中的$\mathcal{PT}$对称综述[42–47]、利用相干原子实现$\mathcal{PT}$对称综述[48], 基于$\mathcal{PT}$对称的人工合成激光综述[49]、$\mathcal{PT}$对称中的非线性综述[50,51]等. 本文的侧重点主要是综合$\mathcal{PT}$对称和$\mathcal{PT}$反对称两种系统, 以展现两者的诸多类似之处以及各自的独特性质.

本文首先介绍了$\mathcal{PT}$对称与$\mathcal{PT}$反对称哈密顿量, 然后介绍在光学系统和原子系统中$\mathcal{PT}$对称的实现, 进而介绍光学系统和原子系统$\mathcal{PT}$反对称的典型研究, 以及基于$\mathcal{PT}$对称系统中非厄米奇异点的精密传感研究.

2 $\mathcal{PT}$对称与反对称哈密顿量

在量子力学中, 可观测物理量需要用厄米算符来表示, 因此系统的哈密顿量也需要用厄米算符表示, 这不仅可以确保其本征值为实数, 而且可以确保波函数随时间的演化过程中的模值不变[52]. 1998 年, Bender 和 Boettcher[2]提出空间反演$\mathcal{P}$和时间反演$\mathcal{T}$共同作用下不变的非厄米哈密顿量也可以有实数的本征值. 在空间反演变换下, 坐标和动量算符有如下变换:

$$\mathcal{P}\boldsymbol{r}\mathcal{P}=-\boldsymbol{r}, \tag{1}$$

$$\mathcal{P}\boldsymbol{p}\mathcal{P}=-\boldsymbol{p}, \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{p}$分别为坐标算符和动量算符. 在时间反演变换下:

$$\mathcal{T}\boldsymbol{r}\mathcal{T}=\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

$$\mathcal{T}\boldsymbol{p}\mathcal{T}=-\boldsymbol{p}, \tag{4}$$

$$\mathcal{T}\mathrm{i}\mathcal{T}=-\mathrm{i}. \tag{5}$$

如果系统的非厄米哈密顿算符$\hat{H}$满足:

$$[\mathcal{PT},\boldsymbol{H}]=0, \tag{6}$$

则系统的哈密顿量满足$\mathcal{PT}$对称性. 由以上对易关系系统的哈密顿算符满足$\mathcal{PT}$对称的一个必要条件, 是其中的势能项满足:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{V}^{*}(-\boldsymbol{r}). \tag{7}$$

考虑二能级 (模式) 系统, 如图 1(a) 所示, 两个模式耦合构成的系统可以被如下$\mathcal{PT}$对称哈密顿量描述:

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\varepsilon-\mathrm{i}\gamma & \kappa\\ \kappa & \varepsilon+\mathrm{i}\gamma\end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中, 两个共振模式的能量由能级ε描述, 两个模式分别为增益和耗散模式, 增益和耗散速率由γ描述, 两个模式间的耦合系数为κ.

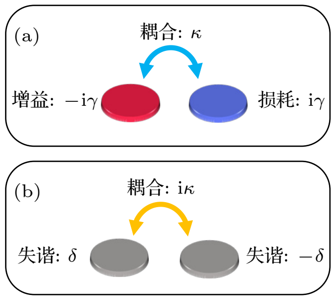


图 1 $\mathcal{PT}$对称系统 (a) 与$\mathcal{PT}$反对称系统 (b) 示意图

Fig. 1. Schematic diagram of $\mathcal{PT}$-symmetric system (a) and anti-$\mathcal{PT}$ symmetric system (b).

与$\mathcal{PT}$对称系统相比, $\mathcal{PT}$反对称系统的非厄米哈密顿算符$\boldsymbol{H}$满足如下反对易关系:

$$\{\mathcal{PT},\boldsymbol{H}\}=\boldsymbol{0}, \tag{9}$$

即

$$\mathcal{PT}\boldsymbol{H}(\mathcal{PT})^{-1}=\mathcal{P}\boldsymbol{H}^{*}\mathcal{P}^{-1}=-\boldsymbol{H}. \tag{10}$$

以二能级 (模式) 系统为例, 如图 1(b) 所示, 相应的$\mathcal{PT}$反对称哈密顿量为

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}-\delta+\mathrm{i}\tau & \mathrm{i}\kappa\\ \mathrm{i}\kappa & \delta+\mathrm{i}\tau\end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中, 两个模式的能级偏移分别为$-\delta$和δ, 增益或者耗散速率由$|\tau|$描述, 两个模式间的耦合系数为$\mathrm{i}\kappa$.

3 光学系统中的$\mathcal{PT}$对称

基于光学傍轴波动方程和量子力学薛定谔方程之间的形式等价性, 人们提出了在光学框架内实现$\mathcal{PT}$对称势的方案[6,14,53]. 例如, 考虑光波导中的

光场传输方程:

$$\mathrm{i}\frac{\partial E(x,z)}{\partial z}+\frac{1}{2k}\frac{\partial^2 E(x,z)}{\partial x^2}+k_0\left[n_{\mathrm{R}}(x)+\mathrm{i}n_{\mathrm{I}}(x)\right]E(x,z)=0. \tag{12}$$

其中, $E(x,z)$为电场强度的慢变振幅, $k=k_0n_0$为介质中的波矢, $k_0=2\pi/\lambda_0$为真空中的波矢, λ_0为真空中的波长, n_0为介质折射率 (系统的折射率分别为$n_0+n_R(x)+\mathrm{i}n_I(x)$). 方程 (12) 与如下薛定谔方程具有相同的形式:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x,t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x,t)}{\mathrm{d}x^2}-V(x)\psi(x,t)=0. \tag{13}$$

其中$\psi(x,t)$为波函数, $\hbar$为普朗克常数, μ为粒子质量, $V(x)$为势能函数. 对比两个方程得到对应关系为

$$E(x,z)\leftrightarrow\psi(x,t),z\leftrightarrow t,k\leftrightarrow\mu/\hbar,$$

$$k_0\left[n_{\mathrm{R}}(x)+\mathrm{i}n_{\mathrm{I}}(x)\right]\leftrightarrow -V(x)/\hbar.$$

由于折射率分布与量子力学的势能部分相对应, 由方程 (7) 中$\mathcal{PT}$对称系统的势能项满足的关系可以得出,$\mathcal{PT}$对称光学系统的折射率实部为坐标x的偶函数, 折射率的虚部为坐标x的奇函数:

$$n_{\mathrm{R}}(x)=n_{\mathrm{R}}(-x), \tag{14}$$

$$n_{\mathrm{I}}(x)=-n_{\mathrm{I}}(-x). \tag{15}$$

2010 年, Rüter 等 [9] 提出了$\mathcal{PT}$对称的耦合波导光学系统并进行了实验研究. 如图 2 所示, 系统为两波导耦合系统, 其中一个波导中的光具有大小为γ的损耗系数, 对另一个波导进行泵浦, 使该波导中的光获得大小为γ的有效增益系数, 从而构造出了满足$\mathcal{PT}$对称的复折射率分布. 通过耦合模方法, 两个耦合波导中的光场动力学可以用下面的方程描述:

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}z}-\mathrm{i}\frac{\gamma}{2}E_1+\kappa E_2=0,$$

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}z}+\mathrm{i}\frac{\gamma}{2}E_2+\kappa E_1=0, \tag{16}$$

其中E_1和E_2分别表示波导 1 和波导 2 中模式场的幅值, κ为两个波导模式的耦合系数. 系统可以用如下的哈密顿量描述:

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\frac{\gamma}{2} & -\kappa\\ -\kappa & -\mathrm{i}\frac{\gamma}{2}\end{pmatrix}. \tag{17}$$

当$\gamma<2\kappa$时, 系统处于$\mathcal{PT}$对称相, 系统的本征值为

$$\lambda_{\pm}=\pm\cos\theta, \tag{18}$$

其中$\sin\theta=\gamma/2\kappa$. 此时两个本征值的虚部为零, 实部劈裂, 相应的本征态为

$$\phi_{\pm}=\begin{pmatrix}1\\ \pm\exp(\pm\mathrm{i}\theta)\end{pmatrix}. \tag{19}$$

显然, 处于$\mathcal{PT}$对称相的模式满足$|E_1|=|E_2|$, 这意味着本征态的强度在两个波导中均匀分布, 因此模式经历了平衡的增益和损耗, 导致其本征值的虚部为零. 此外, 随着$\gamma/2\kappa$从 0 增大到 1, θ从 0 逐渐增大到$\pi/2$.

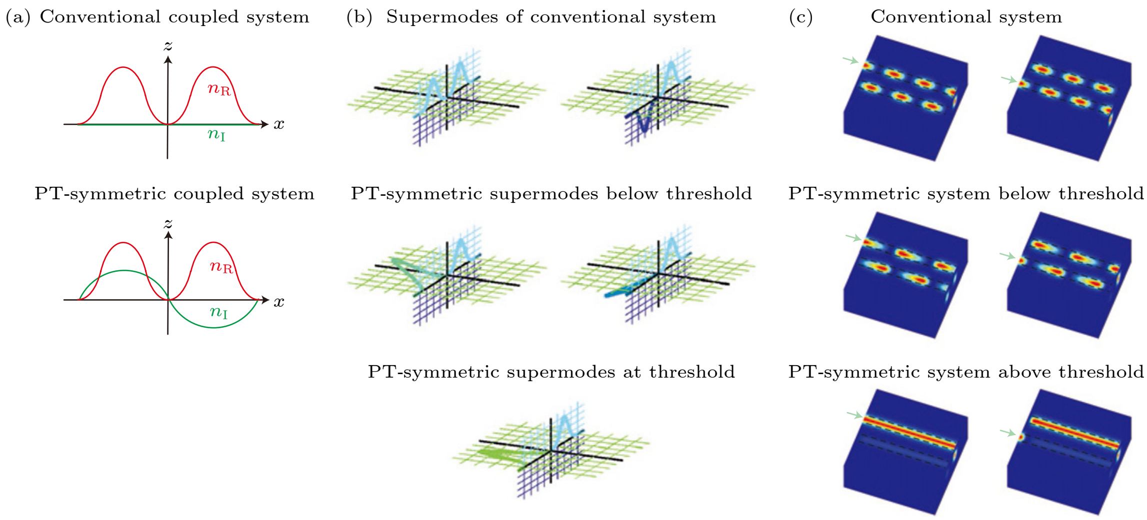


图 2 传统和$\mathcal{PT}$对称耦合光学系统 (a) 复折射率的实部 (n_{R}, 红线) 和虚部 (n_{I}, 绿线) 分布; (b) 传统和 PT 对称系统的叠加态; (c) 对于传统和$\mathcal{PT}$对称系统, 当系统在通道 1 或通道 2 处被激发时的光波传播情况 [9]

Fig. 2. Conventional and $\mathcal{PT}$-symmetric optical systems: (a) The distribution of real part (n_{R}, red line) and imaginary part (n_{I} green line) of the complex refractive index; (b) superposition state of conventional and PT-symmetric systems; (c) light wave propagation when the system is excited at channel 1 or channel 2 [9].

当$\gamma > 2\kappa$时, 系统处于$\mathcal{PT}$对称破缺相, 系统的本征值为

$$\lambda_{\mp} = \mp \mathrm{i} \sinh \theta', \tag{20}$$

其中$\cosh\theta' = \gamma/(2\kappa)$. 此时两个本征值的实部相等, 虚部劈裂, 相应的本征态为

$$\phi_{\mp} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\exp(\mp\theta') \end{pmatrix}. \tag{21}$$

处于$\mathcal{PT}$对称破缺相的系统, 随着$\gamma/(2\kappa)$从1开始逐渐增大, θ'从0开始逐渐增大, 显然, $|E_1| \neq |E_2|$, 这意味着一个本征态主要局域在增益波导, 另一个本征态主要局域在损耗波导, 导致本征值的虚部劈裂.

当$\gamma = 2\kappa$时, 系统处于$\mathcal{PT}$对称相与$\mathcal{PT}$对称破缺相的相变点, 即为非厄米奇异点, 系统的本征值为

$$\lambda_{\pm} = 0. \tag{22}$$

此时本征值的实部和虚部同时合并, 相应的本征态为

$$\phi_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

处于非厄米奇异点的系统, 不仅本征值合并在一起, 本征态也合并为同一个模式.

与厄米系统不同, 这些本征模不再是正交的, 这对光束动力学有重要影响, 例如会产生非对称传输特性和功率振荡等现象. 对于传统的厄米系统, 两个本征模 (对称和反对称, 见图 2(b)) 的任何叠加都会导致对称的波传播: 显然, 图 2(c) 的上部分图中的光场分布具有左右对称性. 当耦合系统涉及增益/损耗时, 系统的特性与厄米系统的特性不再相同. 在$\mathcal{PT}$对称相, 随着$\gamma/(2\kappa)$从0开始增大, 本征态的两个模式分量之间的相对相位差分别从0和π处的初始值逐渐增大, 当$\gamma/(2\kappa)$增大到1时, 系统处于非厄米奇异点. 此时光传播表现出非对称传输特性: 将输入通道从波导1交换到波导2时, 获得了完全不同的输出状态. 在$\mathcal{PT}$对称破缺相, 无论光从波导1输入还是从波导2输入, 光总是从波导1输出, 再次表现出了非对称传输的特性 (见图 2(c) 底部的图). 这是因为系统的本征值为复数, 相应的模式振幅指数增大或者耗散, 只有一个模式存留下来.

4 原子系统中的$\mathcal{PT}$对称

近年来, 研究发现在原子系统中也可以实现$\mathcal{PT}$对称. 中山大学罗乐课题组[54]与中国人民大学张威、张翔课题组[55]分别利用超冷原子和单个囚禁离子构造了$\mathcal{PT}$对称系统, 并对其量子演化过程进行了测量, 同时引入周期性的含时系统哈密顿量, 对系统的相图等进行研究, 如图 3 所示. 下面将以在单个囚禁离子系统中的实现方案为例进行说明.

考虑具有$\mathcal{PT}$对称性的单量子比特非厄米哈密顿量:

$$\boldsymbol{H}_{\mathcal{PT}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\sigma}_x + \mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\sigma}_z, \tag{24}$$

其中$\boldsymbol{\sigma}_x = |{\downarrow}\rangle\langle{\uparrow}| + |{\uparrow}\rangle\langle{\downarrow}|$和$\boldsymbol{\sigma}_z = |{\downarrow}\rangle\langle{\downarrow}| - |{\uparrow}\rangle\langle{\uparrow}|$是泡利算符. 量子态$|\psi(t)\rangle$随时间的演化满足薛定谔型方程:

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = \boldsymbol{H}_{\mathcal{PT}}|\psi(t)\rangle. \tag{25}$$

$|\psi(t)\rangle$可以被映射到另一个量子态$|\Psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\Gamma}t}|\psi(t)\rangle$, 该态随时间的演化由如下哈密顿量支配:

$$\boldsymbol{H}'_{\mathcal{PT}} = \boldsymbol{H}_{\mathcal{PT}} - \mathrm{i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{I}, \tag{26}$$

其中$\boldsymbol{I} = |{\downarrow}\rangle\langle{\downarrow}| + |{\uparrow}\rangle\langle{\uparrow}|$为单位算符. 因此, 如果可以实现哈密顿量$\boldsymbol{H}'_{\mathcal{PT}}$的系统, 则可以通过测量映射态$|\Psi(t)\rangle$并去除因子$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\Gamma}t}$来获得原始$\mathcal{PT}$对称哈密顿量$\boldsymbol{H}_{\mathcal{PT}}$系统的量子态$|\psi(t)\rangle$的演化.

该课题组利用镱离子能级, 分别选取镱离子$^2\mathrm{S}_{1/2}$的超精细态$|F=0, m=0\rangle$和$|F=1, m=0\rangle$为$|{\downarrow}\rangle$和$|{\uparrow}\rangle$, 其中的超精细劈裂$\omega_{\mathrm{HF}} \approx 12.6$ GHz. 利用波长为369.5 nm的π偏振光将离子由$|F=1, m=0\rangle$态激发到$^2\mathcal{P}_{1/2}$态, 跃迁选择定则禁止了从其他塞曼态$|F=1, m=\pm1\rangle$的激发. 激发后的$^2\mathcal{P}_{1/2}$态可以自发耗散到$^2\mathrm{S}_{1/2}$的3个塞曼态, 使得能态$|{\uparrow}\rangle$具有4Γ的损耗速率. 通过同时加上微波耦合场ω_{HF}, 就能够实现等效的哈密顿量$\boldsymbol{H}'_{\mathcal{PT}}$.

囚禁离子系统是量子模拟、量子计算等研究平台之一, 具有与环境耦合小、参数可控性高等优点, 可以进行量子态层析投影测量, 能够测量态占据数和密度矩阵相干项的演化 (见图 3(c)). 由此出发, 该课题组发现了两组和实验参数无关的初态和测量态, 可以直接由体系演化测量结果得到体系的能量值, 而体系能量值为零的点对应该体系的非厄米奇异点. 在此基础上, 课题组引入周期性的驱动和耗散, 将定态哈密顿量扩展为含时哈密顿量, 并测量了系统的能量和相图 (图 3(d)), 而且观测到系统哈密顿量的周期与量子态耦合强度满足一定条件下发生的多光子共振现象.

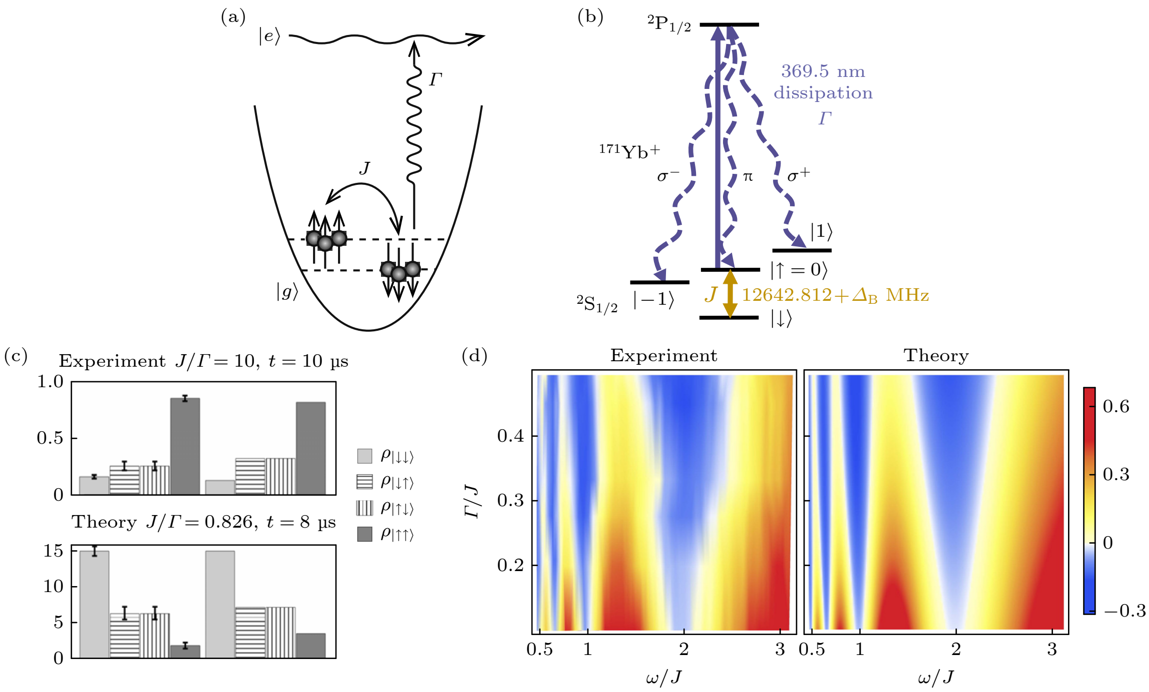


图 3　(a) 在冷原子系统中实现 $\mathcal{PT}$ 对称的示意图[54]; (b) 在单个囚禁离子系统中实现 $\mathcal{PT}$ 对称的镱离子 $^{171}\mathrm{Yb}^{+}$ 的能级示意图[55]; (c) 系统密度矩阵测量图[55]; (d) 系统的相图[55], 红色和黄色区域对应 $\mathcal{PT}$ 对称相, 蓝色区域对应 $\mathcal{PT}$ 对称破缺相

Fig. 3. (a) Schematic diagram of realizing $\mathcal{PT}$ symmetry in cold atom system[54]; (b) schematic diagram of energy levels of ytterbium ion $^{171}\mathrm{Yb}^{+}$ for realizing $\mathcal{PT}$ symmetry in a single trapped ion system[55]; (c) system density matrix measurement diagram[55]; (d) the phase diagram of the system[55]. The red and yellow areas correspond to the $\mathcal{PT}$-symmetric phase, and the blue area corresponds to the $\mathcal{PT}$-symmetry-broken phase.

5　光学系统中的 $\mathcal{PT}$ 反对称

$\mathcal{PT}$ 反对称光学系统有很多奇特的性质, 如连续谱激光 [34]、光完全单向无反射传播 [33]、模式选择的光放大 [32] 和散射中心决定的散射特性 [40,41] 等. 2017 年, 清华大学尤力、刘永椿课题组 [31] 提出了利用间接耗散耦合在光学系统中实现 $\mathcal{PT}$ 反对称哈密顿量的方法. 2019 年, 吉林大学张旭霖课题组、香港科技大学陈子亭课题组 [37] 利用该方法在波导系统中实现了光的手性传输.

以光学波导系统为例, 如图 4 所示, 沿 z 方向传播的 3 个波导中的模式分别为 a, b 和 c, 总光场为 $E(r) = a(z)E_a(x,y) + b(z)E_b(x,y) + c(z)E_c(x,y)$ 其中波导 c 和 $a\,(b)$ 耦合, 耦合系数为 $\kappa_1\,(\kappa_2)$, a 和 b 没有直接耦合. 当模式 c 的耗散速率 $\gamma \gg \kappa_{1/2}$ 时, 可以绝热消除模式 c, 得到系统有效耦合哈密顿量为 $H_c = \mathrm{i}\varGamma\left(a^\dagger b + b^\dagger a\right)$, 即产生了 a 和 b 的间接耗散耦合, 其中 $\varGamma = |\kappa|^2/\gamma$ 是等效间接耗散耦合速率, κ 是平衡耦合系数 $(\kappa_1 \approx \kappa_2 = \kappa)$. 这是一个反厄米哈密顿量, 是实现 $\mathcal{PT}$ 反对称的关键. 模式 $a\,(b)$ 的传播常数为 $k_a\,(k_b)$, $\bar{k} = (k_a + k_b)/2$. 用 $\boldsymbol{\varPsi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{k}z}(a,b)^{\mathrm{T}}$ 来描述系统的状态, 类薛定谔方程可以写成 $\mathrm{i}\partial_z\boldsymbol{\varPsi} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\varPsi}$, 其中等效哈密顿量

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \varDelta - \mathrm{i}\varGamma & -\mathrm{i}\varGamma \\ -\mathrm{i}\varGamma & -\varDelta - \mathrm{i}\varGamma \end{pmatrix}. \tag{27}$$

式中 $\varDelta = (k_a - k_b)/2$ 是有效失谐, 容易验证, $\boldsymbol{H}$ 满足 $\mathcal{PT}$ 反对称即 $\{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{\mathcal{PT}}\} = \boldsymbol{0}$.

当 $\varGamma > \varDelta > 0$ 时, 系统处在 $\mathcal{PT}$ 对称相, 系统的本征值为 $\beta_\pm = -\mathrm{i}\left[\varGamma \pm \left(\varGamma^2 - \varDelta^2\right)^{1/2}\right]$, 对应的本征态 $\boldsymbol{\varPsi}_\pm = \left(\pm\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}, 1\right)^{\mathrm{T}}$, 其中 $\sin\phi = \varDelta/\varGamma$, 此时两个本征模式有相同的折射率实部 (色散特性), 但是不同的折射率虚部 (耗散特性). 两个本征模式在 a, b 中的场强相同 $|a_\pm/b_\pm| = 1$. 当 $\varGamma < \varDelta$ 时, 系统过渡到 $\mathcal{PT}$ 对称破缺相, 系统的本征值为 $\beta_\pm = -\mathrm{i}\varGamma \pm \left(\varDelta^2 - \varGamma^2\right)^{1/2}$, 对应的本征态 $\boldsymbol{\varPsi}_\pm = \left(\pm\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm r}, 1\right)^{\mathrm{T}}$, 其中 $\cosh r = \varDelta/\varGamma$, 此时两个本征模式有相同的折射率虚部, 但是折射率实部不同, 并且两个本征模式在 a, b 中的场强不同 $|a_+/b_+| = |b_-/a_-| > 1$. 图 4(c)—(e) 展现了相变前后折射率实部、虚部和模式 a, b 场强的变化.

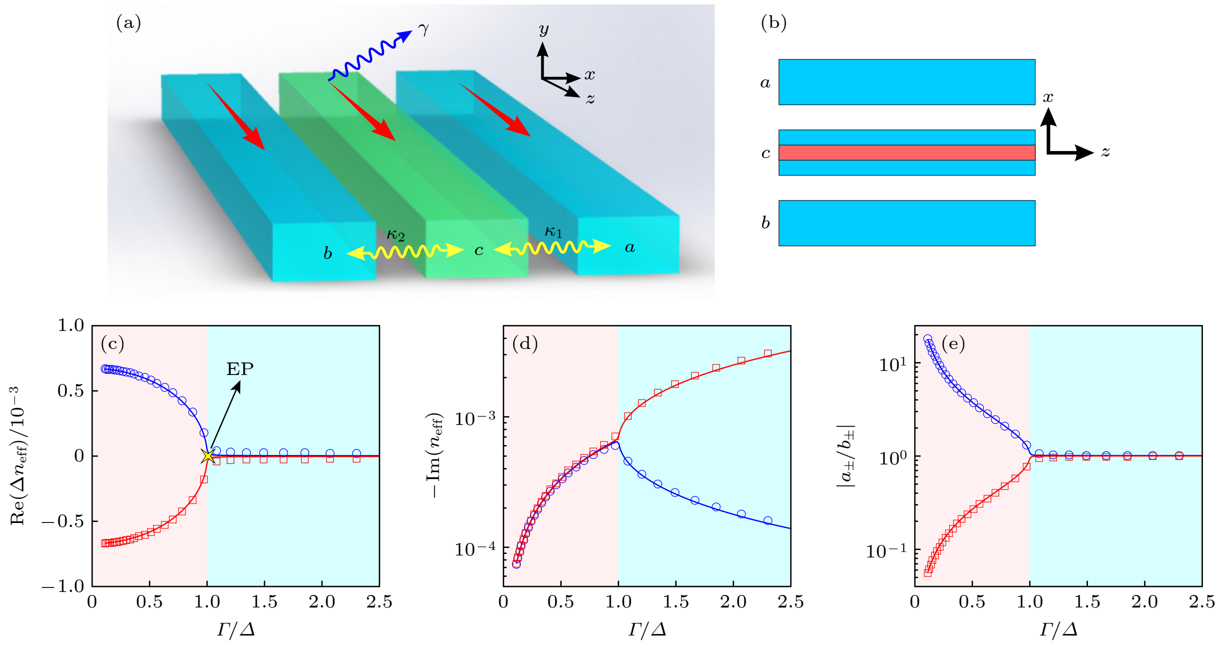


图 4 (a) 耦合波导示意图; (b) 耦合波导的截面示意图, 波导 c 红色部分表示存在较大耗散; (c), (d) 波导本征模式的特性; (e) 波导场强的特性; 数据点是有限元模拟结果, 实线是理论计算结果[31]

Fig. 4. (a) Schematic diagram of coupled waveguide; (b) cross section diagram of coupled waveguide, the red part of waveguide c indicates large dissipation; (c), (d) characteristics of waveguide eigenmodes; (e) property of waveguide field strength. Data points are finite element simulation results, and solid lines are theoretical calculation results[31].

$\mathcal{PT}$ 相变过程会显著改变系统的传输特性, 利用演化算符 $U(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Hz}$ 可以得到在两个相中的分束比例随着光沿 z 方向传播的变化:

$$\left|\frac{b}{a}\right|^2=\begin{cases}\dfrac{\varGamma^2}{s^2\coth^2 sz+\varDelta^2} & (\varGamma>\varDelta),\\[2ex] \dfrac{\varGamma^2}{q^2\cot^2 qz+\varDelta^2} & (\varGamma<\varDelta),\end{cases}\tag{28}$$

其中 $s=\left(\varGamma^2-\varDelta^2\right)^{1/2}$, $q=\left(\varDelta^2-\varGamma^2\right)^{1/2}$. 如图 5(a) 所示, 在 $\mathcal{PT}$ 对称相 ($\varGamma>\varDelta$), 随着 z 方向的传播, 模式 a 的能量逐渐转移到模式 b, 并且分束比例逐渐趋近于 1. 而图 5(b) 表明当失谐 $\varDelta$ 进一步增大, 系统进入 $\mathcal{PT}$ 对称破缺相 ($\varGamma<\varDelta$), 能量从单一方向转移变为在两种模式之间循环.

$\mathcal{PT}$ 对称相独特的传输特性可以带来一些有趣的应用. 第一个是利用 $\mathcal{PT}$ 对称相构建一个分束比例为 1 的 3 dB 分束器. 在 $\mathcal{PT}$ 对称相, 两个本征模式耗散速率不同, 例如在 $\varDelta=0$ 时, 对称本征态 $\varPsi_s=(1,1)^{\mathrm{T}}/\sqrt{2}$ 的耗散率为 $2\varGamma$, 而反对称本征态 $\varPsi_a=(-1,1)^{\mathrm{T}}/\sqrt{2}$ 的耗散率为 0. 因此一半的能量耗散于对称本征态传播一段距离, 只剩下反对称本征态, 并且此时分束比例 $|b/a|^2=\tanh\varGamma L\approx 1$. 不同于常见的直接耦合分束器和多层介质膜分束器对耦合长度 (图 5(c)) 和激光波长 (图 5(d)) 非常敏感, $\mathcal{PT}$ 反对称系统对耦合长度和激光波长变化具有鲁棒性, 可以实现宽带分束器. 第二个应用是失谐诱导耗散. 考虑系统光学深度 $\alpha=\varGamma z\ (\mathrm{e}^{-\alpha}\ll 1)$ 较大的情况, 输入一个反对称本征态 $\varPsi_a$, 传播一段距离后, 在 $\mathcal{PT}$ 对称相, 反对称本征态和对称本征态的传输系数分别为 $|t_a|^2=\left|\varPsi_a^\dagger U(z)\varPsi_a\right|^2\approx \mathrm{e}^{-\alpha(\varDelta-\varGamma)^2}$ 和 $|t_s|^2=\left|\varPsi_s^\dagger U(z)\varPsi_a\right|^2\ll 1$. 其中反对称本征态的传输系数和失谐量 $\varDelta$ 指数相关, 可以通过调节波导的折射率改变 $\varDelta$, 进而改变波导中的光场耗散率. 这种方法调节范围大, 可以将反对称本征态的传输系数从 1 逐步变小, 这给色散调制变为耗散调制提供了可能.

时域的 $\mathcal{PT}$ 反对称同样可利用间接耦合在光学微腔 (如图 6(a),(b)) 中进行构建. 用 $\varPsi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}t}(a,b)^{\mathrm{T}}$ 来描述系统的状态, 系统的演化方程可以写成 $\mathrm{i}\partial_t\varPsi=\boldsymbol{H}\varPsi$, 其中

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\varDelta-\mathrm{i}\gamma & -\mathrm{i}\varGamma\\ -\mathrm{i}\varGamma & -\varDelta-\mathrm{i}\gamma\end{pmatrix},\tag{29}$$

$\varDelta=(\omega_a-\omega_b)/2$ 是有效失谐量. 对于构型 1, 间接耦合耗散速率 $\varGamma=2\kappa^2/\gamma,\gamma'=\varGamma+(\gamma_0+\gamma_i)$. 对于构型 2, $\varGamma=\gamma_0$, $\gamma'=\varGamma+(\gamma_0+\gamma_i)/2$.

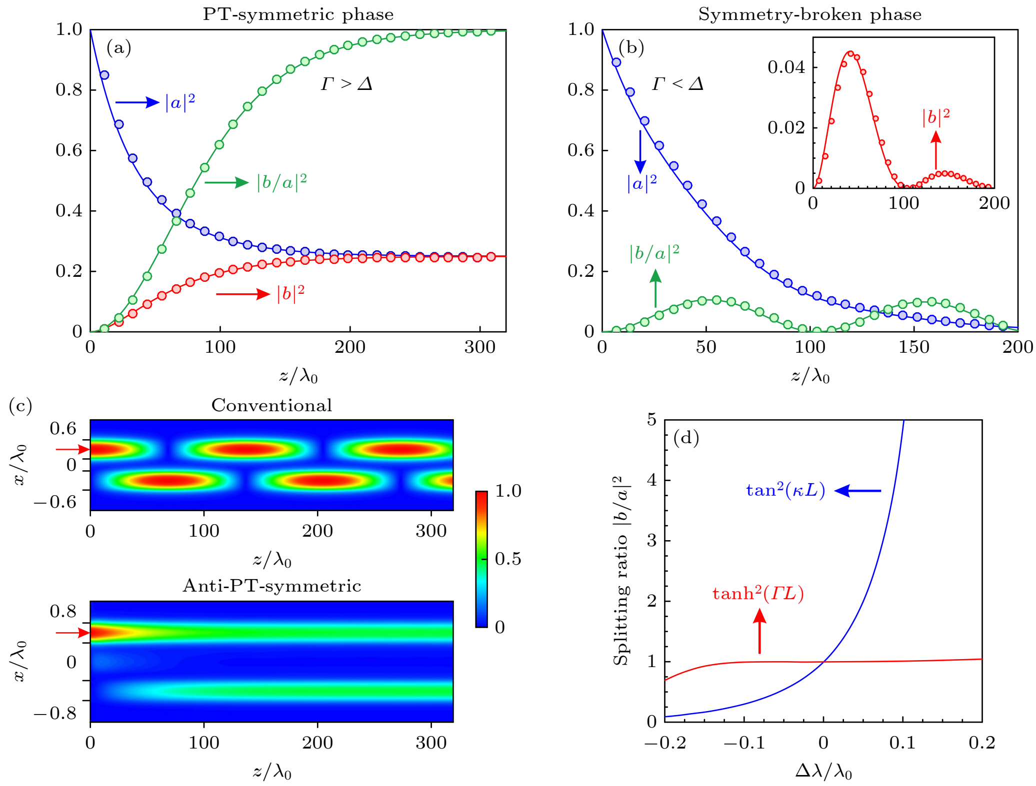


图 5 波导内的光场演化图[31] (a), (b) $\mathcal{PT}$ 对称相和 $\mathcal{PT}$ 对称破缺相的传播特性, 数据点是有限元模拟结果, 实线是理论计算结果; (c) 传统厄米系统和 $\mathcal{PT}$ 反对称系统的光场分布对比图; (d) 分束比例对波长的依赖特性, 红色线是 $\mathcal{PT}$ 反对称系统, 蓝色线是传统厄米系统

Fig. 5. Evolution diagram of light field in the waveguides[31]: (a) (b) The propagation characteristics of $\mathcal{PT}$-symmetric phase and $\mathcal{PT}$-symmetry-broken phase, respectively, the data points are the result of finite element simulation, and the solid lines are the result of theoretical calculation; (c) comparison diagram of light field distribution between traditional Hermitian system and anti-PT-symmetric system; (d) the dependence of beam splitting ratio on wavelength, the red line is the anti-$\mathcal{PT}$-symmetric system, and the blue line is the traditional Hermitian system.

考虑系统的本征频率 $\tilde{\omega}_\pm = \tilde{\omega}'_\pm + \mathrm{i}\tilde{\omega}''_\pm$, 在 $\mathcal{PT}$ 对称相 ($\Gamma > \Delta$) ，本征模式有相同的共振频率 $\omega'_+ = \omega'_-$ ，但是不同的耗散速率 $\omega''_+ \neq \omega''_-$. 在 $\mathcal{PT}$ 对称破缺相 ($\Gamma < \Delta$), 本征模式的共振频率不同 $\omega'_+ \neq \omega'_-$, 但是有相同的耗散速率 $\omega''_+ = \omega''_-$. 图 6(c) 中构型 I 腔模 c 的耗散速率 γ 逐渐增大导致耗散耦合速率 Γ 逐渐减小, 而图 6(d) 的构型 2 中可以通过调节 b 腔的半径实现增大失谐 Δ, 两种方式都使系统从 $\mathcal{PT}$ 对称相转变为 $\mathcal{PT}$ 对称破缺相. 与波导系统类似, 在光学微腔构型 II 的 $\mathcal{PT}$ 对称相同样可以将腔模的色散调制转变为纯耗散调制.

6 原子系统中的 $\mathcal{PT}$ 反对称

2016 年, 复旦大学肖艳红课题组[38] 在原子系统中实现了宇称-时间反对称的哈密顿量. 在该研究中, 利用原子的热运动构建了光学模式之间的耦合. 如图 7(a) 所示, 实验在 ^{87}Rb 原子气室中进行, 温度约为 40 ℃. 气室的内表面覆盖着不破坏量子态相干的石蜡, 这使原子能够经受数千次与壁的碰撞, 而不会破坏其内部量子态. 原子蒸汽室被封装在一个四层屏蔽层内, 从而屏蔽环境磁场. 在屏蔽层内部, 利用螺线管产生均匀的磁场, 该磁场可诱导一个塞曼位移 δ_B 到双光子失谐上. 利用半波片 (HWP) 和偏振分束器 (PBS) 将来自腔外半导体激光器 (ECDL) 的一束激光分为 4 束. 探测光和控制光 (具有正交线性偏振) 首先通过 1/4 波片 (QWP) 重新组合并转换为圆偏振, 然后被引导到两个相距 1 cm 的光学通道 (称为 Ch1 和 Ch2). Ch1 和 Ch2 的能级结构如图 7(b) 所示, Ch1 和 Ch2 中的右旋圆偏振控制场 $\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_1^{(2)}$ 分别与跃迁 $|1\rangle \to |3\rangle$ 共振; 而 Ch1 和 Ch2 中的左旋圆偏振控制场 $\boldsymbol{\Omega}_2^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_2^{(2)}$ 分别与跃迁 $|2\rangle \to |3\rangle$ 近似共振, 但与共振频率在相反方向上偏移了相同的大小 $|\Delta_0|$, 其中 Δ_0 是

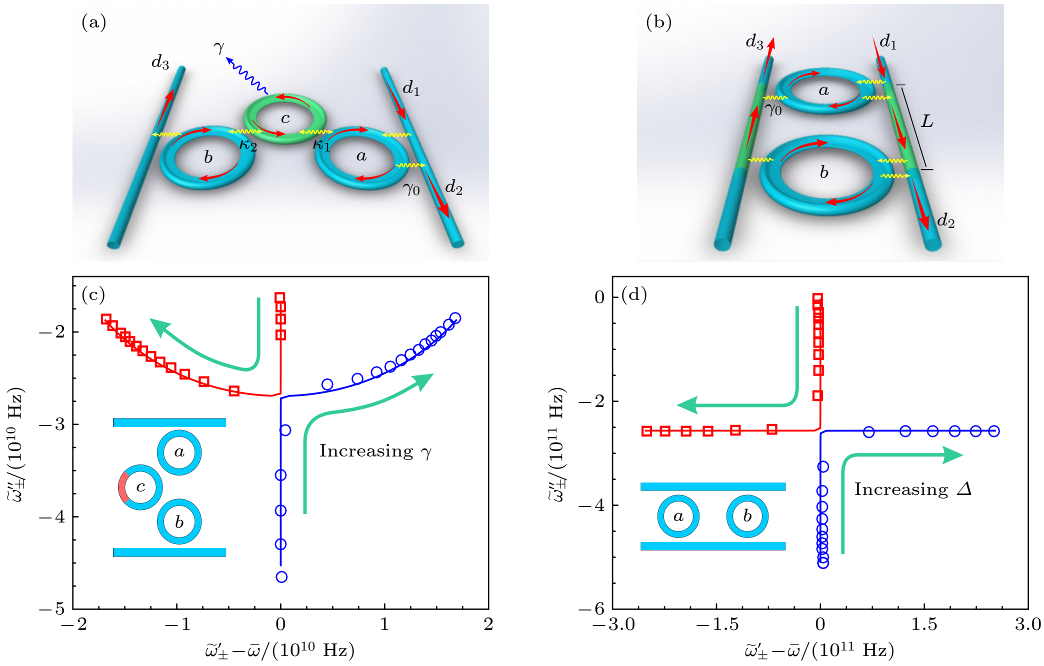


图 6 光学微腔构型 I (a) 和构型 II (b) 及相应本征频率在复平面上的演化 (c)(d), 数据点是有限元模拟结果, 实线是理论计算结果[31]

Fig. 6. Optical microcavity configuration I (a) and configuration II (b) and the corresponding eigenfrequencies on the complex plane. Data points are finite element simulation results, and solid lines are theoretical calculation results[31].

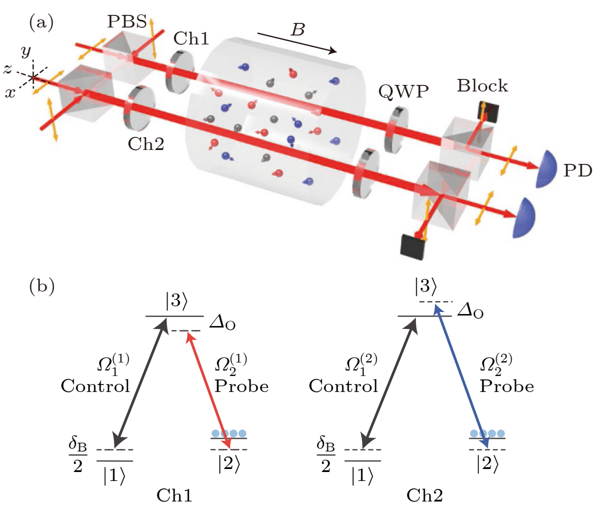


图 7 (a) 通过热 ^{87}Rb 蒸汽池中的快速原子相干传输, 实现 $\mathcal{PT}$ 反对称性的示意图; (b) 两个通道中的三能级 Λ 型 EIT 构型[38]

Fig. 7. (a) Schematic diagram of realizing anti-$\mathcal{PT}$-symmetry through fast atomic coherent transmission in hot ^{87}Rb vapor cell; (b) three level Λ-type EIT configuration in two channels[38].

探测光和控制光频率之间的差值. Δ_0利用声光调制器产生, 为了稳定探测光和控制光之间的相位关系, 所有声光调制器都由彼此间相位固定不变的振荡器驱动. 在每个通道中, 共同传播的探针光和控制光构建了Λ型EIT效应, 并产生了寿命约为100 ms的基态相干性. 一个光通道中的光和原子相互作用, 改变了原子的量子态, 然后该原子通过热运进入另外一个光通道, 与另一个通道的光相互作用, 将之前通道内的光的信息传递给这束光, 从而实现了两个通道内的光模式之间的间接耦合. 两个自旋波通过气室中^{87}Rb原子的运动自然耦合, 在一些特定的近似下, 两个集体自旋波激发的动力学可以由以下非厄米哈密顿量$\boldsymbol{H}_{\rm eff}$来描述:

$$\boldsymbol{H}_{\rm eff}=-\delta_{\rm B}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}|\Delta_0|-{\rm i}\gamma'_{12} & {\rm i}\varGamma_c{\rm e}^{-2{\rm i}|\Delta_0|t}\\ {\rm i}\varGamma_c{\rm e}^{2{\rm i}|\Delta_0|t} & -|\Delta_0|-{\rm i}\gamma'_{12}\end{pmatrix}. \tag{31}$$

其中, $\boldsymbol{I}$为2×2的单位矩阵, $\gamma'_{12}=\gamma_{12}+\varGamma_c+2\varGamma_P$, γ_{12}为基态相干性的退相干率, $\varGamma_c$为两个通道之间的基态相干耦合率, $2\varGamma_P=2|\varOmega_1|^2/\gamma_{31}$是相同拉比频率的两个控制光束的总泵浦率, γ_{31}是原子的光学相干耗散率. 对于满足${\rm e}^{-2{\rm i}|\Delta_0|t}=1$的周期分布的离散时间点处的哈密顿量, 哈密顿量$\boldsymbol{H}$化为更简单的形式:

$$\boldsymbol{H}'=\begin{pmatrix}|\Delta_0|-{\rm i}\gamma'_{12} & {\rm i}\varGamma_c\\ {\rm i}\varGamma_c & -|\Delta_0|-{\rm i}\gamma'_{12}\end{pmatrix}. \tag{32}$$

此2×2哈密顿量$\boldsymbol{H}$满足$\{\mathcal{PT},\boldsymbol{H}\}=0$, 为$\mathcal{PT}$反对称的哈密顿量.

该工作在实验上能观察到了相变现象, 在对称相, 两个光模式的谐振峰位置完全重合; 在对称破缺相, 两个光模式的谐振峰位置劈裂. 由于原子的量子态寿命较长, 因此相变的观测精度达到了 1 Hz 级别. 在此$\mathcal{PT}$ 反对称系统中, 在体系对称性破缺前, 虽然两束光经过的介质的折射率不同, 但实现了无折射传播.

7 基于非厄米奇异点的传感

由于$\mathcal{PT}$对称与反对称系统中存在非厄米奇异点, 因此在精密传感领域有重要的应用价值. 在厄米系统中, 微扰 ($|\varepsilon| \ll 1$) 引起的本征谱的偏移或劈裂最多与微扰ε自身在一个阶次上. 对于 N个模式合并所对应的 N阶非厄米奇异点, 本征频率分裂$\Delta\omega$对外界微扰具有$\varepsilon^{1/N}$的依赖关系. 当外界微扰$|\varepsilon| \ll 1$时, 与厄米系统相比, 在非厄米系统的奇异点附近可以极大地提高对外界微扰的探测灵敏度. 理论与实验结果表明, 二阶非厄米奇异点可以增强谐振模式对外部扰动的敏感性[56,57], 而使用更高阶非厄米奇异点在原则上可以进一步提高系统对外界微扰响应的灵敏度.

2017 年, 美国 Khajavikhan 课题组[58] 利用耦合腔构造了具有 3 个模式的$\mathcal{PT}$对称系统, 实验证明了系统中存在高阶非厄米奇异点, 且系统对外界微扰的响应表现出对微扰强度的立方根特性. 如图 8 所示, 系统由 3 个谐振腔组成: 增益腔和损耗腔被无增益和损耗的中性腔隔开, 两侧的环形腔的增益和损耗强度相等, 环形腔之间以相同的耦合强度交换能量. 此$\mathcal{PT}$对称系统的模场的演化由如下方程决定:

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{H}V, \tag{33}$$

其中$V = (\ a,\ \ b,\ \ c\ )^{\mathrm{T}}$表示模态列向量, a, b和c分别代表增益、损耗和中性腔中模式的振幅, t代表时间, $\boldsymbol{H}$为3×3的非厄米哈密顿量:

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}g+\varepsilon & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \kappa \\ 0 & \kappa & -\mathrm{i}g \end{pmatrix}. \tag{34}$$

其中, g和$-g$分别描述增益和损耗, ε为在增益环形腔上加的外界微扰.

当系统不存在微扰时 ($\varepsilon = 0$), 假设V对时间的依赖关系为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}$, 则系统本征频率可以通过求解如下方程得到:

$$\omega_n\left(\omega_n^2 - 2\kappa^2 + g^2\right) = 0. \tag{35}$$

当系统环形腔的增益和损耗强度g和环形腔之间的耦合强度κ满足$g = \sqrt{2}\kappa$时, 系统的 3 个本征频率合并为相同的$\omega_n = 0$, 与此同时, 系统 3 个本征矢量合并为相同的$A_0\,(\ 1,\ \ -\mathrm{i}\sqrt{2},\ \ -1\ )$, 其中$A_0$为归一化常数. 此时系统处于三阶非厄米奇异点, 当系统受到微扰ε时, 系统的本征频率频率发生劈裂, 该课题组求解得到了系统本征频率对外界微扰依赖关系的近似解析表达式, 并进行了数值求解验证,

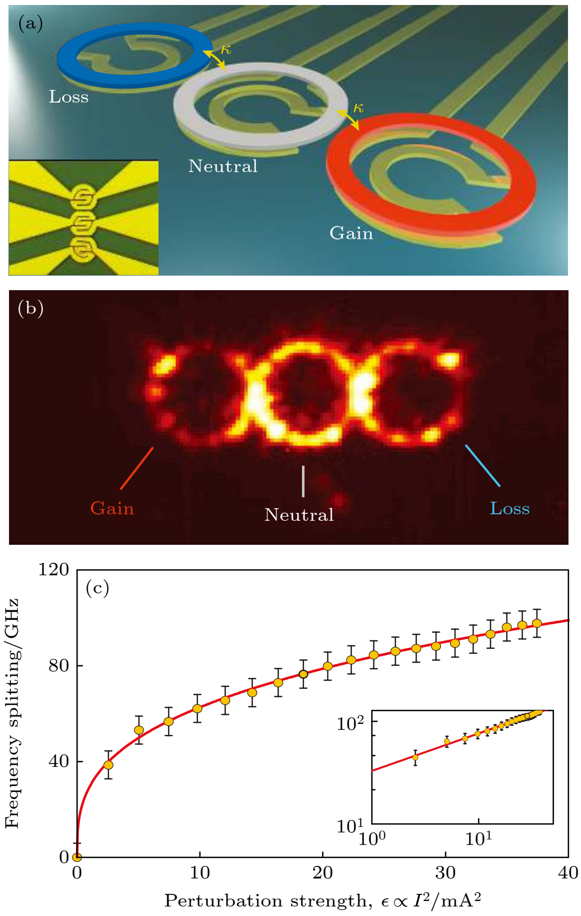


图 8 (a) 3 个等距微环腔构成的$\mathcal{PT}$对称系统示意图, 两侧的谐振腔具有平衡的增益和损耗, 而中间的谐振腔是中性的; (b) 系统处于三阶非厄米奇异点的激光模式的强度分布; (c) 相邻激光谱线之间的分裂随微扰强度ε的变化, 数据点是实验测量结果, 实线是理论计算结果[58]

Fig. 8. (a) Schematic diagram of $\mathcal{PT}$-symmetric system composed of three equidistant micro-ring cavities, the resonators on both sides have balanced gain and loss, while the resonators in the middle are neutral; (b) the intensity distribution of the laser mode with the system at the third-order non-Hermitian exception point; (c) splitting between adjacent laser spectral lines with perturbation intensity ε. Data points are experimental measurement results, and solid lines are theoretical calculation results[58].

在此基础上, 该课题组实验证明了系统相邻本征频率的劈裂与微扰强度之间具有三次方根的形式. 这表明, 与传统的微腔传感器相比, 此系统对足够小的微扰的探测灵敏度有极大提高.

尽管这些实验已经证明在奇异点处可以获得劈裂增强, 但没有仔细考虑噪声的变化. 之后的一些分析显示奇异点附近的噪声也得到了增强, 因此对于信噪比来说并没有提高[59]. 目前, 相关方面的研究仍然在进行中, 例如在文献 [60] 中通过发展量子噪声理论来计算奇异点传感器的信噪比性能, 利用量子 Fisher 信息来确定信噪比的下限, 结果表明奇异点传感器是有可能改善信噪比的, 在实验方面, 基于奇异点探测器增强的 Sagnac 效应[61], 基于六阶奇异点$\mathcal{PT}$ 对称电路的灵敏度增强传感[62], 基于奇异点增强信噪比的加速度计[63] 等实验也已经实现.

8 总结与展望

本文介绍了$\mathcal{PT}$ 对称和反对称的基本物理原理, 主要回顾了$\mathcal{PT}$ 对称和反对称在光学系统和原子系统中的理论和实验实现, 并介绍了基于非厄米奇异点的精密传感研究. 在未来, 关于$\mathcal{PT}$ 对称和反对称的研究有望进一步加深对相关基础理论的理解, 以及在多个领域获得应用.

在理论方面, 尽管$\mathcal{PT}$ 对称量子力学的数学形式已经比较完善, 但大部分研究中只考虑了经典区域, 例如将经典波动方程写成类似于薛定谔方程的形式. 如果进一步考虑更一般性的量子效应, 有可能揭示更加丰富的物理. 例如, 由于$\mathcal{PT}$ 对称与反对称系统中具有增益和耗散, 这与量子涨落-耗散定理、量子噪声等有本质联系, 因此可以探索系统中的量子涨落和噪声等[64,65].

$\mathcal{PT}$ 对称的相关变体也$\mathcal{PT}$ 大的研究价值. 例如, $\mathcal{PT}$ 对称中的操作可以被另一种空间操作 (例如旋转) 所取代[66,67]. 这将进一步扩展相关领域. 此外, 基于$\mathcal{PT}$ 对称启发的对称范式, 如超对称性、非厄米粒子-空穴对称性[68] 等也是一个重要的发展方向. 例如, 超对称性可为设计光学结构提供有效的工具[69], 在光通信等领域有广泛应用[70]. 不仅如此, 近年来, 在光学系统中非$\mathcal{PT}$ 对称复势 (即 $\hat{V}(\vec{t}) \neq \hat{V}^*(-\vec{r})$) 的研究也引起了关注, 在这种情况下也可以保证哈密顿量具有实能谱[71–73], 可以实现单向无反射的光传输[74], 非局域孤子[75] 等.

除了在理论方面的发展, 在具体应用方面, $\mathcal{PT}$ 对称的光子系统可能为未来集成光子学器件的实现提供一条新的途径. 实际应用的物理器件不可避免地与环境有耦合导致耗散的存在, 而$\mathcal{PT}$ 对称系统可以巧妙地设计增益模式, 可以有效地补偿损耗或者放大光脉冲, 也可以设计高效可集成的新型光开关、单向非反射光学器件[11,12]、CPA 激光器[49]、声子激光器[76] 等新型器件. 除了在光学系统中的应用外, 在原子系统中, 利用$\mathcal{PT}$ 对称原理实现耦合调控, 也为构造新型光子器件和原子器件提供了新的思路.

参考文献

[1] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
[2] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
[3] Heiss W D 2004 *J. Phys. A. Math. Gen.* **37** 2455
[4] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2003 *Am. J. Phys.* **71** 1095
[5] Bagchi B, Quesne C 2000 *Phys. Lett. A* **273** 285
[6] Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Musslimani Z H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 103904
[7] Longhi S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 123601
[8] Klaiman S, Günther U, Moiseyev N 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 080402
[9] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
[10] Ramezani H, Kottos T, El-Ganainy R, Christodoulides D N 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043803
[11] Chang L, Jiang X, Hua S, Yang C, Wen J, Jiang L, Li G, Wang G, Xiao M 2014 *Nat. Photonics* **8** 524
[12] Peng B, Özdemir S K, Lei F, Monifi F, Gianfreda M, Long G L, Fan S, Nori F, Bender C M, Yang L 2014 *Nat. Phys.* **10** 394
[13] Lin Z, Ramezani H, Eichelkraut T, Kottos T, Cao H, Christodoulides D N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 213901
[14] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* **488** 167
[15] Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, Lu M H, Oliveira J E B, Almeida V R, Chen Y F, Scherer A 2013 *Nat. Mater.* **12** 108
[16] Feng L, Wong Z J, Ma R M, Wang Y, Zhang X 2014 *Science* **346** 972
[17] Hodaei H, Miri M A, Heinrich M, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2014 *Science* **346** 975
[18] Miao P, Zhang Z, Sun J, Walasik W, Longhi S, Litchinitser N M, Feng L 2016 *Science* **353** 464
[19] Zhang Z, Qiao X, Midya B, Liu K, Sun J, Wu T, Liu W, Agarwal R, Jornet J M, Longhi S, Litchinitser N M, Feng L 2020 *Science* **368** 760
[20] Hang C, Huang G, Konotop V V 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 083604
[21] Zhang Z, Zhang Y, Sheng J, Yang L, Miri M A, Christodoulides D N, He B, Zhang Y, Xiao M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 123601
[22] Sun Y, Tan W, Li H, Li J, Chen H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112**

143903

[23] Yang X, Li J, Ding Y, Xu M, Zhu X F, Zhu J 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 065701

[24] Schindler J, Li A, Zheng M C, Ellis F M, Kottos T 2011 *Phys. Rev. A* **84** 040101

[25] Wu Y, Liu W, Geng J, Song X, Ye X, Duan C K, Rong X, Du J 2019 *Science* **364** 878

[26] Jing H, Özdemir S K, Geng Z, Zhang J, Lü X Y, Peng B, Yang L, Nori F 2015 *Sci. Rep.* **5** 9663

[27] Schönleber D W, Eisfeld A, El-Ganainy R 2016 *New J. Phys.* **18** 045014

[28] Zhu X, Ramezani H, Shi C, Zhu J, Zhang X 2014 *Phys. Rev. X* **4** 031042

[29] Fleury R, Sounas D, Alù A 2015 *Nat. Commun.* **6** 5905

[30] Bittner S, Dietz B, Günther U, Harney H L, Miski-Oglu M, Richter A, Schäfer F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 024101

[31] Yang F, Liu Y C, You L 2017 *Phys. Rev. A* **96** 053845

[32] Antonosyan D A, Solntsev A S, Sukhorukov A A 2015 *Opt. Lett.* **40** 4575

[33] Wu J H, Artoni M, La Rocca G C 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 123004

[34] Ge L, Türeci H E 2013 *Phys. Rev. A* **88** 53810

[35] Zhao J, Liu Y, Wu L, Duan C K, Liu Y, Du J 2020 *Phys. Rev. Appl.* **13** 014053

[36] Bergman A, Duggan R, Sharma K, Tur M, Zadok A, Alù A 2021 *Nat. Commun.* **12** 486

[37] Zhang X L, Jiang T, Chan C T 2019 *Light Sci. Appl.* **8** 88

[38] Peng P, Cao W, Shen C, Qu W, Wen J, Jiang L, Xiao Y 2016 *Nat. Phys.* **12** 1139

[39] Wu H C, Jin L, Song Z 2021 *Phys. Rev. B* **103** 235110

[40] Xu H S, Jin L 2021 *Phys. Rev. A* **104** 012218

[41] Jin L 2018 *Phys. Rev. A* **98** 022117

[42] Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Musslimani Z H 2011 *Int. J. Theor. Phys.* **50** 1019

[43] Zyablovsky A A, Vinogradov A P, Pukhov A A, Dorofeenko A V, Lisyansky A A 2014 *Physics-Uspekhi* **57** 1063

[44] Feng L, El-Ganainy R, Ge L 2017 *Nat. Photonics* **11** 752

[45] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, Musslimani Z H, Rotter S, Christodoulides D N 2018 *Nat. Phys.* **14** 11

[46] Özdemir S K, Rotter S, Nori F, Yang L 2019 *Nat. Mater.* **18** 783

[47] Krasnok A, Nefedkin N, Alu A 2021 *IEEE Antennas Propag. Mag.* **63** 110

[48] Hang C, Huang G 2017 *Adv. Phys. X* **2** 737

[49] Qi B, Chen H, Ge L, Berini P, Ma R 2019 *Adv. Opt. Mater.* **7** 1900694

[50] Konotop V V, Yang J, Zezyulin D A 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035002

[51] Suchkov S V, Sukhorukov A A, Huang J, Dmitriev S V, Lee C, Kivshar Y S 2016 *Laser Photon. Rev.* **10** 177

[52] Shankar R 1994 *Principles of Quantum Mechanics* (New York: Springer US) pp145–147

[53] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, Morandotti R, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902

[54] Li J, Harter A K, Liu J, de Melo L, Joglekar Y N, Luo L 2019 *Nat. Commun.* **10** 855

[55] Ding L Y, Shi K Y, Zhang Q X, Shen D N, Zhang X, Zhang W 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 083604

[56] Wiersig J 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 203901

[57] Chen W, Özdemir S K, Zhao G, Wiersig J, Yang L 2017 *Nature* **548** 192

[58] Hodaei H, Hassan A U, Wittek S, Garcia-Gracia H, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2017 *Nature* **548** 187

[59] Lau H K, Clerk A A 2018 *Nat. Commun.* **9** 4320

[60] Zhang M, Sweeney W, Hsu C W, Yang L, Stone A D, Jiang L 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 180501

[61] Lai Y H, Lu Y K, Suh M G, Yuan Z, Vahala K 2019 *Nature* **576** 65

[62] Xiao Z, Li H, Kottos T, Alù A 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 213901

[63] Kononchuk R, Cai J, Ellis F, Thevamaran R, Kottos T 2022 *Nature* **607** 697

[64] Kepesidis K V, Milburn T J, Huber J, Makris K G, Rotter S, Rabl P 2016 *New J. Phys.* **18** 095003

[65] Schomerus H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 233601

[66] Ge L, Stone A D 2014 *Phys. Rev. X* **4** 031011

[67] Ge L, Makris K G, Christodoulides D N, Feng L 2015 *Phys. Rev. A* **92** 062135

[68] Malzard S, Poli C, Schomerus H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 200402

[69] Miri M A, Heinrich M, El-Ganainy R, Christodoulides D N 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 233902

[70] Heinrich M, Miri M A, Stützer S, El-Ganainy R, Nolte S, Szameit A, Christodoulides D N 2014 *Nat. Commun.* **5** 3698

[71] Christodoulides D, Yang J 2018 *Parity-Time Symmetry and Its Applications* (Singapore: Springer Singapore) pp513–534

[72] Yang J 2017 *Opt. Lett.* **42** 4067

[73] Nixon S, Yang J 2016 *Phys. Rev. A* **93** 031802

[74] He Z, Li L, Cui W, Wang Y, Xue W, Xu H, Yi Z, Li C, Li Z 2021 *New J. Phys.* **23** 053015

[75] Zhu X, Peng X, Qiu Y, Wang H, He Y 2020 *New J. Phys.* **22** 033035

[76] Jing H, Özdemir S K, Lü X Y, Zhang J, Yang L, Nori F 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 53604

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Research progress of parity-time symmetry and anti-symmetry*

Tang Yuan-Jiang[1)#] Liang Chao[1)#] Liu Yong-Chun[1)2)†]

1) (*State Key Laboratory of Low-Dimensional Quantum Physics*, *Department of Physics*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084, *China*)

2) (*Frontier Science Center for Quantum Information*, *Beijing* 100084, *China*)

(Received 4 July 2022; revised manuscript received 16 August 2022)

Abstract

In standard quantum mechanics, the Hamiltonian describing the physical system is generally Hermitian, so as to ensure that the system has real energy spectra and that the system's evolution is unitary. In recent years, it has been found that non-Hermitian Hamiltonians with parity-time ($\mathcal{PT}$) symmetry also have real energy spectra, and there is a novel non-Hermitian exceptional point between $\mathcal{PT}$-symmetric phase and $\mathcal{PT}$-symmetry-broken phase, which is unique to non-Hermitian systems. Recently, people have realized $\mathcal{PT}$ symmetric and anti-$\mathcal{PT}$ symmetric non-Hermitian Hamiltonians in various physical systems and demonstrated novel quantum phenomena, which not only deepened our understanding of the basic laws of quantum physics, but also promoted the breakthrough of application technology. This review will introduce the basic physical principles of $\mathcal{PT}$ symmetry and anti-$\mathcal{PT}$ symmetry, summarize the schemes to realize $\mathcal{PT}$ symmetry and anti-$\mathcal{PT}$ symmetry in optical and atomic systems systematically, including the observation of $\mathcal{PT}$-symmetry transitions by engineering time-periodic dissipation and coupling in ultracold atoms and single trapped ion, the realization of anti-$\mathcal{PT}$ symmetry in dissipative optical system by indirect coupling, and realizing anti-$\mathcal{PT}$-symmetry through fast atomic coherent transmission in flying atoms. Finally, we review the research on precision sensing using non-Hermitian exceptional points of $\mathcal{PT}$-symmetric systems. Near the exceptional points, the eigenfrequency splitting follows an $\varepsilon^{\frac{1}{N}}$-dependence, where the ε is the perturbation and N is the order of the exceptional point. We review the $\mathcal{PT}$-symmetric system composed of three equidistant micro-ring cavities and enhanced sensitivity at third-order exceptional points. In addition, we also review the debate on whether exceptional-point sensors can improve the signal-to-noise ratio when considering noise, and the current development of exceptional-point sensors, which is still an open and challenging question.

Keywords: parity-time symmetry, anti-parity-time symmetry, non-Hermitian, exceptional point

PACS: 11.30.Er, 42.50.–p, 42.60.Da **DOI:** 10.7498/aps.71.20221323

* Project supported by the Key-Area Research and Development Program of Guangdong Province, China (Grant No. 2019B030330001), the National Natural Science Foundation of China (NSFC) (Grant Nos. 92050110, 91736106, 11674390, 91836302), and the National Key R&D Program of China (Grant No. 2018YFA0306504).

# These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: ycliu@tsinghua.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

宇称–时间对称与反对称研究进展

唐原江　梁超　刘永椿

Research progress of parity–time symmetry and anti–symmetry

Tang Yuan-Jiang　Liang Chao　Liu Yong-Chun

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 171101 (2022)　DOI: 10.7498/aps.71.20221323

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20221323

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

专题: 非厄米物理前沿

非厄米临界动力学及其在量子多体系统中的应用*

张禧征[1)] 王鹏[4)] 张坤亮[2)] 杨学敏[3)] 宋智[2)†]

1) (天津师范大学物理与材料科学学院, 天津 300387)

2) (南开大学物理科学学院, 天津 300071)

3) (重庆邮电大学理学院, 重庆 400065)

4) (中国工程物理研究院研究生院, 北京 100193)

(2022 年 5 月 10 日收到; 2022 年 7 月 6 日收到修改稿)

近些年来, 非厄米与强关联两种元素开始融合并形成物理学中的一个重要研究领域, 相关理论与实验的进展重塑了人们对于物质的理解. 在该领域中, 研究对象并不局限于非厄米元素对多体系统能谱以及本征态性质的影响, 研究者们更加关注对量子态的操纵. 例外点作为非厄米量子力学区别于厄米量子力学中最显著的特征得到了大家广泛的关注. 除了围绕能谱例外点的非厄米拓扑能带理论以及量子探测等最新进展外, 本文重点阐述以能谱例外点为基础的临界动力学现象及其在量子多体系统中的应用. 当系统处于能谱例外点上时, 属于例外点合并子空间中的任意初始态都将投影到体系的合并态上. 基于量子态演化的方向性, 本文回顾了近年来本课题组在量子自旋系统所发现的外场诱导的动力学磁化、横场 Ising 模型中的有限温相变、中心-环境系统中的量子铸模以及非厄米强关联系统中的超导态制备等几个代表性工作, 着重讨论了与例外点相关的新的非平衡量子态制备方法以及探测方案.

关键词: 非厄米系统, 量子多体系统, 例外点

PACS: 45.50.Jf, 71.10.Fd, 05.70.Jk, 61.20.Lc **DOI:** 10.7498/aps.71.20220914

1 引 言

哈密顿量的厄米性是量子力学中的一个重要假设. 它确保了孤立量子系统的几率守恒以及力学可观测量的实数性. 然而, 由于人们所考虑的系统不可避免地与周围环境发生能量、粒子以及信息的交换, 因此人们所观测到的系统概率不守恒现象在自然界中普遍存在. 从历史上来看, 对此类开放系统的研究可以追溯到 Gamow[1], Siegert[2], Majorana[3] 和 Feshbach[4,5] 的早期工作. 他们考虑了核反应中的辐射衰变, 该衰变可以通过一个与量子态几率衰减相关的非厄米有效哈密顿量来描述, 他们从动力学的角度解释了流向核外的非零几率流. 沿着这条主线发展起来的理论方法被称为 Feshbach 或 Cohen Tannoudji 投影方法, 其在后续介观物理以及原子和分子物理学研究领域中得到了广泛的应用. 另一方面, 由于单粒子的量子力学与经典波动方程的数学形式等价[6], 非厄米的描述可以被应用到不同的非保守经典物理系统中去. 这些非保守的经典系统提供了一个在不同物理领域中 (如光学、光子学、电子电路、机械系统、腔光力学系统、生物输运、声学以及流体) 研究非传统波动现象的理想平台. 由于波的本质以及方程的数学等价性, 固体物理中的能带理论可以被直接推广到具有周期性结构的经典系统中. 最近, 由于非厄米量子力学与经典系统的这种相关性, 传统凝聚态物理中的拓扑能带概念已经被扩展到非厄米体系中, 这直接

* 国家自然科学基金 (批准号: 11975166, 11874225, 12047547) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: songtc@nankai.edu.cn

导致了一系列超越厄米能带理论现象的发现[7].

随着实验上量子相干控制技术的进步, 量子光学领域还发展出了一种处理开放量子系统的理论方法. 基于此, 人们可以在实验上高度可调的领域中探寻少体物理机理[8]. 相比之下, 量子物理学中另一个非常有趣的现象是当系统中存在大量相互作用粒子时所展现出的集体动力学行为[9]. 原子、分子和光学的最新实验进展已经使得人们能够在多体领域中探索量子开放系统. 从这个角度来看, 这些进展为曾经被认为只是出于基本理论建设以及学术兴趣的早期理论研究提供了新的视角, 如非幺正量子场论中的李-杨奇点等[10]. 从理论上来讲, 此类开放系统在马尔可夫近似下由主方程描述. 系统与环境之间耦合导致了与量子跳跃项 (quantum jump) 相关的 Lindblad 耗散算符的出现, 其代表在环境的影响下系统偏离自身的幺正演化行为. 真正的非厄米量子系统恰是来源于系统与环境的相互作用. 当量子跳跃项发生作用的时间小于系统的特征时间时, 主方程中的量子跳跃项可以忽略, 此时主方程与薛定谔方程等价. 但是描述系统动力学的哈密顿量不再具有厄米性而具有非厄米性. 从算符的角度来讲, 算符的演化应当满足郎之万方程. 究其本质而言, 非厄米哈密顿量就是郎之万方程所对应的有效哈密顿量, 它是利用海森伯方程在 Weisskopf-Wigner 近似下推导郎之万方程的直接结果. 近些年来, 探究非厄米哈密顿量与开放系统之间的联系这一课题, 引起了很多国内外理论与实验组的重点关注[11–22]. 另一方面, 对于系统的测量过程, 究其本质而言也是一个系统与环境的相互作用过程. 非幺正的微扰也可以显著地改变系统潜在的动力学现象, 一个典型的例子就是所谓的连续量子芝诺效应[23]. 在此现象中, 系统与测量仪器 (环境) 之间的耦合足够强以至于可以抑制量子态之间的隧穿概率 (即所谓的量子跃迁). 这种抑制机制背后的物理也可以通过分析有效非厄米哈密顿量的能谱特性来得到. 连续量子芝诺效应通常表现为其复本征值的的虚部被抑制[24–27]. 这一特征在量子少体以及多体系统中鲜有发现, 而后者可以导致更丰富的物理现象, 如粒子间关联的增强、量子临界点的移动[28,29]、非阿贝尔规范场工程、晶格约束诱导的多带效应[30,31]、以及非稳定量子态的长弛豫过程[32–39].

近十年来, 从离散非厄米哈密顿量出发探究其能谱及本征态的基本性质已经成为当下非厄米研究领域的前沿问题. 除了能谱结构的特殊性质, 非厄米系统还表现出许多在厄米系统中从未出现过的特殊动力学行为, 其中一个显著特征是临界动力学[40–47]. 这种特殊动力学行为以非厄米系统中的例外点为基础[47–54]. 所谓例外点是指非厄米系统中本征态的合并, 其导致系统希尔伯特空间的不完备. 因此, 非厄米哈密顿量在此时不能够被对角化. 这一非厄米所独有的行为显著区分于厄米系统中能级的简并现象, 简并不会导致希尔伯特空间的缺失. 狄拉克概率不守恒及例外点的存在造就了非厄米系统不同于厄米系统的特殊动力学行为. 虽然基于例外点的相关非平衡物理在单体系统中得到了深入的研究[55,56], 但在多体系统中则较少涉及. 可以肯定的是非厄米性和相互作用之间的结合必定会产生新奇的量子多体效应, 并且可以显著地改变厄米物理中已经确立的宏观集体激发行为[37].

本综述简要总结了近年来本课题组在非平衡量子多体物理方面的几个代表性工作, 着重讨论与非厄米例外点相联系的非平衡多体物态的制备. 本文涉及的非厄米哈密顿量不仅可以在短时间内很好地捕获非平衡系统的动力学特征, 而且可以很好地与量子跳跃项一起决定量子态演化的一条量子轨迹[57]. 由于密度矩阵可以被视为纯态在经典概率下的叠加, 那么通过对所有可能的量子轨迹进行加权便可以得到密度矩阵在量子主方程下的演化. 因此研究非厄米哈密顿量在例外点附近的动力学特性为在开放系统中发现奇特的量子态有着重要的理论意义. 本文第 2 节首先基于厄米系统的简并子空间, 给出构建具有例外点的非厄米非平庸哈密顿量的一般方法. 以此为基础, 阐明非厄米系统在例外点时的一般演化规律, 并揭示具有不同阶数例外点下系统所独有的的动力学规律. 第 3 节主要侧重于将第 2 节发展的非厄米临界动力学理论应用到具体的多体系统. 具体来讲: 第 3.1 节介绍自旋系统中由临界外场诱导的高阶例外点, 并探讨铁磁海森伯系统自发磁化过程以及在时间域上形成的磁滞回线[58]. 第 3.2 节着重讨论横场伊辛模型对于非局域外场的动力学响应. 阐明在有限温下, 外场所诱导的能级合并现象是系统保持零温相图的关键[59]. 第 3.3 节回顾了通过合理设置中心-环境系统的非厄米耦合形式, 以时间演化为基础, 在中心系统中制备非平庸拓扑物态的量子铸模方法[60]. 第 3.4 节

讨论了非平衡多体系统中临界动力学演化框架下的 η 对态制备方案[61]. 最后对非厄米临界动力学理论进行总结和展望.

2 非厄米临界理论

本节首先通过简并厄米模型给出具有例外点的非厄米模型的一般构建方法, 在此基础上探讨例外点系统中态的演化规律.

2.1 具有例外点的非厄米模型的构建

一般情况下, 一个处于例外点的系统可以通过调整非厄米参数 (如复数势、复数磁通、复数相互作用及不等幅跳跃) 得到. 在例外点附近的系统表现出能级排斥现象[47]. 超越例外点时, 系统将经历实数能级向复数能级的转换. 参数临界值通常是某个超越方程的解, 并且例外点系统对复参数非常敏感. 因此, 在实验中使一个系统精确地位于例外点并不容易. 本节将提出一种基于能谱简并点建立例外点系统的一般性理论, 利用这种理论得到的例外点对非厄米参数的强弱程度不敏感.

考虑如下形式的非厄米哈密顿量:

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}', \tag{1}$$

该哈密顿量可以分成两部分, 即厄米部分和非厄米部分:

$$\boldsymbol{H}_0=(\boldsymbol{H}_0)^{\dagger},\ \boldsymbol{H}'\neq(\boldsymbol{H}')^{\dagger}. \tag{2}$$

定理 当以下条件满足时, 哈密顿量 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}'$ 的能谱中一定拥有例外点:

1) $\boldsymbol{H}_0$ 有二重简并态 $|A\rangle$ 与 $|B\rangle$, 其对应的能量为 E;

2) $|A\rangle$ $(|B\rangle)$ 是哈密顿量 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}^{\dagger})$ 能量为 E 的非简并本征态.

证明 对于非厄米哈密顿量 $\boldsymbol{H}$, 其本征态的正交性无法保证, 通常从数学上引入由 H 的本征态和 $\boldsymbol{H}^{\dagger}$ 的本征态组成的一组双正交基矢来对 H 做研究. 常规情况下, H 本征值为 E 的本征态与 $\boldsymbol{H}^{\dagger}$ 本征值为 E^* 的本征态可以被双正交归一化, 即它们的交叠可以被归一化为 1; 在例外点处, 这组本征态无法被双正交归一化, 它们的交叠为 0. 基于 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}^{\dagger})$ 的假设, 对于两个态 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$:

$$\boldsymbol{H}\,|A\rangle=E\,|A\rangle,\ \ \boldsymbol{H}^{\dagger}\,|B\rangle=E\,|B\rangle, \tag{3}$$

这意味着两个态 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 自发双正交, 其双正交模为 $\langle B\,|A\rangle$. 条件 1) 表明 $\langle B\,|A\rangle=0$. 根据非厄米量子力学的相关理论[62], 如果 $\langle B\,|A\rangle=0$, 则 $|A\rangle$ 是 H 的合并态, 即哈密顿量 H 拥有合并态为 $|A\rangle$ 的例外点. 这清楚地表明: 如果一个厄米系统 $\boldsymbol{H}_0$ 和一个非厄米系统 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}^{\dagger})$ 具有共同本征态 $|A\rangle(|B\rangle)$, 对应能量都为 E, 并且 $|A\rangle(|B\rangle)$ 对于 $\boldsymbol{H}_0$ 简并但对于 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}^{\dagger})$ 不简并, 则 H 具有例外点. 该定理有两个明显的优势: 首先, 定理对于 $\boldsymbol{H}_0$ 的具体形式没有任何要求, 对于非相对论和相对论、连续和离散的哈密顿量都成立, 不需要做矩阵的对角化就可以得到系统的例外点. 其次, 围绕例外点的动力学一般需要明确系统合并态的物理性质. 一般非厄米哈密顿量的合并本征态由于依赖系统非厄米元素的具体形式而变得非常复杂. 该定理则直接指明合并态为相关厄米系统的简并态, 这为后续通过非厄米临界动力学制备具有新奇性质的目标量子态提供了理论基础. 作为一个简单的特例, 将其应用于紧束缚模型, 根据上述两个条件, $\boldsymbol{H}'\,|A\rangle=0$, $(\boldsymbol{H}')^{\dagger}\,|B\rangle=0$, 就可以发现满足此条件的 $\boldsymbol{H}'$ 所具有的最简形式是非对称跳跃项, 即 $\kappa a_i^{\dagger}a_j$ $(i\neq j)$, 这里 a_i 和 a_j 是费米子或玻色子算符. 当 $a_j\,|A\rangle=0$ 且 $a_i\,|B\rangle=0$ 时, 以上两个条件成立. 这意味着两个态 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 在格点 j 和 i 处有零点[63].

2.2 例外点动力学

例外点的存在导致系统的哈密顿量矩阵不能被对角化, 但是总可以通过相似变换将其约化为一个具有相同本征值的约当块 (Jordan block). 考虑一个具有 2 阶例外点的非厄米矩阵:

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\gamma & \gamma\\ \gamma & -\mathrm{i}\gamma\end{pmatrix}, \tag{4}$$

其只具有一个能量 $E=0$, 形式为 $|\psi\rangle=(\ \mathrm{i}\quad 1\ )^{\mathrm{T}}$ 的合并本征态. 在相似变换

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 1/\gamma\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{5}$$

的作用下, 非厄米矩阵 $\boldsymbol{H}$ 可以变换为约当块的标准形式, 即

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

显然对于一个含有 n 阶例外点的非厄米哈密顿量, 其必然可以通过相似变换转化为一个 n 阶的约当块形式. 因此, 系统在例外点上的动力学行为将主

要由约当块的阶数来决定. 研究一个定义在 N 维复数空间的约当块 $\boldsymbol{M}$, 其矩阵元为 $(\boldsymbol{M})_{i,j}=\lambda\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j}$ $(\lambda\in\mathcal{C})$. 这里 $\delta_{i,j}$ 为克罗内克尔符号,

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{6}$$

该矩阵有且仅有1个能量为 λ 的合并本征态 ψ_{c}, 相应的矩阵元为 $(\psi_{\mathrm{c}})_{i,1}=\delta_{i,1}$. 该矩阵的时间演化算符可以写为 $\boldsymbol{U}=\exp\{-\mathrm{i}\lambda t\}\exp\{-\mathrm{i}\boldsymbol{D}t\}$, 其中 $\boldsymbol{D}$ 为 N 阶幂零矩阵, 满足如下性质:

$$(\boldsymbol{D}^n)_{i,j}=\delta_{i+n,j}, \tag{7}$$

从 (7) 式可以看到, 当 $n>N-1$ 时, $\boldsymbol{D}^n$ 为零矩阵. 利用这一性质, 算符 $\boldsymbol{U}$ 的矩阵元可以表示为

$$(\boldsymbol{U})_{p.q}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\frac{(-\mathrm{i}t)^{q-p}}{(q-p)!}h(q-p), \tag{8}$$

其中

$$h(q-p)=\begin{cases}1, & q\geqslant p\\ 0, & q<p\end{cases} \tag{9}$$

为阶跃函数. 考虑一个初始态列向量 $\boldsymbol{\psi}_0$, 其矩阵元为 $(\boldsymbol{\psi}_0)_{l,1}=c_l$. 在时间演化算符 $\boldsymbol{U}$ 的作用下, t 时刻的演化态的矩阵元可以表示为

$$(\boldsymbol{\psi}_t)_{l,1}=\sum_{n=l}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\frac{(-it)^{n-l}}{(n-l)!}c_n, \tag{10}$$

容易看出, $c_N=0$ 时, ψ_t 不含 t^{N-1} 项; $c_N=c_{N-1}=0$ 时, ψ_t 不含 t^{N-1} 以及 t^{N-2} 项. 换言之, 对于初始态含有最高 c_n 不为0的态来说, ψ_t 含有的 t 的最高次幂为 $n-1$, 相应的的狄拉克概率含有的 t 的最高次幂为 $2(n-1)$. 这说明无论初始态如何选取, 当考虑长时间演化时, $(\psi_t)_{1,1}$ 将始终含有 t 的最高次幂, 其成分在演化态中随着时间的推移将占据主导地位[61]. 这同时表明在例外点上, 态的演化具有方向性, 即指向系统的合并本征态 ψ_{c}. 这里需要指出的是例外点动力学是一种特殊的非平衡动力学, 其最终稳态是非厄米系统的合并本征态, 这种非厄米方向演化性与非平衡动力学中的稳态有着本质的不同. 在非平衡动力学中, 稳态意味着物理可观测量在长时间平均下保持不变, 但是其随时间变化呈现出围绕某些定值的周期振荡行为, 而非厄米临界动力学在经过特定的弛豫时间后, 任意的初始态完全投影到合并态中, 相应的物理可观测量将保持定值. 本文的后半部分将利用此性质在不同的量子多体系统中, 发展临界量子态操控的方法, 以及探究其背后有趣的物理图像.

3 非厄米临界理论在多体系统中的应用

本节将回顾本课题组基于非厄米临界动力学演化规律在多体系统中发展的一些新理论与新方法. 主要围绕非厄米局域外场下量子自旋模型中的动力学磁化、有限温量子相变探测、中心-环境系统中多体拓扑物态制备以及 Hubbard 系统中超导对态制备 4 个方面展开论述.

3.1 非厄米自旋模型中的动力学磁化

海森伯模型作为描述 Hubbard 模型在半满填充时基态以及低能激发态行为的有效模型在量子磁性理论中取得了巨大的成功. 随着冷原子实验及单格点分辨技术的进展, 人们已经可以在光晶格超冷原子实验中模拟海森伯模型并成功实现了对其系统磁性的操纵. 另一方面, 量子模拟实验中所涉及到的系统基本上都是耗散系统, 描述其动力学行为的有效哈密顿量都不再具备厄米特性. 系统的耗散不可避免地导致量子态的退相干行为. 然而最近的研究表明, 人们可以通过有效的耗散去实现对量子态的测量以及操纵、制备. 这些新的思想为耗散系统中操纵量子态奠定了重要基础[29,64,65]. 受此启发, 我们详细研究了外场下自旋系统的动力学行为, 其核心在于临界外场可以诱导单个自旋的磁化. 如果系统不存在相互作用, 那么一个全局的复数磁场可以诱导所有的自旋沿着特定的取向. 当系统存在相互作用时, 局域磁场与相互作用之间的协作可以诱导系统中所有的自旋以集体运动的形式激发, 其基本机制可由图 1 表示. 这一现象与厄米外场有着重要的区别, 在厄米系统中, 磁场只会导致自旋沿着布洛赫球做周期性的旋转.

具体来讲, 考虑局域复数外场下的自旋系统, 其哈密顿量为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{H}_0=-\sum_{\langle i,j\rangle}J_{ij}\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}=g_1\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{s}_1, \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{s}_i=(s_i^x,\ s_i^y,\ s_i^z)$ 是定义在第 i 个格点上的自旋算符, 复数磁场为 $\boldsymbol{h}=(1,-\mathrm{i}\gamma,0)$ 以及 $J_{ij}>0$. 此时, $\boldsymbol{H}_0$ 代表铁磁海森伯哈密顿量. 由于 $\boldsymbol{H}_0$ 具有

$SU(2)$对称性, 即$\left[\boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{s}^2\right] = [\boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{s}_z] = 0$, 那么它的基态是$N+1$重简并. 基态$\{|G_n\rangle\}$可以通过$\boldsymbol{s}^-$算符作用在铁磁态$|\Uparrow\rangle$(代表系统所有自旋都向沿着$+z$的方向) 上来得到, 即$|G_n\rangle = \left(\sum_i \boldsymbol{s}_i^-\right)^{n-1} |\Uparrow\rangle$, $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1)$. $\boldsymbol{H}_{\rm I}$的存在破坏了$\boldsymbol{H}_0$的$SU(2)$对称性进而使得相应的简并能级退简并. 为了后续讨论的简化, 给出$\boldsymbol{H}_{\rm I}$在$s=N/2$子空间$\{|G_n\rangle\}$上的矩阵表示:

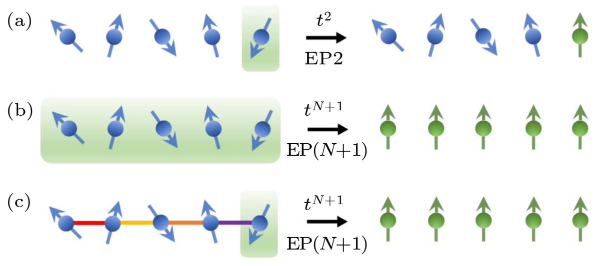


图 1　自旋在 (a) 局域磁场、(b) 各向同性全局复数磁场及 (c) 粒子与粒子相互作用与局域复数磁场共同作用下的动力学演化示意图. 复数磁场通过绿色阴影部分标注. 自旋与自旋的非各项同性相互作用J_{ij}通过不同的颜色来区分. 根据非厄米临界动力学的理论, 图 (a) 中含有一个二阶例外点, 对应两个简并态合并. 图 (b) 和图 (c) 有N个简并态合并对应N阶例外点. 从图中可以看到, 局域的复数磁场可以通过与相互作用的协作来影响系统自旋的整体取向

Fig. 1. Schematics of spins subjected to (a) a local complex field, (b) a global complex field, and (c) a local complex field and interaction. The complex magnetic field is shaded green. The couplings between different spins are denoted by different colors representing inhomogeneous coupling J_{ij}. Two states coalesce in panel (a) and N states coalesce in panels (b) and (c). Local complex field only affects local spin without interaction, but can affect globally with interaction.

$$W_{m,n} = g_j\sqrt{(N+1-m)\,m}[(1+\gamma)\,\delta_{m+1,n} + (1-\gamma)\,\delta_{m,n+1}]/(2N). \tag{14}$$

根据文献 [58], 这在数学上与一个非厄米超对称立方体结构等价. 当$|\gamma|=1$时, 系统的所有简并态合并为$|\Uparrow\rangle$, 形成$N+1$阶的高阶例外点. 在子空间$\{|G_n\rangle\}$中, 对于任意的初始态$\sum_n c_n(0)|G_n\rangle$, 振幅$c_m(t)$可以表示为

$$c_m(t) = c_m(0) + \sum_{n\neq m}(-\mathrm{i}t/N)^{n-m}(n-m)!h(n-m) \times \left[\prod_{p=m}^{m-1} p\,(N+1-p)\right]^{1/2} c_n(0)\,. \tag{15}$$

从 (15) 式可以看出, 无论初始态系数$c_n(0)$如何选取, 系统的演化末态中$c_1(t)$的成分最大, 保证了演化的方向性, 即经过一定的弛豫时间, 系统演化到合并态上.

利用这一特性, 通过不同的初始态, $|\varPsi_{\rm I}(0)\rangle = |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\uparrow\downarrow\rangle$及$|\varPsi_{\rm II}(0)\rangle = |\Downarrow\rangle$, 在时间域上实现了磁滞回线, 磁滞回线的高度、宽度、面积等性质可以客观地反映系统的耗散等特征量, 如图 2 所示. 除此之外, 磁滞回线的构型对初始态的选择也非常敏感, 这一事实为在开放系统中的量子探测提供了一种可能的理论方案.

3.2　非零温横场 Ising 模型中的量子相变

量子相变是指系统在零温时的相变现象, 是由量子涨落而非热涨落驱动. 量子相变的发生一般代表着量子多体系统中基态的性质随参数变化发

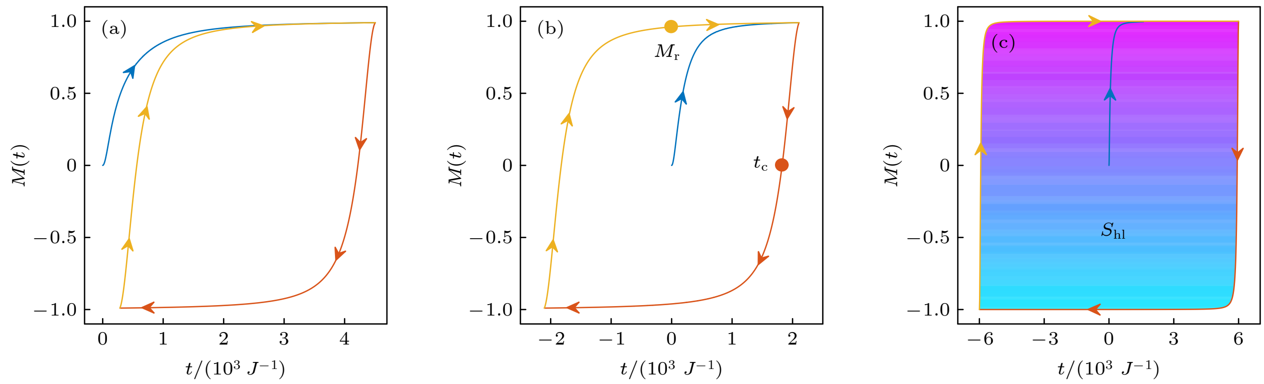


图 2　(a) 对于初始态$|\varPsi_{\rm I}(0)\rangle$在时间域上的磁滞回线; (b), (c) 对于初始态$|\varPsi_{\rm II}(0)\rangle$的磁滞回线. 这里局域的复数外场被施加到格点 1 上. 其强度在图 (a) 中为 0.02, 在图 (b) 和图 (c) 中为 0.1. 弛豫时间分别为 (a), (b) $t_{\rm f}=2\times10^3J^{-1}$及 (c) $t_{\rm f}=3\times10^3J^{-1}$

Fig. 2. Hysteresis loops for the initial state $|\varPsi_{\rm I}(0)\rangle$ in (a) and $|\varPsi_{\rm II}(0)\rangle$ in (b), (c). The critical local complex field g_1 is 0.02 in panels (a) and (b), and 0.1 in panel (c). The relaxation time is $t_{\rm f}=2\times10^3J^{-1}$ in panels (a) and (b), and $t_{\rm f}=3\times10^3J^{-1}$ in panel (c).

生突变. 然而, 在实验上系统不可能冷却至零温, 因而在有限温下探测量子相变成为了研究者们长期追求的目标. 基于非厄米临界动力学现象, 在有限温度下, 我们提出利用非厄米非局域外场探测量子相变的动力学方案. 在不同的物质相内, 热态对于非厄米外场的响应不同, 其可以通过施密特回波 (Loschmidt echoes) 的动力学行为来刻画. 该动力学特性对于有限温系统依然成立, 这一发现不仅为有限温下的体边对应原则提供了依据, 而且为人们理解非零温下量子自旋系统中的相变提供了新的动力学视角.

这里简要地介绍一下该工作涉及的开放边界条件下量子自旋系统的能谱及其在非厄米外场下的临界动力学现象. 考虑如下的横场 Ising模型, 其哈密顿量为

$$\boldsymbol{H}=-J\sum_{j-1}^{N-1}\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x+g\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z, \tag{16}$$

其中$\sigma_j^\alpha\ (\alpha=x,\ y,\ z)$是格点$j$上的泡利算符, 非负的参数$g$代表横场强度. 为了简明起见, 在下面的讨论中耦合强度取为$J=1$. 该模型存在两种对称性: 第一种是宇称对称性, 即$[p,\boldsymbol{H}]=0$, 其中$p=\prod_{j=1}^{N}(-\sigma_j^z)$. 在周期边界条件下, 即$\sigma_j^z=\sigma_{j+N}^z$, 系统可以精确求解. 在零温时, 系统在$g=1$的地方经历了铁磁到顺磁相的量子相变. 一般来说, 在热力学极限下, 模型的性质对边界条件不敏感. 然而当考虑开放边界条件的时候, 模型会在铁磁相$g<1$的地方涌现出另一种新的对称性. 为了清楚起见, 定义非局域算符

$$D=\frac{1}{2}\sqrt{1-g^2}\sum_{j=1}^{N}g^{j-1}D_j, \tag{17}$$

其中

$$D_j=\prod_{l<j}\left(-\sigma_l^z\right)\sigma_j^x-i\prod_{l<N-j+1}\left(-\sigma_l^z\right)\sigma_{N-j+1}^y. \tag{18}$$

在热力学极限下, 其满足对易关系$[\boldsymbol{D},\boldsymbol{H}]=\left[\boldsymbol{D}^\dagger,\boldsymbol{H}\right]=0$. 从这个角度来讲, 系统在$g<1$的相中满足另一种对称性. 除此之外, $\boldsymbol{D}$算符满足费米子算符的对易关系, 即$\{\boldsymbol{D},\boldsymbol{D}^\dagger\}=1$及$\boldsymbol{D}^2=\left(\boldsymbol{D}^\dagger\right)^2=0$, 且通过 Jordan-Wigner 变换可以和 Kitaev 链中的边缘模算符相联系[66]:

$$D\rightarrow\frac{1}{2}\sqrt{1-g^2}\sum_{j=1}^{N}\Big[\left(g^{j-1}+g^{N-j}\right)c_j^\dagger+\left(g^{j-1}-g^{N-j}\right)c_j\Big]. \tag{19}$$

这里需要指出的是, 算符$\boldsymbol{D}$是关于g的函数, 因此依赖于模型. $\boldsymbol{D}$与$\boldsymbol{H}$的对易关系保证了简并子空间的存在. 在$g<1$的区域, 定义能量为E_n的简并态$\{|\psi_n^+\rangle,\ |\psi_n^-\rangle\}$(这里$\pm$代表宇称算符的本征值, 即$p\,|\psi_n^\pm\rangle=\pm\,|\psi_n^\pm\rangle$), 在$\boldsymbol{D}$算符的作用下我们有如下结论:

$$\boldsymbol{D}\left|\psi_n^+\right\rangle=\left|\psi_n^-\right\rangle,\ \boldsymbol{D}^\dagger\left|\psi_n^-\right\rangle=\left|\psi_n^+\right\rangle, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{D}^\dagger\left|\psi_n^+\right\rangle=\boldsymbol{D}\left|\psi_n^-\right\rangle=0. \tag{21}$$

由于这种简并满足下面两个条件: i) 二重简并存在于全能谱 (如图 3 所示); ii) 在外场g存在无序的时候依然存在, 代价是$\boldsymbol{D}$算符的具体形式需要重新定义. 我们将其称为拓扑的类 Kramers简并. 如果将$\boldsymbol{D}$算符当作非厄米外场, 那么其将会使得$0<g<1$区域中包含基态在内的所有的二重简并能级合并. 具体来说, 考虑非厄米哈密顿量$\mathcal{H}=\boldsymbol{H}+\kappa\boldsymbol{D}$. 在铁磁相$0<g<1$的区域, 任何一对能量为$E_n$的简并态$\{|\psi_n^+\rangle,\ |\psi_n^-\rangle\}$所张成的子空间中, 哈密顿量的矩阵表示为

$$\mathcal{H}_n=\begin{pmatrix}E_n & 0\\ \kappa & E_n\end{pmatrix}. \tag{22}$$

显然这是一个约当块的结构, 其合并态为$|\psi_n^-\rangle$. 按照第 2 节中关于例外点动力学的理论, 在铁磁相中的动力学由以下时间演化算符主导:

$$U\left(t\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{H}t}=\prod\nolimits_n U_n\left(t\right), \tag{23}$$

$$U_n\left(t\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt}\left[1-\mathrm{i}\left(\mathcal{H}_n-E_n\right)t\right], \tag{24}$$

因此在时间演化算符的长时间作用下, 任意一个初始态投影到分量$|\psi_n^-\rangle$. 当系统处在顺磁相中$g>1$的区域中时, 系统不存在这种类 Kramers 简并结构, 因此外场不会诱导合并本征态进而系统的演化态只会在低能激发态附近振荡. 由于这种简并性涉及到系统的全能谱范围中, 所以即使是考虑有限温下的动力学演化, 其依然成立. 系统在不同量子相中的显异动力学行为可以被用来在有限温度下探测量子相变, 为了达成这一目的, 引入施密特回波:

$$L\left(t\right)=\left[\mathrm{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho\left(0\right)}\rho\left(t\right)\sqrt{\rho\left(0\right)}}\right], \tag{25}$$

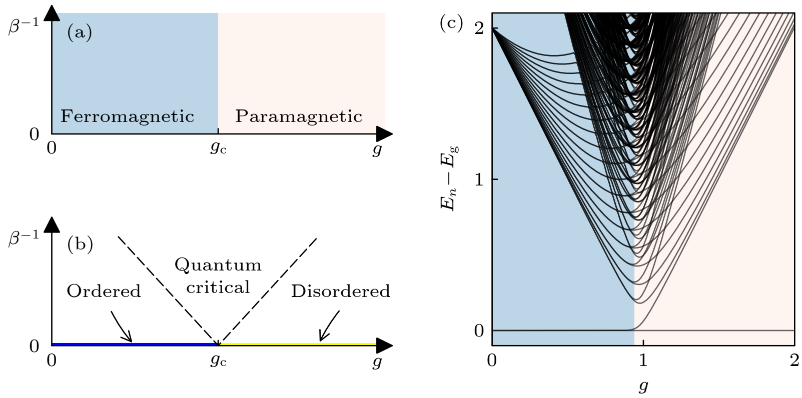


图 3 (a) 通过施密特回波所给出的相图; (b) 关联函数所给出的相图, 这里 β^{-1}是温度, g_c是量子相变点; (c) 有限横场 Ising 模型低能激发谱随着参数 g 的变化. E_g 代表基态能量. 其他系统参数为 $N=50$ 和 $J=1$. 系统的不同相通过两种不同颜色来区分. 通过图 (c) 可以发现, 当 $g<1$ 时, 系统的能谱都变为二重简并

Fig. 3. (a) Phase diagram detected from the Loschmidt echoes in this work. (b) Phase diagram studied in term of correlation function in the work of Sachdev et al.. Here β^{-1} is the temperature and g_c is the quantum critical point. (c) Spectrum of the low-lying states for a finite quantum Ising chain as a function of g, obtained numerically through exact diagonalization. E_g is the ground-state energy. System parameters: $N=50$ and $J=1$. The energy gap closes at a quasicritical point, indicated by the boundary of the two shaded areas. Notably, all energy levels become twofold degeneracy simultaneously at one point, protected by the symmetry of the quasi-zero-mode operator D.

其中, $\rho(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{H}t}\rho(0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathcal{H}^{\dagger}t}$. 考虑初始态为热态 $\rho(0)=\mathrm{e}^{-\beta H}/\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta H}\right)$, 可以证明[59]: 经过比较长的时间演化后, 当系统处于顺磁相时, $L(t)\approx 1$; 当系统处于铁磁相时, $L(t)\approx 0.5$. 这一结果对于初始温度不敏感(如图 4 所示), 因此该非厄米探测方案为理解与探测有限温相变提供了新的理论视角.

3.3 基于非厄米临界动力学的量子铸模

本节提出的量子铸模方案, 即通过平庸初始态的淬火演化来按需制备特殊量子态. 淬火动力学将原系统的基态在新的哈密顿量下进行演化, 通过施加驱动场或者将能量和粒子从外部储库泵浦到系统等方式使系统处于非平衡状态, 是一类非常典型的远离平衡态的过程, 并具有非常广阔的应用场景.

基于中心-环境系统(如图 5 所示), 利用非厄米临界动力学中演化的单向性, 铸造一个稳定的非平庸量子态是本方案的核心内容. 我们考虑含时的非厄米哈密顿量

$$H=H_c+H_s+H_{in}, \tag{26}$$

其中

$$H_c=\sum_{i,j=1}^{N}\left(T_{ij}a_i^{\dagger}b_j+A_{ij}a_i^{\dagger}a_j+B_{ij}b_i^{\dagger}b_j+\mathrm{H.c.}\right), \tag{27}$$

以及

$$H_s=\mu(t)\sum_{j=1}^{N}d_j^{\dagger}d_j,\ H_{in}=\gamma\sum_{j=1}^{N}b_j^{\dagger}d_j, \tag{28}$$

这里 a_j, b_j 以及 d_j 是费米子算符, $\mu(t)=\mu_0+\dfrac{W}{2}\times\cos(\omega t)$ 是周期性驱动的化学势. 参数 $\{T_{ij},A_{ij},B_{ij}\}$

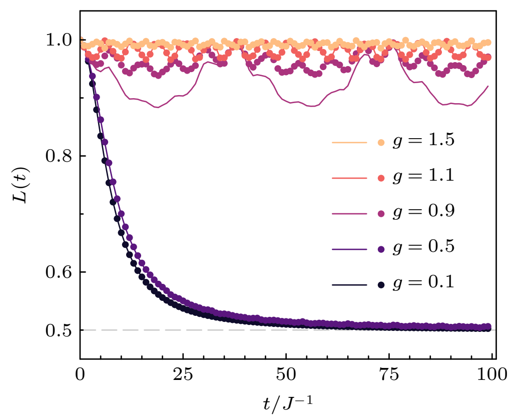


图 4 施密特回波随时间变化曲线. 线和点分别代表不同的温度, 即 $\beta=5$ 和 $\beta=10$. 其他系统参数为 $N=10$, $\kappa=0.1$ 及 $J=1$. 施密特回波在不同物质相内的动力学行为不同, 最终趋近于 1.0 和 0.5 两个定值. 需要注意的是这个结果独立于初始热态的温度. 因为 D 依赖于参数 g, 并且其在 $g>1$ 时发散, 所以在这里的数值模拟中, 非厄米外场只取 D 的主导项, 即 $\mathcal{H}=H+\kappa D_1$

Fig. 4. Loschmidt echoes of different g values. The lines and dots represent the Loschmidt echoes for $\beta=5$ and $\beta=10$, respectively. Other parameters: $N=10$, $\kappa=0.1$, and $J=1$. The profiles of the Loschmidt echoes in the two regions are distinct, independent of the temperature of the initial thermal states, and converge to 1.0 and 0.5, respectively.

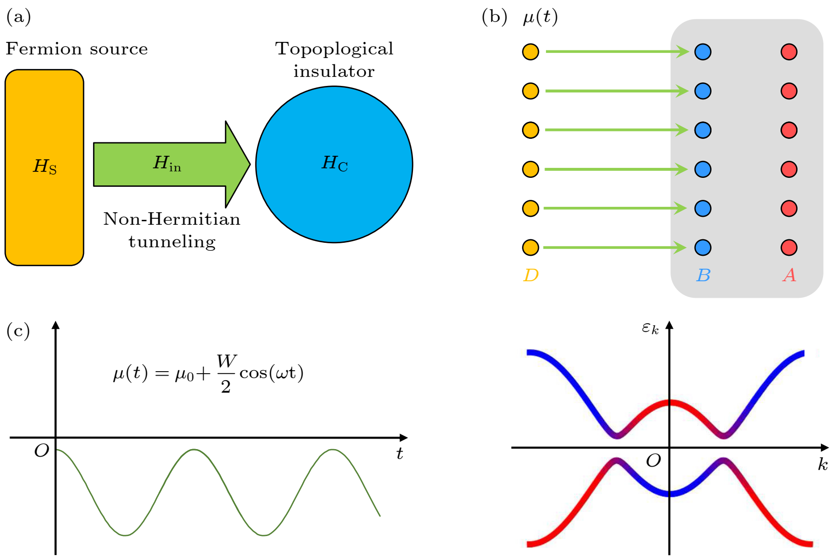


图 5 量子铸模系统示意图 (a) 系统由两部分组成, 中心系统 H_c 和源系统 H_s. H_{in} 为非厄米项, 表示 H_c 和 H_s 之间的连接, 并承担从 H_s 向 H_c 单向传输费米子的任务. (b) 该方案的紧束缚模型, 包含三种格点 A, B 和 D. 嵌入阴影区域的晶格 A 和 B (红色和蓝色实心圆) 是拓扑绝缘体, 而晶格 D (黄色实心圆) 是一个无跳跃的平带系统, 但具有振荡的化学势. 绿色箭头表示从 D 点到 B 点的单向跳跃. 本工作的目的是通过时间演化实现以下过程: 初始时刻 D 格点填充满粒子, 而 A 和 B 格点无粒子; 最终末态是 H_c 半满填充的基态. (c) 动力学过程的基本机制. 在瞬时 t_k, H_s 的化学势和 H_c 的能级共振导致例外点. 相应的例外点动力学允许费米子在简并能级之间完全转移, 并且在长时间极限下, 这样的动力学过程发生在每个 $\boldsymbol{k}$ 子空间. H_c 的能带颜色表示能带反转, 说明能带可以是拓扑绝缘带. 预计 H_c 的下带可以完全填充

Fig. 5. Schematics for the system and process of quantum mold casting: (a) The system consists of two parts, central system H_c and source system H_s. The target state is the ground state of H_c, which can be topologically non-trivial or not. H_s is a topologically trivial system, providing the supply of fermions. Both H_c and H_s are Hermitian, while H_{in} is non-Hermitian, representing the connection between H_c and H_s, and taking the role to transport fermions unidirectionally from H_s to H_c. (b) A tight-binding model for the scheme, which contains three sets, A, B, and D. Lattices A and B (red and blue filled circles) embedded in the shadow area is topological insulator, while lattice D (yellow filled circle) is a flat-band (hopping-free) system but with oscillating chemical potential. Green arrows represent unidirectional hopping from D to B lattices. The aim of this work is to realize the following process via time evolution. Initially, D lattice is fully filled, while A and B are empty. The final state is expected to a half-filled ground state of H_c. (c) The underlying mechanism of the dynamic process. At instant $t_{\boldsymbol{k}}$, the chemical potential and energy levels of H_c are resonant, leading to exceptional points. The corresponding (EP) dynamics allows a complete transfer of fermions between the degenerate energy levels. In the long-time limit, such dynamics occurs at each $\boldsymbol{k}$ sector again and again. The band color of H_c illustrates the band inversion, indicating that the energy band can be topological insulating band. It is expected the lower band of H_c can be completely filled.

依赖于中心系统 H_c 的构型. 系统的非厄米性来源于中心系统与环境的耦合 H_{in}. 在 Nambu 基矢 $(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger\ \ b_{\boldsymbol{k}}^\dagger\ \ d_{\boldsymbol{k}}^\dagger)$ 下, 系统的布洛赫哈密顿量可以表示为 $H=\sum_{\boldsymbol{k}} H_{\boldsymbol{k}}$, 其中

$$H_{\boldsymbol{k}}=\begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger & b_{\boldsymbol{k}}^\dagger & d_{\boldsymbol{k}}^\dagger \end{pmatrix} h_{\boldsymbol{k}} \begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{k}} \\ b_{\boldsymbol{k}} \\ d_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

以及

$$h_{\boldsymbol{k}}=|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k})|\begin{pmatrix} \cos\theta_{\boldsymbol{k}} & \sin\theta_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_{\boldsymbol{k}}} & 0 \\ \sin\theta_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\boldsymbol{k}}} & -\cos\theta_{\boldsymbol{k}} & \gamma_{\boldsymbol{k}} \\ 0 & 0 & \varDelta_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

矢量 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k})$ 可以通过系统参数 $\{T_{ij}, A_{ij}, B_{ij}\}$ 待定, 矩阵元中的其他参数被定义为

$$\cos\theta_{\boldsymbol{k}}=\frac{B_z(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k})|},\ \tan\varphi_{\boldsymbol{k}}=\frac{B_y(\boldsymbol{k})}{B_x(\boldsymbol{k})},$$

$$\gamma_{\boldsymbol{k}}=\gamma/\varepsilon_{\boldsymbol{k}},\ \varDelta_{\boldsymbol{k}}=\mu/\varepsilon_{\boldsymbol{k}},\ \varepsilon_{\boldsymbol{k}}=|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k})|. \tag{31}$$

由于 $\gamma_{\boldsymbol{k}}$ 的存在, $h_{\boldsymbol{k}}$ 是一个非厄米矩阵, 其本征态为

$$|\psi_{\boldsymbol{k}}^{+}\rangle=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta_k}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}\sin\dfrac{\theta_k}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ |\psi_{\boldsymbol{k}}^{-}\rangle=\begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta_k}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}\cos\dfrac{\theta_k}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\varDelta}\rangle=\frac{1}{\sqrt{\varLambda}}\begin{pmatrix} \gamma_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_k}\sin\theta_k \\ \gamma_k(\varDelta_k-\cos\theta_k) \\ \varDelta_k^2-1 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

以及相应的本征能量为

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^{\pm}=\pm\varepsilon_{\boldsymbol{k}},\ \varepsilon_{\boldsymbol{k}}^{\Delta}=\Delta_k\varepsilon_{\boldsymbol{k}}. \tag{33}$$

$\Lambda=\Delta_k^4+\Delta_k^2\gamma_k^2-2\Delta_k^2-2\Delta_k\gamma_k^2\cos\theta_k+\gamma_k^2+1$是狄拉克内积的归一化系数. 当 $\Delta_{\boldsymbol{k}}=\pm1$(令该时刻 $t=t_{\boldsymbol{k}}$), $h_{\boldsymbol{k}}^{\rm EP}$具有例外点, 相应的合并本征态为 $|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\Delta}\rangle=|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\pm}\rangle$. 考虑系统的时间演化算符

$$U(t)=\exp(-\mathrm{i}Ht)=\prod\nolimits_{\boldsymbol{k}}U_{\boldsymbol{k}}(t), \tag{34}$$

其中

$$U_{\boldsymbol{k}}(t)=\mathcal{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_0^t H_{\boldsymbol{k}}(t')\,\mathrm{d}t'\right], \tag{35}$$

$\mathcal{T}$ 是编时算符. 可以证明$t=t_{\boldsymbol{k}}$时刻的演化算符$U_{\boldsymbol{k}}(t_{\boldsymbol{k}})$在时间演化中起主导作用[60], 此时

$$U_{\boldsymbol{k}}(t)\approx\exp[-\mathrm{i}H_{\boldsymbol{k}}(t_{\boldsymbol{k}})t], \tag{36}$$

其中具有例外点的布洛赫哈密顿量为

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{k}}^{\rm EP}=\varepsilon_{\boldsymbol{k}}\begin{pmatrix}\cos\theta_{\boldsymbol{k}} & \sin\theta_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_{\boldsymbol{k}}} & 0\\ \sin\theta_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\boldsymbol{k}}} & -\cos\theta_{\boldsymbol{k}} & \gamma_{\boldsymbol{k}}\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{37}$$

可以通过相似变换将其变为标准的约当块形式并满足

$$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{k}}^{\rm EP}|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\pm}\rangle=\pm\varepsilon_{\boldsymbol{k}}|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\pm}\rangle, \tag{38}$$

$$\boldsymbol{A}|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\rm a}\rangle=|\psi_{\boldsymbol{k}}^{-}\rangle, \tag{39}$$

矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\frac{\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{k}}^{\rm EP}}{\varepsilon_{\boldsymbol{k}}}\right)^2-\boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\sin\dfrac{\theta_k}{2}\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}\cos\dfrac{\theta_k}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{40}$$

考虑初始态$|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\rm a}\rangle=(0,0,1)^{\rm T}$, 通过临界动力学可以求得相应的演化态为

$$\begin{aligned}&|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\rm EP}(t)\rangle=\exp\left(-\mathrm{i}h_{\boldsymbol{k}}^{\rm EP}t\right)|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\rm a}\rangle\\ =&-\frac{\gamma_k\varepsilon_{\boldsymbol{k}}t}{2}[\sin(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}t)+\mathrm{i}(1+2\sin^2\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{k}}t}{2})]|\psi_{\boldsymbol{k}}^{-}\rangle\\ &+\cos(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}t)|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\rm a}\rangle\\ &-\mathrm{i}\sin(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}t)\left(\frac{h_{\boldsymbol{k}}^{\rm EP}}{\varepsilon_{\boldsymbol{k}}}|\psi_{\boldsymbol{k}}^{\rm a}\rangle+\frac{\gamma_k}{2}|\psi_{\boldsymbol{k}}^{-}\rangle\right).\end{aligned} \tag{41}$$

这个结果说明位于源的初始态$d_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}|0\rangle_{\boldsymbol{k}}$ ($|0\rangle_{\boldsymbol{k}}$是费米子算符$a_{\boldsymbol{k}}$, $b_{\boldsymbol{k}}$, 以及$d_{\boldsymbol{k}}$的真空态) 在经过长时间演化后, 由于时间的线性依赖关系, 趋近于合并态$|\psi_{\boldsymbol{k}}^{-}\rangle$. 演化算符$U_{\boldsymbol{k}}(t)$的作用是将位于该子空间中的任意初始纯态投影到$|\psi_{\boldsymbol{k}}^{-}\rangle$上, 该动力学过程意味着费米子从环境源到中心系统的完全输运.

基于单向共振接口和例外点动力学这两个核心机制, 如果将具有特殊性质的目标量子态, 设计为复合系统的合并态, 那么对于任意初始态, 在淬火动力学的作用下, 演化末态都将变为计划制备的目标态. 基于这一理解, 我们在工作[60]中, 提出了利用非厄米临界动力学在拓扑绝缘体中制备出拓扑绝缘态以及边界态的方案. 相关研究内容丰富了量子态制备方案, 并为单向量子器件的制造带来一些启示.

3.4 Hubbard 模型中局域磁场所诱导的非对角长程序稳态

Hubbard 模型作为描述巡游电子磁性的有效模型在传统凝聚态领域得到了广泛关注, 特别是随着近些年来冷原子实验的进展, Hubbard 模型已经可以通过量子系统进行模拟, 并在实验高度可调的范围内去探讨传统凝聚态领域所未关注的量子态特性. 然而, 冷原子实验中系统不可避免地与外界环境交换能量与信息. 这导致量子态随时间演化的概率不再是一个守恒量, 因此描述该相互作用体系的哈密顿量不再具有厄米性. 为了有效地描述量子态随时间的演化, 人们除了利用主方程的方法去处理该问题以外, 还从非厄米量子力学出发, 基于非厄米的哈密顿量去探讨非厄米性的引入会在多大程度上影响系统的动力学特性. 研究组在2017年就对该问题进行了深入的探讨, 特别是对冷原子气体的研究, 我们揭示了该系统中可能存在的碰撞湮灭动力学等特征[67]. 随着单格点分辨技术的进步, 人们已经可以利用量子气显微镜来探测原子的磁性、超导等特性. 特别是近些年来, 研究者们发展了一系列非平衡态物理的处理办法, 基于 Hubbard 系统中的绝缘态来实现超导. 受此启发, 我们利用系统的$SO(4)$对称性, 基于η算符与系统哈密顿量的对易, 发展了一套外场诱导产生η对态的动力学方案. 该方案的核心是基于η算符的简并子空间, 将临界外场当作微扰, 通过高阶例外点的演化生成η对态. 考虑复数外场下的费米 Hubbard 模型, 其哈密顿量为

$$H=H_0+H_{\rm I}, \tag{42}$$

$$H_0 = -\sum_{\langle i,j\rangle}\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} J_{ij}c_{i,\sigma}^{\dagger}c_{j,\sigma} + \text{H.c.}$$
$$+U\sum_{j=1}^{2N}\left(n_{j,\uparrow}-\frac{1}{2}\right)\left(n_{j,\downarrow}-\frac{1}{2}\right), \tag{43}$$

$$H_{\rm I} = \sum\nolimits_j \boldsymbol{h}_j\cdot\boldsymbol{\eta}_j, \tag{44}$$

其中复数外场$\boldsymbol{h}_j = g_j(\lambda/2,\ \lambda/2, {\rm i}\gamma)$, 这里$\{g_j\}$代表系统的各项异性. 这里$\boldsymbol{\eta}_j = (+,\ -,\ z)$而非$(x,\ y,\ z)$. $\boldsymbol{\eta}$算符遵循李代数, 即$[\eta_j^+,\ \eta_j^-] = 2\eta_j^z$和$[\eta_j^z,\ \eta_j^{\pm}] = \pm\eta_j^{\pm}$. 具体形式为

$$\eta_j^+ = \eta_j^x + {\rm i}\eta_j^y = (-1)^j c_{j,\uparrow}^{\dagger}c_{j,\downarrow}^{\dagger}, \tag{45}$$

$$\eta_j^- = \eta_j^x - {\rm i}\eta_j^y = (-1)^j c_{j,\downarrow}c_{j,\uparrow}, \tag{46}$$

$$\eta_j^z = \frac{1}{2}(n_{j,\uparrow}+n_{j,\downarrow}-1), \tag{47}$$

由于$[H_0, \eta^{\pm}] = [H_0, \eta^z] = 0$, 因此$\boldsymbol{\eta}$算符的本征值可以作为好量子数将$H_0$划分为不同的子空间. 我们关注$\eta$配对态所张的子空间$\{|\psi_{N_\eta}\rangle\}$. 这里$|\psi_{N_\eta}\rangle = \varOmega^{-1}(\eta^+)^{N_\eta}|V_{\rm vac}\rangle$, 其中$|V_{\rm vac}\rangle$是费米子算符$c_{j,\sigma}$的真空态, N_η代表态中η配对的个数. 为了清楚起见, 重新定义$\{|N,l\rangle\}$为所研究子空间的态矢量, 这里$|N,l\rangle = \varOmega^{-1}(\eta^+)^{N+l}|V_{\rm vac}\rangle$和$\varOmega = \sqrt{C_{2N}^{N+l}}$, 其中$N$与$l$通过下面等式与算符$\boldsymbol{\eta}^2$和$\boldsymbol{\eta}^z$建立起联系:

$$\boldsymbol{\eta}^2|N,l\rangle = N(N+1)|N,l\rangle, \tag{48}$$

$$\boldsymbol{\eta}^z|N,l\rangle = l|N,l\rangle,\ l\in[-N,N]. \tag{49}$$

考虑大U极限以及$|\gamma|\to|\lambda|$的条件, 可以将各向同性的外磁场在此空间中表示为

$$H_{\rm d} = \frac{\lambda G}{4N}\sum_{l=-N}^{N-1} J_l|N,l\rangle\langle N,l+1| + \text{H.c.}$$
$$+\sum_{l=-N}^{N}\left(\frac{{\rm i}\gamma lG}{2N}+\frac{NU}{2}\right)|N,l\rangle\langle N,l|, \tag{50}$$

其中$G=\sum\nolimits_j g_j$以及$1/(2N)$来源于η配对态的平移对称性. 当$|\lambda| = |\gamma|$时, 无论局域外场在空间中如

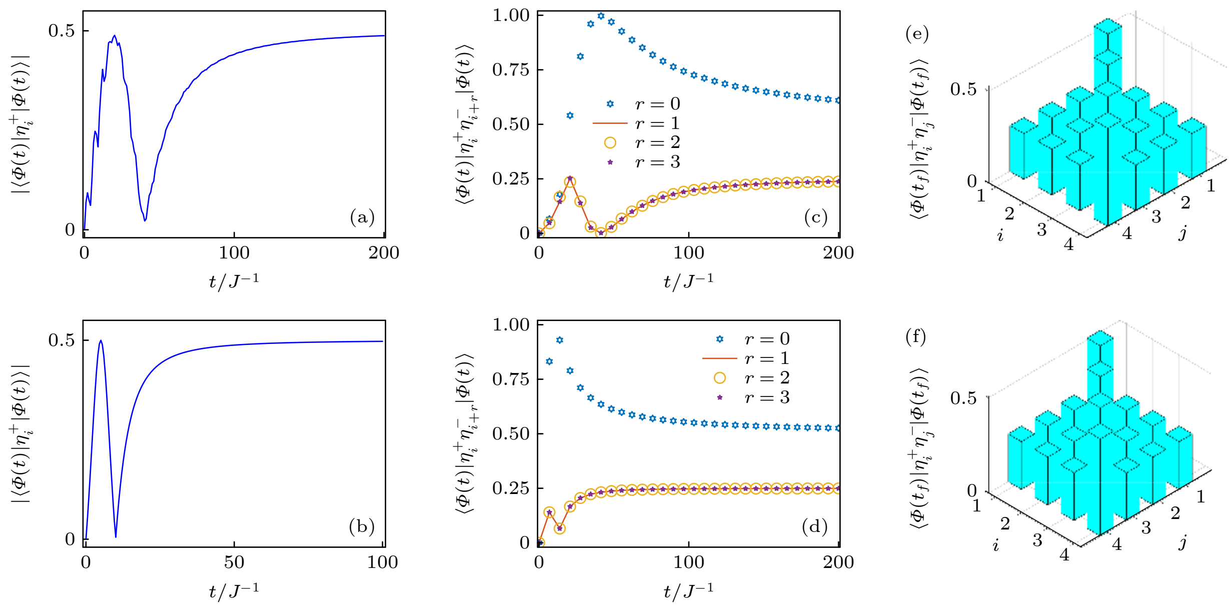


图 6 (a)—(d) 4 格点 Hubbard 模型中关联函数$|\langle\varPhi(t)|\eta_i^+|\varPhi(t)\rangle|$以及$\langle\varPhi(t)|\eta_i^+\eta_{i+r}^-|\varPhi(t)\rangle$随时间的变化图. 初始态被制备在$H_0$的真空态$|V_{\rm vac}\rangle$中, 其相互作用强度$U=2J$. 随后其运动由外加局域虚数磁场来驱动. 对于图 (a) 和图 (c), 局域虚数磁场为$g_1=g=0.2J$; 对于图 (b) 和图 (d), 系统受到一个各向同性的磁场驱动, 其强度为$g_j=g=0.2J\ \ (j=1,\cdots,N)$. 需要注意的是此时外场$H_{\rm I}$处于例外点上. (e), (f) 稳态关联函数与相对距离之间的函数曲线. 对于图 (e), 弛豫时间为$t_{\rm f}=400/J$, 而对于图 (f), $t_{\rm f}=100/J$. 从图中可以看到当$i\neq j$时, $\langle\varPsi(t_{\rm f})|\eta_i^+\eta_j^-|\varPsi(t_{\rm f})\rangle=1/4$; 当$i=j$时, $\langle\varPsi(t_{\rm f})|\eta_i^+\eta_j^-|\varPsi(t_{\rm f})\rangle=1/2$, 与正文中的结论一致

Fig. 6. (a)–(d) Evolution of the correlators $|\langle\varPhi(t)|\eta_i^+|\varPhi(t)\rangle|$ and $\langle\varPhi(t)|\eta_i^+\eta_{i+r}^-|\varPhi(t)\rangle$, averaged over all sites for the 4-site Hubbard model. The initial state is prepared in vacuum state $|V_{\rm vac}\rangle$ of H_0 with interaction $U=2J$, and then it is driven by the system with the local imaginary field $g_1=g=0.2J$ for panels (a) and (c), and homogeneous dissipation $g_j=g=0.2J$ $(j=1,\cdots,N)$ for panels (b) and (d), respectively. Notice that $H_{\rm I}$ is at EP such that $\lambda/\gamma=1$. (e), (f) The correlation values of steady state for different relative distance ($\langle\varPsi(t_{\rm f})|\eta_i^+\eta_j^-|\varPsi(t_{\rm f})\rangle$) at relaxation time $t_{\rm f}=400/J$ for panel (e) and $t_{\rm f}=100/J$ for panel (f). It is shown that $\langle\varPsi(t_{\rm f})|\eta_i^+\eta_j^-|\varPsi(t_{\rm f})\rangle=1/4$ for $i\neq j$ and $\langle\varPsi(t_{\rm f})|\eta_i^+\eta_j^-|\varPsi(t_{\rm f})\rangle=1/2$ for $i=j$, which confirms the understanding in the main text.

何分布, 系统都会存在一个$2N+1$阶的例外点, 相应的合并态为

$$|\varPhi_{\mathrm{c}}\rangle=\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{N}\sum_{l=-N}^{N}\sqrt{C_{2N}^{N+l}}\,(\mathrm{i})^{l}\,|N,l\rangle\,. \tag{51}$$

根据第 1 节中的理论, 令局域外场只在$j=1$的格点上有作用, 并令$\lambda=\gamma$. 如果考虑此空间中的任意初态$|\varPhi(0)\rangle=\sum_{l}c_{l}(0)|N,A_{l}\rangle$, 那么演化态振幅$c_{m}(t)$可以表示为

$$c_{m}(t)=\sum_{l}\frac{(-\mathrm{i}tg_{1}/2N)^{l-m}}{(l-m)!}h(l-m)\,c_{l}(0)\,. \tag{52}$$

经过一定的弛豫时间

$$t_{\mathrm{f}}=\frac{N}{g_{1}}(f_{\mathrm{c}}-1)^{-1/2}\,, \tag{53}$$

其中$f_{\mathrm{c}}=(0.99)^{-1/2N}$[61], 演化态将变为合并态$|\varPhi_{\mathrm{c}}\rangle$(如图 6 所示). 可以证明$\boldsymbol{\eta}$算符的关联函数为

$$\langle\varPhi_{\mathrm{c}}|\eta_{i}^{+}\eta_{j}^{-}|\varPhi_{\mathrm{c}}\rangle=\begin{cases}1/4,\ i\neq j,\\ 1/2,\ i=j.\end{cases} \tag{54}$$

这说明最终的演化稳态具有与相对距离无关的非对角长程序, 因此可以认为系统处在稳定的非平衡超导相中.

该方案的好处是此过程只是一个动力学演化的结果, 其并不依赖于外界额外的操作. 另一方面该方案只要求系统具有$SO(4)$对称性, 对于临界外场的位置、强度均不作特定的限制. 系统的演化末态对一些无序的微扰来说也并不敏感. 这些特性为在实验上制备η对态并实现稳定的非平衡超导相提供了一种有效非厄米临界动力学方案.

4 总结与展望

本文综述了非厄米临界动力学在非厄米多体系统中的应用与发展. 除了从非厄米量子力学角度阐述这一动力学规律以外, 该理论还适用于遵循马尔可夫近似下量子开放系统中的短时动力学描述. 文中通过厄米系统的简并子空间给出了构造具有例外点非厄米哈密顿量的普适方法. 当非厄米系统处于例外点时, 它的矩阵表示必然等价于一个约当块的矩阵形式, 其维度依赖于例外点的阶数. 在此约当块所涉及到的子空间中, 任意的初态在狄拉克几率归一化下都将演化至系统的合并态. 利用非厄米哈密顿量的这一临界动力学特性, 分别在量子自旋系统中观察到了局域外场所诱导的动力学磁化、横场 Ising 模型中的有限温相变、中心-环境系统中的量子铸模以及费米 Hubbard 模型中临界外场所诱导的非平衡超导相等一系列新奇的动力学现象. 该临界动力学思想的提出, 不仅仅丰富了动力学操控量子态的手段, 更为在开放系统中非平衡地调控物相提供了重要的理论基础. 未来, 高分辨显微技术以及单原子操控技术的进步势必会令研究者们在多体系统中更加关注量子态的特性. 我们期待本文涉及的非厄米调控机制会在不同的开放量子体系下得到检验, 并在不同的物理分支上得到进一步发展. 由于具有独特而有趣的物理性质, 非厄米临界动力学对于理解各种物理平台下的多体耗散动力学机制势必会有新的帮助.

参考文献

[1] Gamow G 1928 *Z. Phys.* **51** 204
[2] Siegert A J F 1939 *Phys. Rev.* **56** 750
[3] Majorana E 2006 *EJTP* **3** 293
[4] Feshbach H 1958 *Ann. Phys.* **5** 357
[5] Feshbach H 1958 *Ann. Phys.* **19** 287
[6] Schrödinger E 1926 *Ann. Phys.* **384** 489
[7] Ashida Y, Gong Z P, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
[8] Cohen-Tannoudji C, Dupnot-Roc J, Grynberg G 1998 *Atom-photon Interactions: Basic Processes and Applications* (Berlin: Wiley-VCH)
[9] Anderson P W 1972 *Science* **177** 393
[10] Lee T D, Yang C N 1952 *Phys. Rev.* **87** 410
[11] Zhou Y H, Shen H Z, Yi X X 2018 *Phys. Rev. A* **97** 043819
[12] Song F, Yao S Y, Wang Z 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 170401
[13] Pan L, Chen X, Chen Y, Zhai H 2020 *Nat. Phys.* **1** 6
[14] Longhi S 2020 *Phys. Rev. B* **102** 201103
[15] Liu T, He J J, Yoshida T, Xiang Z L, Nori F 2020 *Phys. Rev. B* **102** 235151
[16] Xu Z H, Chen S 2020 *Phys. Rev. B* **102** 035153
[17] Tang L Z, Zhang G Q, Zhang L F, Zhang D W 2021 *Phys. Rev. A* **103** 033325
[18] Mao L, Deng T S, Zhang P F 2021 *Phys. Rev. B* **104** 125435
[19] Li J X, Xu L, Zhao Y H, He Z, Wang Q 2021 *Laser Phys.* **31** 075202
[20] Ohlsson T, Zhou S 2021 *Phys. Rev. A* **103** 022218
[21] Pan J S, Li L H, Gong JB 2021 *Phys. Rev. B* **103** 205425
[22] Xue W T, Hu Y M, Song F, Wang Z 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 120401
[23] Barontini G, Labouvie R, Stubenrauch F, Vogler A, Guarrera V, Ott H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 035302
[24] Beige A, Braun D, Tregenna B, Knight P L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1762
[25] Zanardi P, Campos Venuti L 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 240406
[26] Militello B, Napoli A 2020 *Phys. Lett. A* **384** 126355
[27] Gong Z, Yoshioka N, Shibata N, Hamazaki R 2020 *Phys. Rev. A* **101** 052122
[28] Ashida Y, Furukawa S, Ueda M 2016 *Phys. Rev. A* **94** 053615

[29] Tomita T, Nakajima S, Danshita I, Takasu Y, Takahashi Y 2017 *Sci. Adv.* **3** 1701513

[30] Yan B, Moses A S, Gadway B, Covey J P, Hazzard K R, Rey A M, Jin D S, Ye J 2013 *Nature* **501** 521

[31] Zhu B, Gadway B, Foss-Feig M, Schachenmayer J, Wall M L, Hazzard K R A, Yan B, Moses S A, Covey J P, Jin D S, Ye J, Holland M, Rey A M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 070404

[32] Daley A J, Taylor J M, Diehl S, Baranov M, Zoller P 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 040402

[33] Paredes B, Keilmann T, Cirac J I 2007 *Phys. Rev. A* **75** 053611

[34] Diehl S, Baranov M, Daley A J, Zoller P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 165301

[35] Moroz S, Schmidt R 2010 *Ann. Phys.* **325** 491

[36] Zhou Z, Wang Z, Zhong H, Luo Y, Chen H, Tan J 2020 *Phys. Lett. A* **384** 126197

[37] Nakagawa M, Tsuji N, Kawakami N, Ueda M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 147203

[38] Buca B, Booker C, Medenjak M, Jaksch D 2020 *New J. Phys.* **22** 123040

[39] Pan L, Wang X, Cui X, Chen S 2020 *Phys. Rev. A* **102** 023306

[40] Berry M V 2004 *Czech. J. Phys.* **54** 1039

[41] Rotter I 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 153001

[42] Zhang X Z, Jin L, Song Z 2012 *Phys. Rev. A* **85** 042116

[43] Mostafazadeh A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 220402

[44] Longhi S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 022102

[45] Guo C X, Wang X R, Wang C, Kou S P 2020 *Phys. Rev. B* **101** 144439

[46] Sun G Y, Tang J C, Kou S P 2022 *Front. Phys.* **17** 33502

[47] Heiss W D 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 444016

[48] Jin L, Song Z 2009 *Phys. Rev. A* **81** 032109

[49] Jin L, Song Z 2009 *Phys. Rev. A* **80** 052107

[50] Jin L, Song Z 2013 *Ann. Phys.* **330** 142

[51] Jin L 2018 *Phys. Rev. A* **97** 012121

[52] Zhang S M, Zhang X Z, Jin L, Song Z 2020 *Phys. Rev. A* **101** 033820

[53] Jin L, Wang P, Song Z 2017 *Sci. Rep.* **7** 5903

[54] Lin S, Jin L, Song Z 2019 *Phys. Rev. B* **99** 165148

[55] Zhang X Z, Jin L, Song Z 2012 *Phys. Rev. A* **85** 012106

[56] Wang P, Jin L, Zhang G, Song Z 2016 *Phys. Rev. A* **94** 012106

[57] Daley A J 2014 *Adv. Phys.* **6** 3

[58] Zhang X Z, Jin L, Song Z 2020 *Phys. Rev. B* **101** 224301

[59] Zhang K L, Song Z 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 116401

[60] Yang X M, Song Z 2021 *Phys. Rev. B* **103** 094307

[61] Zhang X Z, Song Z 2020 *Phys. Rev. B* **102** 174303

[62] Mostafazadeh A 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 125303

[63] Wang P, Zhang K L, Song Z 2021 *Phys. Rev. B* **104** 245406

[64] Eismann U, Khaykovich L, Laurent S, Ferrier-Barbut I, Rem B S, Grier A T, Delehaye M, Chevy F, Salomon C, Ha L C, Chin C 2016 *Phys. Rev. X* **6** 021025

[65] Patil Y S, Chakram S, Vengalattore M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 140402

[66] Kitaev A Y 2001 *Phys. Usp.* **44** 131

[67] Zhang X Z, Jin L, Song Z 2017 *Phys. Rev. A* **95** 052122

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Non-Hermitian critical dynamics and its application to quantum many-body systems*

Zhang Xi-Zheng [1)]Wang Peng [4)]Zhang Kun-Liang [2)]

Yang Xue-Min [3)]Song Zhi [2)†]

1) (*College of Physics and Materials Science, Tianjin Normal University, Tianjin* 300387, *China*)

2) (*School of Physics, Nankai University, Tianjin* 300071, *China*)

3) (*School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing* 400065, *China*)

4) (*Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing* 100193, *China*)

(Received 10 May 2022; revised manuscript received 6 July 2022)

Abstract

In recent years, two independent research fields, i.e. non-Hermitian and strongly correlated systems have been merged, forming an important research field in physics. The progress of relevant theories and experiments has reshaped our understanding of matter. In this field, the research object is not limited to the influence of non-Hermiticity on the energy spectrum and the eigenstate properties of many-body systems. Researchers have paid more attention to the manipulation of quantum states. It is universally received that the exceptional point is the most significant featurethat distinguishes non-Hermitian quantum mechanics from Hermitian quantum mechanics. In addition to the recent advances in non-Hermitian topological band theory and quantum sensing around the exceptional points, this paper concentrates on the non-Hermitian critical dynamical phenomenon and its application to the quantum many-body system. When the system has an exceptional point, an arbitrary initial state belonging to the coalescent subspace will be projected on the coalescent state. Based on the directionality of the evolved quantum state, this paper reviews our several representative researches in recent years, including local-field-induced dynamical magnetization, quantum phase transition in transverse field, Ising model at non-zero temperature, quantum mold casting in the center-environment system, as well as superconducting state preparation in the non-Hermitian strongly correlated system. We also focus on the new preparation methods and detection schemes of non-equilibrium quantum states related to exception points.

Keywords: non-Hermitian system, quantum many-body system, exceptional point

PACS: 45.50.Jf, 71.10.Fd, 05.70.Jk, 61.20.Lc **DOI:** 10.7498/aps.71.20220914

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11975166, 11874225, 12047547).

† Corresponding author. E-mail: songtc@nankai.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

非厄米临界动力学及其在量子多体系统中的应用

张禧征　王鹏　张坤亮　杨学敏　宋智

Non-Hermitian critical dynamics and its application to quantum many-body systems

Zhang Xi-Zheng　Wang Peng　Zhang Kun-Liang　Yang Xue-Min　Song Zhi

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 174501 (2022)　DOI: 10.7498/aps.71.20220914

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20220914

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

专题: 非厄米物理前沿

基于 Aharonov-Bohm 笼的非厄米趋肤效应抑制现象*

陈舒越[1)] 蒋闯[2)] 柯少林[2)†] 王兵[1)‡] 陆培祥[1)2)]

1) (华中科技大学物理学院, 武汉 430074)

2) (武汉工程大学, 光学信息与模式识别湖北省重点实验室, 武汉 430205)

(2022 年 5 月 17 日收到; 2022 年 6 月 20 日收到修改稿)

能带理论在光学领域的应用为控制光传输提供了有效手段, 非厄米趋肤效应的发现扩展了传统能带理论的范畴, 能够实现新型光局域和单向传输现象. 然而在光学体系, 如何有效地产生并调控非厄米趋肤效应仍然是重要的研究主题. 本文研究了具有规范势的准一维菱形光晶格中的非厄米趋肤效应, 通过计算本征能谱、环绕数和模式演化特性, 发现规范势能够对趋肤效应强弱进行有效调节. 当规范势大小为 π 时, 趋肤效应被完全抑制, 而由 Aharonov-Bohm 笼效应引起的平带局域占主导. 利用间接耦合微环谐振腔阵列, 可同时产生合成光子规范势和非对称耦合, 为研究 Aharonov-Bohm 笼和趋肤效应的竞争机制提供了可能的实现方案. 本研究结果为利用规范势调控趋肤效应提供理论基础, 在发展片上非磁性单向传播器件也具有潜在的应用前景.

关键词: 非厄米趋肤效应, Aharonov-Bohm 笼, 规范势, 微环谐振腔

PACS: 42.50.Ex, 42.79.Gn, 63.20.Pw, 03.65.Vf **DOI:** 10.7498/aps.71.20220978

1 引 言

光的传输和局域调控是发展下一代集成光子芯片的重要基础, 能有效应对信息处理和计算能力日益增长的需求. 随着对光子晶体[1]、光波导阵列[2]和合成光子晶格[3]等光学体系的深入研究, 光子调控的手段变得更加丰富. 例如, 通过能带工程, 可以实现如衍射管理[4]、负折射[5]、无衍射传输[6]、布洛赫震荡[7]等丰富的光束控制; 也可实现不同类型的光波局域, 如动态局域[8], 平带局域[9,10], 摩尔晶格局域[11]. 而能带理论和拓扑的结合发展出了拓扑光子学这一新领域, 基于量子霍尔效应[12]、量子反常霍尔效应[13]、谷自旋[14]等效应的光学类比, 能构建具有拓扑保护、抵抗扰动的单向光波输运, 有效抑制制造缺陷和无序扰动引起的背向散射问题[15]; 此外, 利用拓扑界面态, 拓扑角态等也可实现抵抗扰动的光局域, 应用于拓扑激光等[16,17].

近年来, 能带理论的研究推广至非厄米系统, 对具有非对称耦合的一类格点系统的研究发现, 在开放边界条件下, 系统的体态与拓扑边界态都局域于结构边缘, 这一新奇现象被命名为非厄米趋肤效应[18]. 非厄米趋肤效应的发现给传统能带理论带来了发展, 同时也为控制光局域和单向传输提供了新途径[19,20]. 首先, 非厄米系统的能隙扩展为点能隙和线能隙, 系统的对称性也变得更为复杂[21]. 其次, 在这类系统中, 开放边界条件与周期边界条件下的能谱呈现完全不同的特性, 布洛赫能带图像不

* 国家自然科学基金 (批准号: 11974124, 12021004) 和光学信息与模式识别湖北省重点实验室开放课题研究基金 (批准号: 202102) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: keshaolin@wit.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: wangbing@hust.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

能准确刻画体态性质. 更为重要的是, 拓扑能带理论中, 传统的体边对应关系受到了极大的挑战; 在开放边界条件下存在的拓扑边缘态或界面态, 其性质由系统的体态特性所决定, 这种全息关系叫作体边对应; 然而, 由于趋肤效应, 体态局域于边界, 常规的拓扑不变量无法准确描述拓扑非平庸边界态的性质, 导致体边对应关系的破缺. 为解决这一问题, 人们发展了能谱拓扑、广义布里渊区和非布洛赫拓扑不变量, 成功预测了非厄米趋肤效应的产生条件和拓扑边界态的出现与消失, 重构了非厄米系统中的体边对应关系[18]. 目前, 非厄米趋肤效应在凝聚态[22]、冷原子[23]、电路[24]、声学[25]和机械振动[26]引起了广泛的研究兴趣.

在光学体系中, 如何产生和调控非厄米趋肤效应是重要的研究课题, 最基本的方法是产生非对称耦合. 利用光纤环路可以实现等效的时间、频率晶格[7,27], 利用放大器构建非对称耦合进而实现合成维度的趋肤效应[28]. 在间接耦合微环谐振腔阵列中, 在连接微环中一半周期引入增益, 另一半引入损耗, 构建传输路径依赖的等效耦合, 同样能够实现非对称耦合[29]. 此外, 利用磁性或各向异性光子晶体, 规范势和增益损耗相互作用, 反射波干涉等手段, 不直接产生非对称耦合也可实现趋肤效应[30]. 此外, 趋肤效应和其他局域模式和物理效应的相互作用也是重要的研究课题. 例如, 随机扰动引起的安德森局域和非厄米趋肤效应可以产生多种相变[31]; 在二维体系中, 拓扑和非对称耦合产生杂化趋肤模, 磁场对趋肤效应会产生抑制作用[32]; 在一维体系中, 利用时变电场产生动态局域, 也可以控制趋肤效应[33]. 其他物理效应和趋肤效应相互作用会有哪些新现象, 特别是在集成光学体系中, 其作用又会给光操控带来哪些机会?

本文拟研究准一维菱形晶格中的规范势和非厄米趋肤效应的相互作用. 通过计算本征能谱和环绕数, 发现规范势能够对趋肤效应的强弱进行有效调节. 当规范势大小为 π 时, 周期边界和开放边界条件下的能谱演变为平带并且重新重合, 趋肤效应被完全抑制, 而由 Aharonov-Bohm 笼效应 (Aharonov-Bohm cage, AB 笼) 引起的平带局域占主导, 从演化特性可以观察到从趋肤模式向平带局域模式的变化情况. 进一步提出利用间接耦合微环谐振腔阵列, 可以同时产生规范势和非对称耦合, 并利用传输矩阵法详细分析了耦合特性, 模拟仿真了光场分布和透射谱, 为研究 AB 笼和趋肤效应的竞争机制提供了可能实验方案. 本文的研究成果为利用规范势调控趋肤效应提供了途径.

2 理论模型

2.1 紧束缚模型和本征能谱

考虑如图 1 所示的菱形晶格, 每个单元包含 A, B, C 三个格点, 只考虑最近邻耦合. 同一个晶胞中 A 和 B 格点以及 C 和相邻晶胞 A 格点的耦合为非厄米非对称耦合 (红色和绿色箭头), 同时, 每个晶胞具有大小为 φ 的规范势, 可以由 A 和 C 格点耦合系数中的非互易相位引入 (黄色虚线). 该晶格在实空间的哈密顿量为

$$H = t\sum_n\Big(\mathrm{e}^h a_n^\dagger b_n + \mathrm{e}^{-h} b_n^\dagger a_n + \mathrm{e}^{-h} a_{n+1}^\dagger c_n + \mathrm{e}^h c_n^\dagger a_{n+1}\Big) + t\sum_n\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} a_n^\dagger c_n + a_{n+1}^\dagger b_n + \mathrm{H.c.}\Big), \tag{1}$$

其中, t 为耦合系数; h 为虚规范势, 导致非对称耦合, h 越大非对称度越大.

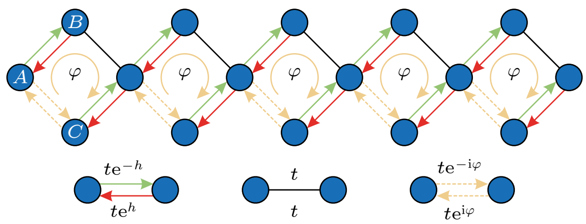


图 1 准一维非厄米菱形晶格示意图

Fig. 1. Schematic of non-Hermitian quasi-one-dimensional rhombic chain.

周期边界条件下, 系统的哈密顿量为

$$H(k) = t\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^h + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-h}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k} \\ \mathrm{e}^{-h} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k} & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{h}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中, k 为布洛赫动量. 由于存在非对称耦合, 系统会出现趋肤效应, 模式会趋向局域于结构边缘处. 局域方向由 h 的符号决定, $h > 0$ 时, 向左耦合系数大于向右的耦合, 出现左趋肤效应; 而 $h < 0$ 的情况相反. 此前对菱形晶格的研究已表明, 厄米情况下, 当规范势大小为 $\varphi = \pi$ 时, 由 A 格点耦合到

相邻 A 格点的波经过 B 和 C 两条路径发生相消干涉, 形成 AB 笼效应, 此时, 能带退化为无色散的平带, 体态变为紧凑局域态[34,35].

因此, 为理解调节规范势对趋肤效应的影响以及其之间的相互作用, 首先考虑厄米情况, 即 $h=0$. 图 2(a)—(c) 所示为不同规范势取值情况下的能谱, 计算中选取的总格点数 $N=61$, 结果显示, 周期边界和开放边界条件下的能谱重合在一起, 此时系统都不支持趋肤效应. 而当 $\varphi=\pi$ 时, 发生相消干涉, 体带退化为 3 个平带, 对应复平面上 3 个点 $E=0, \pm t$, 如图 2(c) 所示. 此外, 复平面上存在能量为 $E=\pm\sqrt{2}t$ 的点, 是开放边界条件下的拓扑边界态, 其拓扑不变量为半整数[36].

引入非对称耦合后, 一般情况下, 系统能谱对边界条件很敏感, 周期边界条件下能谱和开放边界的不再重和, 如图 2(d) 所示, 选取的参数 $h=0.6$, $\varphi=0$ 和 $t=1$. 在复平面上, 周期边界条件下的能谱为有面积的闭合曲线, 具有非厄米点能隙, 而开边能谱则退化成弧线并且被周期边能谱所包围, 此情况下, 开放边界条件下系统具有趋肤效应, 其出现条件可以根据周期边界的拓扑谱环绕数来预测, 定义为[37,38]

$$W\left(E_0\right)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathrm{logdet}\left[H\left(k\right)-E_0\right], \quad (3)$$

式中, k 为布洛赫动量, E_0 为任意基准点. 存在趋肤效应的充要条件为存在 $E_0\in C$ 使得 $W(E_0)\neq 0$. 当周期边为闭合曲线时, 选取 E_0 为闭合曲线内部点, 则 $W(E_0)\neq 0$; 而无趋肤效应时, 周期边能谱塌缩成一条弧线, 不存在内部点, $W(E_0)=0$. 进一步将规范势大小改变为 $\varphi=0.5\pi$, 如图 2(e) 所示, 仍然能观察到周期边界条件下的能谱是闭合曲线, 周期和开放边界条件下不一致, 但周期边能谱围绕的面积显著减小. 规范势增大为 $\varphi=\pi$ 时, 如图 2(f) 所示, 周期边界能谱塌缩为平带, 不再具有内部面积, 并且和开边能谱重合, 此时系统不再具有趋肤效应. 通过对角化 $H(k)$, 求解出周期边能谱为 $E=0, \pm 2t$, 和耦合系数非对称度大小无关, 并且和厄米情况保持一致. 因此, 当出现 AB 笼效应时, 趋肤效应被完全抑制.

2.2 趋肤效应及演化分析

以上讨论的能谱特征可用来预测趋肤效应, 而从本征模式分布可更直接观察趋肤模式. 图 3(a)—(f) 所示为不同规范势 φ 和非对称耦合系数 h 下的

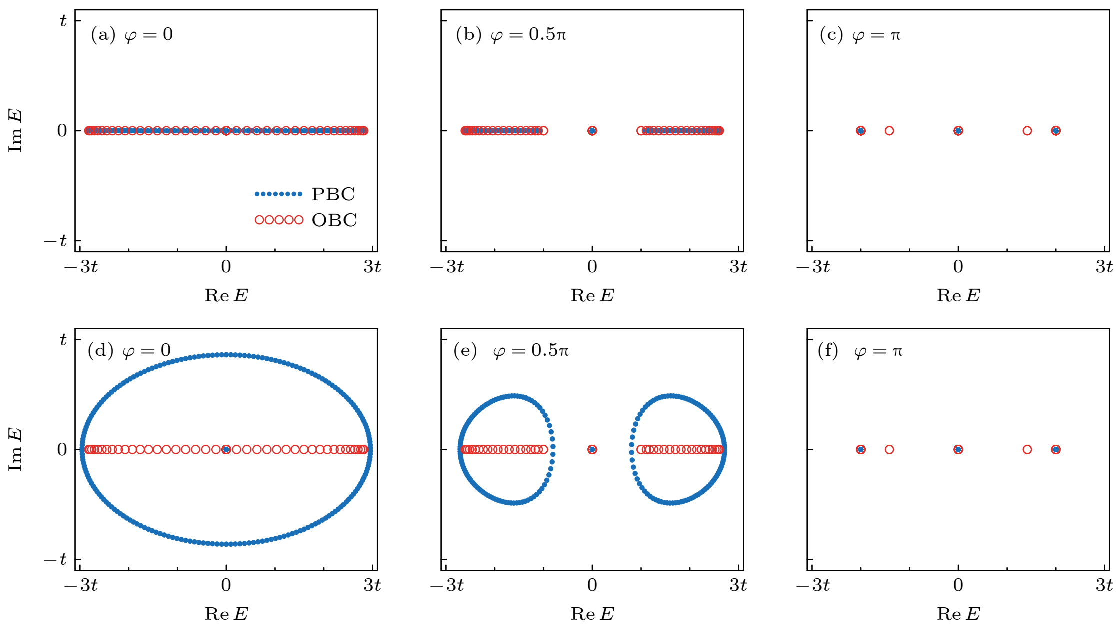


图 2 周期边界条件 (蓝色实心圆) 和开放边界条件 (红色空心圆) 下的复能谱 (a)—(c) 分别对应厄米情况下 ($h=0$) 规范势 $\varphi=0, 0.5\pi, \pi$ 的能谱图; (d)—(f) 分别对应非厄米情况下 ($h=0.6$) 规范势 $\varphi=0, 0.5\pi, \pi$ 的能谱图

Fig. 2. Complex energy spectra under periodic (blue solid circles) and open boundary conditions (red hollow circles): (a)–(c) Energy spectra for Hermitian cases ($h=0$) with $\varphi=0, 0.5\pi, \pi$, respectively; (d)–(f) energy spectra for non-Hermitian cases ($h=0.6$) with $\varphi=0, 0.5\pi, \pi$, respectively.

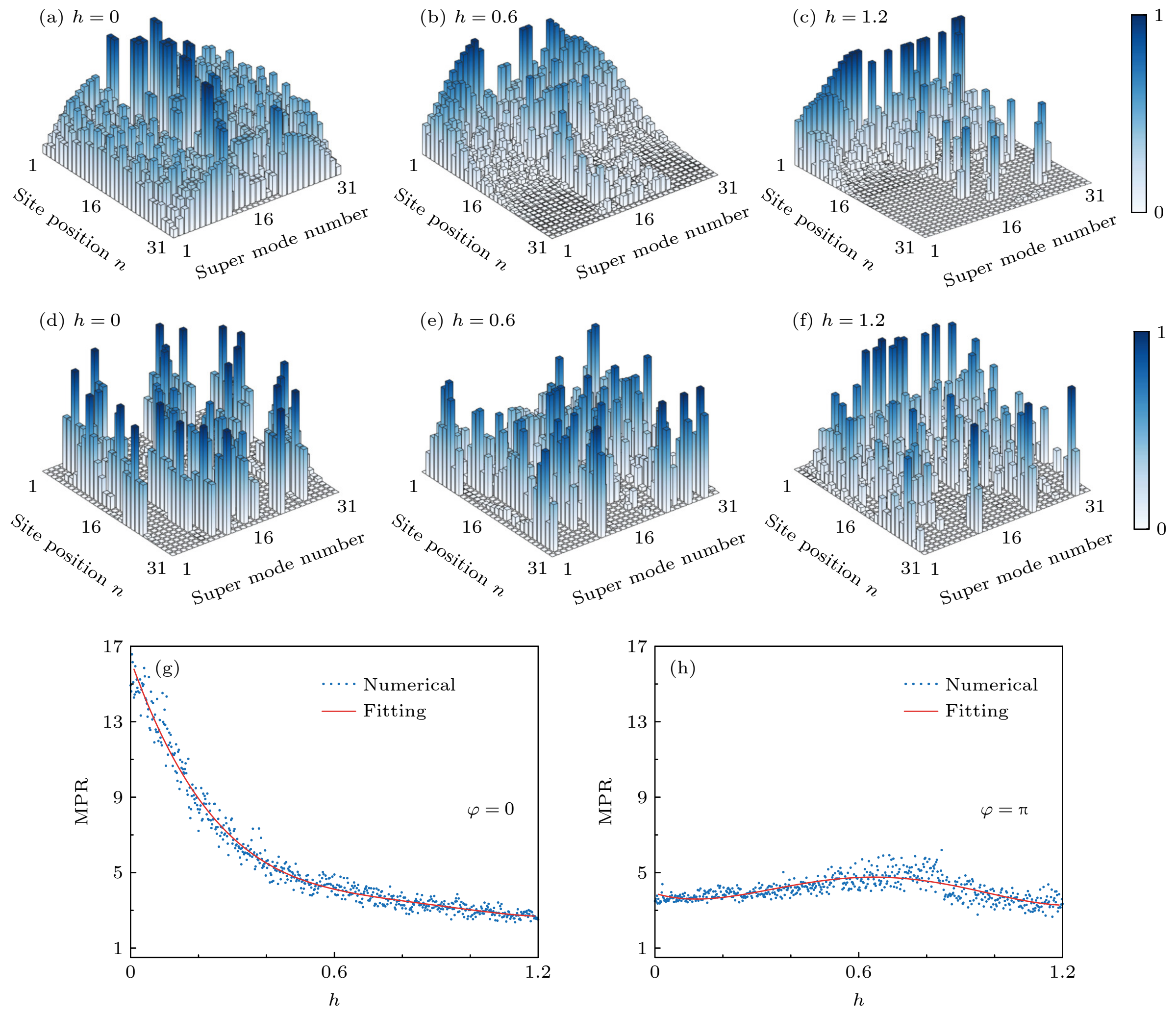


图 3 不同参数下的本征模式分布和 MPR 变化 (a)—(c) $\varphi = 0$ 时, h 取 0, 0.6, 1.2 时的本征模式分布; (d)—(f) $\varphi = \pi$ 时, h 取 0, 0.6, 1.2 时的本征模式分布; (g) 规范势 $\varphi = 0$ 时 MPR 随 h 变化情况; (h) 规范势 $\varphi = \pi$ 时 MPR 随 h 变化情况; 蓝色圆点表示数值计算的结果, 红色实线表示回归分析的结果

Fig. 3. The distribution of eigenmodes and the variation of MPR via h under different parameters: (a)–(c) the distributions of eigenmodes with $\varphi = 0$ as $h = 0$, 0.6, and 1.2, respectively; (d)–(f) the distributions of eigenmodes with $\varphi = \pi$ as $h = 0$, 0.6, and 1.2, respectively; (g) MPR as a function of h for $\varphi = 0$; (h) MPR as a function of h for $\varphi = \pi$. The blue dots indicate the result of numerical calculation and the red solid lines indicate the result of regression.

模式分布图, 其中, 模式编号按能量实部从小到大排列. 首先考虑规范势 $\varphi = 0$ 时的情况, 由于 $h = 0$, 无趋肤效应, 模式在整个结构的格点都有分布, 如图 3(a) 所示. 而当 h 增大时, 系统具有非厄米非对称耦合, 所有模式都局域于结构的左边界处, 而远离边界呈现指数衰减的特性, 即出现趋肤效应, 如图 3(b) 所示. 随着 h 进一步增大, 如图 3(c) 所示, 趋肤效应强度变得越来越强, 模式的局域性进一步增强. 值得一提的是, 从图 3(b), (c) 还可发现, 中等能量大小附近的模式在非对称耦合系数 h 不为 0 时, 并未表现出明显的趋肤效应, 这是由系统本身的能带结构所决定的. 可知准一维菱形链的能带是由一条无色散的零能平带和两条色散带组成, 只有当规范势 $\varphi = \pi$ 时, 两条色散带退化为平带, 才形成了具有三条平带的能带系统[34]; 通过图 2也可以发现, 无论规范势 φ 和非对称耦合系数 h 取何值, 始终存在零能带 ($\mathrm{Re}(E) = \mathrm{Im}(E) = 0$). 即无论 φ 和 h 取何值, 都始终存在一条 $E = 0$ 的零能平带, 能量低且无色散, 使其对应模式的趋肤效应并不明显. 而对于规范势 $\varphi = \pi$ 的情况, 发生 AB 笼效应, 体态模式演化为紧凑局域模式, 如图 3(d) 所示; 在非对称耦合系数不是很大时, 随着当 h 增大, 本征模式并没有向左边缘局域, 而仍然为紧凑局域模式, 如图 3(e), (f) 所示, 这充分说明

了 AB 笼效应对趋肤效应的有效抑制. 为了定量表征模式的局域性, 通过数值计算了 MPR(mean participation ratio), 其定义为[39,40]

$$\text{MPR} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left(\sum_j \left|\psi_j^n\right|^2\right)^2}{\sum_j \left|\psi_j^n\right|^4}, \tag{4}$$

其中, j 为节点编号, n 为模式编号, ψ_j^n 表示第 n 个本征模式在第 j 个节点上的分布大小. MPR 值越大, 模式越不局域; MPR 越趋于 1, 模式越局域. 图 3(g) 描述了 $\varphi = 0$ 情况下 MPR 随耦合非对称度 h 的变化关系, 蓝色点为数值计算结果, 为了更好地描述变化趋势, 也给出了基于四次多项式拟合的拟合结果, 如红色曲线所示. 在此情况下, MPR 随着非厄米耦合的非对称度增大而减小, 表明模式的局域性逐渐增强, 即趋肤效应的增强. 而当 $\varphi = \pi$, 情况不同, 首先, 由于 AB 笼的效果, 体态变为紧凑局域态, 局域于结构不同位置, 即使厄米情况, MPR 也较小, 约等于 3.5; 随着 h 增大, MPR 数值变化并不明显, 并没有发生单调减小的情况, 这是由于紧凑局域态并没有由于非对称耦合而打破. 因此, 由于 AB 笼效应, 趋肤效应被有效抑制.

从模式演化能更清楚地观察趋肤效应及 AB 笼效应. 图 4 描述了不同规范势和非对称度情况下的模场演化结果图. 计算中选取了格点总数目为 $N = 31$, 初始态为 $\psi(16)= 1$, 其他格点为 0. 当 $\varphi = 0$, 厄米情况时, 无趋肤效应, 可以观察到呈现对称演化情况, 如图 4(a) 所示; 当 $h = 0.6$ 时, 为左趋肤效应, 模式趋于向节点编号 N 较小值演化, 到达边界后, 局域于边界处, 如图 4(b) 所示; 而当 $h = -0.6$ 时, 趋肤效应方向也相应反过来, 模式趋于向节点编号较大值演化, 如图 4(c) 所示. 而对于 $\varphi = \pi$ 情况, AB 笼效应占主导, 无论 h 取多大值, 模式呈现平带局域, 分布于入射端口相邻节点, 趋肤效应被抑制, 如图 4(d)—(f) 所示.

接着, 从模式演化的角度来定量的描述 φ 趋于 π 的过程中趋肤效应的变化情况, 计算了系统在单点激发下, 输出模式分布随规范势的变化情况, 如图 5 所示. 可以清楚地观察到, 在规范势 $\varphi < 0.8\pi$ 时模场表现出显著的趋肤效应, 到达边界后并局域在边界处. 在规范势 $0.8\pi < \varphi < 0.95\pi$ 时, 趋肤效应变得较弱, 模场未演化到边界; 并且从图 5 可以发现, 趋肤效应的强度也会随着规范势 φ 的变大而逐渐变弱. 在规范势 $\varphi > 0.95\pi$ 时, 可以看出, 此时趋肤效应已经几乎被抑制, 没有显示出向边界演化的趋势, AB 笼效应带来的局域效果占主导地位, 模场被局域在入射端口处的一个原胞内.

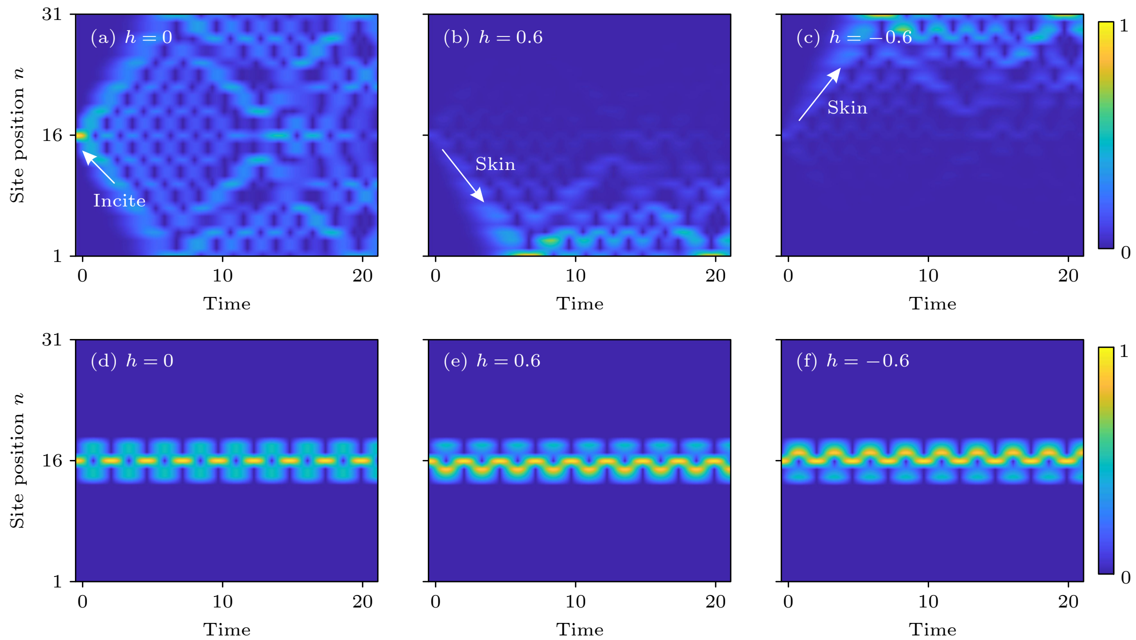


图 4　不同参数下的单点激发随时间演化特性　(a)—(c) 规范势 $\varphi = 0$ 时 h 分别取 0, 0.6, –0.6 时的演化; (d)—(f) 规范势 $\varphi = \pi$ 时 h 分别取 0, 0.6, –0.6 时的演化

Fig. 4. Time-dependent wave dynamics for single-site injection with different parameters: (a)–(c) For $\varphi = 0$ with $h = 0$, 0.6, –0.6, respectively; (d)–(f) for $\varphi = \pi$ with $h = 0$, 0.6, –0.6, respectively.

由此可以看出, 在单点激发下, 模场演化的趋肤效应会随着规范势 φ 的变大逐渐减弱, 而在 $\varphi > 0.95\pi$ 时, 趋肤效应基本被抑制, 从而便可以得到良好的趋肤效应抑制效果.

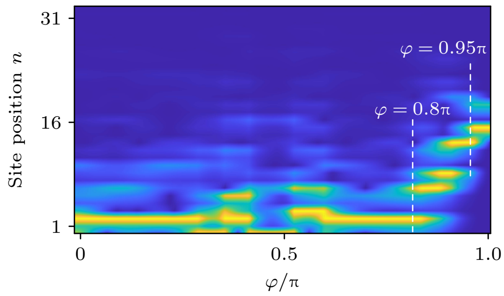


图 5 单点激发下一段时间演化后 (时间取 20) 的输出模场分布随规范势 φ 的变化情况. 格点总数 $N = 31$, 激发位置始终位于结构的正中间 A 格点 ($n = 16$), 选取固定不变的趋肤强度 $h = 0.6$, 模场强度已做归一化处理

Fig. 5. The variation of the output field distribution with the gauge potential φ after a period of evolution under single-site excitation (Time is 20). The total number of site $N = 31$. The field is incident from the middle A site of the structure ($n = 16$), the skin strength is fixed at $h = 0.6$, and the intensity of the field is normalized.

3 模拟结果

3.1 微环谐振腔耦合分析

利用间接耦合微环谐振器阵列可以实现规范势和非对称耦合, 为上述规范势和趋肤效应的相互作用提供可实现的集成光学方案[41,42]. 通过传输矩阵法可以推导微环之间的耦合关系, 为简单起见, 考虑如图 6(a) 所示的一维晶格, 相邻主环通过连接环相耦合, 主环和连接环的长度分别记为 L 和 $L + \Delta L$. 其中, 连接环设置额外的长度 ΔL, 可以使得连接环的共振频率与主环的共振频率不同, 用以控制主环之间的耦合. 连接环的上下半周分别引入了增益和损耗, 增益损耗系数记为 h, 同时也引入了传播相位差, 记为 φ, 分别通过红色和绿色来表示. 每个环都支持两种模式, 包括顺时针 (CW) 和逆时针 (CCW) 模式. 例如, 相邻 CCW 模式的主环是通过连接环中 CW 模式相耦合. 主环与连接环之间耦合的散射矩阵为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 & \mathrm{i}\kappa \\ \mathrm{i}\kappa & t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中, ε_i 表示图中标注位置的场幅值, t_0 和 κ 分别表示传输和耦合系数, 并满足 $t_0^2 + \kappa^2 = 1$. 上述散射矩阵经转换后可得到传输矩阵:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{i}\kappa} \begin{pmatrix} t_0 & -1 \\ 1 & t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

再将光在连接环中的传播考虑进去后可得到:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\frac{L+\Delta L}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{e}^{h} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\frac{L+\Delta L}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{e}^{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

接着, 写出剩余需要的传输矩阵:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{i}\kappa} \begin{pmatrix} t_0 & -1 \\ 1 & t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\frac{L}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\frac{L}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

并将它们全部联系起来后得到

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 为传输矩阵. 考虑周期条件, 结合布洛赫

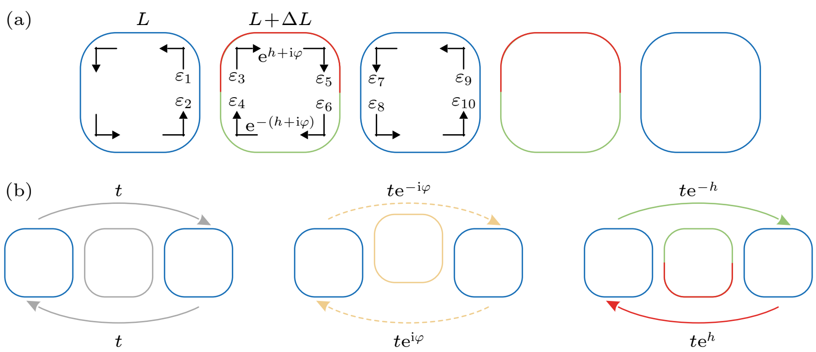


图 6 微环耦合特性示意图 (a) 一维环形谐振腔阵列演示传输矩阵法的原理示意图; (b) 利用连接环实现不同类型的耦合

Fig. 6. Schematic diagram of microring coupling characteristics: (a) Schematic diagram of the 1D array of ring resonators to demonstrate the principle of the transmission matrix method; (b) implementation of different types of coupling using link rings.

定理 $(\varepsilon_9\ \varepsilon_{10})^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\boldsymbol{M}(\varepsilon_1\ \varepsilon_2)^{\mathrm{T}}$, 存在非零解的条件为

$$\left|M - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right| = 0, \tag{11}$$

其中, k 为布洛赫动量. 当连接环反谐振时, 其额外长度 $\Delta L = \pi + 2m\pi$, 将其代入 (11) 式并化简可得到色散关系:

$$\sin(\beta L) = \frac{\kappa^2}{2}(\mathrm{e}^{-h}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k} + \mathrm{e}^{h}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}), \tag{12}$$

由于主环是共振的, 满足

$$\sin(\beta L) \approx (\omega - \omega_0)\, L/v_{\mathrm{g}}, \tag{13}$$

其中, ω_0 和 v_{g} 分别表示谐振频率和群速度, 而 β 则表示传播常数. 色散关系化简为

$$\omega = \omega_0 + t(\mathrm{e}^{-h}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k} + \mathrm{e}^{h}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}), \tag{14}$$

其中, 等效耦合系数 $t = v_{\mathrm{g}}\kappa^2/(2L)$. 可以看出传播相位差 φ 引入了非互易相位, 等效实规范势; 而增益损耗系数 h 引入虚规范势, 导致非厄米非对称耦合.

图 6(b) 描述了通过在主环之间设置不同类型的连接环来实现不同类型的等效耦合系数. 不引入增益损耗和相位差直接在主环之间引入强度为 t 的耦合, 其强度则可以通过环之间的间距来控制. 黄色连接环表示通过垂直移动连接环, 使得从左到右和从右到左传输的光会经历不同的路径长度, 产生的规范势大小为 $\varphi = 2\beta\eta = 2n_{\mathrm{eff}}k_0 \cdot \eta$, 其中 η 为垂直移动位移, n_{eff} 表示环内的有效折射率, k_0 表示真空中的波矢. 红、绿色的连接环则表示分别在连接环的上下半周中引入了增益 (红色) 和损耗 (绿色), 诱导出了与方向相关的放大与耗散, 从而导致了非厄米的非对称耦合.

3.2 微环谐振腔中趋肤效应及抑制现象

利用谐振环阵列来验证准一维菱形链中的非厄米趋肤效应及其抑制现象, 并通过基于有限元方法的数值仿真软件 COMSOL 进行全波仿真, 其几何结构如图 7(a) 所示. 在该菱形链的中间和两端分别放置了端口 S1, S2 和 S3, 其中, S1 为输入端口, S2 和 S3 为输出端口. 模拟中, 芯层和包层的折射率分别为 $n_{\mathrm{core}} = 3$ 和 $n_{\mathrm{air}} = 1$, 且每个环芯层的宽度 w 固定为 0.27 μm. 这样的设计是为了在单个环的共振频率为 $f_0 = 190.694$ THz 时, 波导内仅支持有效折射率 $n_{\mathrm{eff}} = 2.465$ 的单个 TE 偏振模式. 主环的边长 $L_0 = 10$ μm, 并在其 4 个角设计了半径 $r = 3$ μm 的圆角. 连接环相对主环具有额外的长度 $\Delta L = \pi/(n_{\mathrm{eff}}k_0)$, 这是为了让连接环满足反谐振条件. 微环之间的间隙 $g = 0.375$ μm, 由此来确保环与环之间的弱耦合. 增益和损耗是通过给连接环的折射率设置虚部, 其大小设置为 $\gamma = 0.007$. 从 S1 端口激发的单频光为 $f = 190.675$ THz, 这是因为当规范势 $\varphi = \pi$ 时形成的一维 AB 笼的能带结构为 3 条平带, 由此在利用该谐振环阵列结构进行仿真过程中, 在单个谐振环频率 $f_0 = 190.694$ THz 附近还存在两处能够激发 $E = -2t$, $2t$ 这两条体带的吸收峰. 经计算, 分别为 $f_1 = 190.675$ THz 和 $f_2 = 190.725$ THz. 选取这 3 处峰值频率附近的光,

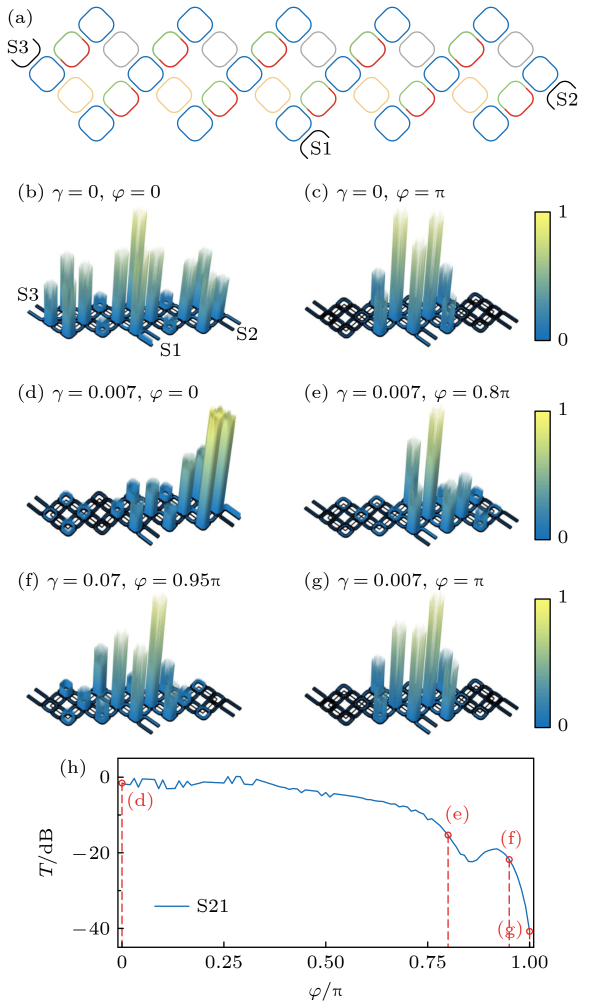


图 7 耦合微环谐振腔阵列的趋肤效应模拟结果 (a) 菱形微环谐振腔阵列示意图; (b)—(g) 分别展示了规范势 φ 和用于引入增益损耗的折射率虚部大小 γ 取不同值时的模场强度空间分布 ($|\boldsymbol{E}|^2$); (h) S21 随 φ 的变化趋势

Fig. 7. Simulation results based on coupled resonator arrays: (a) Geometry of non-Hermitian quasi 1D rhombic chain with ring resonator arrays; (b)–(g) the spatial intensity ($|\boldsymbol{E}|^2$) distributions of light with different values of gauge potential φ and the imaginary index γ used to introduce gain and loss; (h) the trend of S21 with φ.

可以使打入该结构中的光尽可能达到最大, 展示出的光场效果更佳. 在下文仿真中, 皆采用了第 1 个吸收峰值处的频率, $f = 190.675$ THz. 图 7(b)—(g) 分别绘制了当规范势 φ 和用于引入增益损耗的折射率虚部 γ 取不同值时光场的空间分布图, 通过 S1 端口激发. 通过图 7(b), (c) 可知, 在没有引入增益损耗时, 光场会在 $\varphi = 0$ 时扩散到整个系统中, 而在 $\varphi = \pi$ 时则会被束缚在入射端口 S1 附近. 另一方面, 在引入增益损耗 $\gamma = 0.007$ 后, 绘制出了 S2 端口处的透射率随规范势 φ 的变化趋势, 如图 7(h) 所示, 可以清楚看到 S2 端口处的透射率 T, 随着规范势 φ 的变大而逐渐减小, 说明其趋肤效应也在逐渐减弱, 直至被完全抑制. 图 7(d)—(g) 绘制了透射谱中红色圆圈处所对应的模场分布, 可以清楚看到, 在规范势 $\varphi = 0$ 时向右的趋肤效应十分明显, 模场分布在右边界处, 其对应的透射率最大, 约为 1; $\varphi = 0.8\pi$ 时, 趋肤效应较弱, 模场分布在入射端口右侧, 大约为 $T = -15$ dB; $\varphi = 0.95\pi$ 时, 几乎没有展现出趋肤效应, 主要的模场已经呈现平带局域现象, 此时的透射率 $T \approx -22$ dB; 当 $\varphi = \pi$ 时, 趋肤效应被完全抑制, 光被局域在入射端口 S1 附近, $T = -40$ dB. 由此说明, 仿真结果与上述的理论预测基本吻合, 即该结构的趋肤效应在 $\varphi = 0$ 时最强, 而后随着 φ 的增大而逐渐减弱, 并在 $\varphi = \pi$ 时因为 AB 笼效应使光被局域在入射端口附近, 完全抑制了趋肤效应; 另一方面, 可以看出, 在 $\varphi = 0.95\pi$ 时便已经可以获得良好的趋肤效应抑制现象.

4 结 论

本文研究了具有合成光子规范势的准一维菱形光晶格中的非厄米趋肤效应. 该结构中具有两种局域模式, 由非对称耦合引起的趋肤模式, 局域于结构的边缘处; 当规范势 $\varphi = \pi$ 时, 由 Aharonov-Bohm 笼效应引起的平带局域, 束缚于任意入射端口及相邻节点. 另一方面, 通过分析发现, 在规范势 φ 从 0 逐渐变化至 π 的过程中, 趋肤效应会逐渐减弱, 直至 $\varphi = \pi$ 时被完全抑制; 其中在 $\varphi > 0.95\pi$ 时, 便已经可以得到良好的趋肤效应抑制效果. 因此, 利用二者的竞争关系, 能够通过改变规范势对趋肤效应的强弱进行有效调节, 这可以从本征能谱、环绕数和模式演化特性反映出来. 利用传输矩阵法分析了间接耦合微环谐振腔阵列的耦合特性, 指出产生规范势和非对称耦合的方法, 模拟仿真了规范势对趋肤效应的调控作用. 本文的研究局限于平带局域和趋肤效应的相互作用, 此晶格中还存在拓扑边界局域模式, 该局域和趋肤效应的作用还有待进一步探索; 微环阵列能够构建二维光晶格, 存在更多类型的局域模式, 不同模式之间的相互作用也值得深入研究. 总之, 本文的研究结果为一维晶格中利用规范势控制趋肤效应提供了理论方案, 为设计紧凑的非磁性单向传播光器件也具有实际的应用价值.

参考文献

[1] Joannopoulos. J D, Villeneuve. P R, Fan S 1997 *Nature* **386** 143

[2] Ke S, Zhao D, Liu J, Liu Q, Liao Q, Wang B, Lu P 2019 *Opt. Express* **27** 13858

[3] Yuan L, Lin Q, Xiao M, Fan S 2018 *Optica* **5** 1396

[4] Garanovich I L, Longhi S, Sukhorukov A A, Kivshar Y S 2012 *Phys. Rep.* **518** 1

[5] Qin C, Zhou F, Peng Y, Sounas D, Zhu X, Wang B, Dong J, Zhang X, Alu A, Lu P 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 133901

[6] Mukherjee S, Spracklen A, Choudhury D, et al. 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 245504

[7] Chen H, Yang N, Qin C, et al. 2021 *Light Sci. Appl.* **10** 48

[8] Weidemann S, Kremer M, Longhi S, Szameit A 2021 *Nat. Photonics* **15** 576

[9] Jorg C, Queralto G, Kremer M, et al. 2020 *Light Sci. Appl.* **9** 150

[10] Ke S, Zhao D, Fu J, Liao Q, Wang B, Lu P 2020 *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **26** 1

[11] Liao K, Hu X, Gan T, Liu Q, Wu Z, Fan C, Feng X, Lu C, Liu Y-c, Gong Q 2020 *Adv. Opt. Photonics* **12** 60

[12] Leykam D, Yuan L 2020 *Nanophotonics* **9** 4473

[13] Shang C, Chen X, Luo W, Ye F 2018 *Opt. Lett.* **43** 275

[14] Dong J W, Chen X D, Zhu H, Wang Y, Zhang X 2017 *Nat. Mater.* **16** 298

[15] Fang K, Yu Z, Fan S 2012 *Nat. Photonics* **6** 782

[16] Zhou X, Lin Z K, Lu W, Lai Y, Hou B, Jiang J H 2020 *Laser Photonics Rev.* **14** 2000010

[17] Mittal S, Orre V V, Zhu G, Gorlach M A, Poddubny A, Hafezi M 2019 *Nat. Photonics* **13** 692

[18] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803

[19] Xiao L, Deng T, Wang K, Zhu G, Wang Z, Yi W, Xue P 2020 *Nat. Phys.* **16** 761

[20] Yang Z, Zhang K, Fang C, Hu J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 226402

[21] Kawabata K, Shiozaki K, Ueda M, Sato M 2019 *Phys. Rev. X* **9** 041015

[22] Wang H, Ruan J, Zhang H 2019 *Phys. Rev. B* **99** 075130

[23] Li L, Lee C H, Gong J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 250402

[24] Liu S, Shao R, Ma S, Zhang L, You O, Wu H, Xiang Y J, Cui T J, Zhang S 2021 *Research (Wash D C)* **2021** 5608038

[25] Zhang L, Yang Y, Ge Y, et al. 2021 *Nat. Commun.* **12** 6297

[26] Gao P, Willatzen M, Christensen J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 206402

[27] Wang S, Qin C, Wang B, Lu P 2018 *Opt. Express* **26** 19235
[28] Song Y, Liu W, Zheng L, Zhang Y, Wang B, Lu P 2020 *Phys. Rev. Appl.* **14** 064076
[29] Lin Z, Ding L, Chen S, Li S, Ke S, Li X, Wang B 2021 *Phys. Rev. A* **103** 063507
[30] Song Y, Chen Y, Xiong W, Wang M 2022 *Opt. Lett.* **47** 1646
[31] Jiang H, Lang L J, Yang C, Zhu S L, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 054301
[32] Lu M, Zhang X X, Franz M 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 256402
[33] Peng Y, Jie J, Yu D, Wang Y 2022 arXiv: 2201.10318
[34] Longhi S 2014 *Opt. Lett.* **39** 5892
[35] Mukherjee S, Thomson R R 2015 *Opt. Lett.* **40** 5443
[36] Kremer M, Petrides I, Meyer E, Heinrich M, Zilberberg O, Szameit A 2020 *Nat. Commun.* **11** 907
[37] Zhang K, Yang Z, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
[38] Okuma N, Kawabata K, Shiozaki K, Sato M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 086801
[39] Wang P, Jin L, Song Z 2019 *Phys. Rev. A* **99** 062112
[40] Zhang Z X, Huang R, Qi L, Xing Y, Zhang Z J, Wang H F 2020 *Ann. Phys.* **533** 2000272
[41] Hafezi M, Demler E A, Lukin M D, Taylor J M 2011 *Nat. Phys.* **7** 907
[42] Hafezi M, Mittal S, Fan J, Migdall A, Taylor J M 2013 *Nat. Photonics* **7** 1001

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Suppression of non-Hermitian skin effect via Aharonov-Bohm cage*

Chen Shu-Yue [1)] Jiang Chuang [2)] Ke Shao-Lin [2)†]
Wang Bing [1)‡] Lu Pei-Xiang [1)2)]

1) (*School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074, *China*)

2) (*Hubei Key Laboratory of Optical Information and Pattern Recognition, Wuhan Institute of Technology, Wuhan* 430205, *China*)

(Received 17 May 2022; revised manuscript received 20 June 2022)

Abstract

The application of energy band theory in optics provides an effective approach to modulating the flow of light. The recent discovery of non-Hermitian skin effect promotes the development of traditional energy band theory, which further enables an alternative way to realize light localization and unidirectional propagation. However, how to effectively generate and steer the non-Hermitian skin effect is still an important topic, especially in integrated optical systems. Here, we investigate the non-Hermitian skin effect in quasi-one-dimensional rhombic optical lattice with synthetic gauge potential. By calculating the eigenenergy spectra, spectral winding number, and wave dynamics, the gauge potential can be utilized to effectively tune the localization strength of skin modes. In particular, the skin effect is completely suppressed when the gauge potential in each plaquette is equal to π, while the flat-band localization caused by Aharonov-Bohm caging effect is dominant. By utilizing the indirectly coupled micro ring resonator array, the gauge potential and asymmetric coupling can be generated at the same time, which provides a potential experimental scheme to explore the competition between Aharonov-Bohm cage and skin effect. The present study provides an alternative way to steer the skin effect, which offers an approach to achieving the on-chip non-magnetic unidirectional optical devices.

Keywords: non-Hermitian skin effect, Aharonov-Bohm cage, synthetic gauge potential, ring resonator array

PACS: 42.50.Ex, 42.79.Gn, 63.20.Pw, 03.65.Vf **DOI:** 10.7498/aps.71.20220978

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11974124, 12021004) and the Hubei Key Laboratory of Optical Information and Pattern Recognition (Grant No. 202102).

† Corresponding author. E-mail: keshaolin@wit.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: wangbing@hust.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

基于Aharonov-Bohm笼的非厄米趋肤效应抑制现象

陈舒越 蒋闯 柯少林 王兵 陆培祥

Suppression of non−Hermitian skin effect via Aharonov−Bohm cage

Chen Shu-Yue Jiang Chuang Ke Shao-Lin Wang Bing Lu Pei-Xiang

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 174201 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220978
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20220978
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

专题: 非厄米物理前沿

一维$\mathcal{PT}$对称非厄米自旋轨道耦合 Su-Schrieffer-Heeger 模型的拓扑性质*

李家锐 王梓安 徐彤彤† 张莲莲 公卫江

(东北大学理学院, 沈阳 110819)

(2022 年 4 月 24 日收到; 2022 年 5 月 31 日收到修改稿)

理论上分析了受自旋指标调控并施以增益和损耗复势能的一维非厄米自旋轨道耦合 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型的拓扑性质和能谱特性. 发现虚势能导致体系的拓扑非平庸区出现能谱虚化, 而在拓扑平庸区发生$\mathcal{PT}$相变. 此外, 虚势能和自旋轨道耦合共同作用使得拓扑平庸区中发生拓扑相变, 并且拓扑非平庸区变宽. 能谱结果显示, 虚势能和自旋轨道耦合对于体系的零能态有明显的调控作用, 主要在于出现了 4 种局域性、数目均不同的零能态. 这说明虚势能和自旋轨道耦合对体系的能带结构的特殊调节效果. 本文有助于理解$\mathcal{PT}$对称非厄米系统的拓扑相变行为.

关键词: $\mathcal{PT}$对称, 拓扑相变, Su-Schrieffer-Heeger 晶格, 自旋轨道耦合

PACS: 03.65.Vf, 73.22.Gk, 71.70.Ej, 73.20.At **DOI:** 10.7498/aps.71.20220796

1 引 言

多年来, 具有空间和时间反演组合对称性 ($\mathcal{PT}$对称性) 的非厄米哈密顿量一直是量子物理领域的研究热点. $\mathcal{PT}$对称性的概念最早是在 1998 年由 Bender 和 Boettcher 提出的, 他们发现在$\mathcal{PT}$对称破缺发生之前, 系统能够出现纯实数的本征能谱[1]. 随着非厄米和拓扑量子物理的发展, $\mathcal{PT}$对称拓扑量子物理已经成为一个重要的研究方向[2–5].

在众多非厄米$\mathcal{PT}$对称体系的结构中, Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型是最基本、最重要的体系之一[6–8]. 所谓的一维 SSH 模型是一种具有交替跳跃系数的一维两能带晶格[9–12]. 在厄米情况下, 通过调节胞内和胞间跃迁系数的比值, 在布里渊区的边界处会出现能隙闭合再打开的过程, 即拓扑相变[13]. 在开边界条件下, 拓扑非平庸区的能隙中会出现局域在系统两端的零能边缘态. 正因为 SSH 模型清晰的拓扑特性, 被视为非厄米拓扑量子物理的重要研究对象. 朱保刚等[14]研究了在模型两端具有增益和损耗虚势能的$\mathcal{PT}$对称非厄米 SSH 模型. 发现虚势能的加入会导致体系的拓扑平庸区和非平庸区表现出不同的特性. 在拓扑平庸区中, 虚势能会导致系统经历自发的$\mathcal{PT}$对称破缺转变. 而在拓扑非平庸区, 仅会出现自发的$\mathcal{PT}$对称破缺相. 随后, 许多课题组致力于研究$\mathcal{PT}$对称非厄米 SSH 模型的性质, 讨论了自发$\mathcal{PT}$对称破缺, 添加次近邻耦合、拓扑相位以及奇异点和拓扑边态[15–21]. 在此基础之上, 其他复杂结构也得到讨论, 如$\mathcal{PT}$对称的三聚体晶格、Kitaev 模型、六角蜂窝晶格等[22–25].

虽然在自然界中找不到特殊的$\mathcal{PT}$对称系统, 但实验上可以等效实现. 如利用光波导通道可以得到具有增益和损耗效果的复势能[26], 利用光学微

* 国家自然科学基金 (批准号: 11905027)、兴辽英才计划 (批准号: XLYC1907033) 和中央高校基本科研专项资金 (批准号: N2002005) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xutttina2015@163.com

腔或单向隐形 Bragg 光栅结构实现 $\mathcal{PT}$ 对称[27,28]. $\mathcal{PT}$ 对称光学和拓扑光子学的发展直接推动了 $\mathcal{PT}$ 对称拓扑系统的发展. 除了光学系统之外, 在声学领域[29] 以及 LRC 电路中也能实现 $\mathcal{PT}$ 对称[30,31].

随着自旋轨道耦合体系研究的深入, 有研究组指出自旋轨道耦合对厄米体系的拓扑性质具有重要影响和驱动作用[32–34]. 受此启发, 本文拟设计一个复杂的体系, 即在一维自旋轨道耦合 SSH 模型的基础上施加与自旋方向相关的虚势能. 目的在于, 研究虚势能和自旋轨道耦合对一维自旋轨道耦合 SSH 模型拓扑性质的共同驱动作用. 研究发现, 随着虚势能的增加, 体系发生自发 $\mathcal{PT}$ 对称破缺. 此外, 虚势能和自旋轨道耦合共同作用会诱导拓扑平庸区发生相变, 使得拓扑非平庸相的范围增加. 在此过程中, 两种参数对拓扑非平庸区也产生了不同特性的零能态. 所有现象都表明了虚势能和自旋轨道耦合对非厄米自旋轨道耦合 SSH 模型拓扑性质、边缘态特征等因素具有丰富的调控作用.

2 理论模型

本文提出的非厄米一维自旋轨道耦合 SSH 模型是由 N_c 个原胞组成的一维链, 具体结构如图 1 所示. 体系哈密顿量表示为

$$H = H_0 + U, \tag{1}$$

右侧第一项 H_0 表示一维自旋轨道耦合 SSH 模型的哈密顿量:

$$\begin{aligned} H_0 = &\sum_{i=1}^{N_\mathrm{c}}\sum_{\sigma}\left(vc_{ia\sigma}^{\dagger}c_{ib\sigma}+\mathrm{h.c.}\right)\\ &+\sum_{i=1}^{N_\mathrm{c}-1}\sum_{\sigma}\left(wc_{ib\sigma}^{\dagger}c_{i+1a\sigma}+\mathrm{h.c.}\right)\\ &+\sum_{i=1}^{N_\mathrm{c}}\sum_{\sigma}\left(\lambda_v c_{ia\sigma}^{\dagger}c_{ib\sigma'}+\mathrm{h.c.}\right)\\ &-\sum_{i=1}^{N_\mathrm{c}-1}\sum_{\sigma}\left(\lambda_w c_{ib\sigma}^{\dagger}c_{i+1a\sigma'}+\mathrm{h.c.}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

其中, $c_{i\alpha\sigma}^{\dagger}$ 和 $c_{i\alpha\sigma}$ 分别表示在第 i 个原胞中, 第 α $(\alpha=a,b)$ 晶格上自旋为 σ $(\sigma=\uparrow,\downarrow)$ 的产生算符和湮灭算符; v 表示原胞内跃迁, 其具体形式为 $v=t(1+\delta)$. w 表示原胞间跃迁振幅, 其具体形式为 $w=t(1-\delta)$. 为保证跃迁项都是正数, 本文将 δ 的范围规定在 $|\delta|<1$. $\lambda_v=\lambda(1+\delta)$ 和 $\lambda_w=\lambda(1-\delta)$ 分别表示原胞内和原胞间自旋轨道耦合跃迁, 其中 λ 表示自旋轨道耦合强度, 取值范围为 $0<\lambda<1$.

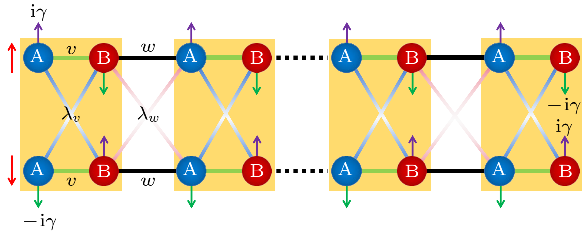


图 1 非厄米自旋轨道 SSH 模型示意图. A 和 B 表示两种晶格, 紫色上箭头和绿色下箭头分别表示具有增益和损耗的虚势能 $\mathrm{i}\gamma$ 和 $-\mathrm{i}\gamma$, 浅绿色线和黑色线分别表示胞内跃迁 v 和胞间跃迁 w, 蓝色线和粉色线表示胞内自旋轨道耦合跃迁 λ_v 和胞间自旋轨道耦合跃迁 λ_w

Fig. 1. Schematic diagram of the non-Hermitian spin-orbit SSH model. A and B represent two kinds of lattices, and purple-up and green-down arrows represent imaginary potentials $\mathrm{i}\gamma$ and $-\mathrm{i}\gamma$, respectively. Light-green and black lines denote intracell hopping v and intercell hopping w, and the blue and pink lines describe the intracell spin-orbit coupling λ_v and the intercell spin-orbit coupling λ_w.

(2) 式右侧第二项 U 描述在位能处引入能量增益和损耗来实现的虚势能项, 其哈密顿量写为

$$H_{\mathcal{PT}} = \sum_{i,\sigma}\mathrm{i}\gamma\left(c_{ia\sigma}^{\dagger}\sigma_{\sigma\sigma}^{z}c_{ia\sigma}-c_{ib\sigma}^{\dagger}\sigma_{\sigma\sigma}^{z}c_{ib\sigma}\right), \tag{3}$$

这里 $\gamma>0$ 表示虚势能强度.

根据体系哈密顿量, 接下来讨论非厄米自旋轨道耦合 SSH 系统的能带结构和拓扑性质. 在周期性边界条件下, 利用傅里叶变换 $c_{i\alpha\sigma}=\dfrac{1}{\sqrt{N_\mathrm{c}}}\sum_k c_{k\alpha\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kn}$ 可以得到动量空间的哈密顿量表达式:

$$\boldsymbol{H} = \sum_k \boldsymbol{\psi}_k^{\dagger}\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\psi}_k. \tag{4}$$

考虑四分量基矢 $\boldsymbol{\psi}_k=[c_{ka\uparrow},c_{ka\downarrow},c_{kb\uparrow},c_{kb\downarrow}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{H}(k)$ 的表达式可以写成:

$$\boldsymbol{H}(k)=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\gamma & 0 & z(k) & h(k)\\ 0 & -\mathrm{i}\gamma & h(k) & z(k)\\ z^*(k) & h^*(k) & -\mathrm{i}\gamma & 0\\ h^*(k) & z^*(k) & 0 & \mathrm{i}\gamma\end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中 k 是布洛赫波矢量, $z(k)=v+w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}$, $h(k)=\lambda_v-\lambda_w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}$.

2.1 对称性

哈密顿量的对称性决定了具有拓扑结构的系

统中对称保护的拓扑相位. 因此, 应首先关注体系的对称性, 以呈现自旋轨道耦合 SSH 模型的拓扑性质. 利用泡利矩阵, (5) 式可以改写成:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(k)=&(v+\cos k)(\boldsymbol{\tau}_x\otimes\boldsymbol{\sigma}_0)+w\sin k(\boldsymbol{\tau}_y\otimes\boldsymbol{\sigma}_0)\\&+(\lambda_v-\lambda_w\cos k)(\boldsymbol{\tau}_x\otimes\boldsymbol{\sigma}_x)\\&-\lambda_w\sin k(\boldsymbol{\tau}_y\otimes\boldsymbol{\sigma}_x)+\mathrm{i}\gamma(\boldsymbol{\tau}_z\otimes\boldsymbol{\sigma}_z),\end{aligned}\tag{6}$$

$\boldsymbol{\tau}_{x,y,z}(\boldsymbol{\sigma}_{x,y,z})$ 是对应的泡利矩阵, $\boldsymbol{\tau}_0(\boldsymbol{\sigma}_0)$ 是二阶单位矩阵.

当 $\gamma=0$ 时, 整个体系处于厄米情况. 可以发现, 体系满足反演对称性 $\mathcal{P}\boldsymbol{H}(k)\mathcal{P}^{-1}=\boldsymbol{H}(-k)$, 其算符 $\mathcal{P}$ 表示为 $\boldsymbol{\tau}_x\otimes\boldsymbol{\sigma}_0\,(\mathcal{P}^2=1)$. 体系也具有时间反演对称性 $\mathcal{T}\boldsymbol{H}(k)\mathcal{T}^{-1}=\boldsymbol{H}(-k)$, 其中 $\mathcal{T}=(\boldsymbol{\tau}_0\otimes\boldsymbol{\sigma}_x)\mathcal{K}\,(\mathcal{T}\mathcal{T}^*=1)$, 这里*表示复共轭. $\boldsymbol{H}(k)$ 还满足粒子-空穴对称性 $\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Gamma}^{-1}=-\boldsymbol{H}(-k)$, $\boldsymbol{\Gamma}$ 表示为 $\boldsymbol{\Gamma}=(\boldsymbol{\tau}_z\otimes\boldsymbol{\sigma}_0)\mathcal{K}$ 且 $\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}^*=1$. 粒子-空穴对称性的存在保证了体系的能量满足正负对称. 此外, 体系还满足手性对称性 $\mathcal{C}\boldsymbol{H}(k)\mathcal{C}^{-1}=-\boldsymbol{H}(k)$, $\mathcal{C}$ 表示为 $\mathcal{C}=\boldsymbol{\tau}_z\otimes\boldsymbol{\sigma}_x\,(\mathcal{C}\mathcal{C}^*=1)$.

当 $\gamma\neq0$ 时, 体系变为非厄米情况. 由于虚势能的引入导致 $\boldsymbol{H}\neq\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}^*)$, 非厄米体系的对称性分析也会受到影响. Kawabata 等[35] 试图给出非厄米系统各种对称性的定义和条件. 他们提出, 非厄米情况下粒子-空穴对称性 (PHS) 的定义式为 $\mathcal{C}_-\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(k)\mathcal{C}_-^{-1}=-\boldsymbol{H}(-k)$, 时间反演对称性 (TRS) 满足 $\mathcal{T}_+\boldsymbol{H}^*(k)\mathcal{T}_+^{-1}=\boldsymbol{H}(-k)$. 特殊的是, 在非厄米体系中也存在 $\mathrm{TRS}^\dagger:\mathcal{C}_+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(k)\mathcal{C}_+^{-1}=\boldsymbol{H}(-k)$ 和 $\mathrm{PHS}^\dagger:\mathcal{T}_-\boldsymbol{H}^*(k)\mathcal{T}_-^{-1}=-\boldsymbol{H}(-k)$. 从以上的对称性表达式可以发现, $\mathrm{TRS}^\dagger$ 和 $\mathrm{PHS}^\dagger$ 是TRS和PHS的厄米共轭.

对于本模型, 虽然非厄米情况下不存在TRS和PHS, 但是 $\boldsymbol{H}(k)$ 仍满足对称性 $\mathrm{TRS}^\dagger$ 和 $\mathrm{PHS}^\dagger$, 其对应算符表示为 $\mathcal{C}_+=\boldsymbol{\tau}_0\otimes\boldsymbol{\sigma}_0\,(\mathcal{C}_+^2=1)$ 和 $\mathcal{T}_-=\boldsymbol{\tau}_z\otimes\boldsymbol{\sigma}_0\,(\mathcal{T}_-\mathcal{T}_-^*=1)$. 同样, $\boldsymbol{H}(k)$ 满足手征对称性, 即 $\mathcal{C}\boldsymbol{H}^\dagger(k)\mathcal{C}^{-1}=-\boldsymbol{H}(k)$, 其中 $\mathcal{C}=\boldsymbol{\tau}_z\otimes\boldsymbol{\sigma}_0$. 这里的手征对称算符也可以写成 $\mathcal{C}=\mathcal{C}_+\mathcal{T}_-$. 另外, 体系满足 $\mathcal{PT}$ 对称性, 即 $\mathcal{PT}\boldsymbol{H}(k)\mathcal{PT}^{-1}=\boldsymbol{H}(k)$, 其中 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别表示为 $\mathcal{P}=\boldsymbol{\tau}_x\otimes\boldsymbol{\sigma}_x$ 和 $\mathcal{T}=(\boldsymbol{\tau}_0\otimes\boldsymbol{\sigma}_x)\mathcal{K}$.

根据所满足的对称性, 可以将拓扑体系分类[35,36]. 可以推断厄米情况下本体系属于 BDI 类, 而在非厄米情况下属于非厄米系统 38 种拓扑分类中的 $\mathrm{BDI}^\dagger$ 类, 具体分类结果如表 1 所列. 以往的结论[35] 表明, 一维 BDI 类体系存在 $\mathcal{Z}$ 类拓扑不变量.

表 1 厄米和非厄米情况的 BDI 和 $\mathrm{BDI}^\dagger$ 类
Table 1. The BDI and $\mathrm{BDI}^\dagger$ classes for Hermitian and non-Hermitian Hamiltonians.

Symmetry	TRS	PHS	$\mathrm{TRS}^\dagger$	$\mathrm{PHS}^\dagger$	CS
Class	$\mathcal{T}(\mathcal{T}_+)$	$\boldsymbol{\Gamma}(\mathcal{C}_-)$	$\mathcal{C}_+$	$\mathcal{T}_-$	$\mathcal{C}$
BDI	+1	+1	0	0	1
$\mathrm{BDI}^\dagger$	0	0	+1	+1	1

2.2 能带结构与拓扑相变

需要强调的是, 只从对称性的角度确定体系的拓扑性质是不够准确的. 下面计算一维非厄米自旋轨道耦合 SSH 模型的能带结构, 探究体系的拓扑相变条件. 将 (5) 式的哈密顿量进行对角化处理, 可以得到动量空间能带表达式:

$$E_\pm(k)=\pm\sqrt{X\pm\sqrt{-4\gamma^2|h(k)|^2+Y}},\tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}X=&-\gamma^2+|h(k)|^2+|z(k)|^2\\=&-\gamma^2+\lambda_v^2+\lambda_w^2+v^2+w^2\\&+2(vw-\lambda_v\lambda_w)\cos k,\\Y=&[h^*(k)z(k)+h(k)z^*(k)]^2\\=&4[v\lambda_v-w\lambda_w+(w\lambda_v-v\lambda_w)\cos k]^2.\end{aligned}\tag{8}$$

对于厄米情况 $(\gamma=0)$, 动量空间本征能量简化为

$$E=\pm2\sqrt{\left[(\lambda\pm t\delta)\sin\frac{k}{2}\right]^2+\left[(t\pm\lambda\delta)\cos\frac{k}{2}\right]^2}.\tag{9}$$

通过能带表达式 (9) 能够发现, 当 $k=\pm\pi$ 时中间两条能带发生闭合, 此时 λ, δ 和 t 之间满足条件 $\delta=\pm\lambda/t$. 同样, 当三者满足 $\delta=\pm t/\lambda$ 时, 中心能带在 $k=0$ 处发生能隙闭合. 如图 2(a) 和图 2(b) 所示的 $\lambda=0.3$ 时的能谱. 可以发现, 当 $\delta=0.3$ 时中间两条能带在 $k=\pm\pi$ 相交, 而当 $\delta=3.333$ 时能隙在 $k=0$ 处闭合, 与理论推导结果一致.

根据BDI类对称性的结论, 体系存在 $\mathcal{Z}$ 类拓扑不变量. 将动量空间哈密顿量转换为非对角形式, 代入拓扑不变量表达式

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}=&-\mathrm{Tr}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\mathrm{i}}\boldsymbol{V}^{-1}\partial_k\boldsymbol{V}\\=&-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\mathrm{i}}\partial_k\ln\det(\boldsymbol{V}),\end{aligned}\tag{10}$$

其中, $\det(\boldsymbol{V})=-\lambda_v^2+v^2+2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}(\lambda_v\lambda_w+vw)+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k}\times(-\lambda_w^2+w^2)$. 由此可以得到厄米体系的拓扑不变量,

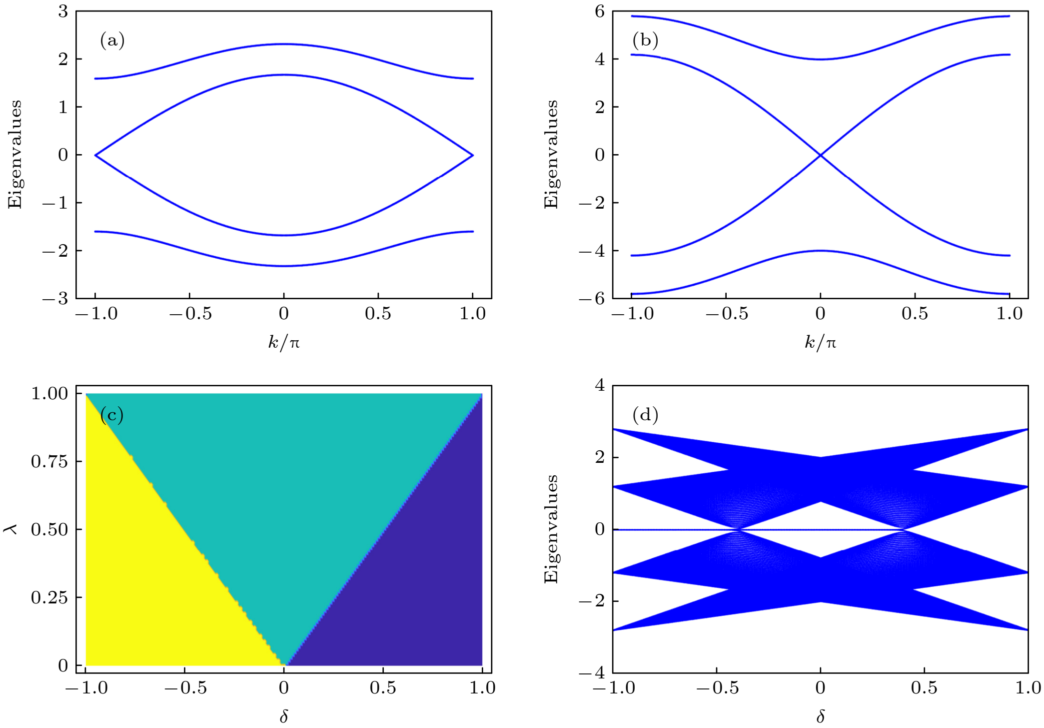


图 2 (a), (b) 厄米情况下, 体系的动量空间能谱图, $\lambda = 0.3$ (a) $\delta = 0.4$; (b) $\delta = 2.5$. (c) 动量空间相图, 其中黄色对应 $\mathcal{Z} = 2\pi$, 绿色对应 $\mathcal{Z} = \pi$ 以及紫色对应 $\mathcal{Z} = 0$. (d) 体系能谱随着二聚化参量 δ 的变化

Fig. 2. (a), (b) The energy spectra of system in the momentum space under the Hermitian condition with $\lambda = 0.3$: (a) $\delta = 0.4$; (b) $\delta = 2.5$. (c) Phase diagram in the momentum space, where yellow region corresponds to $\mathcal{Z} = 2\pi$, green region corresponds to $\mathcal{Z} = \pi$, and purple corresponds to $\mathcal{Z} = 0$. (d) Energy spectrum with the change of dimerization parameter δ.

对应结果如图 2(c) 所示. 从图中可以观察到当 $\lambda = 0$ 时, 体系只有 $\mathcal{Z} = 2\pi$ (黄色区域) 和 $\mathcal{Z} = 0$ (紫色区域) 两种相. 随着 λ 的增加, 在 $-\lambda/t < \delta < \lambda/t$ 区间内为拓扑非平庸 I 区 (绿色区域). 结果表明, λ 的加入才导致体系会出现 $\mathcal{Z} = 2\pi$, $\mathcal{Z} = \pi$ 及 $\mathcal{Z} = 0$ 三种相. 图 2(d) 给出了开边界条件下的能带结构. 根据之前的研究结论[32–34] 可以知道, $\mathcal{Z} = 2\pi$ 时零模存在四重简并, 而 $\mathcal{Z} = \pi$ 时零模为二重简并.

对于非厄米情况 ($\gamma \neq 0$), 同样可以找到能隙闭合条件. 由 (7) 式可以写出 $k = \pm\pi$ 时体系 4 条能带的表达式: $E_{1(2)} = 2\lambda + (-)\sqrt{-\gamma^2 + 4\delta^2 t^2}$, $E_{3(4)} = -2\lambda - (+)\sqrt{-\gamma^2 + 4\delta^2 t^2}$. 根据能带表达式可以发现, 如果 E_2 和 E_3 两条能带相交, 则需满足

$$\gamma^2 = 4(\delta^2 t^2 - \lambda^2). \tag{11}$$

而当 $k = 0$ 时, 体系的能带表达式变成 $E_{1(2)} = 2\lambda\delta + (-)\sqrt{-\gamma^2 + 4t^2}$, $E_{3(4)} = -2\lambda\delta - (+)\sqrt{-\gamma^2 + 4t^2}$. E_2 和 E_3 也可以在 $k = 0$ 处发生能带相交, 此时各参数需满足

$$\gamma^2 = 4(t^2 - \delta^2\lambda^2). \tag{12}$$

此外, 通过 $k = \pm\,\pi$ 和 $k = 0$ 的能带表达式还能发现 E_1 和 E_2 (E_3 和 E_4) 在这两处位置相交, 则参数需分别满足 $\gamma^2 = 4\delta^2 t^2$ 以及 $\gamma^2 = 4t^2$.

为了更好地观察体系的拓扑性质, 有必要在动量空间中讨论全局 Zak 相[37,38], 其表达式为 $\mathcal{Z} = \sum_n \mathrm{i}\oint \langle\varphi_n|\partial_k\psi_n\rangle \mathrm{d}k$. 这里 $|\psi_n\rangle$ ($|\varphi_n\rangle$) 表示右 (左) 矢

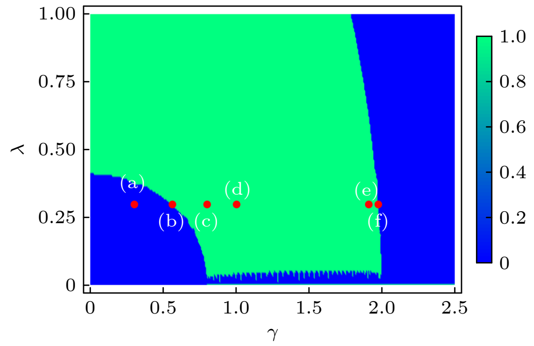


图 3 随 γ 和 λ 变化的拓扑相图. 蓝色对应 $\mathcal{Z} = \pi$ 的拓扑非平庸相, 绿色区域表示 $\mathcal{Z} = 0$ 的拓扑平庸相. 相关参数为 $\delta = 0.4$ 以及 $t = 1.0$

Fig. 3. Topological phase diagram with changes in γ and λ. Blue region corresponds to the topologically non-trivial phase of $\mathcal{Z} = \pi$, and green region represents the topologically trivial phase of $\mathcal{Z} = 0$. Relevant parameters are taken to be $\delta = 0.4$ and $t = 1.0$.

本征态，且满足 $H_k|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ 以及 $H_k^{\dagger}|\varphi_n\rangle = E_n^*|\varphi_n\rangle$. 通过计算 Zak 相 $\mathcal{Z}$，可以辨别体系的拓扑相区. 图 3 给出了 $\delta = 0.3$ 时随 γ 和 λ 变化的拓扑相图. 图中绿色对应 $\mathcal{Z} = \pi$ 的拓扑非平庸相，蓝色区域表示 $\mathcal{Z} = 0$ 的拓扑平庸相. 从图中明显可以发现，在 $0 < \lambda < \delta$ 条件下，γ 和 λ 驱动体系发生拓扑相变，导致新的拓扑相出现.

3 数值结果与讨论

基于上述理论推导，接下来从动量空间和坐标空间出发，详细讨论非厄米一维自旋轨道 SSH 模型的能带结构. 为方便计算，整篇文章中取 $t = 1.0$.

图 4 给出了在动量空间中非厄米一维自旋轨道耦合 SSH 模型的能谱. 参数设置为 $\lambda = 0.3$ 和 $\delta = 0.4$，对应厄米情况下的拓扑平庸区. 从图 4 可以发现，随着 γ 的增加，体系确实经历了两次相变过程，这意味着虚势能在调控体系的拓扑属性方面扮演了重要角色. 具体来说，从图 4(a) 和图 4(b) 可以观察到，当 γ 增加至 $\sqrt{7}/5$ 时，中间两条能带在 $k = \pm\pi$ 处相遇. 在这个过程中发生了拓扑相变，与 (11) 式结果一致. 随着 γ 继续增加，闭合的能隙重新打开. 在 $\gamma = 0.8$ 时 (如图 4(c))，上下两条能带在 $k = \pm\pi$ 处相交，此时简并点能量为 $|E| = 2\lambda$. 当 $\gamma > 2\delta t$ 时，虚势能使简并点劈裂成两个与 $\mathcal{PT}$ 对称性破缺相关的奇异点，此时出现能量虚部. 当 $\gamma \approx 1.986$ 时，能隙重新在 $k = 0$ 处闭合，且闭合点的能级虚部 $\mathrm{Im}(E) = 0$ (如图 4(e)). 这说明了体系发生第二次相变，而且条件与 (12) 式一致. 随着非厄米势能的增加，两个奇异点继续移动，复能区逐渐扩展到中心. 在 $\gamma = 2t = 2.0$ 时，两个奇异点在 $k = 0$ 处合并，虚部在 $k = 0$ 处形成狄拉克锥，此时实部能量为 $E = \pm 2\delta\lambda$ (如图 4(f)). 最后，$\gamma > 2t$ 时，整个体系的能量全部为复数，不再存在奇异点. 根据以上结果，可以确定虚势能在非厄米自旋轨道耦合 SSH 模型中诱导出了丰富的能带结构.

接下来讨论开边界情况下体系的能谱结构，相关参数取 $\lambda = 0.3$. 根据厄米情况的结论知道，当 $\delta \in [-1.0, -0.3]$ 时，存在四重简并零能，而在 $\delta \in [-0.3, 0.3]$ 时表现为二重简并零能，剩下区域 $\delta \in [0.3, 1]$ 为拓扑平庸区.

图 5 给出的是在 $N_{\mathrm{c}} = 50$ 的条件下能带的实部和虚部. 由 (11) 式和 (12) 式可知，非厄米情况下体系在 $\delta_{1(2)} = +(-)\sqrt{(\gamma^2 + 4\lambda^2)/(4t^2)}$ 和 $\delta_{3(4)} = +(-)\sqrt{(-\gamma^2 + 4t^2)/(4\lambda^2)}$ 处会发生相变. 从能量的实部和虚部图中可以发现，虚势能对于体系的拓扑非平庸和平庸相的体态和零能态具有不同的调控作用. 首先，对于拓扑平庸区而言 (厄米 $0.3<\delta<1$)，

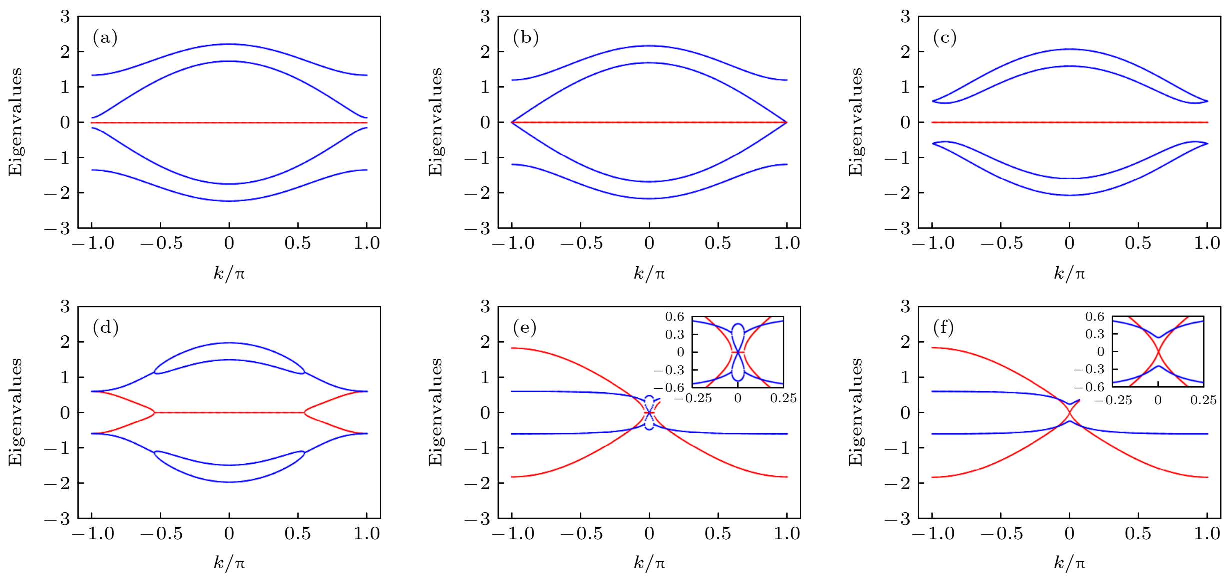


图 4 不同虚势能 γ 的能带结构 (a) $\gamma = 0.3$; (b) $\gamma = \sqrt{7}/5$; (c) $\gamma = 0.8$; (d) $\gamma = 1.0$; (e) $\gamma \approx 1.986$; (f) $\gamma = 2.0$. 对应于图 3 中标出的各个位置. 蓝线表示能量的实部，红线对应于虚部. 其他参数为 $\lambda = 0.3$ 和 $\delta = 0.4$

Fig. 4. Band structures for different values of imaginary potential γ: (a) $\gamma = 0.3$; (b) $\gamma = \sqrt{7}/5$; (c) $\gamma = 0.8$; (d) $\gamma = 1.0$; (e) $\gamma \approx 1.986$; (f) $\gamma = 2$. Correspond to the respective points in Fig. 3. The blue lines indicate the real part of energy, and the red lines correspond to the imaginary part. Other parameters are $\lambda = 0.3$ and $\delta = 0.4$.

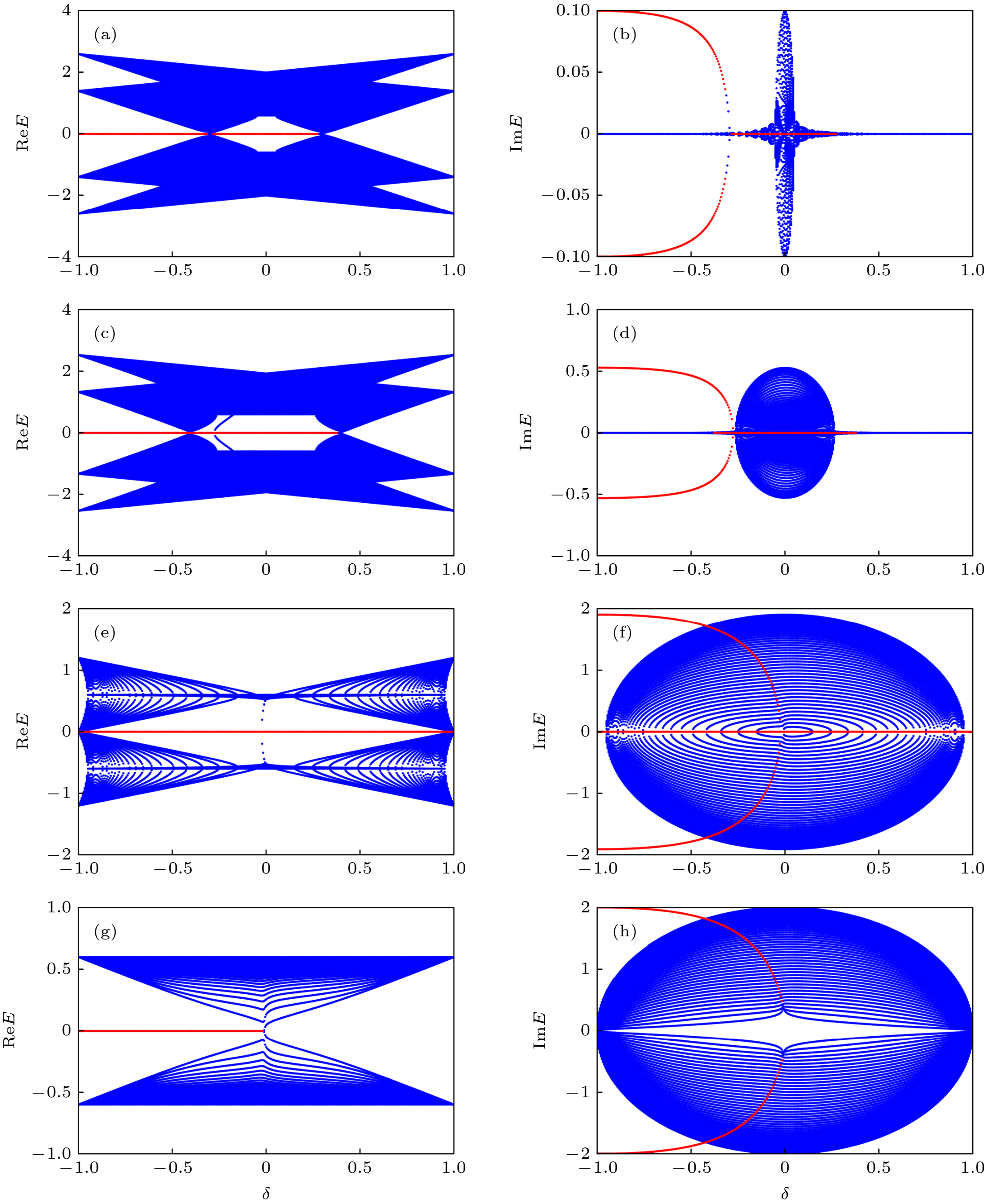


图 5 开边界情况下, 不同 δ 的能量实部和虚部 (a), (b) $\gamma = 0.1$; (c), (d) $\gamma = \sqrt{7}/5$; (e), (f) $\gamma \approx 1.908$; (g), (h) $\gamma = 2.0$. 左侧显示能量的实部, 右侧对应于能量的虚部. 其他参数设为 $\lambda = 0.3$. 图中红线代表零能态的实部和虚部

Fig. 5. Real and imaginary parts of energy for different δ: (a), (b) $\gamma = 0.1$; (c), (d) $\gamma = \sqrt{7}/5$; (e), (f) $\gamma \approx 1.908$; (g), (h) $\gamma = 2.0$. Left panel shows the real part of energy, and the right corresponds to the imaginary part of energy. Other parameters are $\lambda = 0.3$. The red lines denote the real and imaginary parts of zero energy states.

随着 γ 的增加, 由虚势能诱导的零能态区域逐渐变宽. 当 $\gamma = 1.908$ 时, 达到拓扑相变条件 δ_1, 在 $\delta \in [0.3, 1.0]$ 全区间内存在零能态 (如图 5(e)). 在整个过程中新产生的零能态无虚部出现. 而在拓扑非平庸区 (厄米 $\delta \in [-1.0, 0.3]$) 中, 虚势能对两个非平庸相的作用效果不同. 虚势能的加入导致厄米的四重简并零能态出现虚部, 即 $E = 0 \pm ib$, 说明该阶段发生 $\mathcal{PT}$ 对称破缺, 而原来二重简并的状态仍表现为纯实数的零能. γ 的增加使满足 δ_2 的拓扑相变点逐渐靠近 $\delta = -1.0$, 导致原来四重零能态区域减小, 二重零能态区域逐渐增大. 另外, 在 $\delta \in [-\delta_2, 0]$ 中出现从体态析出的孤立态. 随着 δ 趋近于 -1.0, 孤立态也逐渐进入到零能态中并伴有能量虚部, 形成具有纯实零能又有纯虚能的混合六

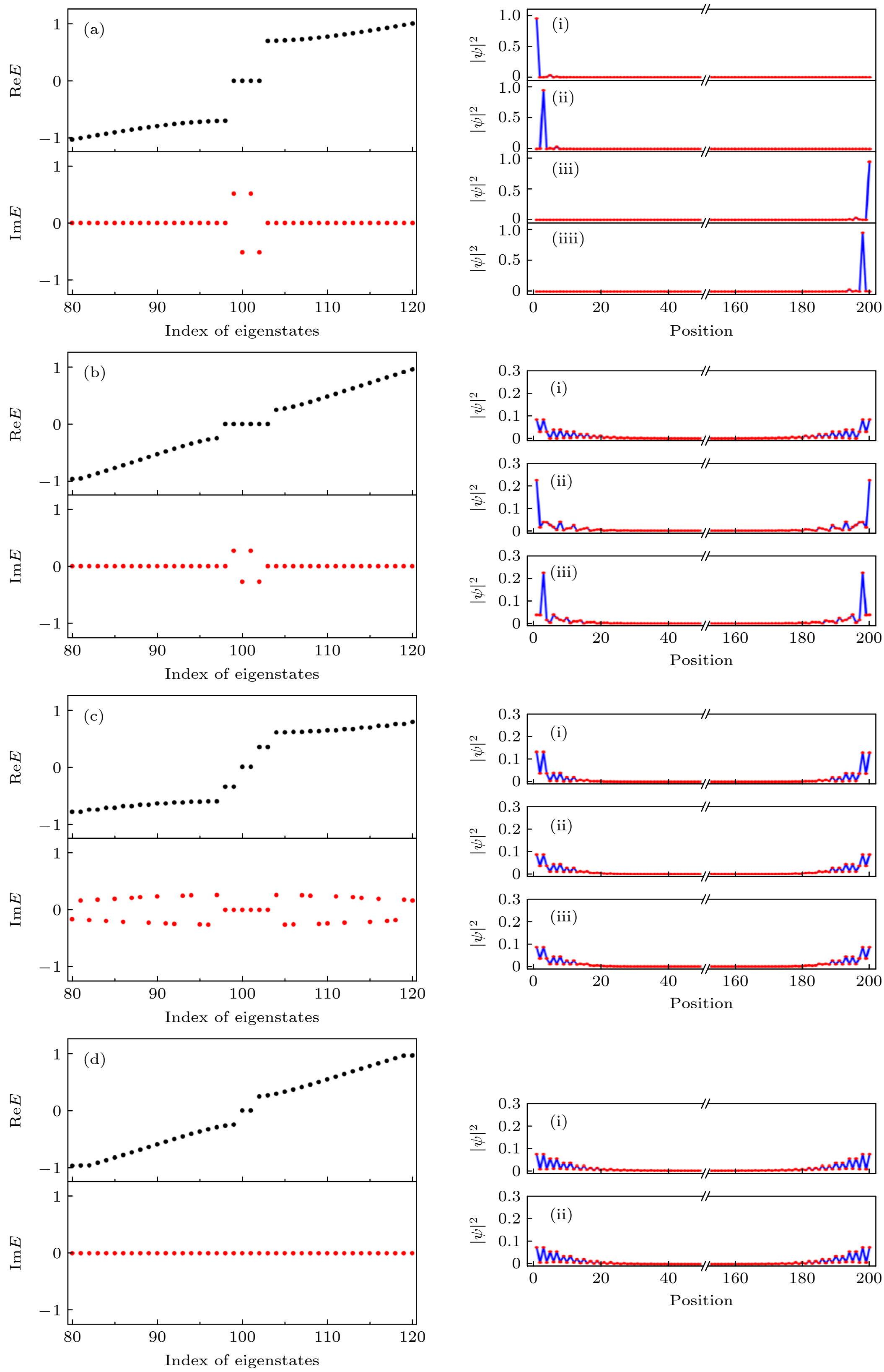


图 6 开边界条件下的能谱和概率密度谱 (a) $\delta=-0.7$; (b) $\delta=-0.32$; (c) $\delta=-0.23$; (d) $\delta=0.32$. 其他参数设为 $\lambda=0.3$ 以及 $\gamma=\sqrt{7}/5$

Fig. 6. Energy and probability density spectra with open boundary conditions: (a) $\delta=-0.7$; (b) $\delta=-0.32$; (c) $\delta=-0.23$; (d) $\delta=0.32$. The other parameters are $\lambda=0.3$ and $\gamma=\sqrt{7}/5$.

能态区域. 由于该部分的零能态不是由于能隙闭合再打开产生, 推断其不具有拓扑性. 当$\gamma = 2.0$时, 拓扑相变的破缺导致体系不再存在拓扑相, 仅存在具有虚势能的能态. 对于体态, 在$-\gamma/2 < \delta < \gamma/2$范围内体态有虚部出现, 发生$\mathcal{PT}$对称破缺, 而其余区域的体态均为实数. 以图 5(d) 为例, 当$\gamma = 2.0$时, 整个参数空间的体态都有虚部. 基于以上结果, 可以发现虚势能对于开边界条件下的的能带结构和拓扑态具有明显的调控作用.

为了更好地描述体系中零模的特征, 图 6(a)—(d) 依次给出了$\delta = -0.7$, $\delta = -0.32$, $\delta = -0.23$及$\delta = 0.32$时的本征能谱和波函数概率密度. 可以观察到, 不同区域的零能态呈现出异样的特征. 具体在于, 当$\delta = -0.7$时, 在能隙中存在四个纯虚能态. 图 6(a) 概率密度谱中 (i) 和 (iii) 对应$0 + 0.514\mathrm{i}$, (ii) 和 (iv) 对应$0 - 0.514\mathrm{i}$. 由于虚势能的加入导致本征能量变为复数, 四个态都呈现局域在晶格的左端或右端的趋势, 并且相同能量的两个态的局域性相反. 图 6(b) 对应$\delta = -0.32$的结果. 可以看出, 能隙中存在六个态, 其中四个有虚能量, 两个能量为纯实数. 从前面的结果可知, 有能量虚部的态是由体态中析出的孤立态导致的, 不具有拓扑性. 从概率密度可以发现, 两个纯实零能态 (i) 局域在系统的两端. 四个能量为$0 + 0.271\mathrm{i}$ (ii)和$0 - 0.271\mathrm{i}$ (iii)的态也呈现局域在系统两端的趋势. 为了确定从体系析出的孤立态情况, 图 6(c) 给出了$\delta = -0.23$的结果. 从能谱可以观察到, 新产生的孤立态是二重简并的, 在能隙中间形成纯实能的二重简并零能态. 从概率密度可知, 孤立态和零能态一样, 都呈现局域在系统两端的趋势. 然而, 与孤立态产生的零能模相比 (图 6(b) 中 (ii) 和 (iii)), 局域性相对较弱. 最后, 当$\gamma = 0.32$时, 虚势能的加入导致原有的拓扑平庸区的间隙中出现局域在系统两端的二重简并零能态, 如图 6(d) 所示. 综上所述, 虚势能的加入导致原来的拓扑平庸区的间隙中出现局域在系统两端的二重简并零能态, 而随着体态析出的二重简并孤立态进入到零能态中, 导致原有二重实零能态变为六个态. 这说明虚势能可以让体系的零能态呈现出更加有趣的现象.

下面讨论虚势能强度γ对不同区域能谱结构的影响, 如图 7 所示. 其中图 7(a) 和图 7(b) 对应$\delta = -0.4$, 图 7(c) 和图 7(d) 对应$\delta = -0.2$以及图 7(e) 和图 7(f)对应$\delta = 0.4$. 它们分别描述厄米体系中四重简并、二重简并的拓扑非平庸区和拓扑平庸区. 从图 7(a) 和图 7(b) 可以发现, 在$\gamma < 2\delta t = 0.8$区间内体态能量为实数, 而$\gamma > 0.8$区间内体态能量有虚部出现. 对于零能态, 只要γ不等于零, 它的本征能量立刻呈现出虚部, 导致体系一直$\mathcal{PT}$破缺. 此外, 在两次拓扑相变点$\sqrt{7}/2 < \gamma < 1.986$之间, 虚势能驱动了新的纯实零能态出现; 当$\gamma > 1.986$,

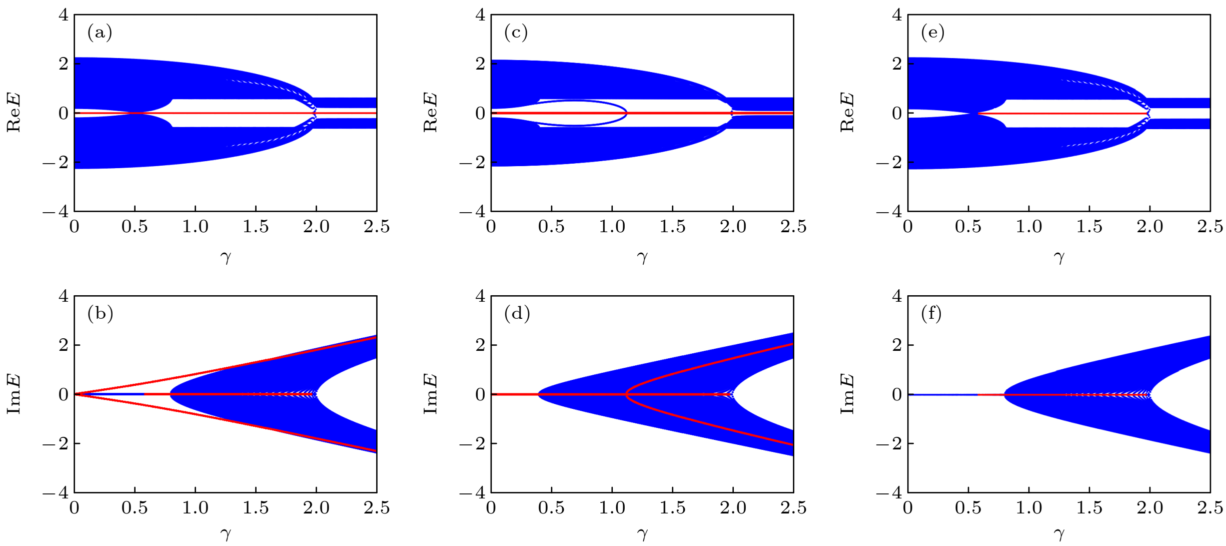


图 7 γ 变化对能量实部和虚部的影响 (a), (b) $\delta = -0.4$; (c), (d) $\delta = -0.2$; (e), (f) $\delta = 0.4$. 左侧显示能量的实部, 右侧对应于能量的虚部. 其他参数为$\lambda = 0.3$. 图中红线代表零能态的实部和虚部

Fig. 7. Real and imaginary parts of energy for different γ: (a), (b) $\delta = -0.4$; (c), (d) $\delta = -0.2$; (e), (f) $\delta = 0.4$. Left panel shows the real part of energy, and the right corresponds to the imaginary part. Other parameters are $\lambda = 0.3$. The red lines describe the real and imaginary parts of zero energy states, respectively.

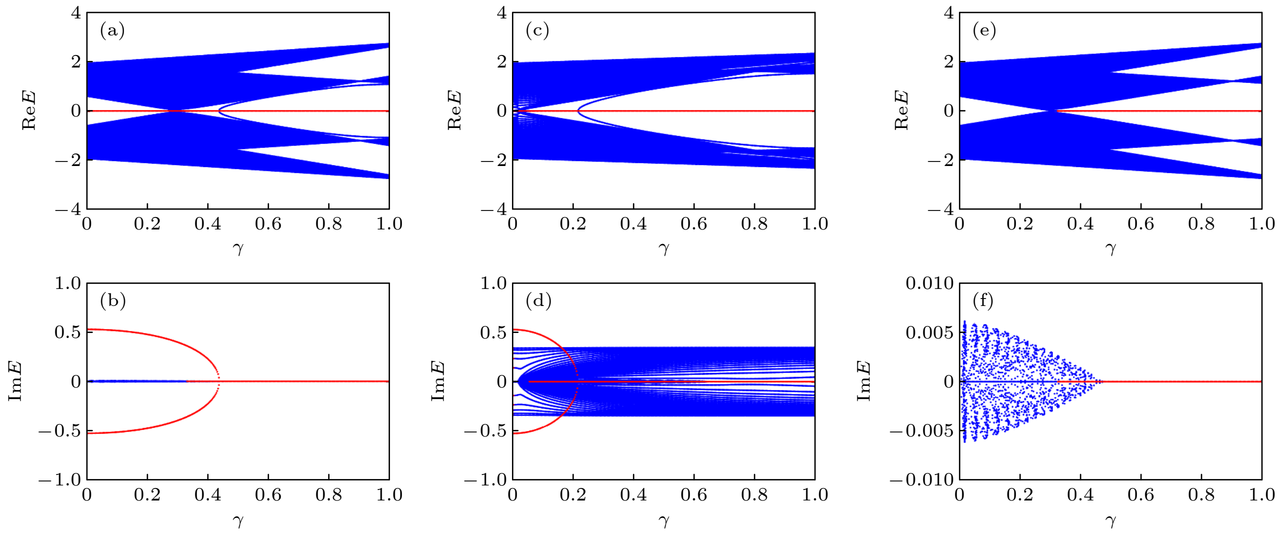


图 8 不同 λ 导致的能量实部和虚部 (a), (b) $\delta=-0.4$; (c), (d) $\delta=-0.2$; (e), (f) $\delta=0.4$. 左侧显示能量的实部, 右侧对应于能量的虚部. 参数设置为 $\gamma=\sqrt{7}/5$. 图中红线代表零能态的实部和虚部

Fig. 8. Real and imaginary parts of energy for different λ: (a), (b) $\delta=-0.4$; (c), (d) $\delta=-0.2$; (e), (f) $\delta=0.4$. Left panel shows the real part of energy, and the right corresponds to the imaginary part. Other parameters are $\gamma=\sqrt{7}/5$. The red lines describe the real and imaginary parts of zero energy states, respectively.

有虚势能驱动的拓扑相变破缺, 纯实零能态消失. 在 $\delta=-0.2$ 的情况下 (图 7(c) 和图 7(d)), 当 $\gamma<0.4$ 时, 整个体系处于严格的 $\mathcal{PT}$ 对称; 当 $\gamma>0.4$ 时, 由于体态能量存在虚部, 因此发生 $\mathcal{PT}$ 对称破缺. 除此之外, 随着 γ 的增加, 可以看到确实从体态中析出二重简并孤立态. 由于孤立态产生的零能加入, 导致在 $\gamma>1.4$ 后出现混合六能态区. 直到第二次拓扑相变之后, 体系的零能转变为四重纯虚能态. 最后, 对 $\delta=0.4$ 的情况, 如图 7(e),(f) 所示, 体系经历 $\mathcal{PT}$ 相变, 即在 $\gamma>0.8$ 处发生 $\mathcal{PT}$ 对称破缺. 此外还能发现, 在两次拓扑相变之间的间隙中出现有二重拓扑零能态. 基于以上结果可以看出, 对于厄米情况下不同类型的拓扑相, 虚势能会对零能和体态产生不同的作用效果.

最后, 图 8 给出了在 $\gamma=\sqrt{7}/5$ 情况下, λ 对不同区域能带的影响. 相关参数与图 7 一致. 可以观察到, λ 也对体系能谱具有调控效果. 如在图 8(a) 和图 8(b) 中, $\lambda=0.5$ 时体态从两带结构劈裂成四带结构, 在拓扑相变临界值 $\lambda=0.3$ 之前会出现四个纯虚能的状态. 随后出现混合六能态区域, 并且在间隙中出现了孤立态. 如果 $\delta=-0.2$, 零能态的变化趋势和图 8(a) 以及图 8(b) 类似, 不同之处在于, 在整个参数空间中体态都具有虚部, 具体结果如图 8(c) 和图 8(d) 所示. 当 $\delta=0.4$ 时, 可以观察到在虚势能的作用下, 在 $\lambda=0.3$ 处发生拓扑相变, 出现二重简并零能态. 此外, 体态也在 $\lambda=0.5$ 时发生劈裂, 并在 $0<\lambda<0.5$ 范围内纯在虚部. 这体现了自旋轨道耦合对非厄米一维自旋轨道 SSH 模型的能带和拓扑性的特殊调控作用.

4 结 论

本文在一维自旋轨道耦合 SSH 模型中, 通过施加具有增益和损耗的虚势能来构造一维 $\mathcal{PT}$ 对称体系, 着重考察了由虚势能和自旋轨道耦合驱动的拓扑相变以及零能态的特性. 结果发现, 自旋轨道耦合和虚势能的作用导致体系出现了丰富而有趣的现象. 首先, 虚势能的加入让拓扑非平庸体系发生自发 $\mathcal{PT}$ 对称破缺, 而在拓扑平庸区中可以观察到 $\mathcal{PT}$ 对称相变, 即从严格 $\mathcal{PT}$ 对称到 $\mathcal{PT}$ 对称破缺. 其次, 虚势能和自旋轨道耦合的共同作用导致非平庸区中出现不同特性、不同数量的零能态: I) 四个能量为 $0\pm ib$ 型的能态; II) 由于从体态析出的二重孤立态进入零能态中而产生的具有二重纯实零能态和四个纯虚能态的混合六能态区域; III) 具有纯实零能的二重简并零能态. 对于拓扑平庸区而言, 虚势能和自旋轨道耦合共同作用使厄米情况下的拓扑平庸区发生拓扑相变, 在平庸区的间隙中出现二重纯实数零能态, 拓宽了体系的拓扑非平庸区. 相信以上结果有助于探究 $\mathcal{PT}$ 对称非厄米

系统的拓扑相变行为, 同时为探究非厄米零能态的种类和性质提供了理论支持.

参考文献

[1] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
[2] Liang G Q, Chong Y D 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 203904
[3] Zeuner J M, Rechtsman M C, Plotnik Y, Lumer Y, Nolte S, Rudner M S, Segev M, Szameit A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 040402
[4] Malzard S, Poli C, Schomerus H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 200402
[5] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, Musslimani Z H, Rotter S, Christodoulides D N 2018 *Nat. Phys.* **14** 11
[6] Rudner M S, Levitov L S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 065703
[7] Li L H, Xu Z H, Chen S 2014 *Phys. Rev. B* **89** 085111
[8] Li C, Lin S, Zhang G, Song Z 2017 *Phys. Rev. B* **96** 125418
[9] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698
[10] Wang L, Troyer M, Dai X 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 026802
[11] Leder M, Grossert C, Sitta L, Genske M, Rosch A, Weitz M 2016 *Nat. Comm.* **7** 13112
[12] Lohse M, Schweizer C, Zilberberg O, Aidelsburger M, Bloch I 2016 *Nat. Phys.* **12** 350
[13] Shen S Q 2012 *Topological Insulators-Dirac Equation in Condensed Matters* (New York: Springer) pp83–84
[14] Zhu B G, Lü R, Chen S 2014 *Phys. Rev. A* **89** 062102
[15] Xing Y, Qi L, Cao J, Wang D Y, Bai C H, Wang H F, Zhu A D, Zhang S 2017 *Phys. Rev. A* **96** 043810
[16] Yuce C 2018 *Phys. Rev. A* **97** 042118
[17] Dangel F, Wagner M, Cartarius H, Main J, Wunner G 2018 *Phys. Rev. A* **98** 013628
[18] Zhang K L, Wang P, Zhang G, Song Z 2018 *Phys. Rev. A* **98** 022128
[19] Lieu S 2018 *Phys. Rev. B* **97** 045106
[20] Jin J, Wang P, Song Z 2017 *Sci. Rep.* **7** 5903
[21] Li X S, Li Z Z, Zhang L L, Gong W J 2020 *J. Phys.: Condens. Matter* **32** 165401
[22] Kawabata K, Ashida Y, Katsura H, Ueda M 2018 *Phys. Rev. B* **98** 085116
[23] Klett M, Cartarius H, Dast D, Main J, Wunner G 2017 *Phys. Rev. A* **95** 053626
[24] Jin L 2017 *Phys. Rev. A* **96** 032103
[25] Zhang L L, Li J R, Zhang D, Xu T T, C ui, W B, Gong W J 2022 *Res. Phys.* **34** 105274
[26] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, Morandotti R, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902
[27] Lin Z, Ramezani H, Eichelkraut T, Kottos T, Cao H, Christodoulides D N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 213901
[28] Zhen B, Hsu C W, Igarashi Y C, Lu L, Kaminer I, Pick A, Chua S L, Joannopoulos J D, Soljačić M 2015 *Nature* **525** 354
[29] Fleury R, Sounas D, Alù A 2015 *Nat. Commun.* **6** 5905
[30] Schindler L, Li A, Zheng C M, Ellis F M, Kottos T 2011 *Phys. Rev. A* **84** 040101
[31] Lin Z, Schindler J, Ellis F M, Kottos T 2012 *Phys. Rev. A* **85** 050101
[32] Liu Y, Han Y Z, Liu C S 2022 *Optik* **255** 168727
[33] Han Y Z, Jiang H, Chen S, Liu C S 2019 *Phys. E: Low - Dimens. Syst. Nanostruct.* **110** 68
[34] Xue H B, Duan Z L, Chen B, Chen J B, Xing L L 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 087301 (in Chinese) [薛海斌, 段志磊, 陈彬, 陈建宾, 邢丽丽 2021 物理学报 **70** 087301]
[35] Kawabata K, Shiozaki K, Ueda M, Sato M 2019 *Phys. Rev. X* **9** 041015
[36] Altland A, Zirnbauer M R 1997 *Phys. Rev. B* **55** 1142
[37] Wu H C, Jin L, Song Z 2021 *Phys. Rev. B* **103** 235110
[38] Takata K, Notomi M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 213902

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 71, No. 17 (2022) 177302

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Topological properties of the one-dimensional $\mathcal{PT}$-symmetric non-Hermitian spin-orbit-coupled Su-Schrieffer-Heeger model*

Li Jia-Rui Wang Zi-An Xu Tong-Tong†
Zhang Lian-Lian Gong Wei-Jiang

(*College of Sciences, Northeastern University, Shenyang* 110819, *China*)

(Received 24 April 2022; revised manuscript received 31 May 2022)

Abstract

The topological property and the energy property of one-dimensional non-Hermitian spin-orbit-coupled Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model are investigated theoretically, by introducing spin-dependent imaginary potentials with gain and loss effects. It is found that the imaginary potential leads the imaginary energy spectra to appera in the topologically nontrivial region of this system, and the $\mathcal{PT}$ phase transition to happen in the topologically trivial region. In addition, the imaginary potential energy and spin-orbit coupling work together to make the topological phase transition occur in the topologically trivial region, and the topological non-trivial region becomes wider. The energy spectrum results show that the imaginary potential energy and the spin-orbit coupling can obviously control the zero-energy states of the system, which mainly lies in the presence of four zero-energy states with four different localities and numbers. This shows the special adjustment effect of imaginary potential energy and spin-orbit coupling on the energy band structure of the system. It is believed that these results are helpful in understanding the topological phase transition behavior of $\mathcal{PT}$-symmetric non-Hermitian system.

Keywords: $\mathcal{PT}$ symmetry, topological phase transition, Su-Schrieffer-Heeger lattice, spin-orbit coupling

PACS: 03.65.Vf, 73.22.Gk, 71.70.Ej, 73.20.At **DOI:** 10.7498/aps.71.20220796

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11905027), the Liaoning Revitalization Talents Program, China (Grant No. XLYC1907033), and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. N2002005).

† Corresponding author. E-mail: xutttina2015@163.com

物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 71, No. 24 (2022) 247802

专题: 非厄米物理前沿

非厄密电磁超表面研究进展

范辉颖 罗杰†

(苏州大学物理科学与技术学院, 苏州 215006)

(2022 年 8 月 29 日收到; 2022 年 10 月 6 日收到修改稿)

电磁超表面是一类由单层或多层亚波长人工微结构组成的平面电磁材料, 可以在亚波长尺度下实现对电磁波偏振、振幅和相位的有效调控. 然而, 将电磁波限制在深亚波长尺度的代价通常是大的损耗, 如辐射损耗、欧姆损耗. 有趣的是, 非厄米物理提供了一种将损耗这一不利因素转变为超表面设计中一个新自由度的新方法, 为扩展超表面功能提供了新方向. 近些年, 非厄米电磁超表面上的一些非常规物理效应引起了研究人员的广泛关注. 本文从完美吸收、奇异点与表面波三个方面对非厄米电磁超表面研究进行了综述, 并对该领域面临的挑战和发展前景进行了展望.

关键词: 超表面, 非厄米物理, 完美吸收, 奇异点

PACS: 78.67.Pt, 41.20.Jb, 42.25.Ja **DOI:** 10.7498/aps.71.20221706

1 引 言

根据经典电动力学理论可知, 材料的电磁特性取决于介电常数、磁导率和电导率这三个宏观参数, 它们共同决定了电磁波与材料的相互作用. 由于天然物质的电磁参数范围非常有限, 大大限制了它们对电磁波的操控能力. 因此, 为了获得具有近乎任意电磁参数的材料来实现对电磁波更大自由度的操控, 电磁超材料[1–3]的概念于 20 世纪末被提出, 并兴起于 21 世纪初. 电磁超材料是一种由具有特定电磁响应的亚波长微结构单元所组成, 且具有天然物质所不存在的电磁特性的人工微结构材料.

电磁超表面[4–30]可以看作是电磁超材料的二维平面形式, 由单层或多层亚波长人工微结构单元按照特定功能需要排列构成. 通过设计微结构单元的几何结构和组分, 可以在亚波长尺度下实现对电磁波偏振、振幅和相位的有效调控[4–30]. 与三维超材料相比, 超表面拥有厚度薄、损耗低、易于加工制备和集成等优点, 其巨大的应用潜力受到全世界研究人员的广泛关注. 近些年, 研究人员相继提出了梯度超表面[31–35]、编码超表面[11,36,37]、可重构超表面[12,13]、非线性超表面[14–17]、惠更斯超表面[20,21,38]、布儒斯特超表面[39–41]等不同类型的电磁超表面, 它们在超构透镜[30,42–46]、全息成像[47–49]、高效表面波耦合器[33,34,50]、偏振转换器[51,52]、涡旋光束发生器[31,53]、隐形斗篷[54–56]等应用方面显示了巨大的潜力和优势. 然而, 电磁超表面的损耗 (如辐射损耗、欧姆损耗) 是不可避免的, 尤其是将电磁波限制在深亚波长尺度的代价通常是大的损耗[57,58]. 在电磁超表面的设计与应用中, 损耗往往被看作是一个不利因素, 其降低了超表面的工作效率[18], 因此, 通常会通过采用电介质材料等方法将损耗降到最低[27–29].

有趣的是, 随着近些年非厄米物理的发展, 研究人员意识到可以将损耗这一不利因素转变为电磁超表面设计中的一个新自由度, 从而为扩展超表面功能和实现非常规物理效应提供了新方向. 广义来讲, 所有与环境交换能量的开放系统都是非厄米系统, 其物理量可用非厄米算符描述. 非厄米系统

† 通信作者. E-mail: luojie@suda.edu.cn

通常拥有复本征值和非正交本征态, 同时会表现出特殊的简并点——两个或更多的本征值及相应的本征态同时简并, 称为奇异点 (exceptional point, EP)[59–61].

在光学/电磁材料中, 折射率虚部反映电磁能量的增益和损耗, 通过改变材料的结构和组分, 可以轻易实现对增益/损耗的有效操控, 因此, 光学/电磁系统已成为非厄米物理研究的重要平台[62–74]. 这不仅对理解和拓展开放量子系统的基本问题具有重要的类比研究意义, 也为人工结构材料领域的发展开辟一条新路径, 带来了更丰富的物理效应和现象, 包括微型激光[64,75–79]、相干完美吸收-激光器[80–83]、单向无反射[65,84–86]、奇异环与复狄拉克点[69,87,88]、无线能量传输[89–91]、高阶奇异点与超灵敏传感[70,92–98]等.

近些年, 研究人员将非厄米物理与电磁超表面相结合, 提出了非厄米电磁超表面[72–74,99–104] (图 1). 早期非厄米电磁超表面的研究沿袭了非厄米电磁系统研究的基本思路, 在平面内构建耦合结构单元, 并通过等效非厄米哈密顿量来描述其电磁特性[105]. 随着近些年非厄米电磁理论的不断发展, “非厄米”已经逐步演变为“损耗或/和增益”的代名词[106,107]. 在很多情况下, 非厄米电磁系统泛指存在损耗或/和增益的电磁系统. 鉴于此, 同时为了区别于传统电磁超表面, 可以对非厄米电磁超表面作出广泛的一般定义, 即包含损耗或/和增益, 且拥有由损耗或/和增益诱导的显著电磁特性的电磁超表面.

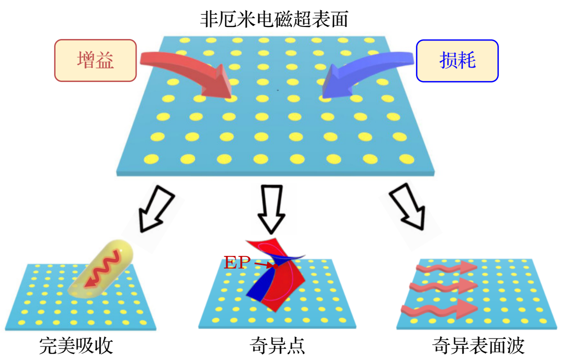


图 1 非厄米电磁超表面示意图

Fig. 1. Illustration of non-Hermitian electromagnetic metasurfaces.

非厄米电磁超表面为非厄米物理的研究提供一类全新的二维平台, 而传统电磁超表面中损耗这一不利因素则借助非厄米理论转变为设计中的一个新自由度, 由此产生了传统电磁超表面中不存在的非常规物理效应, 包括完美吸收[99–104]、奇异点下的奇异物理特性 (如单向无反射、偏振控制、衍射控制、超灵敏传感等)[72–74]、奇异表面波[108–110]等. 非厄米物理为有效利用电磁超表面中增益和损耗, 并扩展其功能提供了新的方法, 把超表面的设计进一步扩展到复介电常数和磁导率的整个空间, 为新型电磁器件的设计提供了新思路.

本文全面地综述了非厄米电磁超表面的理论与应用. 首先介绍了谐振型与非谐振型非厄米电磁超表面在电磁波完美吸收上的应用. 然后, 介绍了耦合模型和散射模型的非厄米电磁超表面中奇异点的基本理论, 以及由此产生的单向无反射、偏振控制、超灵敏传感、相位操控等重要应用. 此外, 还讨论了非厄米电磁超表面上的奇异表面波, 包括自准直表面波和线波. 最后, 对该领域面临的挑战和发展前景进行了总结与展望.

2 非厄米电磁超表面的完美吸收

有效利用损耗最重要的例子是电磁超表面完美吸收体[99–103]. 关于电磁波吸收的研究一直都是电磁领域的研究热点, 其无论在工程应用还是在国防军事中都是至关重要的. 在众多电磁波吸收中, 电磁超表面吸收体因具有厚度薄、体积小、结构简单、吸收率高等诸多优点, 可广泛应用于电磁隐身、电磁屏蔽、热成像、热发射器、传感器等领域. 本节主要介绍非厄米电磁超表面在电磁波完美吸收上的应用, 根据原理的不同, 分为谐振型与非谐振型两种类型进行讨论, 相比于前者, 后者具有超大吸收带宽等优势.

2.1 谐振型完美吸波超表面

通常情况下, 吸收材料的阻抗无法与空气阻抗直接匹配, 因而在吸收电磁波的同时也在反射电磁波. 由此可见, 要获得完美吸波超表面的关键是实现超表面与空气的阻抗匹配. 阻抗匹配可以使得入射波无反射地进入到超表面中, 并通过超表面中的欧姆损耗来耗散掉入射电磁波的能量. 在宏观上, 超表面表现为复数的等效电磁参数 (相对介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$, 相对磁导率 μ_{eff}), 且满足下面的阻抗匹配关系:

$$Z_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_{\mathrm{eff}}}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{eff}}}} = Z_0, \tag{1}$$

其中 Z_{eff} 和 Z_0 分别为超表面的等效波阻抗和自由空间中波阻抗; ε_0 和 μ_0 分别为真空介电常数和磁导率. 根据 (1) 式, 阻抗匹配要求 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}=\mu_{\mathrm{eff}}$.

基于阻抗匹配这一思路, Landy 等[111] 在 2008 年首次提出了完美吸波超表面. 他们设计了三层结构来实现对 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$ 和 μ_{eff} 的独立调控 (图 2(a) 左图), 顶层为金属开口谐振环结构, 提供了电谐振响应, 而磁谐振响应则是中间介质层中的磁场通过激发顶层开口谐振环的中心金属条与底层金属线中的反平行电流获得的. 通过调控结构的几何参数, 在 11.65 GHz 处实现了 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}=\mu_{\mathrm{eff}}$, 并获得了高达 99% 的吸收率 (图 2(a) 右图). 值得一提的是, 该完美吸波超表面的厚度不足波长的 1/30, 这项开创性工作很快激起了一系列后续研究, 工作频率领域覆盖了从微波到可见光等各个频段[112–135].

2010 年, Hao 等[112] 和 Liu 等[113] 各自独立地设计出了近红外波段的吸波超表面, 基本思想都是通过阻抗匹配最小化反射率, 同时尽可能地通过超材料损耗消除透射率. 他们都使用了上中下分别为周期性金属结构、介质层、金属衬底的三层结构模式, 区别在于上层结构的不同, Hao 等采用的是矩形阵列结构 (图 2(b)), 而 Liu 等采用的是圆盘阵列结构 (图 2(c)). 类似于 Landy 等[111] 提出的微波吸波超表面, 顶层金属结构提供了电谐振响应, 而顶层金属结构与底层金属衬底中的反平行电流提供了磁谐振响应.

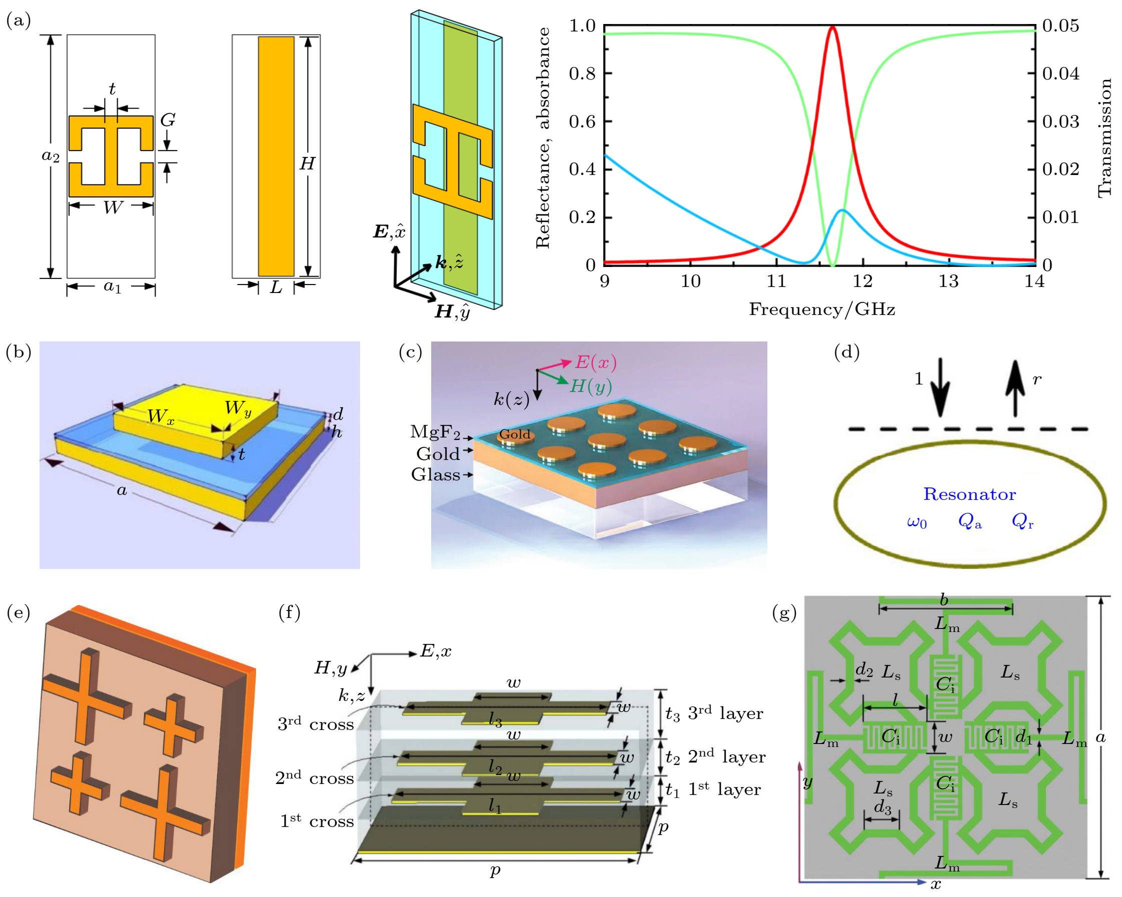


图 2 谐振型完美吸波超表面 (a) 左: 超表面单元结构示意图; 右: 吸波性能的仿真结果[111]; (b) 光学吸波超表面单元示意图, 顶部为金属矩形阵列[112]; (c) 光学吸波超表面单元示意图, 顶部为金属圆盘阵列[113]; (d) 基于耦合模理论的等效单通道谐振腔模型[114]; (e) 复合超表面结构单元, 不同尺寸的谐振单元在横向上排布[115]; (f) 复合超表面结构单元, 不同尺寸的谐振单元在纵向上排布[116]; (g) 拥有三个谐振频点的分形结构单元[119]

Fig. 2. Resonant absorbing metasurfaces. (a) Left: Illustration of the metasurface unit cell; Right: Simulated absorption spectrum[111]. (b) An optical absorbing metasurface unit cell with an array of metallic disks on the top[112]. (c) An optical absorbing metasurface unit cell with an array of rectangular metallic particles on the top[113]. (d) The equivalent single-port resonator model based on coupled mode theory[114]. (e) Composite metasurface unit cell consisting of horizontally arranged resonators of different sizes[115]. (f) Composite metasurface unit cell consisting of vertically arranged resonators of different sizes[116]. (g) Fractal unit cell exhibiting three resonant frequencies[119].

根据耦合模理论, 这样三层结构的超表面还可以等效看作是一个与外部光波耦合的单通道谐振腔 (图 2(d))[114], 其反射系数为

$$r=-1+\frac{2/\tau_{\mathrm{r}}}{-\mathrm{i}\left(\omega-\omega_{0}\right)+1/\tau_{\mathrm{a}}+1/\tau_{\mathrm{r}}}, \tag{2}$$

其中 ω 为入射光角频率; ω_0 为超表面的共振角频率; τ_{a} 和 τ_{r} 分别是由欧姆损耗和辐射损耗引起的共振态寿命. 无量纲参数 $Q_{\mathrm{a}}=\omega_0\tau_{\mathrm{a}}/2$ 和 $Q_{\mathrm{r}}=\omega_0\tau_{\mathrm{r}}/2$ 分别描述系统的吸收和辐射质量因子, 它们依赖于超表面单元的结构形状与几何参数. 由 (2) 式可得, 当 $\omega=\omega_0$ 时, 反射系数完全由 Q_{a} 和 Q_{r} 决定. 通过调节顶层金属结构的参数以及中间介质层的厚度, 可以使得 $Q_{\mathrm{a}}=Q_{\mathrm{r}}$, 此时, $r=0$. 由于金属衬底消除了透射通道, 零反射系数意味着 100% 吸收. 这一理论模型对完美吸波超表面的设计具有重要的指导意义.

然而, 谐振的本性决定了超表面有限的吸收带宽, 这大大地限制了吸波超表面的应用范围. 为了扩展吸收带宽, 研究人员提出了利用多个或者多层工作在相邻频点的复合谐振单元[115–117], 以及拥有不同谐振频点的单个结构单元[118–120] 的方法. 例如, Liu 等[115] 在每个结构单元中横向排布了不同尺寸的谐振器来产生多个共振吸收频率 (图 2(e)). Ye 等[116] 则在纵向上放置了三层不同尺寸的谐振结构, 并使这三个结构对应的三个吸收频率足够接近, 从而形成宽带吸收 (图 2(f)). Xu 等[119] 设计了分形结构单元 (图 2(g)), 利用分形结构的自相似性巧妙构建了多个局域谐振回路, 实现了 S, C 和 X 波段同时工作的三频吸波超表面, 三个工作频段内的吸收率均大于 90%, 且对极化和入射角不敏感. 除此以外, 研究人员还尝试采用了色散调制[121]、梯度结构[122,123]、无序结构[124,125] 等方法来进一步扩展超表面的吸收带宽. 总的来讲, 这些结构都是通过不同频点的电磁共振结构的组合来实现宽频的吸收, 虽然可以获得较好的吸收效果, 但是尺寸大小的控制, 以及结构单元的复杂制作工艺都为宽频吸波超表面的设计与实际应用带来了挑战.

2.2 非谐振型超宽频完美吸波超表面

尽管通过以上方法可以在一定程度上扩展电磁超表面的吸收带宽, 但始终还是受限于其谐振本性. 为了彻底克服谐振导致的有限吸收带宽这一问题, 2021 年 Luo 等[39] 首次提出了一种非谐振的吸波超表面, 即布儒斯特超表面, 其由一介质平板及置于其中的倾斜金属薄膜阵列构成 (图 3(a) 左图). 在理论上, 布儒斯特超表面可以在从准静场到光频的超宽频段内实现无反射的完美吸收. 这一超宽频特性源于其背后的物理机制, 即反常布儒斯特效应[39], 这是将经典布儒斯特效应、光学互易原理以及各向异性介质中丰富的参数自由度 (各向异性介电常数、光轴倾斜角) 结合起来获得的新物理效应.

基本原理为横磁偏振的电磁波从左侧以介质的布儒斯特角入射, 如果介质中倾斜金属薄膜平行于介质中的折射波 (介质中电场垂直于金属薄膜), 金属薄膜将不会影响电磁波的传播 (图 3(a) 中图), 此时, 将出现因布儒斯特效应引起的超宽频无反射现象. 进一步地, 由光学互易原理可知, 当入射方向翻转到右侧, 且保持入射角大小不变时, 其反射特性将保持不变[136]. 这意味着, 右侧入射的电磁波也将产生超宽频无反射. 有趣的是, 此时介质中的电场方向不再垂直于金属薄膜, 平行于金属薄膜的电场分量将会引起表面电流, 从而造成入射电磁波的损耗, 最终实现超宽频的无反射吸收. 这一吸收材料上的超宽频无反射现象被称为反常布儒斯特效应[39].

不同于传统吸波超表面利用电磁谐振获得阻抗匹配的方法, 布儒斯特超表面则借助非谐振的反常布儒斯特效应获得了超宽频阻抗匹配特性, 其结构更加简单, 却拥有更大的吸波带宽, 原则上可以从准静场一直到光频段. 基于这一机理, Fan 等[40] 设计了从光频到近红外频段的布儒斯特超表面, 在反常布儒斯特角 −55.6°附近, 获得了 400—1400 nm 波长范围内大于 90% 的吸收率 (图 3(a) 右图). Ma 等[41] 结合相变材料实现了从完美吸收到完美透明的超宽频动态调控. 近期, Fan 等[137] 进一步提出了基于反常广义布儒斯特效应的一类新型布儒斯特超表面, 能够在掠射下实现对电磁波的超宽频无反射吸收. 但是, 需要指出的是, 布儒斯特超表面在获得超大吸波带宽的同时产生了对入射角与偏振的依赖性. 通常情况下, 布儒斯特超表面只能对特定入射角和偏振的电磁波实现超宽频完美吸收.

另一方面, 通过改变入射电磁波的照射方式也可获得非谐振的超宽频完美吸收. 2010 年, Chong 等[138] 提出了相干完美吸收的新概念, 即通过两个及以上的相干光束同时照射到吸收体上来实现完美吸收, 该想法一经提出就引起了研究员的广泛

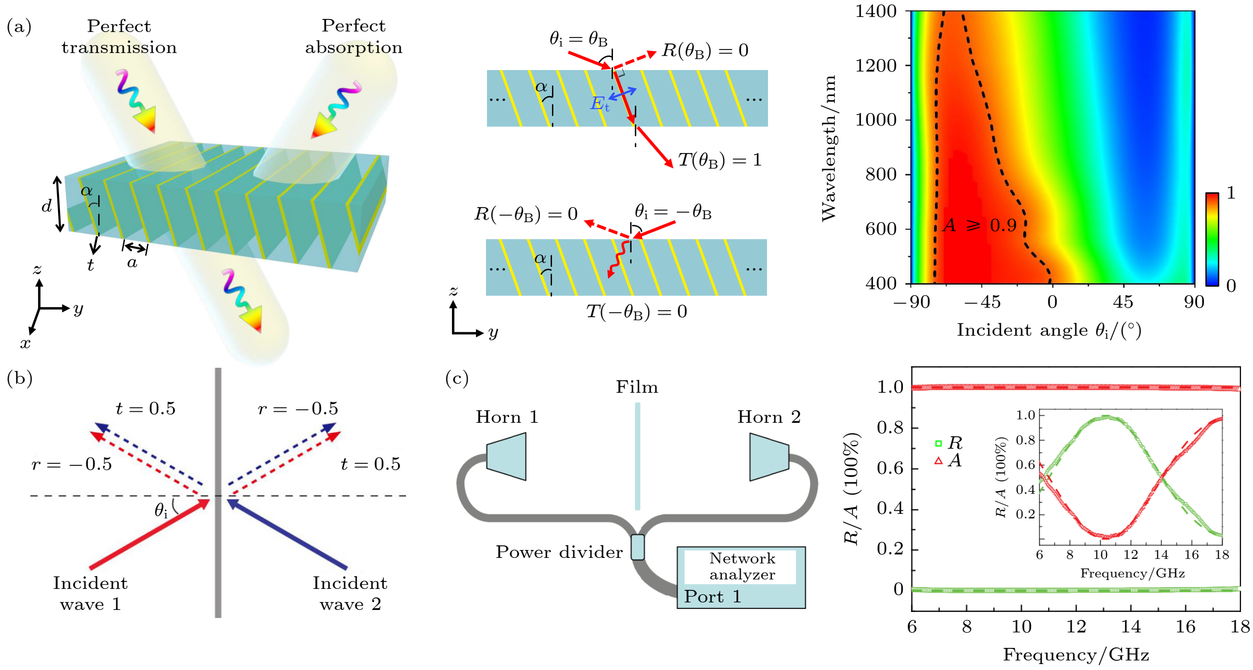


图 3 非谐振型超宽频完美吸波超表面 (a) 左: 布儒斯特超表面示意图; 中: 原理示意图; 右: 吸波性能的仿真结果[40]; (b) 超宽频相干完美吸收的原理示意图[140]; (c) 超宽频相干完美吸收的测量装置示意图, 以及实验测得的反射率和吸收率与频率的关系[139]

Fig. 3. Non-resonant ultra-broadband absorbing metasurfaces. (a) Left: Illustration of the Brewster metasurface; Middle: The underlying physics; Right: Simulated absorption spectrum[40]. (b) Illustration of ultra-broadband coherent perfect absorption[140]. (c) Illustration of the experimental setup, and measured reflectance and absorptance as the function of frequency[139].

兴趣[101,130,139–145]. 2014 年, Luo 等[130] 在理论上发现, 当电磁超表面的表面电阻 R_s 满足:

$$R_s = 0.5Z_0/\cos\theta \tag{3a}$$

或

$$R_s = 0.5Z_0\cos\theta, \tag{3b}$$

就可以实现对横电波或横磁波的超宽频完美吸收, 其中 θ 为入射角. 这是因为电磁波在该超表面上的反射系数 r 和透射系数 t 满足如下形式:

$$r = -t = -0.5, \tag{4}$$

且与入射频率无关. 此时, 左侧入射电磁波的反射波与右侧入射波在左侧的透射波干涉相消, 同样地, 右侧入射电磁波的反射波也会与左侧入射波在右侧的透射波干涉相消 (图 3(b)). 最终, 左右两侧将都没有净出射波, 所有入射波均被中间的超表面完全吸收. 在物理图像上, 相对照射的电磁波会干涉形成驻波, 此时将拥有合适表面电阻值的电磁超表面置于驻波波腹处, 即可实现对所有入射波的完美吸收[139].

2015 年, Li 等[140] 通过微波实验证实了非谐振超表面的超宽频的相干完美吸收. 实验装置为左右各一个矩形喇叭天线 (图 3(c) 左图), 它们辐射的电磁波相向垂直照射到置于中间的由导电薄膜构成的电磁超表面上, 其表面电阻为 $R_s = 180\ \Omega \approx 0.5Z_0$, 厚度约为 3 μm (约为真空中波长的万分之一), 实验结果显示在 6—18 GHz 频段内获得了近乎为 100% 的吸收率 (图 3(c) 右图), 频率范围受限于实验测量装置. 原则上, 完美吸收频段可以覆盖从准静场到微波甚至太赫兹的超宽频率范围. 近期, 这一超宽频吸收原理已经被应用于表面等离激元的相干完美吸收[141]. 值得一提的是, 通过改变不同入射波之间的相位差, 可以让吸收率在 0 到 100% 之间改变, 这为吸收率的调控提供了一个非常有效的手段. 然而, 这种特殊的多波束配置大大限制了它的实际应用场景.

3 非厄米电磁超表面中的奇异点

奇异点是非厄米系统中的特殊简并点, 系统中两个或更多的本征值及相应的本征态同时简并[62–74]. 在非厄米电磁超表面中, 研究人员发现在奇异点附近的相变会导致许多有趣的现象. 本节主要介绍耦合模型和散射模型的非厄米电磁超表面中奇异点的基本理论, 以及由此产生的单向无反射、偏振控制、超灵敏传感、相位操控等重要应用.

3.1 耦合模型及在偏振操控上的应用

根据耦合模理论[146], 由两个耦合谐振单元组成的二能级系统 (图 4(a) 左图) 的哈密顿量表示为[147–152]

$$\hat{H}=\begin{pmatrix}\omega_1-\mathrm{i}\gamma_1 & \kappa\\ \kappa & \omega_2-\mathrm{i}\gamma_2\end{pmatrix},\tag{5}$$

其中$\omega_{1,2}$是耦合谐振单元的共振频率, $\gamma_{1,2}$是增益或损耗系数, κ是耦合谐振单元之间的耦合强度. 该哈密顿量的两个本征值为

$$\omega_{\pm}=\omega_{\text{ave}}-\mathrm{i}\gamma_{\text{ave}}\pm\sqrt{\kappa^2+(\omega_{\text{diff}}+\mathrm{i}\gamma_{\text{diff}})^2},\tag{6}$$

其中 $\omega_{\text{ave}}=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$, $\gamma_{\text{ave}}=\dfrac{\gamma_1+\gamma_2}{2}$, $\omega_{\text{diff}}=\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}$, $\gamma_{\text{diff}}=\dfrac{\gamma_1-\gamma_2}{2}$.

根据 (6) 式可知, 当$\kappa^2+(\omega_{\text{diff}}+\mathrm{i}\gamma_{\text{diff}})^2=0$时, 两本征值相同, 即$\omega_+=\omega_-=\omega_{\text{ave}}-\mathrm{i}\gamma_{\text{ave}}$, 此时, 它们对应的本征态也相同, 即 $(\omega_{\text{diff}}-\mathrm{i}\gamma_{\text{diff}})/2\kappa,1)^{\mathrm{T}}$. 这表明, 系统中的两个本征值及相应的本征态同时简并, 这样的特殊简并点即为奇异点.

特殊地, 当 $\omega_1=\omega_2=\omega_0$且 $\gamma_1=-\gamma_2=\gamma$时, 系统具有宇称-时间反演 (parity-time, PT) 对称性[62–74], 此时哈密顿量满足$PT\hat{H}=\hat{H}PT$, 这里的P和T分别为宇称变换和时间反演变换. PT 对称这一概念最早是由 Bender 和 Boettcher[153] 在研究非厄米量子系统时提出的, 他们发现如果势能为复数, 且满足$V(\boldsymbol{r})=V^*(-\boldsymbol{r})$, 非厄米系统也可能拥有实数的能谱. 在电磁系统中, 复势函数对应于复电磁参数, 例如, 复折射率满足$n(\boldsymbol{r})=n^*(-\boldsymbol{r})$, 折射率的实部偶对称, 在耦合系统中表现为相同的共振频率, 即$\omega_1=\omega_2=\omega_0$; 折射率的虚部奇对称, 表明系统拥有平衡的电磁增益和损耗, 即$\gamma_1=-\gamma_2=\gamma$. 这样的 PT 对称系统的哈密顿量可以写作:

$$\hat{H}_{\text{PT}}=\begin{pmatrix}\omega_0-\mathrm{i}\gamma & \kappa\\ \kappa & \omega_0+\mathrm{i}\gamma\end{pmatrix}.\tag{7}$$

其本征值为

$$\omega_{\pm}=\omega_0\pm\sqrt{\kappa^2-\gamma^2}.\tag{8}$$

根据 (8) 式可知, 奇异点的条件为$\kappa=\pm\gamma$, 此时, 两个本征值及相应的本征态同时简并 (图 4(a) 右图). 当$|\gamma|<|\kappa|$时, 本征值为两个不同的实数, 系统处于 PT 对称相, 系统中电场在增益和损耗谐振单元中呈对称分布, 总电磁能量守恒; 而当$|\gamma|>|\kappa|$时, 本征值为两个不同的复数, 系统处于 PT 破缺相, 电场呈不对称分布, 电场主要集中在增益或损耗谐振单元中, 系统中的电磁能量呈指数增长或衰减.

在实际应用中, 要精准控制材料增益系数, 并使其与损耗系数平衡是非常困难的. 有趣的是, 即使在无源的纯损耗系统中, 通过将哈密顿量作如下分解:

$$\hat{H}=\hat{H}_{\text{PT}}+\hat{H}_{\text{L}}=\begin{pmatrix}\omega_0-\mathrm{i}\gamma_{\text{diff}} & \kappa\\ \kappa & \omega_0+\mathrm{i}\gamma_{\text{diff}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\gamma_{\text{ave}} & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\gamma_{\text{ave}}\end{pmatrix},\tag{9}$$

也可以观察到 PT 对称相变, 以及奇异点附近的奇异物理效应. 其中$\hat{H}_{\text{PT}}$为 PT 对称哈密顿量, $\hat{H}_{\text{L}}$为不影响相变的系统衰减量. 通过这种方式创建了

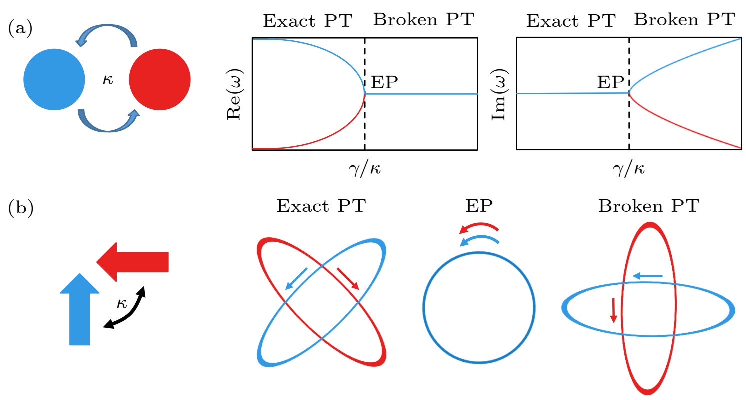


图 4 非厄米电磁超表面的耦合理论模型 (a) 左: 两个耦合谐振单元组成的二能级系统; 右: 本征值的演化; (b) 左: 两个具有正交激励方向的偶极子组成的二能级系统; 右:本征值的演化

Fig. 4. Coupling model of non-Hermitian electromagnetic metasurfaces. (a) Left: A generic two-level system consisting of two coupled resonators; Right: The evolution of its eigenvalues. (b) Left: A generic two-level system consisting of two perpendicular dipoles; Right: The evolution of its eigenvalues.

“虚拟增益”来与损耗实现平衡[86,142,154,155]. 此时, 可以借助$\hat{H}_{\rm PT}$来研究系统的PT对称相、破缺相和奇异点, 区别于严格PT对称系统的是, PT对称相和奇异点下的能量本征值因全局损耗$\hat{H}_{\rm L}$的存在而不再为实数.

图4(b)给出了另一类重要的耦合模型, 它是由两个具有正交激励方向的偶极子组成的二能级系统. 该系统的等效PT对称哈密顿量可以写为[105]

$$\hat{H}_{\rm PT}=\begin{pmatrix} -{\rm i}\dfrac{\gamma_y-\gamma_x}{2} & \kappa \\ \kappa & {\rm i}\dfrac{\gamma_y-\gamma_x}{2}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中γ_x和γ_y分别为两偶极子的损耗或增益吸收; κ为两偶极子间的耦合吸收, 其依赖于两偶极子之间的距离. 该等效PT对称哈密顿量的本征值为

$$\omega_{\pm}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\kappa^2-(\gamma_y-\gamma_x)^2}. \tag{11}$$

根据(11)式可知, 奇异点出现在$2\kappa=|\gamma_x-\gamma_y|$的条件下. 当$2\kappa>|\gamma_x-\gamma_y|$时, 系统处于等效的PT对称相, 本征极化态为$\hat{x}\pm{\rm e}^{\pm{\rm i}\theta}\hat{y}$, 对应于沿$\pm45^\circ$方向旋转且相互垂直的两个椭圆(图4(b)右图), 其中$\theta=\sin^{-1}[(\gamma_x-\gamma_y)/2\kappa]$. 而当$2\kappa<|\gamma_x-\gamma_y|$时, 系统处于破缺相, 本征极化态为$\hat{x}\mp{\rm i}{\rm e}^{\theta}\hat{y}$, 对应于沿$0^\circ$和$90^\circ$方向旋转且相互垂直的两个椭圆, 其中$\theta=\cosh^{-1}[(\gamma_x-\gamma_y)/2\kappa]$. 特殊地, 在奇异点下(即$2\kappa=|\gamma_x-\gamma_y|$), 本征值简并, 同时本征极化态简并为一圆偏振态.

基于这类耦合模型的非厄米电磁超表面为电磁波偏振和手性操控提供了新的自由度, 即损耗和增益, 也由此产生了一些有趣的现象, 如方向依赖的极化转换和涡旋光束产生[105,156–165]. 例如, 2014年, Lawrence等[105]设计了各向异性吸收的非厄米超表面, 每个结构单元由两个开口方向垂直的开口环谐振器组成(图5(a)左图), 相当于共振频率相同, 但激励方向正交的偶极子, 它们之间的耦合强度可以通过改变间距来进行有效调控. 损耗系数则是通过选用不同金属材料来改变的, 左侧开口的环谐振器的材料为银, 而上侧开口的环谐振器的材料为铅, 由于银的欧姆损耗远小于铅, 从而构建了一个各向异性吸收的非厄米超表面. 研究发现, 通过改变耦合强度, 可以直接观察到系统本征偏振态的相变. 有趣的是, 尽管该非厄米超表面不具有旋转对称性, 但在奇异点处, 两个本征极化态合并为圆极

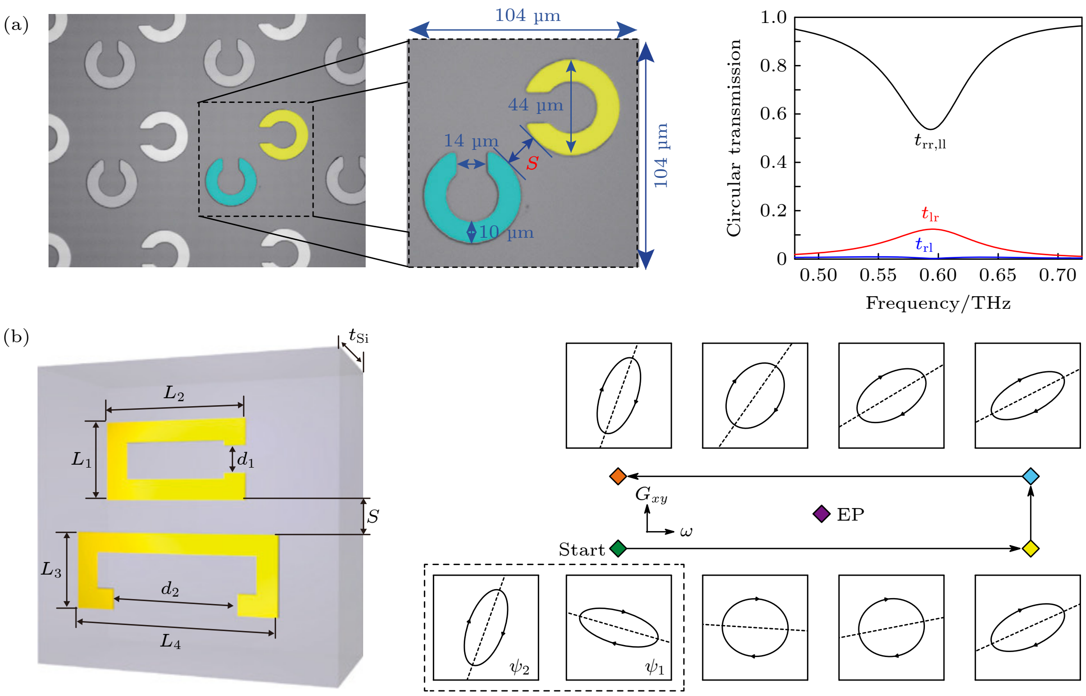


图5 非厄米电磁超表面 (a)左: 由开口方向垂直的开口环谐振器阵列构成的非厄米超表面; 右: 圆偏振入射波在超表面中的透射率[105]; (b)左: 非厄米超表面单个单元的几何结构; 右: 本征态在参数空间中围绕奇异点的演化[156]

Fig. 5. Non-Hermitian electromagnetic metasurfaces. (a) Left: A non-Hermitian metasurfaces consisting of an array of orthogonally oriented split ring resonators; Right: The transmission of circularly polarized waves on this metasurface[105]. (b) Left: Schematic of the metasurface unit cell; Right: The evolution of the eigenstates in parameter space as the EP is encircled[156].

化态, 这一特性使得非厄米超表面具有不对称的偏振转换功能 (图 5(a) 右图), 这为偏振调制提供了一种新方法.

Park 等[156] 还设计了一种具有类似结构的非厄米电磁超表面 (图 5(b)), 并在入射频率和耦合强度构成的参数空间中探索奇异点的拓扑结构. 在数学上, 奇异点对应于参数空间构成黎曼面的分叉奇点[166], 这种独特的拓扑结构, 使得围绕奇异点的一个完整环路下的本征态不会回到自身, 而是相互交换, 并积累 π 的几何相位. Park 等[156] 在实验中观察到了非厄米电磁超表面上的本征偏振态交换现象, 以及几何相位的积累, 验证了奇异点的拓扑结构.

3.2 散射模型及单向无反射效应

非厄米电磁超表面也可以通过散射模型来研究超表面与外部电磁波的相互作用. 散射模型通常用散射矩阵 $\boldsymbol{S}$ 来将入射波和出射波直接关联起来, 它可以由传输矩阵[167]、阻抗或导纳矩阵[168] 得到, 也可以与耦合模式方程[86,169] 结合. 对于一个双端口的散射模型, 其散射矩阵可表示为[86]

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} t_{\mathrm{R}} & r_{\mathrm{R}} \\ r_{\mathrm{L}} & t_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中 $r_{\mathrm{L(R)}}$ 和 $t_{\mathrm{L(R)}}$ 分别为电磁波从左 (右) 侧入射时的反射和透射系数. 在互易系统中, 有 $t_{\mathrm{R}}=t_{\mathrm{L}}=t$[136,170]. 该散射矩阵的本征值为

$$\lambda_{\pm}=t\pm\sqrt{r_{\mathrm{L}}r_{\mathrm{R}}}. \tag{13}$$

在没有吸收或增益的情况下, 散射矩阵是幺正的, 即 $\boldsymbol{S}^{+}\boldsymbol{S}=1$, 其本征值的模始终为 1, 即散射矩阵的本征值位于复空间中的单位圆上. 此时, 系统能量满足广义的能量守恒, 形式如下[171]:

$$\sqrt{R_{\mathrm{L}}R_{\mathrm{R}}}=|T-1|, \tag{14}$$

其中 $R_{\mathrm{L(R)}}\equiv\left|r_{\mathrm{L(R)}}\right|^{2}$ 和 $T\equiv|t|^{2}$ 分别为电磁波从左 (右) 侧入射时的能量反射率和透射率.

而当系统存在吸收或增益时, 散射矩阵的本征值的模通常不再为 1, 本征值将向复空间中单位圆内部或外部偏离 (图 6). 有趣的是, 研究人员发现在 PT 对称系统中, 当 $T<1$ 时, 散射矩阵本征值的模仍为 1, 且系统满足广义的能量守恒 (即 (14) 式), 此时系统处于 PT 对称相; 而当 $T>1$ 时, 散射矩阵的本征值的模不等于 1, 两个本征值将会分叉, 一支朝向单位圆内部, 一支朝向单位圆外部, 此时系统处于破缺相. 散射矩阵的本征值在单位圆上的分叉点即为奇异点, 此时, $T=1$ 且 $R_{\mathrm{L}}R_{\mathrm{R}}=0$. 由于通常只有 R_{L} 或 R_{R} 等于零, 因此这一奇异点效应也称为单向无反射效应或单向透明[84].

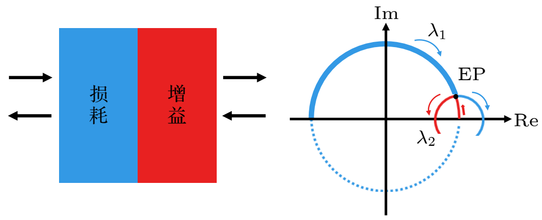


图 6 (a) 非厄米电磁超表面的散射理论模型; (b): 本征值的演化

Fig. 6. (a) Scattering model of non-Hermitian electromagnetic metasurfaces; (b) the evolution of eigenvalues.

这一奇异点诱导的单向无反射效应也在非厄米电磁超表面系统中被观察到, 并进一步激发了更多有趣的物理效应与应用[168,172–181]. 例如, 2014 年, Fleury 等[172] 提出了由一对平衡损耗和增益的超表面相对放置构成的 PT 对称超表面系统, 超表面的损耗或增益通过表面导纳来描述 (图 7(a) 左图). 研究发现, 通过改变超表面的表面导纳, 可以获得 PT 相变奇异点, 在该奇异点下, 当电磁波从损耗超表面一侧入射时, 将出现单向无反射负折射现象 (图 7(a) 右图). 基于这一奇异点, 研究人员还进一步提出了单向无反射成像[173](图 7(b))、单向隐身[174]、隐态传输[175] 等有趣的物理现象和重要的应用.

值得一提的是, 2018 年, Luo 等[176] 指出这一 PT 对称超表面系统存在两类物理机理完全不同的奇异点, 而先前的研究都是基于第一类奇异点, 在该奇异点下, 损耗超表面以完美吸收体的形式工作, 而增益超表面以激光器的形式工作. 而 Luo 等[176] 研究发现, 该系统还存在另一类奇异点, 在这类奇异点下, 损耗和增益超表面都以减反膜的形式工作. 有趣的是, 当超表面之间介质的介电常数趋于零时, 即中间介质为零折射率介质[182–185], 两类奇异点趋于合并 (图 7(c) 左图). 更加有趣的是, 合并的奇异点诱导了一种新的物理效应, 即对杂质免疫的完美传输. 研究发现, 在合并的奇异点下, 当电磁波从损耗超表面一侧入射时, 无论中间的零折射率介质中包含何种杂质, 电磁波的透射率始终为

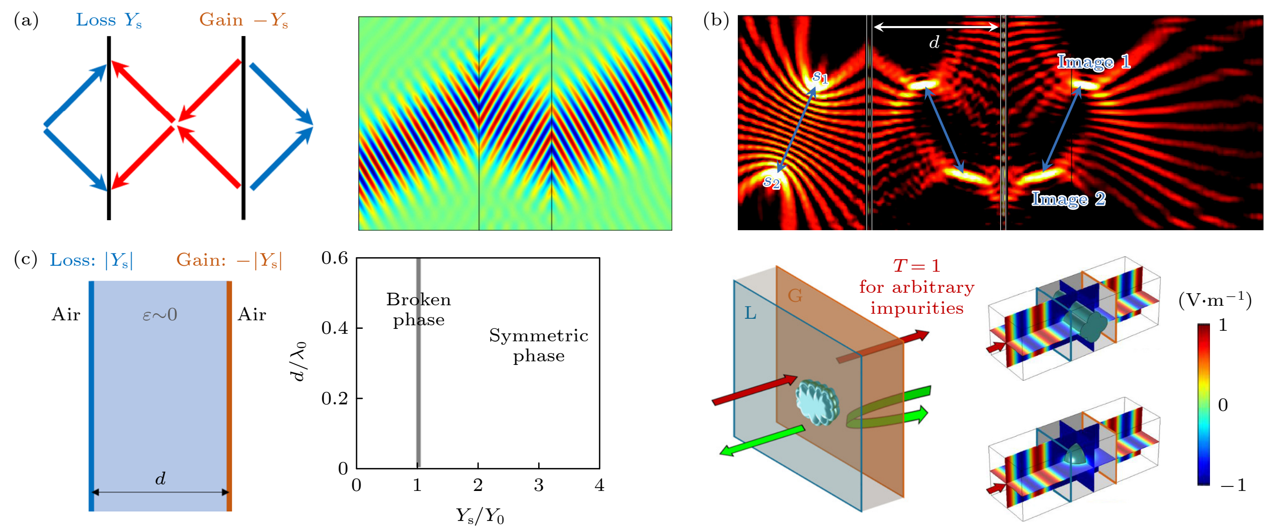


图 7 PT 对称电磁超表面中的奇异点及单向无反射特性 (a) 左: 由一对平衡损耗与增益的超表面构成的 PT 对称超表面系统示意图; 右: 奇异点诱导的单向无反射负折射现象[172]; (b) 奇异点诱导的单向无反射成像[173]; (c) 左: 当超表面之间为零折射率介质时, 系统中的两类相变奇异点趋于合并; 右: 合并奇异点诱导的对杂质免疫的完美传输效应[176]

Fig. 7. EPs and unidirectional reflectionless properties of PT-symmetric electromagnetic metasurfaces. (a) Left: Illustration of a PT-symmetric metasurface system composed of a pair of metasurfaces with balanced loss and gain; Right: EP-induced unidirectional reflectionless negative refraction[172]. (b) EP-induced unidirectional reflectionless imaging[173]. (c) Left: Two classes of EPs tend to coalesce into one when the material between the two metasurface is an zero-index medium; Right: Coalesced EP-induced impurity-immune perfect wave transmission[176].

100% (图 7(c) 右图). 这完全消除了 Liberal 等[186]在零折射率介质中发现的“光子掺杂”效应, 也打破了杂质免疫现象只能发生在拓扑绝缘体的表面或边界处这一限制, 对体波实现了对杂质免疫的完美传输.

在实际设计中, 吸收超表面的实现相对容易, 在可见光和红外波段可以采用铬、钛、钨等大损耗金属[40], 在太赫兹和微波频段可以采用氧化铟锡[39]、石墨烯[187]等导电材料; 另一方面, 增益超表面的设计, 及其增益系数的精准操控则面临很大的挑战, 在可见光和红外波段可以将半导体增益介质[76]融入到超表面中, 或者对超表面进行染料或离子掺杂[81], 在太赫兹和微波频段可以尝试借助光泵激发的石墨烯[168,188]、增益线圈[89]和补偿电路[189]等方法. 然而, 这些方法所能提供的增益系数往往较小, 难以满足 PT 对称超表面的设计需求, 因此, 目前这一研究方向的实验进展较小.

需要指出的是, 散射模型中的奇异点的出现并不需要严格的 PT 对称性, 事实上, 无源的纯损耗超表面系统也会出现奇异点, 以及奇异点诱导的单向无反射等效应[167,190–197]. 例如, Gu 等[167]设计了一种纯损耗的等效 PT 对称超表面, 由上下两个嵌入在介质中的银环谐振器组成, 通过改变入射角并调整上下银环谐振器的间距, 也可以观察到奇异点诱导的单向无反射现象. Dong 等[190]设计了一种在横向上损耗单元与无损耗单元周期排布构成的非厄米超表面, 实现了奇异点诱导的单向逆向反射 (retro-reflection) 效应. 这些工作为充分有效利用电磁超表面中的损耗, 扩展超表面的功能提供了新思路.

3.3 超表面中奇异点在传感和相位操控方面的应用

非厄米电磁超表面中的奇异点拥有丰富的物理性质及多种应用, 除了上述的偏振操控与奇异点诱导的单向无反射等特性, 还在其他方面具有重要的实际应用价值, 如超灵敏传感[159,198–200]和相位操控[163,201–204].

在奇异点附近工作的传感器拥有很高的灵敏度, 这源于奇异点的重要特性, 即, 一个 N 阶奇异点通常对应于一个开 N 次方的频率分裂量 $\Delta\omega \propto \varepsilon^{1/N}$, 其中, ε 为参数空间中奇异点附近的微扰[92,98]. 一个二能级系统的奇异点是二阶的, 即 $N=2$, 对于系统中极小的微扰, 频率分裂量要大于传统的基于线性关系的传感器的频率分裂量 (图 8(a))[94], 因此, 奇异点传感的灵敏度更高. 这一高灵敏特性在

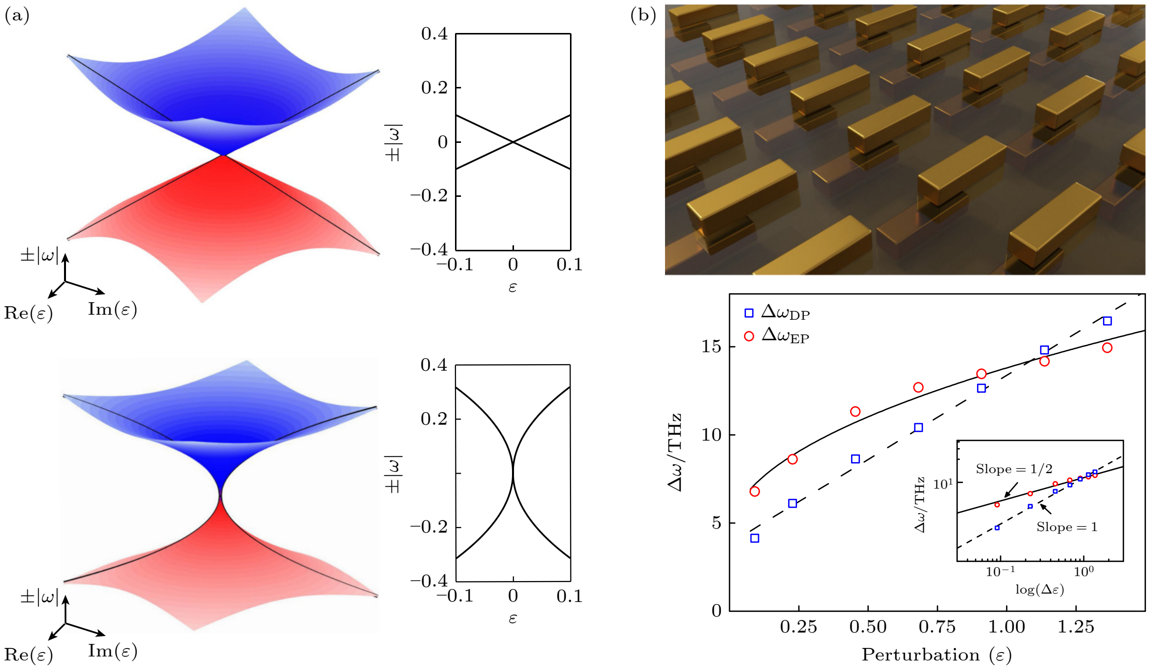


图 8 非厄米超表面中奇异点在传感方面的应用 (a) 左: Diabolic 点 (DP) 的频率分裂量与微扰强度 ε 的关系; 右: 奇异点的频率分裂量与微扰强度 ε 的关系[94]; (b) 左: 由上下两层在横向上错位的金条阵列组成的等离激元超表面; 右: 在奇异点下频率分裂量随微扰强度 ε 的变化[198]

Fig. 8. Sensing applications of EPs in non-Hermitian metasurfaces. (a) Left: Frequency splitting of DP versus the perturbation strength ε; Right: Frequency splitting of EP versus the perturbation strength ε[94]. (b) Left: A plasmonic metasurface composed of two layers of gold bars with a lateral shift; Right: The frequency splitting of EP versus the perturbation strength ε [198].

Park 等[198]设计的等离激元超表面中获得了验证 (图 8(b)). 他们设计的超表面由上下两层在横向上错位的金条阵列组成, 实验证明在奇异点下折射率灵敏度可达 4821 nm · RIU^{-1}. 奇异点传感的灵敏度随着阶数 N 的增大可以进一步提高, 高阶奇异点可以在由多组元结构构建的多能级系统中获得[93]. 采用高阶奇异点可进一步放大微扰并实现更高的灵敏度增强, 有望在折射率传感、温度传感、纳米颗粒检测、光学陀螺仪和生物化学传感等方面展现重要的应用价值.

非厄米电磁超表面中奇异点的另一个重要的应用是相位操控. 前文中提到, 由于奇异点在参数空间中独特的拓扑结构, 围绕奇异点的一个完整环路, 本征态不会回到自身, 而是相互交换, 并积累 π 的几何相位, 这一非厄米系统中奇异点的拓扑特性吸引了研究人员的广泛关注[163,201–204]. Leung 等[163]设计了一种等离激元超表面 (图 9(a) 左图), 可用于产生涡旋光束, 上层金膜刻蚀了相互垂直的狭槽, 底层有与狭槽相同形状的金条, 形成巴比涅互补图样[205]. 超表面的每一个单元都从超表面的中心区域开始沿着径向排布 (图 9(a) 右图), 这样的排布方式用以产生涡旋光束. 研究发现, 通过改变相互垂直的狭槽/金条之间的距离可调控耦合强度, 在合适的间距下, 奇异点就会出现, 并伴随着交叉极化透射率为零. 调节间距穿越奇异点时, 远

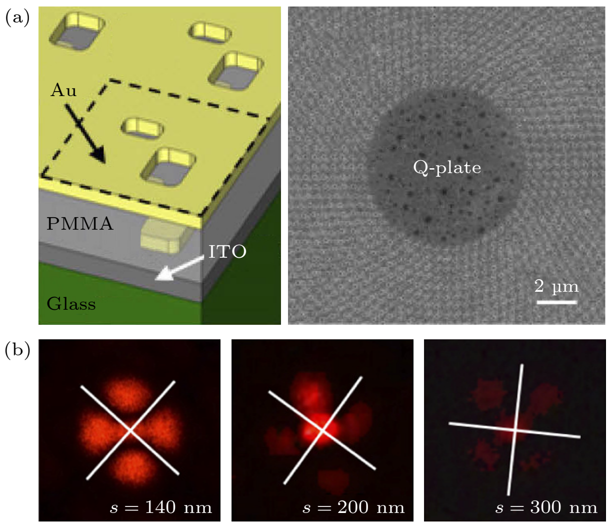


图 9 非厄米超表面中奇异点在相位操控上的应用 (a) 左: 超表面结构单元示意图; 右: 实验样品照片图[163]; (b) 实验测得的交叉偏振衍射图样随垂直狭槽的间距的变化[163]

Fig. 9. Phase control with EPs in non-Hermitian metasurfaces. (a) Left: illustration of the metasurface unit cell. Right: The photograph of the fricated sample[163]. (b) Experimental cross-polarization diffraction patterns for different separation distance between orthogonal slots[163].

场的轨道将会旋转 45° (图 9(b)). 另外, Song 等[202]将围绕奇异点产生的拓扑保护的相位差与 Pancharatnam-Berry 相位结合, 实现了圆偏振依赖的超表面全息. 这些研究为偏振控制、结构光和全息等方面的新一代可调谐光子器件的设计提供了新思路.

4 非厄米电磁超表面上的奇异表面波

表面波是一种局域在界面附近的电磁模式, 其波矢要比同频率自由空间中的电磁波的波矢大, 这一特性使得表面波在高度集成的光子器件的设计上有着非常广泛的应用[206]. 其中最重要的是表面等离激元波, 它是自由电子与电磁场相互作用产生的沿金属表面传播的电子疏密波[206]. 在平直的金属表面上, 表面等离激元波可沿平面上各个方向传播. 为了控制表面等离激元波的传播方向, Correas-Serrano 等[108]提出了一种各向异性的等离激元超表面, 该超表面拥有极端各向异性的电导率. 这一非厄米超表面上的表面波的色散关系可推导为

$$2k_0^2Z_0\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)-2Z_0\left(k_x^2\sigma_{xx}+k_y^2\sigma_{yy}\right)+k_0k_z\left(4+Z_0^2\sigma_{xx}\sigma_{yy}\right)=0, \tag{15}$$

其中 σ_{xx} 和 σ_{yy} 分别为超表面的电导率张量在 x 和 y 方向上的分量; Z_0 为真空阻抗; k_0 为真空中波数; k_x, k_y 和 k_z 分别为表面波的波矢在 x, y 和 z 方向上的分量. 当 y 方向上的电导率趋于无穷大时, 即 $\mathrm{Re}\left(\sigma_{yy}\right)\to\pm\infty$ 或 $\mathrm{Im}\left(\sigma_{yy}\right)\to\pm\infty$, (15) 式可以化简为

$$k_y=k_0\sqrt{1+\frac{k_zZ_0\sigma_{xx}}{2k_0}}. \tag{16}$$

(16) 式表明, 在这种极端情况下, 在 k_x-k_y 平面上的等频率曲线为一条沿着 k_x 方向的直线. 由于能流方向由等频率曲线的法线方向决定[207,208], 因此超表面上的表面等离激元波将沿 y 方向传播, 自准直效应即由此产生 (图 10(a) 左图). Correas-Serrano 等[108]进一步采用石墨烯提出了一种各向异性等离激元超表面的设计方案 (图 10(a) 右图). 然而, 在这样的纯损耗超表面上, 表面波的能量会随着传播距离的增大而很快被耗散掉. 受 PT 对称系统中增益对损耗补偿作用的启发, Coppolaro 等[110]提出了增益和损耗周期性调制的 PT 对称超表面, 获得了沿传播方向不衰减的自准直表面等离激元波.

另一方面, 线波 (line wave) 作为一种新型表面波, 被发现于电感型和电容型这两个互补超表面的边界[209–211]. 不同于传统的沿着整个平面传播的

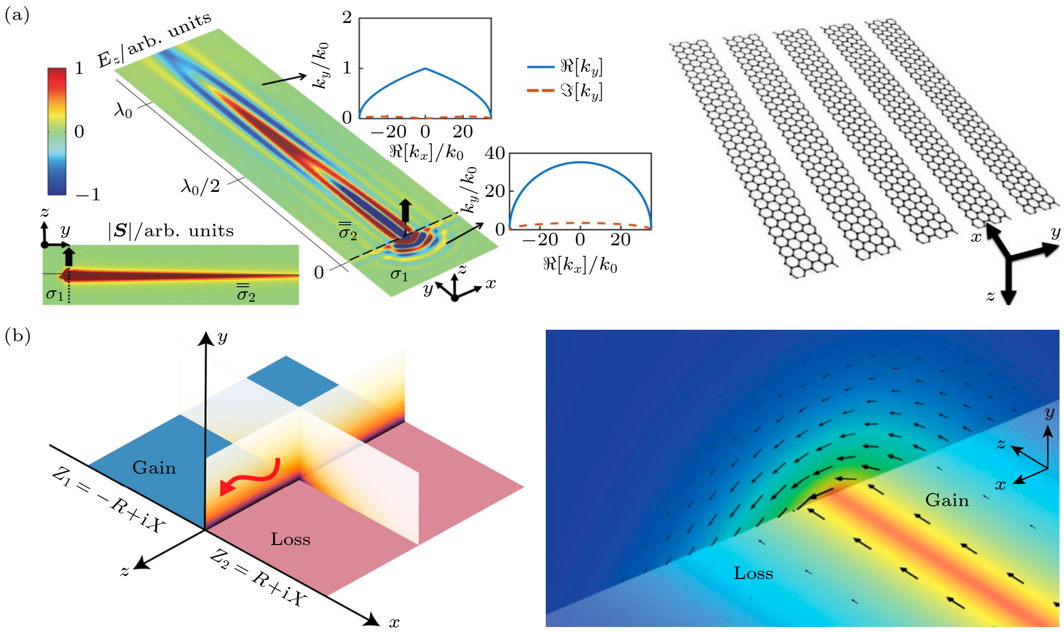


图 10 非厄米电磁超表面上的奇异表面波 (a) 左: 各向异性非厄米超表面上的自准直表面等离激元波; 右: 基于的石墨烯的设计的各向异性非厄米超表面[108]; (b) 左: PT 对称超表面上的线波示意图; 右: 线波的仿真结果[109]

Fig. 10. Extraordinary surface waves on non-Hermitian electromagnetic metasurfaces. (a) Left: Surface plasmon canalization on an anisotropic non-Hermitian metasurface; Right: The graphene-based anisotropic non-Hermitian metasurface[108]. (b) Left: Line waves on a PT-symmetric metasurface. Right: The simulation results[109].

二维表面波, 线波是一种一维的表面波, 具有强的场局域、大的工作带宽、方向依赖的偏振、鲁棒性强等特点. 有趣的是, Moccia 等[109] 研究发现, 如果引入 PT 对称性, 线波可以存在于单一的电感型或电容型超表面上. 他们设计了由两个拥有相同电感值 (或电容值), 但电阻值互为相反数的 PT 对称超表面 (图 10(b) 左图), 其阻抗 Z 在空间中的分布满足如下关系式:

$$Z(x)=\begin{cases}Z_1=-R+\mathrm{i}X, & x<0,\\ Z_2=R+\mathrm{i}X, & x>0.\end{cases} \tag{17}$$

这里正电阻 ($R>0$) 表示损耗, 负电阻 ($R<0$) 表示增益. 正参数 X ($X>0$) 表示容抗, 负参数 X ($X<0$) 表示电抗. 从 (17) 式可以看出, 阻抗 Z 在空间中的分布满足 PT 对称条件, 即

$$Z(x)=-Z^*(-x). \tag{18}$$

在这样的 PT 对称超表面上, 线波会出现在增益和损耗超表面的边界处, 它不会沿传播方向衰减, 这是因为从增益超表面一侧流出的电磁能量恰好补偿了损耗超表面一侧耗散的能量, 这样的单向能流使得线波具有特定的手性 (图 10(b) 右图), 如果采用圆偏振源激发, 可以产生波源手性依赖的单向传播线波. 该项研究为新型光子集成与光学传感器的设计提供了新思路.

5 总结和展望

本文综述了近年来非厄米电磁超表面的发展现状. 在传统超表面中, 损耗往往是需要极力避免的不利因素, 而非厄米物理可以将超表面中的损耗转变为一个新的设计自由度, 为实现非常规物理效应, 以及扩展超表面功能提供新方向. 目前, 非厄米电磁超表面已经在完美吸收、奇异点、奇异表面波等方面展现出了独特的物理性质与应用. 未来, 更多的新物理效应与新应用仍需进一步探索. 例如, 非厄米拓扑物理[212]、赝厄米物理[213] 等新物理效应, 以及片上集成非厄米超表面器件、可重构非厄米超表面器件、非厄米超构光栅[214–216] 等新应用与新器件. 需要指出的是, 非厄米电磁超表面的发展对实验制造技术提出了更大的挑战. 例如, 作为非厄米超表面的重要应用之一, 超灵敏传感, 它的实现需要极高的制造精度[217]. 另一方面, PT 对称超表面要求严格平衡的增益与损耗, 但要控制电磁材料的增益系数, 并使其与损耗系数严格平衡是非常困难的, 严格 PT 对称电磁超表面的相关理论的实验验证进展缓慢.

简而言之, 非厄米物理与电磁超表面的结合形成了新的交叉研究领域, 这不仅为研究基础物理现象提供了一个新的平台, 同时也有望在诸如电磁隐身、电磁屏蔽、超灵敏传感、光束操控和新型光子集成等方面展现重要的实际应用价值.

参考文献

[1] Cui T J, Smith D R, Liu R 2010 *Metamaterials: Theory, Design, and Applications* (New York: Springer)

[2] Engheta N, Ziolkowski R W 2006 *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations* (Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.)

[3] Cai W, Shalaev V 2009 *Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications* (New York: Springer)

[4] Kildishev A V, Boltasseva A, Shalaev V M 2013 *Science* **339** 1232009

[5] Yu N, Capasso F 2014 *Nat. Mater.* **13** 139

[6] Meinzer N, Barnes W L, Hooper I R 2014 *Nat. Photonics* **8** 889

[7] Glybovski S B, Tretyakov S A, Belov P A, Kivshar Y S, Simovski C R 2016 *Phys. Rep.* **634** 1

[8] Xu Y, Fu Y, Chen H 2016 *Nat. Rev. Mater.* **1** 16067

[9] Zhang L, Mei S, Huang K, Qiu C W 2016 *Adv. Opt. Mater.* **4** 818

[10] Chen H, Taylor A J, Yu N 2016 *Rep. Prog. Phys.* **79** 076401

[11] Liu S, Cui T J 2017 *Adv. Opt. Mater.* **2017** 1700624

[12] Turpin J P, Bossard J A, Morgan K L, Werner D H, Werner P L 2014 *Int. J. Antennas Propag.* **2014** 1

[13] Walia S, Shah C M, Gutruf P, Nili H, Chowdhury D R, Withayachumnankul W, Bhaskaran M, Sriram S 2015 *Appl. Phys. Rev.* **2** 011303

[14] Minovich A E, Miroshnichenko A E, Bykov A Y, Murzina T V, Neshev D N, Kivshar Y S 2015 *Laser Photonics Rev.* **9** 195

[15] Li G, Zhang S, Zentgraf T 2017 *Nat. Rev. Mater.* **2** 17010

[16] Deng J H, Li G X 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 147803 (in Chinese) [邓俊鸿, 李贵新 2017 物理学报 **66** 147803]

[17] Krasnok A, Tymchenko M, Alù A 2018 *Mater. Today* **21** 8

[18] He Q, Sun S, Xiao S, Zhou L 2018 *Adv. Opt. Mater.* **2018** 1800415

[19] Neshev D, Aharonovich I 2018 *Light Sci. Appl.* **7** 58

[20] Chen M, Kim M, Wong A M H, Eleftheriades G V 2018 *Nanophotonics* **7** 1207

[21] Ataloglou V G, Chen M, Kim M, Eleftheriades G V 2021 *IEEE J. Microwaves* **1** 374

[22] Sun S, He Q, Hao J, Xiao S, Zhou L 2019 *Adv. Opt. Photonics* **11** 380

[23] Shaltout A M, Shalaev V M, Brongersma M L 2019 *Science* **364** eaat3100

[24] Cui T, Bai B, Sun H B 2019 *Adv. Funct. Mater.* **29** 1806692

[25] Zang X, Yao B, Chen L, Xie J, Guo X V, Balakin A P, Shkurinov A, Zhuang S 2021 *Light:Advanced Manufacturing* **2** 1

[26] Du K, Barkaoui H, Zhang X, Jin L, Song Q, Xiao S 2022

Nanophotonics **11** 1761

[27] Genevet P, Capasso F, Aieta F, Khorasaninejad M, Devlin R 2017 *Optica* **4** 139

[28] Kamali S M, Arbabi E, Arbabi A, Faraon A 2018 *Nanophotonics* **7** 1041

[29] Hu Y, Wang X, Luo X, Ou X, Li L, Chen Y, Yang P, Wang S, Duan H 2020 *Nanophotonics* **9** 3755

[30] Fan Q B, Xu T 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 144208 (in Chinese) [范庆斌, 徐挺 2017 物理学报 **66** 144208]

[31] Yu N, Genevet P, Kats M A, Aieta F, Tetienne J, Capasso F, Gaburro Z 2011 *Science* **334** 333

[32] Ni X, Emani N K, Kildishev A V, Boltasseva A, Shalaev V M 2012 *Science* **335** 427

[33] Sun S, He Q, Xiao S, Xu Q, Li X, Zhou L 2012 *Nat. Mater.* **11** 426

[34] Sun S, Yang K, Wang C, Juan T, Chen W T, Liao C Y, He Q, Xiao S, Kung W, Guo G, Zhou L, Tsai D P 2012 *Nano Lett.* **12** 6223

[35] Xu Y, Gu C, Hou B, Lai Y, Li J, Chen H 2013 *Nat. Commun.* **4** 2561

[36] Cui T J, Qi M Q, Wan X, Zhao J, Cheng Q 2014 *Light Sci. Appl.* **3** e218

[37] Liu S, Cui T J, Xu Q, Bao D, Du L, Wan X, Tang W X, Ouyang C, Zhou X Y, Yuan H, Ma H F, Jiang W X, Han J, Zhang W, Cheng Q 2016 *Light Sci. Appl.* **5** e16076

[38] Pfeiffer C, Grbic A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 197401

[39] Luo J, Chu H, Peng R, Wang M, Li J, Lai Y 2021 *Light Sci. Appl.* **10** 89

[40] Fan H, Li J, Lai Y, Luo J 2021 *Phys. Rev. Appl.* **16** 044064

[41] Ma Z, Fan H, Zhou H, Huang M, Luo J 2021 *Opt. Express* **29** 39186

[42] Aieta F, Kats M A, Genevet P, Capasso F 2015 *Science* **347** 1342

[43] Khorasaninejad M, Chen W T, Devlin R C, Oh J, Zhu A Y, Capasso F 2016 *Science* **352** 1190

[44] Wang S, Wu P C, Su V, Lai Y, Chu C H, Chen J, Lu S, Chen J, Xu B, Kuan C, Li T, Zhu S, Tsai D P 2017 *Nat. Commun.* **8** 187

[45] Wang S, Wu P C, Su V, Lai Y, Chen M, Kuo H Y, Chen B H, Chen Y H, Huang T, Wang J, Lin R, Kuan C, Li T, Wang Z, Zhu S, Tsai D P 2018 *Nat. Nanotechnol.* **13** 227

[46] Li L, Liu Z, Ren X, Wang S, Su V, Chen M, Chu C H, Kuo H Y, Liu B, Zang W, Guo G, Zhang L, Wang Z, Zhu S, Tsai D P 2020 *Science* **368** 1487

[47] Ni X, Kildishev A V, Shalaev V M 2013 *Nat. Commun.* **4** 2807

[48] Huang L, Chen X, Muhlenbernd H, Zhang H, Chen S, Bai B, Tan Q, Jin G, Cheah K, Qiu C, Li J, Zentgraf T, Zhang S 2013 *Nat. Commun.* **4** 2808

[49] Zheng G, Mühlenbernd H, Kenney M, Li G, Zentgraf T, Zhang S 2015 *Nat. Nanotechnol.* **10** 308

[50] Sun W, He Q, Sun S, Zhou L 2016 *Light Sci. Appl.* **5** e16003

[51] Zhang X, Tian Z, Yue W, Gu J, Zhang S, Han J, Zhang W 2013 *Adv. Mater.* **25** 4567

[52] Jiang S, Xiong X, Hu Y, Hu Y, Ma G, Peng R, Sun C, Wang M 2014 *Phys. Rev. X* **4** 021026

[53] Pu M, Li X, Ma X, Wang Y, Zhao Z, Wang C, Hu C, Gao P, Huang C, Ren H, Li X, Qin F, Yang J, Gu M, Hong M, Luo X 2015 *Sci. Adv.* **1** e1500396

[54] Ni X, Wong Z J, Mrejen M, Wang Y, Zhang X 2015 *Science* **349** 1310

[55] Chu H, Li Q, Liu B, Luo J, Sun S, Hang Z H, Zhou L, Lai Y 2018 *Light Sci. Appl.* **7** 50

[56] Qian C, Zheng B, Shen Y, Jing L, Li E, Shen L, Chen H 2020 *Nat. Photonics* **14** 383

[57] Boltasseva A, Atwater H A 2011 *Science* **331** 290

[58] Baranov D G, Zuev D A, Lepeshov S I, Kotov O V, Krasnok A E, Evlyukhin A B, Chichkov B N 2017 *Optica* **4** 814

[59] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947

[60] Ashida Y, Gong Z, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249

[61] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 1

[62] Feng L, ElGanainy R, Ge L 2017 *Nat. Photonics* **11** 752

[63] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, Musslimani Z H, Rotter S, Christodoulides D N 2017 *Nat. Phys.* **14** 11

[64] Qi B, Chen H Z, Ge L, Berini P, Ma R M 2019 *Adv. Opt. Mater.* **7** 1900694

[65] Huang Y, Shen Y, Min C, Fan S, Veronis G 2017 *Nanophotonics* **6** 977

[66] Miri M, Alù A 2019 *Science* **363** eaar7709

[67] Özdemir S K, Rotter S, Nori F, Yang L 2019 *Nat. Mater.* **18** 783

[68] Gupta S K, Zou Y, Zhu X Y, Lu M H, Zhang L J, Liu X P, Chen Y F 2019 *Adv. Mater.* **2019** 1903639

[69] Luo J, Lai Y 2022 *Front. Phys.* **10** 845624

[70] Wiersig J 2020 *Photonics Res.* **8** 1457

[71] Krasnok A, Nefedkin N, Alu A 2021 *IEEE Antennas Propag. Mag.* **63** 110

[72] Li Z, Cao G, Li C, Dong S, Deng Y, Liu X, Ho J S, Qiu C 2021 *Prog. Electromagn. Res.* **171** 1

[73] Qi H X, Wang X X, Hu X Y, Q H 2020 *Infrared Laser Eng.* **49** 20201029 (in Chinese) [齐慧欣, 王晓晓, 胡小永, 龚旗煌 2020 红外与激光工程 **49** 20201029]

[74] Fan Y, Liang H, Li J, Tsai D P, Zhang S 2022 *ACS Photonics* DOI: 10.1021/acsphotonics.2 c00816

[75] Miri M A, LiKamWa P, Christodoulides D N 2012 *Opt. Lett.* **37** 764

[76] Feng L, Wong Z J, Ma R M, Wang Y, Zhang X 2014 *Science* **346** 972

[77] Brandstetter M, Liertzer M, Deutsch C, Klang P, Schöberl J, Türeci H E, Strasser G, Unterrainer K, Rotter S 2014 *Nat. Commun.* **5** 4034

[78] Hodaei H, Miri M A, Heinrich M, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2014 *Science* **346** 975

[79] Miao P, Zhang Z, Sun J, Walasik W, Longhi S, Litchinitser N M, Feng L 2016 *Science* **353** 464

[80] Longhi S 2010 *Phys. Rev. A* **82** 031801(R)

[81] Gu Z, Zhang N, Lyu Q, Li M, Xiao S, Song Q 2016 *Laser Photonics Rev.* **10** 588

[82] Wong Z J, Xu Y, Kim J, O'Brien K, Wang Y, Feng L, Zhang X 2016 *Nat. Photonics* **10** 796

[83] Bai P, Ding K, Wang G, Luo J, Zhang Z, Chan C T, Wu Y, Lai Y 2016 *Phys. Rev. A* **94** 063841

[84] Lin Z, Ramezani H, Eichelkraut T, Kottos T, Cao H, Christodoulides D N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 213901

[85] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* **488** 167

[86] Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, Lu M H, Oliveira J E, Almeida V R, Chen Y F, Scherer A 2013 *Nat. Mater.* **12** 108

[87] Zhen B, Hsu C W, Igarashi Y, Lu L, Kaminer I, Pick A, Chua S, Joannopoulos J D, Soljačić M 2015 *Nature* **525** 354

[88] Luo L, Shao Y, Li J, Fan R, Peng R, Wang M, Luo J, Lai Y 2021 *Opt. Express* **29** 14345

[89] Assawaworrarit S, Yu X, Fan S 2017 *Nature* **546** 387

[90] Song J, Yang F, Guo Z, Wu X, Zhu K, Jiang J, Sun Y, Li Y, Jiang H, Chen H 2020 *Phys. Rev. Appl.* **15** 014009

[91] Assawaworrarit S, Fan S 2020 *Nat. Electron.* **3** 273
[92] Wiersig J 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 203901
[93] Hodaei H, Hassan A U, Wittek S, Garcia-Gracia H, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2017 *Nature* **548** 187
[94] Chen W, Ozdemir S K, Zhao G, Wiersig J, Yang L 2017 *Nature* **548** 192
[95] Wang S, Hou B, Lu W, Chen Y, Zhang Z Q, Chan C T 2019 *Nat. Commun.* **10** 832
[96] Lai Y, Lu Y, Suh M, Yuan Z, Vahala K 2019 *Nature* **576** 65
[97] Dong Z, Li Z, Yang F, Qiu C, Ho J S 2019 *Nat. Electron.* **2** 335
[98] De Carlo M, De Leonardis F, Soref R A, Colatorti L, Passaro V M N 2022 *Sensors-Basel* **22** 3977
[99] Cui Y, He Y, Jin Y, Ding F, Yang L, Ye Y, Zhong S, Lin Y, He S 2014 *Laser Photonics Rev.* **8** 495
[100] Ra'Di Y, Simovski C R, Tretyakov S A 2015 *Phys. Rev. Appl.* **3** 037001
[101] Baranov D G, Krasnok A, Shegai T, Alù A, Chong Y 2017 *Nat. Rev. Mater.* **2** 17064
[102] Alaee R, Albooyeh M, Rockstuhl C 2017 *J. Phys. D* **50** 503002
[103] Feng L, Huo P, Liang Y, Xu T 2019 *Adv. Mater.* **2019** 1903787
[104] Wang Y Z, Xu H X, Wang C H, Wang M Z, Wang S J 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 134101 (in Chinese) [王彦朝, 许河秀, 王朝辉, 王明照, 王少杰 2020 物理学报 **69** 134101]
[105] Lawrence M, Xu N, Zhang X, Cong L, Han J, Zhang W, Zhang S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 093901
[106] Krešić I, Makris K G, Leonhardt U, Rotter S 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 183901
[107] Coppolaro M, Moccia M, Castaldi G, Engheta N, Galdi V 2020 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **117** 13921
[108] Correas-Serrano D, Alù A, Gomez-Diaz J S 2017 *Phys. Rev. B* **96** 075436
[109] Moccia M, Castaldi G, Alù A, Galdi V 2020 *ACS Photonics* **7** 2064
[110] Coppolaro M, Moccia M, Castaldi G, Alu A, Galdi V 2021 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **69** 2060
[111] Landy N, Sajuyigbe S, Mock J, Smith D, Padilla W 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 207402
[112] Hao J, Wang J, Liu X, Padilla W J, Zhou L, Qiu M 2010 *Appl. Phys. Lett.* **96** 251104
[113] Liu N, Mesch M, Weiss T, Hentschel M, Giessen H 2010 *Nano Lett.* **10** 2342
[114] Qu C, Ma S, Hao J, Qiu M, Li X, Xiao S, Miao Z, Dai N, He Q, Sun S, Zhou L 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 235503
[115] Liu X, Tyler T, Starr T, Starr A F, Jokerst N M, Padilla W J 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 045901
[116] Ye Y Q, Jin Y, He S 2010 *J. Opt. Soc. Am. B: Opt. Phys.* **27** 498
[117] Sun J, Liu L, Dong G, Zhou J 2011 *Opt. Express* **19** 21155
[118] Tao H, Bingham C M, Pilon D, Fan K, Strikwerda A C, Shrekenhamer D, Padilla W J, Zhang X, Averitt R D 2010 *J. Phys. D* **43** 225102
[119] Xu H, Wang G, Qi M, Liang J, Gong J, Xu Z 2012 *Phys. Rev. B* **86** 205104
[120] Wu P C, Papasimakis N, Tsai D P 2016 *Phys. Rev. Appl.* **6** 044019
[121] Ye D, Wang Z, Xu K, Li H, Huangfu J, Wang Z, Ran L 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 187402
[122] Cui Y, Fung K H, Xu J, Ma H, Jin Y, He S, Fang N X 2012 *Nano Lett.* **12** 1443
[123] Ding F, Jin Y, Li B, Cheng H, Mo L, He S 2014 *Laser Photonics Rev.* **8** 946
[124] Zhou L, Tan Y, Wang J, Xu W, Yuan Y, Cai W, Zhu S, Zhu J 2016 *Nat. Photonics* **10** 393
[125] Zhou L, Tan Y, Ji D, Zhu B, Zhang P, Xu J, Gan Q, Yu Z, Zhu J 2016 *Sci. Adv.* **2** e1501227
[126] Liu X, Starr T, Starr A F, Padilla W J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 207403
[127] Xiong X, Jiang S C, Hu Y H, Peng R W, Wang M 2013 *Adv. Mater.* **25** 3994
[128] Kats M A, Blanchard R, Genevet P, Capasso F 2013 *Nat. Mater.* **12** 20
[129] Dotan H, Kfir O, Sharlin E, Blank O, Gross M, Dumchin I, Ankonina G, Rothschild A 2013 *Nat. Mater.* **12** 158
[130] Luo J, Li S, Hou B, Lai Y 2014 *Phys. Rev. B* **90** 165128
[131] Wang T, Luo J, Gao L, Xu P, Lai Y 2014 *Appl. Phys. Lett.* **104** 211904
[132] Luo J, Lai Y 2019 *Opt. Express* **27** 15800
[133] Tong W, Luo J, Sun Z, Lai Y 2020 *Appl. Phys. Express* **13** 032001
[134] Zhou Y, Qin Z, Liang Z, Meng D, Xu H, Smith D R, Liu Y 2021 *Light Sci. Appl.* **10** 138
[135] Huang Y, Kaj K, Chen C, Yang Z, Ul Haque S R, Zhang Y, Zhao X, Averitt R D, Zhang X 2022 *ACS Photonics* **9** 1150
[136] Potton R J 2004 *Rep. Prog. Phys.* **67** 717
[137] Fan H, Chu H, Luo H, Lai Y, Gao L, Luo J 2022 *Optica* **9** 1138
[138] Chong Y D, Ge L, Cao H, Stone A D 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 053901
[139] Zhang J, MacDonald K F, Zheludev N I 2012 *Light Sci. Appl.* **1** e18
[140] Li S, Luo J, Anwar S, Li S, Lu W, Hang Z H, Lai Y, Hou B, Shen M, Wang C 2015 *Phys. Rev. B* **91** 220301(R)
[141] Wang C, Shen X, Chu H, Luo J, Zhou X, Hou B, Peng R, Wang M, Lai Y 2022 *Appl. Phys. Lett.* **120** 171703
[142] Sun Y, Tan W, Li H, Li J, Chen H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143903
[143] Luo J, Liu B, Hang Z H, Lai Y 2018 *Laser Photonics Rev.* **2018** 1800001
[144] Wang D, Luo J, Sun Z, Lai Y 2021 *Opt. Express* **29** 5247
[145] Bai P, Luo J, Chu H, Lu W, Lai Y 2020 *Opt. Lett.* **45** 6635
[146] Haus H A, Huang W 1991 *Proc. IEEE* **79** 1505
[147] Doiron C F, Naik G V 2019 *Adv. Mater.* **31** 1904154
[148] Yang F, Hwang A, Doiron C, Naik G V 2021 *Opt. Mater. Express* **11** 2326
[149] Yang F, Prasad C S, Li W, Lach R, Everitt H O, Naik G V 2022 *Nanophotonics* **11** 1159
[150] Liang Y, Gaimard Q, Klimov V, Uskov A, Benisty H, Ramdane A, Lupu A 2021 *Phys. Rev. B* **103** 045419
[151] Yu J, Ma B, Ouyang A, Ghosh P, Luo H, Pattanayak A, Kaur S, Qiu M, Belov P, Li Q 2021 *Optica* **8** 1290
[152] Zhang X, Zhang Z, Wang Q, Zhu S, Liu H 2019 *ACS Photonics* **6** 2671
[153] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
[154] Guo A, Salamo G J, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902
[155] Kang M, Liu F, Li J 2013 *Phys. Rev. A* **87** 053824
[156] Park S H, Lee S, Baek S, Ha T, Lee S, Min B, Zhang S, Lawrence M, Kim T 2020 *Nanophotonics* **9** 1031
[157] Kang M, Chen J, Chong Y D 2016 *Phys. Rev. A* **94** 033834
[158] Wang D, Li C, Zhang C, Kang M, Zhang X, Jin B, Tian Z, Li Y, Zhang S, Han J, Zhang W 2017 *Appl. Phys. Lett.* **110** 021104

[159] Jin B, Tan W, Zhang C, Wu J, Chen J, Zhang S, Wu P 2018 *Adv. Theory Simul.* **1** 1800070

[160] Li J, Fu J, Liao Q, Ke S 2019 *J. Opt. Soc. Am. B:Opt. Phys.* **36** 2492

[161] Cao T, Cao Y, Fang L 2019 *Nanoscale* **11** 15828

[162] Li S, Zhang X, Xu Q, Liu M, Kang M, Han J, Zhang W 2020 *Opt. Express* **28** 20083

[163] Leung H M, Gao W, Zhang R, Zhao Q, Wang X, Chan C T, Li J, Tam W Y 2020 *Opt. Express* **28** 503

[164] Xu J, Ouyang S, Luo L, Shen Y, Zou L, Tan Z, Deng X 2022 *J. Opt. Soc. Am. B: Opt. Phys.* **39** 1847

[165] Baek S, Park S H, Oh D, Lee K, Lee S, Lim H, Ha T, Park H, Zhang S, Yang L, Min B, Kim T T 2022 arXiv: 2208.10675 [physics.optics]

[166] Dembowski C, Gräf H D, Harney H L, Heine A, Heiss W D, Rehfeld H, Richter A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 787

[167] Gu X, Bai R, Zhang C, Jin X R, Zhang Y Q, Zhang S, Lee Y P 2017 *Opt. Express* **25** 11778

[168] Sakhdari M, Farhat M, Chen P 2017 *New J. Phys.* **19** 65002

[169] Chong Y D, Zhu W, Premaratne M 2014 *Appl. Phys. Lett.* **105** 131103

[170] Chu H, Xiong X, Gao Y, Luo J, Jing H, Li C, Peng R, Wang M, Lai Y 2021 *Sci. Adv.* **7** eabj0935

[171] Ge L, Chong Y D, Stone A D 2012 *Phys. Rev. A* **85** 023802

[172] Fleury R, Sounas D L, Alù A 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 023903

[173] Monticone F, Valagiannopoulos C A, Alù A 2016 *Phys. Rev. X* **6** 041018

[174] Sounas D L, Fleury R, Alù A 2015 *Phys. Rev. Appl.* **4** 014005

[175] Ra'Di Y, Sounas D L, Alù A, Tretyakov S A 2016 *Phys. Rev. B* **93** 235427

[176] Luo J, Li J, Lai Y 2018 *Phys. Rev. X* **8** 031035

[177] Valagiannopoulos C A, Monticone F, Alù A 2016 *J. Opt.* **18** 044028

[178] Savoia S, Valagiannopoulos C A, Monticone F, Castaldi G, Galdi V 2017 *Phys. Rev. B* **95** 115114

[179] Kord A, Sounas D L, Alù A 2018 *Phys. Rev. Appl.* **10** 054040

[180] Sakhdari M, Estakhri N M, Bagci H, Chen P 2018 *Phys. Rev. Appl.* **10** 024030

[181] Nicolussi M, Riley J A, Pacheco-Peña V 2021 *Appl. Phys. Lett.* **119** 263507

[182] Liberal I, Engheta N 2017 *Nat. Photonics* **11** 149

[183] Luo J, Lai Y 2019 *Physics* **48** 426 (in Chinese) [罗杰, 赖耘 2019 物理 **48** 426]

[184] Luo J, Lu W, Hang Z, Chen H, Hou B, Lai Y, Chan C T 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 073903

[185] Luo J, Hang Z H, Chan C T, Lai Y 2015 *Laser Photonics Rev.* **9** 523

[186] Liberal I, Mahmoud A M, Li Y, Edwards B, Engheta N 2017 *Science* **355** 1058

[187] Thongrattanasiri S, Koppens F H L, García De Abajo F J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 047401

[188] Farhat M, Yang M, Ye Z, Chen P 2020 *ACS Photonics* **7** 2080

[189] Ye D, Chang K, Ran L, Xin H 2014 *Nat. Commun.* **5** 5841

[190] Dong S, Hu G, Wang Q, Jia Y, Zhang Q, Cao G, Wang J, Chen S, Fan D, Jiang W, Li Y, Alù A, Qiu C 2020 *ACS Photonics* **7** 3321

[191] Cao G, Zhao C, Dong S, Liu K, Zeng Y, Zhang Q, Zhang Y, Li Y, Zhu H 2022 *Opt. Laser Technol.* **156** 108497

[192] Li M, Wang Z, Yin W, Li E, Chen H 2022 *IEEE Trans. Antennas Propag.* DOI: 10.1109/TAP.2022.3209282

[193] Kang M, Cui H, Li T, Chen J, Zhu W, Premaratne M 2014 *Phys. Rev. A* **89** 065801

[194] Gao F, Yuan P, Sun Z, Deng J, Li Y, Jin G, Yan B 2022 *Adv. Photonics Res.* **3** 2200019

[195] Gao F, Sun Z, Yuan P, Deng J, Jin G, Zhou J, Liu H, Yan B 2022 *Appl. Phys. Lett.* **121** 091701

[196] Kang M, Zhang T, Zhao B, Sun L, Chen J 2021 *Opt. Express* **29** 11582

[197] Xiao S, Gear J, Rotter S, Li J 2016 *New J. Phys.* **18** 085004

[198] Park J, Ndao A, Cai W, Hsu L, Kodigala A, Lepetit T, Lo Y, Kanté B 2020 *Nat. Phys.* **16** 462

[199] Chen P, Jung J 2016 *Phys. Rev. Appl.* **5** 064018

[200] Wu T, Zhang W, Zhang H, Hou S, Chen G, Liu R, Lu C, Li J, Wang R, Duan P, Li J, Wang B, Shi L, Zi J, Zhang X 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 083901

[201] Kang M, Zhu W, Rukhlenko I D 2017 *Phys. Rev. A* **96** 063823

[202] Song Q, Odeh M, Zuniga-Perez J, Kante B, Genevet P 2021 *Science* **373** 1133

[203] Kolkowski R, Kovaios S, Koenderink A F 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 023185

[204] Zhao B, Sun L, Chen J 2020 *Opt. Express* **28** 28896

[205] Falcone F, Lopetegi T, Laso M, Baena J, Bonache J, Beruete M, Marqués R, Martín F, Sorolla M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 197401

[206] Maier S A 2007 *Plasmonics: Fundamentals and Applications* (New York: Springer)

[207] Luo J, Yang Y, Yao Z, Lu W, Hou B, Hang Z H, Chan C T, Lai Y 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 223901

[208] Ji W, Luo J, Lai Y 2019 *Opt. Express* **27** 19463

[209] Bisharat D A J, Sievenpiper D F 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 106802

[210] Kong X, Bisharat D J, Xiao G, Sievenpiper D F 2019 *Phys. Rev. A* **99** 033842

[211] Singh S, Davis R J, Bisharat D J, Lee J, Kandil S M, Wen E, Yang X, Zhou Y, Bandaru P R, Sievenpiper D F 2022 *IEEE Antennas Propag. Mag.* **64** 51

[212] Zhao H, Qiao X, Wu T, Midya B, Longhi S, Feng L 2019 *Science* **365** 1163

[213] Luo L, Luo J, Chu H, Lai Y 2021 *Adv. Photonics Res.* **2** 2000081

[214] Nye N S, Halawany A E, Markos C, Khajavikhan M, Christodoulides D N 2020 *Phys. Rev. Appl.* **13** 064005

[215] Deng Z L, Li F J, Li H, Li X, Alù A 2022 *Laser Photonics Rev.* **16** 2100617

[216] Zhu X, Xu Y, Zou Y, Sun X, He C, Lu M, Liu X, Chen Y 2016 *Appl. Phys. Lett.* **109** 111101

[217] Mortensen N A, Gonçalves P A D, Khajavikhan M, Christodoulides D N, Tserkezis C, Wolff C 2018 *Optica* **5** 1342

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Research progress of non-Hermitian electromagnetic metasurfaces

Fan Hui-Ying Luo Jie †

(*School of Physical Science and Technology, Soochow University, Suzhou* 215006, *China*)

(Received 29 August 2022; revised manuscript received 6 October 2022)

Abstract

Electromagnetic metasurface, as a type of planar electromagnetic material consisting of single-layer or multilayer subwavelength artificial micro-structure, can efficiently control the polarization, amplitude and phase of electromagnetic wave on a subwavelength scale. However, confining electromagnetic waves to a deep-subwavelength scale generally is at the cost of a large loss, such as radiation loss, Ohmic loss. Interestingly, non-Hermitian physics provides us a new way to transform the disadvantage of loss into a new degree of freedom in metasurface design, paving the way to expanding the functionalities of metasurfaces. In recent years, the extraordinary effects in the non-Hermitian electromagnetic metasurfaces have attracted a lot of attention. In this review, we discuss the perfect absorption, exceptional points and surfaces waves of non-Hermitian electromagnetic metasurfaces, and point out the challenges and potentials in this field.

Keywords: metasurface, non-Hermitian physics, perfect absorption, exceptional point

PACS: 78.67.Pt, 41.20.Jb, 42.25.Ja **DOI:** 10.7498/aps.71.20221706

† Corresponding author. E-mail: luojie@suda.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

非厄密电磁超表面研究进展

范辉颖　罗杰

Research progress of non–Hermitian electromagnetic metasurfaces

Fan Hui-Ying　Luo Jie

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 71, 247802 (2022)　DOI: 10.7498/aps.71.20221706

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.71.20221706

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn
