

旋量玻色-爱因斯坦凝聚体拓扑性质的研究进展

王力 刘静思 李吉 周晓林 陈向荣 刘超飞 刘伍明

The research progress of topological properties in spinor Bose-Einstein condensates

Wang Li Liu Jing-Si Li Ji Zhou Xiao-Lin Chen Xiang-Rong Liu Chao-Fei Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010303 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191648

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191648>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究

Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field

物理学报. 2018, 67(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180539>

半无限深势阱中自旋相关玻色-爱因斯坦凝聚体的量子反射与干涉

Quantum reflection and interference of spin-dependent Bose-Einstein condensates in semi-infinite potential wells

物理学报. 2017, 66(23): 230301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.230301>

^{87}Rb 玻色-爱因斯坦凝聚体的快速实验制备

Fast production of ^{87}Rb Bose-Einstein condensates

物理学报. 2017, 66(8): 083701 <https://doi.org/10.7498/aps.66.083701>

具有面内四极磁场的旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态结构研究

Ground state of a rotating Bose-Einstein condensate with in-plane quadrupole field

物理学报. 2017, 66(13): 130305 <https://doi.org/10.7498/aps.66.130305>

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

有效质量法调控原子玻色-爱因斯坦凝聚体的双阱动力学

Effective-mass approach to controlling double-well dynamics of atomic Bose-Einstein condensates

物理学报. 2017, 66(16): 160301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.160301>

专题：非线性物理

编者按 非线性波是非线性物理中常见的现象. 研究非线性波有助于弄清物理系统非线性作用下的运动变化规律, 合理解释相关的自然现象. 由于非线性波不满足物理学中常用的线性叠加原理, 同时非线性波的控制方程往往是非线性偏微分方程, 这导致对它的研究一直是数学和物理中重要而困难的课题. 近十年来, 由于观测技术的进步, 玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 系统中孤立子和光纤系统中怪波的实验研究取得了重要进展, 极大地推动了不同物理系统中非线性波及其相关问题的研究. 本专题邀请国内活跃在非线性和物理研究第一线的专家撰文 15 篇 (含综述和研究论文), 内容包括从物理角度研究 BEC 系统的拓扑性质和孤立子、铁磁纳米线的磁怪波和弹性管中怪波、光学系统中的怪波和孤立子及其发生机制, 以及从数学角度 (可积系统) 研究非局域系统的孤立子、离散物理系统的多维相容和非线性波、Boussinesq 系统 Lax 对等性质等.

希望本专题能够尽可能反映基于可积系统的非线性波研究现状, 为青年学者选择科研方向、确定研究课题以及从事相关领域研究的人员提供一点帮助, 促进我国在非线性和物理应用和数学理论的发展.

(客座编辑: 中国科学院物理研究所 刘伍明; 深圳大学高等研究院 贺劲松; 北京信息科技大学 王灯山)

旋量玻色-爱因斯坦凝聚体拓扑性质的研究进展*

王力¹⁾ 刘静思²⁾ 李吉³⁾ 周晓林⁴⁾ 陈向荣¹⁾
刘超飞^{5)†} 刘伍明^{6)7)‡}

1) (四川大学物理学院, 成都 610065)

2) (北京景山学校朝阳学校, 北京 100012)

3) (太原师范学院物理系, 晋中 030619)

4) (四川师范大学物理与电子工程学院, 成都 610101)

5) (江西理工大学理学院, 赣州 341000)

6) (中国科学院物理研究所, 北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100190)

7) (中国科学院大学物理学院, 北京 100190)

(2019 年 10 月 28 日收到; 2019 年 12 月 2 日收到修改稿)

实现玻色-爱因斯坦凝聚的原子大多具备内部自旋自由度, 在光势阱下原子内部自旋被解冻, 从而使原子可以凝聚到各个超精细量子态上, 形成旋量玻色-爱因斯坦凝聚体. 灵活的自旋自由度成为体系相关的动力学变量, 可以使体系出现新奇的拓扑量子态, 如自旋畴壁、涡旋、磁单极子、斯格明子等. 本文综述了旋量玻色-爱因斯坦凝聚的实验和理论研究, 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中拓扑缺陷的种类, 以及两分量、三分量玻色-爱因斯坦凝聚体中拓扑缺陷的研究进展.

关键词: 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体, 自旋畴壁, 涡旋, 斯格明子, 磁单极子

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Hh, 03.75.Nt, 05.30.Jp

DOI: 10.7498/aps.69.20191648

* 国家重点研发计划“量子调控与量子信息”重点专项 (批准号: 2016YFA0301500) 和国家自然科学基金 (批准号: 11434015, 61835013, 11875149, 61565007) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liuchaofei0809@163.com

‡ 通信作者. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn

1 引言

对于一个多粒子的玻色系统, 当体系的温度极低, 且原子间的距离足够靠近时, 大量原子将会凝聚在动量为零的最低能态上, 从而出现一种具有宏观量子特性的简并态, 即玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensate, BEC)^[1-5]. 当 BEC 被限制在磁势阱 (如四极阱 (Paul)^[6], Ioffe-Pritchard 阱 (IPT)^[7], 时间轨道势阱 (time orbiting potential, TOP)^[8] 等) 中时, 原子处于弱场束缚态, 内部自旋自由度被冻结, 此时凝聚体性质可以通过标量形式的序参量来描述^[9,10]. 当 BEC 被限制在光势阱^[11,12] 中时, 内部自旋自由度被释放, 其磁化性质由自旋相互作用决定, 这样的体系称为旋量 BEC^[13-16].

实验方面, 1998 年美国麻省理工学院 (MIT) 的 Stamper-Kurn 研究组^[16] 在沿磁势阱的中心轴射入红外线光束形成的光偶极阱中, 首次实现了金属 ^{23}Na 原子系统的 BEC, 通过这一突破性进展把在磁势阱中冻结的自旋自由度解放出来, 在冷原子物理领域中开辟了旋量 BEC 研究的崭新领域. 实验采用光势阱捕获和冷却钠原子, 当温度达到 $1\text{--}2\text{ }\mu\text{K}$, 原子密度数约为 $1 \times 10^{14}\text{ cm}^{-3}$ 时, 转移到磁势阱中经由射频诱导蒸发进一步冷却, 在 $F=1, m_F=-1$ 的电子基态上产生含有 $(5\text{--}10) \times 10^6$ 个原子的凝聚体. 随着红外线激光束能量的提升, 在稳定的磁势阱中控制凝聚体进入光势阱, 然后关闭磁势阱, 让凝聚体处于全光阱中. 图 1 为光势阱中 $F=1$ 旋量 BEC 所有精细态上钠原子的分布, 从图 1(b) 可以清晰地看到凝聚体分布在三个超精细态上, 金属钠原子的自旋自由度被充分释放.

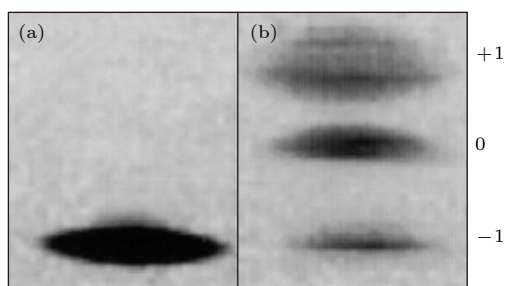


图 1 光势阱中 $F=1$ ^{23}Na 凝聚体的超精细态^[16]. (a) 250 ms 时光势阱中钠原子的吸收图像; (b) 340 ms 时光势阱中钠原子的吸收图像

Fig. 1. Optical trapping of ^{23}Na condensates in all $F=1$ hyperfine states: shown are absorption images after (a) 250 ms and (b) 340 ms of optical confinement.

2001 年, Barrett 等^[17] 在两束 CO_2 激光束 (功率为 12 W , 波长为 $10.6\text{ }\mu\text{m}$) 交叉会聚形成的全光阱中得到了 $F=1$ 的 ^{87}Rb 原子的旋量 BEC. 实验中首先将低速的铷原子装载到磁光阱中, 接着逐步降低光强, 关闭磁场, 然后把原子抽运到 $F=1, m_F=1$ 态, 最后打开 CO_2 激光束, 使原子装载到光势阱中. 整个过程中是通过在 2 s 时间内逐步降低光强, 即减少阱深来实现蒸发冷却的. 图 2 为实验得到的 Stern-Gerlach 梯度磁场中自由膨胀 10 ms 后的原子吸收图像, 从下到上分别是 $F=1, m_F=-1, 0, 1$ 凝聚体的三个分量.

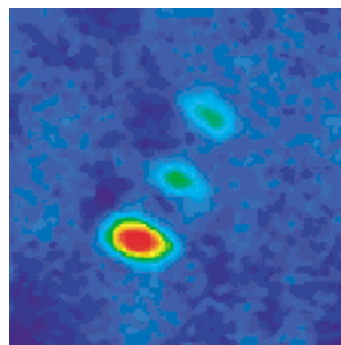


图 2 铷原子云在 Stern-Gerlach 梯度磁场中自由膨胀 10 ms 后的吸收图像^[17]. 从下到上分别是 $F=1, m_F=(-1, 0, 1)$ 凝聚体的三个分量

Fig. 2. Absorptive image of Rb atomic cloud after 10 ms free expansion in a Stern-Gerlach magnetic field gradient. Three distinct components are observed corresponding to $F=1, m_F=(-1, 0, 1)$ spin projections from bottom to top, respectively.

2003 年, Gustavson 等^[18] 研究了 $F=2$ 的 ^{23}Na 旋量 BEC, 观察到了数秒寿命的精细态 ($F=2, m_F=-2$), 且原子密度数为每立方厘米 10^{14} . Chang^[19]、Schmaljohann^[20]、Kuwamoto^[21] 等观察到了 $F=2$ 的 ^{87}Rb 旋量 BEC, 并研究了其动力学性质. 2012 年, Pasquiou 等^[22] 也从实验上观察到了 $F=3$ 的 ^{52}Cr 旋量 BEC, 并研究了其热力学性质, 表明在极低磁场下, 当自旋自由度被热激活时, 凝聚体的临界温度会降低.

特别地, 在 2011 年, 美国国家标准与技术研究院的 Spielman^[23] 研究组在 ^{87}Rb 旋量 BEC 中两个内部自旋态之间通过双光子拉曼过程实现了等效的自旋-轨道耦合, 这是人类历史上首次通过人工合成磁场实现了 BEC 的自旋-轨道耦合效应, 成为近年来冷原子物理中的一个研究热点^[24-27].

2012 年, 中国科技大学潘建伟^[28] 研究组也实现了 BEC 中的一维自旋-轨道耦合. 此外, 山西大学^[29] 和麻省理工^[30] 的研究组, 分别用 ^{40}K 和 ^6Li 实现了费米冷原子气体中的自旋-轨道耦合. 量子气体中自旋-轨道耦合的实现, 开辟了研究冷原子物理的新方向, 如光与原子相互作用对旋量 BEC 拓扑结构的影响, 自旋涡旋阵列的产生, 以及各种新奇拓扑缺陷的产生. 科研工作者不仅详细研究了自旋-轨道耦合的 BEC 的性质^[31–34], 还在实验上成功模拟了 Zitterbewegung(狄拉克颤动)^[35,36]、自旋霍尔效应^[37] 等现象, 并提出了研究量子霍尔效应^[38]、反量子自旋霍尔效应^[39]、费米气体中的拓扑量子相变^[40] 等物理问题的方案.

理论方面, 1998 年 Ho^[41] 和 Ohmi^[42] 独立进行了旋量 BEC 的理论研究. 他们推广了 Gross-Pitaevskii 方程, 在平均场理论下研究了自旋 $F = 1$ 的 BEC 的基态结构和拓扑缺陷的性质. 同年, Law 等^[43] 利用量子光学中的代数方法研究了其自旋混合动力学行为. 接着, Koashi^[44,45]、Ciobanu^[46] 和 Semenoff^[47] 等研究了 $F = 2$ 的旋量 BEC 的基态结构、自旋相关、磁效应、激发谱及相位等一系列理论性质. Santos^[48]、Diener^[49]、Makela^[50] 等对 $F = 3$ 的旋量 BEC 也进行了理论研究. 2007 年, Yip^[51] 研究了自旋 $F \leq 4$ 的旋量 BEC 的基态及其对称性.

BEC 作为一种新颖的物质形态, 是物理学前沿的研究热点之一, 特别是实验上实现了旋量 BEC、分子的 BEC、费米凝聚体、自旋-轨道耦合的超冷原子气体以来, 又掀起了新一轮的研究热潮. 本文综述了旋量 BEC 的实验和理论研究, 旋量 BEC 中产生的拓扑缺陷的种类, 如自旋畴壁、涡旋、磁单极子、skymions、扭结, 并结合我们的工作着重介绍了两分量和三分量旋量 BEC 中拓扑缺陷的研究进展.

2 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体

2.1 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体的哈密顿量表示

自旋为 f 的 BEC 的序参量在旋转下有 $2f + 1$ 个分量, 且这些分量是随着时间空间变化的, 携带关于超流和磁性的信息, 能形成自旋流及质量流, 产生丰富的自旋结构^[52].

考虑自旋 f 的全同玻色子体系, 取 $\hat{\psi}_m(\mathbf{r})$ 为相应的场算符, 假设满足对易关系:

$$[\hat{\psi}_m(\mathbf{r}), \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta_{nm} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1)$$

$$[\hat{\psi}_n(\mathbf{r}), \hat{\psi}_m(\mathbf{r}')] = 0, \quad (2)$$

$$[\hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}')] = 0. \quad (3)$$

考虑两个自旋为 f 的玻色子的耦合作用, 其总自旋 F 为 $0, 2, \dots, 2f$, 耦合态对应的湮灭算符为

$$\hat{A}_{\text{FM}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m_1, m_2 = -f}^f \langle F, M | f, m_1; f, m_2 \rangle \hat{\psi}_{m_1}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m_2}(\mathbf{r}'). \quad (4)$$

哈密顿量具有标量性, 在旋转下保持不变, 进一步得到相互作用哈密顿量:

$$\hat{V}^F = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' v^{(F)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \sum_{M=-F}^F \hat{A}_{\text{FM}}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{A}_{\text{FM}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (5)$$

其中 $v^{(F)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 表示相互作用势, 且

$$\sum_F \sum_{M=-F}^F \hat{A}_{\text{FM}}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{A}_{\text{FM}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{n}(\mathbf{r}) \hat{n}(\mathbf{r}') :, \quad (6)$$

$$\hat{n}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{m=-f}^f \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_m(\mathbf{r}), \quad (7)$$

其中 $\hat{n}(\mathbf{r})$ 是粒子数密度算符, $::$ 表示取正规序. 当相互作用势的量级与原子平均间隔相比忽略不计时, 可以将 $v^{(F)}$ 近似表示为 δ 函数的形式:

$$v^{(F)} = g_F \delta(\mathbf{r}), \quad (8)$$

$$g_F = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_F, \quad (9)$$

其中 g_F 描述两个粒子间相互作用强度, a_F 指 S 波散射长度. 由此哈密顿量可以表示为

$$\hat{V}^F = \frac{g_F}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{M=-F}^F \hat{A}_{\text{FM}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{\text{FM}}(\mathbf{r}), \quad (10)$$

其中 $\hat{A}_{\text{FM}}(\mathbf{r})$ 如 (4) 式所示

$$\langle 0, 0 | f, m_1; f, m_2 \rangle = \delta_{m_1+m_2, 0} \frac{(-1)^{f-m_1}}{\sqrt{2f+1}}, \quad (11)$$

$$\hat{A}_{00}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{2f+1}} \sum_{-f}^f (-1)^{f-m} \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{-m}(\mathbf{r}'). \quad (12)$$

对于自旋 $f=1$ 时的相互作用哈密顿量, 此时两个玻色子碰撞的总自旋 F 只能是 0 和 2, 相应的相互作用哈密顿量可表示为

$$\hat{V}_0 = \frac{g_0}{2} \int d^3\mathbf{r} \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_2 &= \frac{g_2}{2} \int d^3\mathbf{r} \sum_{M=-2}^2 \hat{A}_{2M}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{2M}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{g_2}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[: \hat{n}^2(\mathbf{r}) : - \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

联合两式得到总的相互作用哈密顿量为

$$\hat{V} = \int d^3\mathbf{r} \left[\frac{g_2}{2} : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + \frac{g_0 - g_2}{2} \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \right], \quad (15)$$

将自旋 1 情况的算符恒等式: $\hat{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{F}(\mathbf{r}) : + 3\hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{A}_{00}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = : \hat{n}(\mathbf{r}) \hat{n}(\mathbf{r}') :$ 代入上式, 得到:

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[c_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + c_1 : \hat{F}^2(\mathbf{r}) : \right], \quad (16)$$

其中

$$c_0 = \frac{g_0 + 2g_2}{3}, \quad (17)$$

$$c_1 = \frac{g_2 - g_0}{3}, \quad (18)$$

同样地, 可以得到 $f=2$ 时的相互作用哈密顿量:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[c_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + c_1 : \hat{F}^2(\mathbf{r}) : \right. \\ &\quad \left. + c_2 \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$c_0 = (4g_2 + 3g_4)/7, \quad (20)$$

$$c_1 = (g_4 - g_2)/7, \quad (21)$$

$$c_2 = (7g_0 - 10g_2 + 3g_4)/7, \quad (22)$$

$f=3$ 时的相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[c_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + c_1 : \hat{F}^2(\mathbf{r}) : \right. \\ &\quad \left. + c_2 \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + c_3 \sum_{M=-2}^2 \hat{A}_{2M}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{2M}(\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$c_0 = (9g_4 + 2g_6)/11, \quad (24)$$

$$c_1 = (g_6 - g_4)/11, \quad (25)$$

$$c_2 = (11g_0 - 21g_4 + 10g_6)/11, \quad (26)$$

$$c_3 = (11g_0 - 18g_4 + 7g_6)/11. \quad (27)$$

2.2 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体的拓扑荷

对于各种形式的拓扑缺陷主要通过计算拓扑荷来判定. 线缺陷形式的涡旋可通过观察相位图中的奇异点和缠绕数来识别, 对于点缺陷, 如磁单极子, 可以通过计算拓扑荷来确定是整数磁单极子还是分数磁单极子^[53]. 在两分量 BEC 系统中, 原子可以是两种不同的元素^[54], 也可以是同种元素的两种同位素^[55], 或者是同种原子的不同超精细态^[56], 该体系可用自旋 1/2 系统来描述^[57,58].

自旋 $S = \Psi^\dagger \sigma \Psi / |\Psi|^2$, 其分量形式为

$$\begin{cases} S_x = \frac{2|\psi_1||\psi_2|}{|\Psi|^2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ S_y = -\frac{2|\psi_1||\psi_2|}{|\Psi|^2} \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ S_z = \frac{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}{|\Psi|^2} \end{cases} \quad (28)$$

其中 $\psi_1, \psi_2, \theta_1, \theta_2$ 分别为两个分量的波函数和相位. 局部自旋的三个分量可表示为

$$\begin{cases} S_x = \sin \theta \cos \varphi \\ S_y = \sin \theta \sin \varphi, \\ S_z = \cos \theta \end{cases} \quad (29)$$

其中 θ 和 φ 分别为极角和方位角. 比较两式可知自旋的极角只与两分量的相对密度有关, 即自旋的 S_z 分量由两组分的密度差决定, 而 S_x, S_y 分量由相对密度和相对相位共同决定, 表明两分量 BEC 不同的相对密度和相对相位会导致不同结构的自旋纹理, 可以用拓扑荷密度 $q(r)$ 来描述其拓扑结构的分布:

$$q(r) = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{ij} \mathbf{S} \cdot \partial_i \mathbf{S} \times \partial_j \mathbf{S}, \quad (30)$$

对全空间积分得拓扑荷:

$$\begin{aligned}
Q(S_x, S_y, S_z) &= \int \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{ij} \mathbf{S} \cdot \partial_i \mathbf{S} \times \partial_j \mathbf{S} d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{\partial S_y}{\partial x} & \frac{\partial S_z}{\partial x} \\ \frac{\partial S_x}{\partial y} & \frac{\partial S_y}{\partial y} & \frac{\partial S_z}{\partial y} \end{vmatrix} d\mathbf{r} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int \begin{vmatrix} S_x & S_z & S_y \\ \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{\partial S_z}{\partial x} & \frac{\partial S_y}{\partial x} \\ \frac{\partial S_x}{\partial y} & \frac{\partial S_z}{\partial y} & \frac{\partial S_y}{\partial y} \end{vmatrix} d\mathbf{r} \\
&= -Q(S_x, S_z, S_y). \quad (31)
\end{aligned}$$

从 (31) 式可以看出, 任意交换自旋密度矢量的三个分量 S_x, S_y, S_z 中的两个分量, 或者任意改变三个分量中其中一个分量的正负号, 将会出现不同结构的自旋纹理, 但其拓扑荷密度 $q(r)$ 和拓扑荷的绝对值 $|Q|$ 不会变化.

3 拓扑缺陷的分类

拓扑缺陷的独特性是在弱微扰下能稳定存在, 在空间自由连续地变换而不改变其自身性质. 这种稳定性由表征序参量流形的离散拓扑量子数保护. 拓扑缺陷的分类主要依靠同伦论, 描述不同的拓扑缺陷会出现不同的序参量流形. 表 1 总结了利用同伦群对拓扑缺陷进行分类的结果. 旋量 BEC 有丰富的序参量流形, 因而可产生不同种类的拓扑缺陷, 如整数和分数涡旋 [59–64], 非阿贝尔涡旋 [65], 'tHooft-Polyakov 磁单极子 [66], 狄拉克磁单极子 [67–68], skyrmions [69–71] 和扭结 [72].

表 1 同伦群描述的拓扑缺陷结构
Table 1. Topological defect structures described by homotopy groups.

π_n	缺陷	孤子
π_0	畴壁	暗孤子
π_1	涡旋	非奇异畴壁
π_2	磁单极	二维 skyrmions
π_3		skyrmions, 扭结
π_4		瞬子

3.1 自旋畴壁

畴壁可由零阶同伦群 $\pi_0(\mathcal{R})$ 表征. 若 $\pi_0(\mathcal{R}) = 0$ 说明体系是相连的, 若 $\pi_0(\mathcal{R}) = 1$, 说明

体系被分为两个非连续区域. 以两分量赝自旋 1/2 的序参量来描述, 其赝自旋表示为 (28) 式. 图 3 表示在赝自旋表象中自旋密度 S_x, S_y, S_z 的分布情况. 第一组分分布在势阱的左边, 标记为自旋朝上 $S_z = 1$ (图中红色表示); 第二组分在强烈的排斥作用下分布在第一组分的低密度区域, 即势阱的右边, 标记为自旋朝下 $S_z = -1$ (图中蓝色表示). 两个分量的相分离导致在赝自旋表象中形成了两个自旋畴, 在两个自旋畴的界面上形成了自旋畴壁. 在这个区域自旋既不朝上也不朝下 (即 $|S_z| \neq 1$), 而是在 x 方向上有了分量. 从左边自旋畴到右边自旋畴的过程中, 畴壁上的自旋沿着 x 方向翻转, 赝自旋在 $x-y$ 平面的投影均指向 x 轴的正方向, 形成了如图 3(d) 中的经典奈尔型畴壁 [73].

3.2 涡旋

涡旋可由一阶同伦群 $\pi_1(\mathcal{R})$ 表征, 描述一个从实空间回路到序参量流形的映射. 它属于线缺陷, 常见于超流和液晶位错中. 对于 S 波超导体、液 ^4He 以及旋量 BEC, 绕涡旋线的质量环流是量子化的, 其涡旋由缠绕数 n_w 表征:

$$\oint_C \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = n_w \kappa, \quad (32)$$

积分沿着闭合路径 C 进行, 其中 $\kappa \equiv h/M$, $\mathbf{v}_s (= \hbar/M \nabla \phi)$ 为超流速度. 对于标量序参量, 其序参量流形为 $\mathcal{R} = \text{U}(1)$, 其基本群为整数加群: $\pi_1(\text{U}(1)) \cong \mathbb{Z}$. $\pi_1(\text{U}(1))$ 的群元与缠绕数 n_w 的值是一一对应的 [74].

对于自旋 1 的铁磁 BEC, 序参量流形为 $\text{SO}(3)$, 其基本群为 $\pi_1(\text{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, 可存在 Mermin-Ho 涡旋, 对应序参量为:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \sqrt{n} \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ \sqrt{2} e^{i\phi} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \\ e^{2i\phi} \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

其中 β 是方位角, ϕ 表示极坐标下极角. Mermin-Ho 涡旋在中心处的方位角 $\beta = 0$, 在边界处对应的方位角 $\beta = \pi/2$. 因此, 空间内自旋方向在中心处是垂直的, 边界处是水平的. 这种涡旋的缠绕数组合为 $(0, 1, 2)$, 每个组分的密度分布都是轴对称的, 势阱中心被 ψ_1 组分占据, ψ_0 组分被推到外部, ψ_{-1} 组分被排挤到最边缘区域.

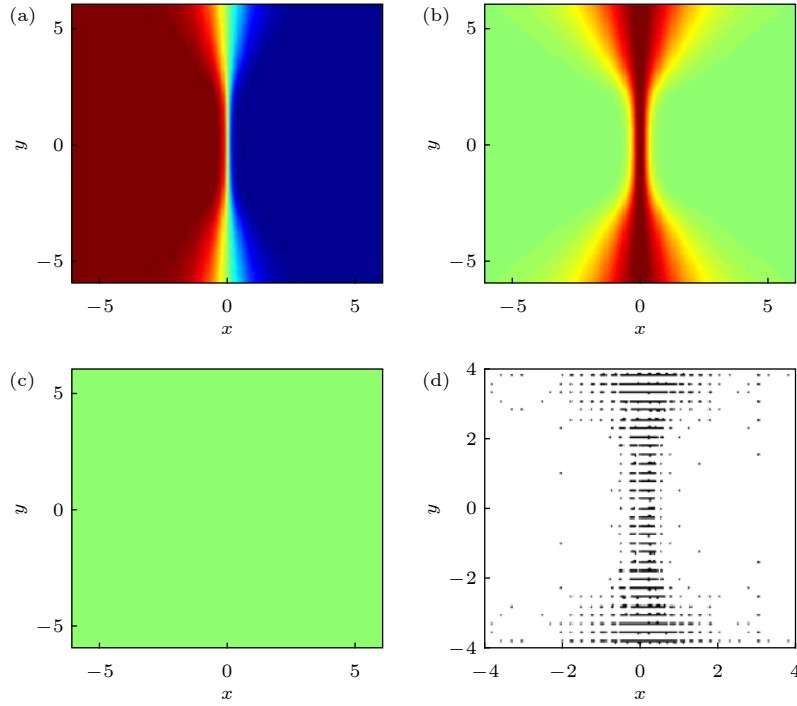


图 3 赝自旋密度 S_z , S_x , S_y 的空间分布^[73] (a)–(c) 表示旋转角频率为 0; (d) 自旋纹理投影到 x - y 平面内的矢量表示

Fig. 3. The pseudospin density distribution for (a) S_z , (b) S_x and (c) S_y for $\Omega = 0$; (d) the vectorial representation of the spin texture projected onto the x - y plane.

另一种涡旋结构为极核涡旋, 对应序参量为

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \sqrt{n} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ e^{i\phi} \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

这种涡旋的缠绕数满足组合 $(1, 0, -1)$. 势阱中心被 ψ_0 组分占据, ψ_1 和 ψ_{-1} 组分被推到外部区域. 不同于 Mermin-Ho 涡旋中心处的纵向磁化, 极核涡旋代表手征对称性的自发破缺.

对于涡旋而言, 相位的改变量是量子化的, 应是 2π 的整数倍^[75]. 在两分量 BEC 系统中, 通过光学方法可以实现半量子化涡旋 (half-quantized vortice), 描述两分量系统中, 组分一涡旋的相位改变量是 2π , 组分二相位改变量为 0 的情况. 相对于整个系统, 每个组分的相位改变量为 π , 因此称之为半量子化涡旋或 Alice 涡旋^[76]. 2017 年 Liu C F 和 Liu W M^[77] 利用变分方法, 得到了自旋-轨道耦合和外磁场联合作用下自旋 1BEC 中无核半量子涡旋可能的稳定解. 计算表明, 各向同性自旋-轨道耦合提供了稳定无核半量子涡旋和相应的奇异半量子自旋纹理激发的局部能量最小. 各向同性自旋-轨道耦合和垂直磁场的联合约束是获得这种激

发的关键因素, 研究还提供了半量子涡旋的稳定相图和最可能的尺寸. 图 4 为自旋 1BEC 中半量子涡旋近似解和相应的奇异自旋纹理. 在自旋 2BEC 的单轴向列相和四面体循环相中还存在非阿贝尔涡旋, 其迷向群都是阿贝尔群^[78]. 非阿贝尔涡旋的特点在于其涡旋的生成元是不能互换的, 因此当两个涡旋碰撞时, 它们不能合并或者通过对方, 而是形成一个 rung 涡旋粘在一起.

3.3 磁单极子

磁单极子可由二阶同伦群 $\pi_2(\mathcal{R})$ 表征, 描述从实空间一个球到序参量流形的映射, 为二维 skyrmion 结构, 常见的两种二维 skyrmions 构型如图 5. 在铁磁 BEC 系统中可以产生狄拉克磁单极子, 其铁磁相的序参量为

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \sqrt{n} e^{i\theta} U(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{n} e^{i(\theta-\gamma)} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ e^{i\alpha} \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

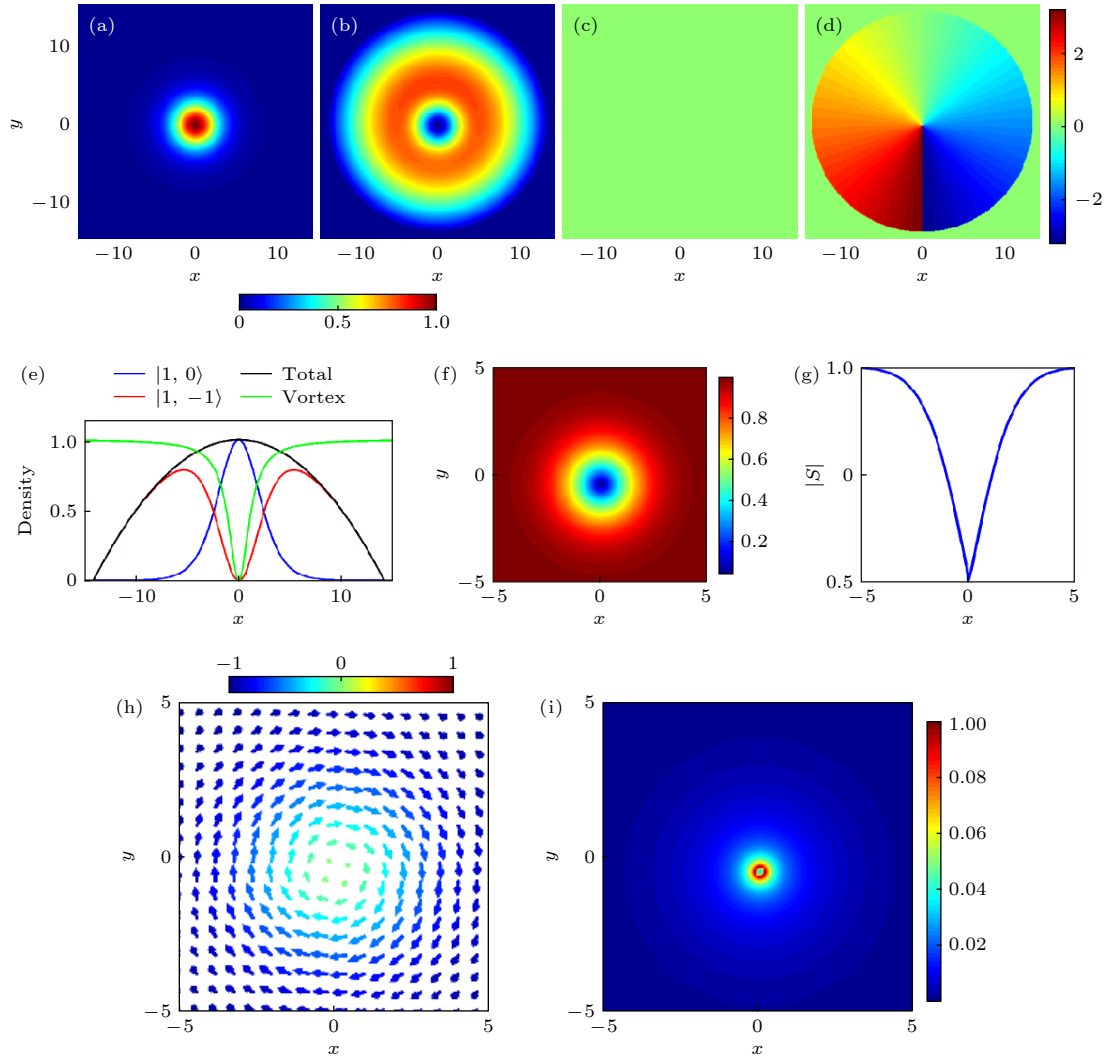


图 4 自旋 1 BEC 中半量子涡旋的近似解和相应的奇异自旋纹理^[77] (a) 和 (b) 对应 $|F=1, m_F=0\rangle$ 和 $|F=1, m_F=-1\rangle$ 分量的密度; (c) 和 (d) 是对应的相; (e) 为半量子涡旋的分布; (f) $|S|$ 自旋密度; (g) $|S|$ 自旋密度分布; (h) 自旋纹理; (i) 拓扑荷密度 $q(x, y)$

Fig. 4. Approximate half-quantum vortex solution in the spin-1 BEC and the corresponding singular spin texture: (a) and (b) are the densities of the $|F=1, m_F=0\rangle$ and $|F=1, m_F=-1\rangle$ components, respectively; (c) and (d) are the corresponding phases; (e) shows the profile of the half-quantum vortex; (f) spin density $|S|$; (g) the profile of the spin density $|S|$; (h) spin texture; (i) topological charge density $q(x, y)$.

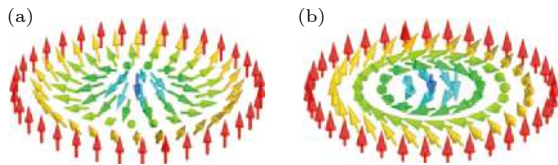


图 5 两种常见的二维 skyrmions 的矢量场构型^[79] (a) 豪猪型 skyrmion; (b) 螺旋型 skyrmion

Fig. 5. Two common vector field configurations of two-dimensional skyrmions: (a) The hedgehog type skyrmion; (b) the spiral type skyrmion.

这样的点缺陷在铁磁 BEC 中三个自旋态的分布分别为: 在 ψ_1 分量表现为双量子数涡旋线, 在 ψ_0 分量表现为单量子数涡旋线, 在 ψ_{-1} 分量表现为

孤子态, 没有涡旋线.

自 1931 年狄拉克磁单极子被首次提出以来, 便受到了广泛关注, 尽管到目前为止仍然没有探测到真实的磁单极子, 科研工作者在不同领域也取得了较大的进展, 例如固态物理中的自旋冰材料, 便提供了一种人造磁单极子环境. 最具有突破性进展的是研究者在铁磁 BEC 中实验上实现了人造磁单极子^[80,81].

3.4 三维 skyrmion

三维 skyrmion 可由三阶同伦群 $\pi_3(\mathcal{R})$ 表征, 这是一个扩展到整个三维实空间的拓扑结构, 类似

于粒子的拓扑孤子, 所有自旋有序排列, 在有限空间下自旋会发生反转. 考虑一个铁磁系统, 对应的序参量具有 $SO(3)$ 对称性. 它是在位置 $\mathbf{r}$ 处序参量通过一个向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示, 向量的方向和梯度描述了自

旋的方向和旋转的角度. 给定条件 $f(\infty) = 0$, 保证序参量均匀且在无限远处等于 $\zeta^{\text{FM}} = (1, 0, 0)^T$. 给定另一条件 $f(0) = 2\pi n$ 保证 skyrmion 属于同伦分类. 通过酉变换得到序参量表示:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{f(r)n}{2} - i \cos \theta \sin \frac{f(r)n}{2} \right)^2 \\ -\sqrt{2}i \left(\cos \frac{f(r)n}{2} - i \cos \theta \sin \frac{f(r)n}{2} \right) \sin \frac{f(r)n}{2} \sin \theta e^{i\phi} \\ -\sin^2 \frac{f(r)n}{2} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

其中 $\hat{f} = (\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{f}_z)$, (r, θ, ϕ) 是位置 $\mathbf{r}$ 处的极坐标.

Skyrmion 在凝聚态的许多体系中发挥了作用, 例如液氦、量子霍尔体系、液晶以及螺旋铁磁系统, 目前在旋量 BEC 中的 skyrmion 已经成为研究热点. 图 6 是研究者在两分量 BEC 中通过非阿贝尔规范场诱导观察到的三维 skyrmions^[82,83].

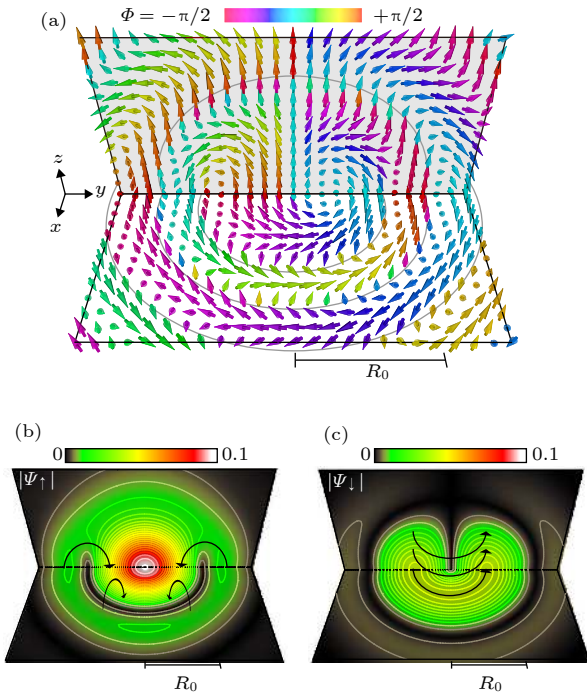


图 6 稳定的三维 skyrmions 在 x - y 和 z - x 平面的空间分布^[83] (a) 中的箭头和颜色分别表示赝自旋方向和 OP 的 $U(1)$ 相分布. 彩图 (b) 和 (c) 分别表示 $|\Psi_\uparrow(\mathbf{r})|$ 和 $|\Psi_\downarrow(\mathbf{r})|$ 的振幅

Fig. 6. The spatial profile of the stable 3D skyrmions in the x - y and z - x planes: The arrows and their colors in (a) indicate the pseudospin direction and the $U(1)$ phase of the OP, respectively; the color maps of (b) and (c) give the amplitudes $|\Psi_\uparrow(\mathbf{r})|$ and $|\Psi_\downarrow(\mathbf{r})|$, respectively.

3.5 扭结

扭结也可由三阶同伦群 $\pi_3(\mathcal{R})$ 表征, 表现为一个闭合回路互相嵌套的结构, 描述从三维球空间 S^3 到 S^2 的映射. 不同于其他拓扑缺陷, 如涡旋、磁单极子和三维 skyrmion 通过缠绕数来描述, 扭结是通过连接数或 Hopf 不变量来描述. Hopf 映射是从 S^3 到 S^2 , 在 S^2 中一个点的原像会形成一个无结的回路. 假设在 BEC 系统中给定一个闭合路径 C_1 , 自旋矢量固定在一个给定的方向, 另一个回路 C_2 沿着自旋不同的方向. 如果两个回路 C_1 和 C_2 连接一次, 那么连接数就为 1. 连接数可正可负, 决定于两个回路的相对取向. 扭结自 Faddeev 和 Niemi 提出在三维经典场论中可以稳定孤子的形式存在以来, 引起了物理学家极大的研究兴趣. 与三维 skyrmion 的情况一样, S^3 域是通过设置一个边界条件来给定的, 即在空间无穷大的各个方向上, 序参量的值是相同的. 考虑自旋 1 的极性相, 序参量流形为 $\mathcal{R}^{\text{plar}} \cong (S_r^2 \times U(1)_\phi) / (\mathbb{Z}_2)_{r,\phi}$, 这里 $U(1)$ 和 $\mathbb{Z}_2$ 对一维空间以上的同伦群无对称贡献, 因此, 得到 $\pi_3 \mathcal{R}^{\text{plar}} \cong \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$. 对应的拓扑荷, 也即 Hopf 荷 $Q \in \mathbb{Z}$ ^[84].

通过操纵外部磁场, 可以在自旋 1BEC 中形成扭结. 在外部磁场存在时, 线性塞曼效应引起 $\hat{d}$ 的拉莫尔进动, 而二次塞曼效应 $\hat{d}$ 往往平行与磁场. 假设一个处于光势阱的 BEC, 其 $\hat{d} = (0 \ 0 \ 1)^T$, 在 z 方向施加均匀磁场, 然后突然关闭均匀磁场, 打开四极场, 由于线性塞曼效应, $\hat{d}$ 开始围绕磁场旋转. 此时 $\hat{d}$ 作为时间的函数运动, 从而导致扭结的形成. 图 7 显示了四极场作用下球形光势阱中扭结产生的动力学过程.

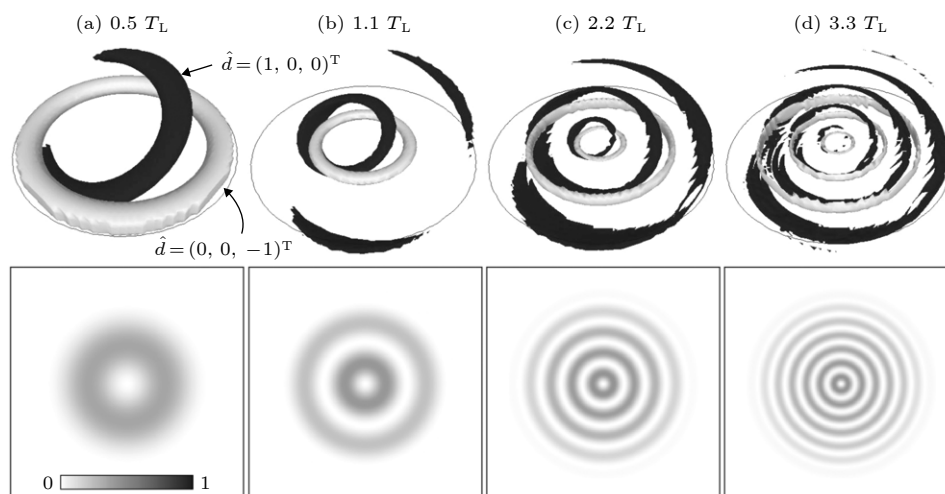


图 7 四极场作用下球形光势阱中扭结产生的动力学过程^[85]. 上一行表示 $\hat{d} = (0, 0, -1)^T$ 和 $\hat{d} = (1, 0, 0)^T$ 的图像快照, 下一行表示 $x-y$ 平面上 $m = -1$ 分量的密度截面

Fig. 7. Dynamics of the creation of knots in a spherical optical trap under a quadrupole magnetic field. Snapshots of the preimages of $\hat{d} = (0, 0, -1)^T$ and $\hat{d} = (1, 0, 0)^T$ (top), and the cross sections of the density for the $m = -1$ components on the $x-y$ plane (bottom).

4 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中的拓扑缺陷研究

4.1 两分量旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中的拓扑缺陷研究

对于两分量 BEC^[86], 由于组分内相互作用与组分间相互作用两者的竞争导致体系出现丰富而有趣的拓扑结构, 如上文介绍的涡旋、skyrmion、磁单极子和量子扭结等, 现已成为实验研究的理想平台. 实验方面, 1999 年 Matthews 等^[87] 在两分量 BEC 中产生了量子涡旋. 2001 年 Anderson 等^[88] 采用两束正交的探测光观察到双组分的 BEC 中暗孤子受动力学不稳定的影响衰变为涡旋环. 2016 年 Hall 等^[89] 演示了在旋量 BEC 中扭结孤子的实验创建和检测, 所观察到的扭结纹理对应于三阶同伦群, 如图 8.

理论方面, 1999 年 Williams 和 Holland^[90] 展示了在 BEC 中选择性地产生具有不同角动量超流涡旋的方法, 包括求解具有强耦合原子态的双组分凝聚体的时间相关运动方程. 2002 年 Battye 等^[91] 证实了在两分量 BEC 中存在稳定的 skyrmion 结构. 同年 Martikainen 等^[92] 理论研究了在两分量 BEC 中产生磁单极子的方法, 并证明磁单极子的产生并不局限于反铁磁自旋凝聚, 同时研究了这种磁单极子的膨胀探测, 以及势阱中位移磁单极子的

动力学. 2004 年 Kasamatsu 和 Tsubota^[93] 通过数值积分耦合的 Gross-Pitaevskii 方程, 研究了双组分 BEC 在轴对称势阱中由调制不稳定性引起的多畴壁形成动力学. 2010 年 Wang 等^[94] 在无外势的自旋-轨道耦合两分量 BEC 中发现了平面波相和条纹相, 在考虑外势的情况下, 体系将出现新的量子态, 如分数涡旋和涡旋格子^[95] 以及 skyrmion 格子^[96].

接着, 人们研究了旋转势下自旋-轨道耦合两分量 BEC 的基态性质. 2011 年 Xu 和 Han^[97] 在旋转势下自旋-轨道耦合两分量 BEC 体系中发现了对称排列的涡旋列和中心伴有巨 skyrmion 的三角涡旋格子. 2011 年 Zhou 等^[98] 探讨了具有旋转和自旋-轨道耦合两分量 BEC 的基态性质, 发现了半量子数涡旋格子结构. 2012 年 Liu 等^[99] 总结了 skyrmions 的类型, 并通过研究自旋-轨道耦合的两分量 BEC 的随机投影 Gross-Pitaevskii 方程, 发现自旋-轨道耦合能够诱导系统产生具有两个 S_z 极值的环形-双曲状的 skyrmions. 图 9 为总结的 skyrmions 类型.

2014 年 Wang 等^[100] 研究了准二维旋转双分量 BEC 在改变自旋-轨道耦合和旋转频率强度的情况下呈现出的各种丰富的基态结构, 表明各向异性自旋-轨道耦合引起的不同基态相之间的转变明显不同于各向同性的情况. Fetter^[101] 用时间相关的拉格朗日形式和变分函数研究了自旋-轨道耦合

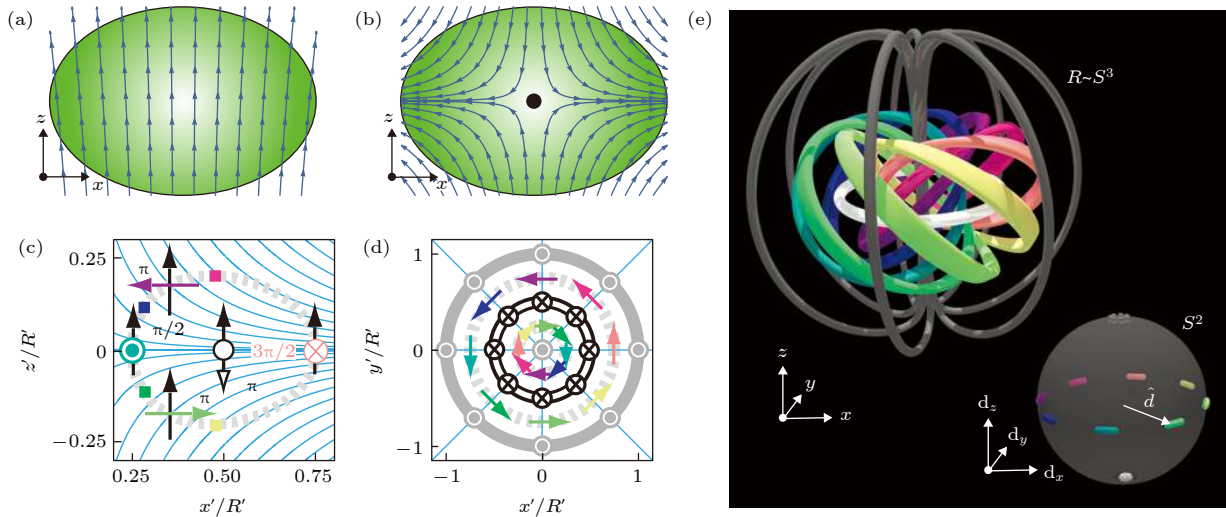


图 8 扭结孤子的结构及其产生方法^[89] (a) 和 (b) 为扭结形成之前和形成过程中磁感应线的示意图, 绿色椭圆为对应的凝聚体; (c) 和 (d) 显示扭结形成时, 最初的 z 方向的向列相矢量 (黑色箭头) 沿着局部磁场 (青色线) 的方向进动, 以实现最终的结构 (彩色箭头). 灰色虚线表示 $d_z = 0$, 白线表示孤子核 ($d_z = -1$), 深灰色线表示体积 V ($d_z = 1$) 的边界; (e) 表示实空间中扭结孤子的构型及其与 S^2 中向列矢量 $\hat{d}$ 的关系

Fig. 8. Structure of the knot soliton and the method of its creation: Schematic magnetic field lines before (a) and during (b) the knot formation, with respect to the condensate (green ellipse); (c), (d) as the knot is tied, the initially z -pointing nematic vector (black arrows) precesses about the direction of the local magnetic field (cyan lines) to achieve the final configuration (coloured arrows); the dashed grey line shows where $d_z = 0$, the white line indicates the soliton core ($d_z = -1$), and the dark grey line defines the boundary of the volume V ($d_z = 1$); (e) the knot soliton configuration in real space and its relation to the nematic vector $\hat{d}$ in S^2 (inset).

的 BEC 中双组分涡旋的动力学. 2016 年 Sakaguchi 和 Umeda^[102] 通过数值模拟和变分方法, 研究了 Rashba 型自旋-轨道耦合的双组分 BEC 的 Gross-Pitaevskii 方程. 发现当不存在相互作用时, 多量子涡旋态成为谐波势中的基态. 当引力相互作用较强时, 多量子涡旋态在方位角方向呈现调制不稳定性, 出现孤子态. 当排斥相互作用较强时, 形成中心为多量子涡旋的涡旋晶格态, 且涡旋晶格态近似于多量子涡旋态的线性组合.

2017 年 Sakaguchi^[103] 通过数值分析研究了双组分 BEC 中自旋-轨道耦合条纹和半涡旋物质波孤子在组分间线性混合 (Rabi 耦合) 作用下, 以耦合结构振荡和穿梭运动形式产生宏观量子效应的可能性. 研究得到在一维系统中, 本征振荡表现为条纹孤子在空间上的偶数分量和奇数分量之间的翻转, 而在二维系统中则表现为半涡旋孤子的零涡旋和涡旋分量之间的周期性跃迁. 同年, Wang 等^[104] 研究了环形势阱中自旋-轨道耦合两分量 BEC 的旋涡态和自旋纹理, 系统地讨论了旋转、自旋-轨道耦合和原子间相互作用对系统基态涡旋结构和自旋纹理的影响. 特别是当旋转频率固定在临界值以上时, 各向同性自旋-轨道耦合的增强使每个分量

中有一个可见的涡旋链, 在中心区域伴随着一个隐藏的巨涡旋和一个 (或几个) 隐藏的涡旋链. Kato 等^[105] 研究了具有 Rashba 自旋-轨道耦合双组分 BEC 中涡旋-反涡旋对的动力学性质, 并且发现旋涡-反涡旋对的速度远小于无自旋-轨道耦合的速度且存在稳态, 而两个具有相同环流的涡旋相互移动或联合会形成一个静止状态.

2018 年 Shi 等^[106] 研究了旋转非对称势阱中具有 Dresselhaus 自旋-轨道耦合 (DSOC) 的两分量 BEC 中的拓扑缺陷和自旋纹理. 结果表明, 对于不含自旋-轨道耦合的初始混合凝聚体, 旋转频率的增强可导致系统的结构相变. 在各向同性 DSOC 存在的情况下, 该系统维持涡流对、Anderson-Toulouse 无核涡流、圆形涡旋片和组合涡旋结构. 特别地, 当旋转频率固定在径向势阱频率之上时, 强 DSOC 导致了由多层可见涡旋链、隐藏涡旋链和隐藏巨涡旋流组成的特殊拓扑结构. Li 和 Liu^[107] 利用 Gross-Pitaevskii 方程研究了自旋-轨道耦合作用和梯度磁场对旋转两分量 BEC 基态的影响. 研究表明, 在梯度磁场中, 随着自旋-轨道耦合强度增大, 基态结构由 skyrmion 格子逐渐过渡为沿着对角线方向排列的 skyrmion 列. 当自

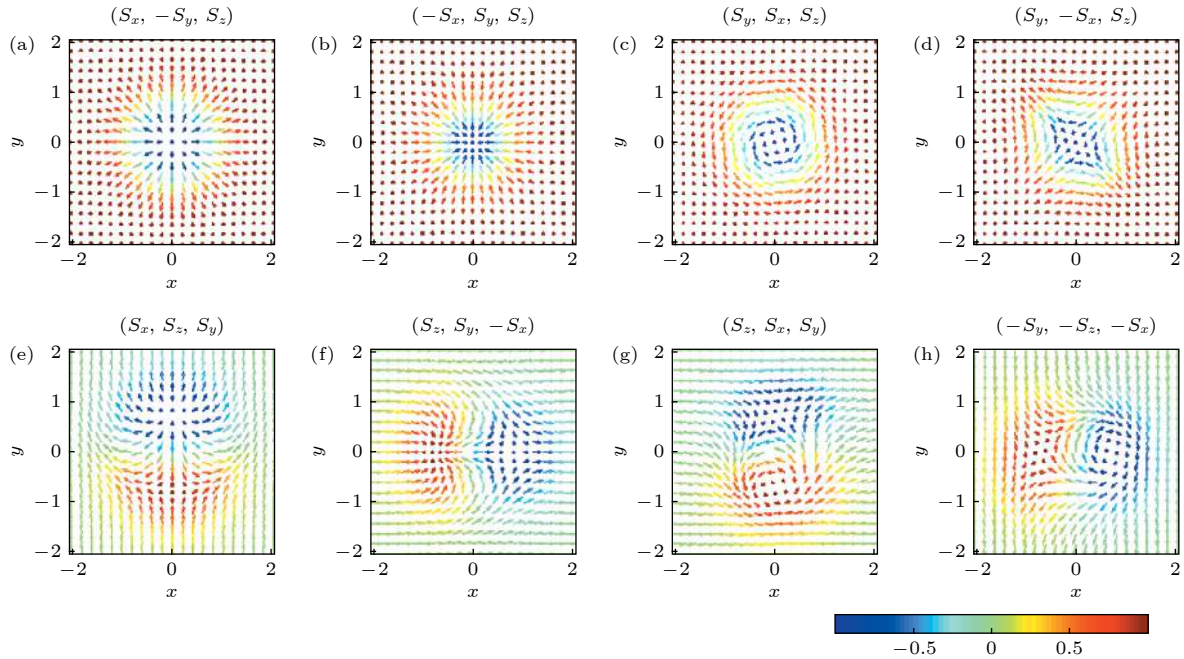


图9 Skyrmions 的类型 ($\lambda = 0.5$)^[99] (a)–(h) 表示自旋矢量的模式: (a) 径向-向外 skyrmion, (b) 径向-向内 skyrmion, (c) 环形 skyrmion, (d) 双曲 skyrmion, (e) 双曲-径向向外 skyrmion, (f) 双曲-径向向内 skyrmion, (g) 环形-双曲 skyrmion-I, (h) 环形-双曲 skyrmion-II

Fig. 9. Configuration of the skyrmion where $\lambda = 0.5$: The (a)–(h) figures indicate the mode of the spin vectors: (a) radial-out skyrmion, (b) radial-in skyrmion, (c) circular skyrmion, (d) hyperbolic skyrmion, (e) hyperbolic-radial(out) skyrmion, (f) hyperbolic-radial(in) skyrmion, (g) circular-hyperbolic skyrmion-I, and (h) circular-hyperbolic skyrmion-II^[99].

旋-轨道耦合强度和旋转频率都小的情况, 磁场梯度的增强可导致基态由平面波相转变为 half-skyrmion; 当自旋-轨道耦合强度和旋转频率都大的情况, 梯度磁场可诱导 hidden 涡旋的产生. 图 10 为不同自旋-轨道耦合强度下梯度磁场中两分量 ^{87}Rb BEC 基态粒子数密度分布和相位分布.

4.2 三分量旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中的拓扑缺陷研究

对于自旋 $F = 1$ 的旋量三分量 BEC, 原子可能占据的塞曼态有 $|1, 1\rangle$, $|1, 0\rangle$, $|1, -1\rangle$ 三种, 体系内会出现两种类型基态相——磁相和晶列相, 依赖于自旋无关相互作用和自旋相关相互作用.

实验上 2001 年 Raghavan 等^[108] 通过静态直流磁场在三分量旋量 BEC 中产生了暗孤子和涡旋结构. 2002 年 Ogawa 等^[109] 采用四极磁场将自旋 1BEC 限制在 Ioffe-Pritchard 势阱中, 发现在凝聚体中产生了涡旋. 2006 年 Itin 等^[110] 研究了自旋 1BEC 在一对载流线和偏置磁场控制的双磁阱中产生涡旋的几种机制, 图 11 为凝聚体快速分裂过程中涡旋的动力学形成, 显示动态涡旋存在于凝聚体的所有分量中, 在 ψ_{-1} 分量中占 99% 以上, 在

ψ_0 分量中动态涡旋和拓扑涡旋共存. 2014 年, Ray 等^[80,81] 在自旋 1BEC 中借助梯度磁场, 观察到了狄拉克磁单极子, 图 12 为狄拉克磁单极子的实验产生过程, 显示了凝聚体中不同自旋组分中的粒子密度随 $B_{z,f}$ 的减小而减小.

理论上 2002 年 Isoshima 和 Machida^[111] 在旋转外势下, 采用推广的 Bogoliubov 理论研究了自旋 1BEC 中各种轴对称涡旋的稳定结构. 同年 Mizushima 等^[112] 通过求解广义 Gross-Pitaevskii 方程研究了旋转条件下铁磁自旋 1BEC 中的 Mermin-Ho 和 Anderson-Toulouse 无核涡旋, 得到在铁磁情况下, Mermin-Ho 涡旋是稳定的. 2006 年 Saito 等^[113,114], 以及 2009 年 Turner^[115] 研究了铁磁自旋 1BEC 中的极核涡旋, 发现系统核心由 $m_F = 0$ 原子填充, 围绕涡旋有 $m_F = 1$ 分量的质量流, 以及 $m_F = -1$ 分量的相等但自旋相反的质量流, 这就产生了净自旋流, 但没有净质量流. 2007 年 Mottonen 等^[116] 研究了非旋转条件下在三维抛物势与 Ioffe-Pritchard 场中的自旋 1 铁磁态旋量 BEC 中无核涡旋的能量和动力学稳定性.

2008 年 Ji 等^[117] 研究了自旋 1 钠原子 BEC 中半量子涡旋的动态生成. 模拟结果表明, 在外加

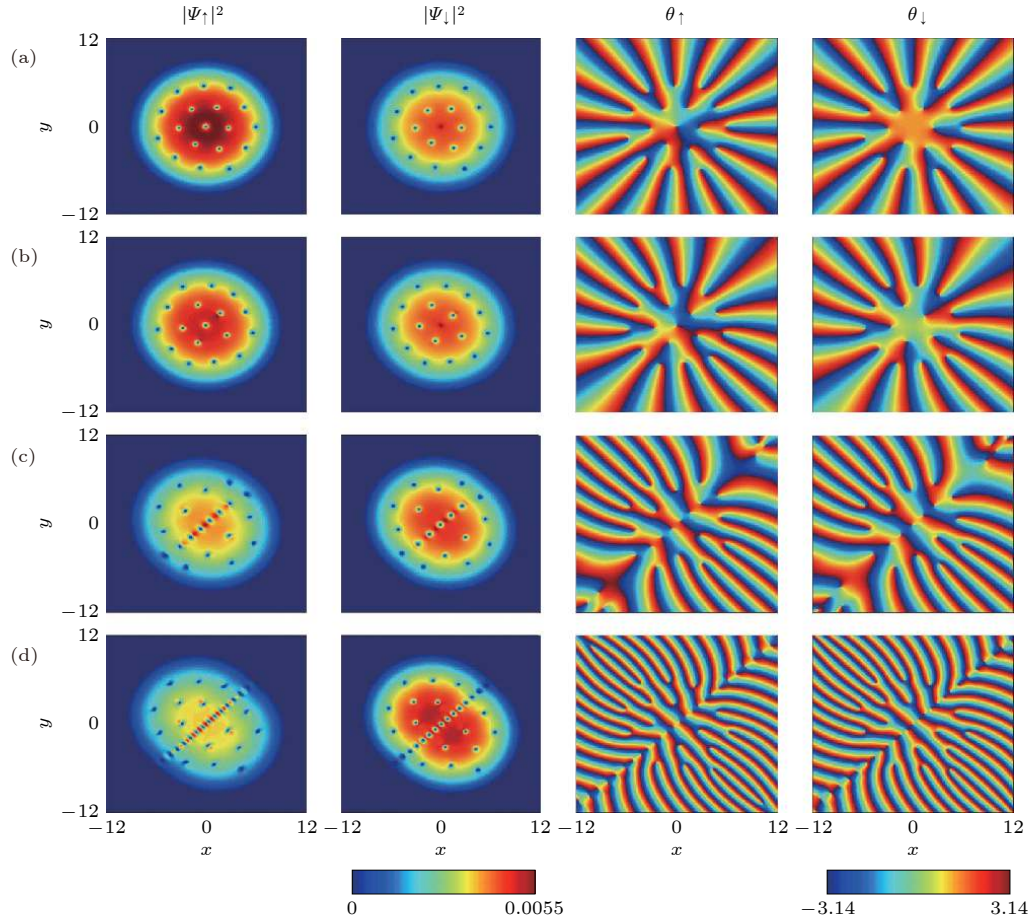


图 10 不同自旋-轨道耦合强度下梯度磁场中两分量 ^{87}Rb BEC 基态粒子数密度分布 (第 1、2 列) 和相位分布 (第 3、4 列)^[107] (a)–(d) 的 $\tilde{\kappa}$ 值分别为 0, 0.2, 0.8, 2

Fig. 10. Particle number densities (the first and second columns) and phase distributions (the third and fourth columns) of ground state of the two-component BEC of ^{87}Rb for the different spin-orbit coupling strengths: the parameters of $\tilde{\kappa}$ in (a)–(d) are 0, 0.2, 0.8, 2, respectively^[107].

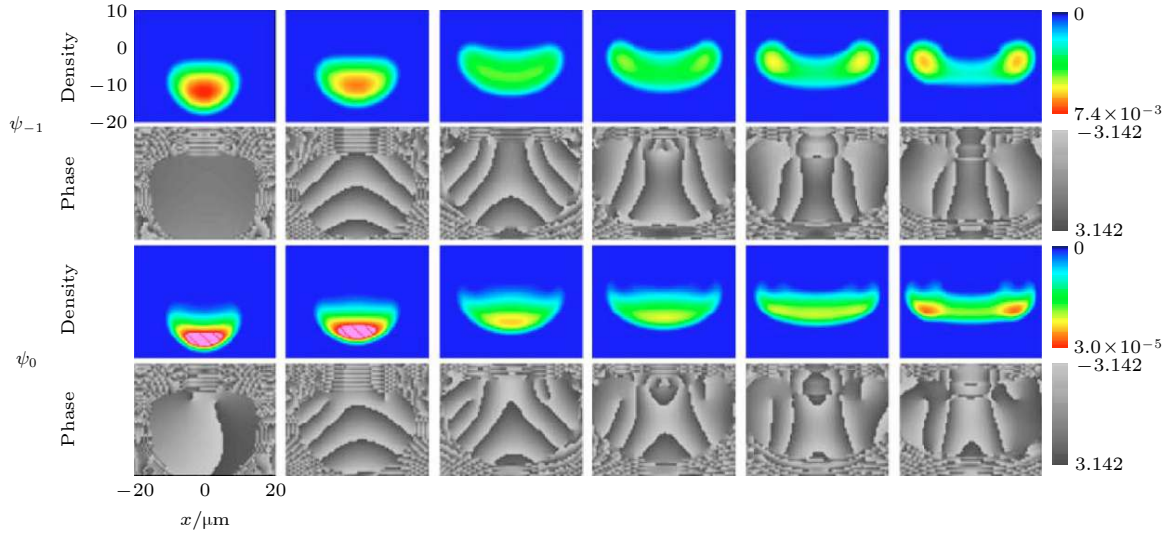


图 11 涡旋的动力学形成^[110]. 涡旋形成于凝聚体的所有分量中, 在 ψ_{-1} 分量中占 99% 以上, 在 ψ_0 分量中动态涡旋和拓扑涡旋共存
Fig. 11. Dynamical formation of vortices: vortices are formed in all components, more than 99% of total population is in ψ_{-1} component. In the ψ_0 component, dynamical and topological vortices coexist^[110].

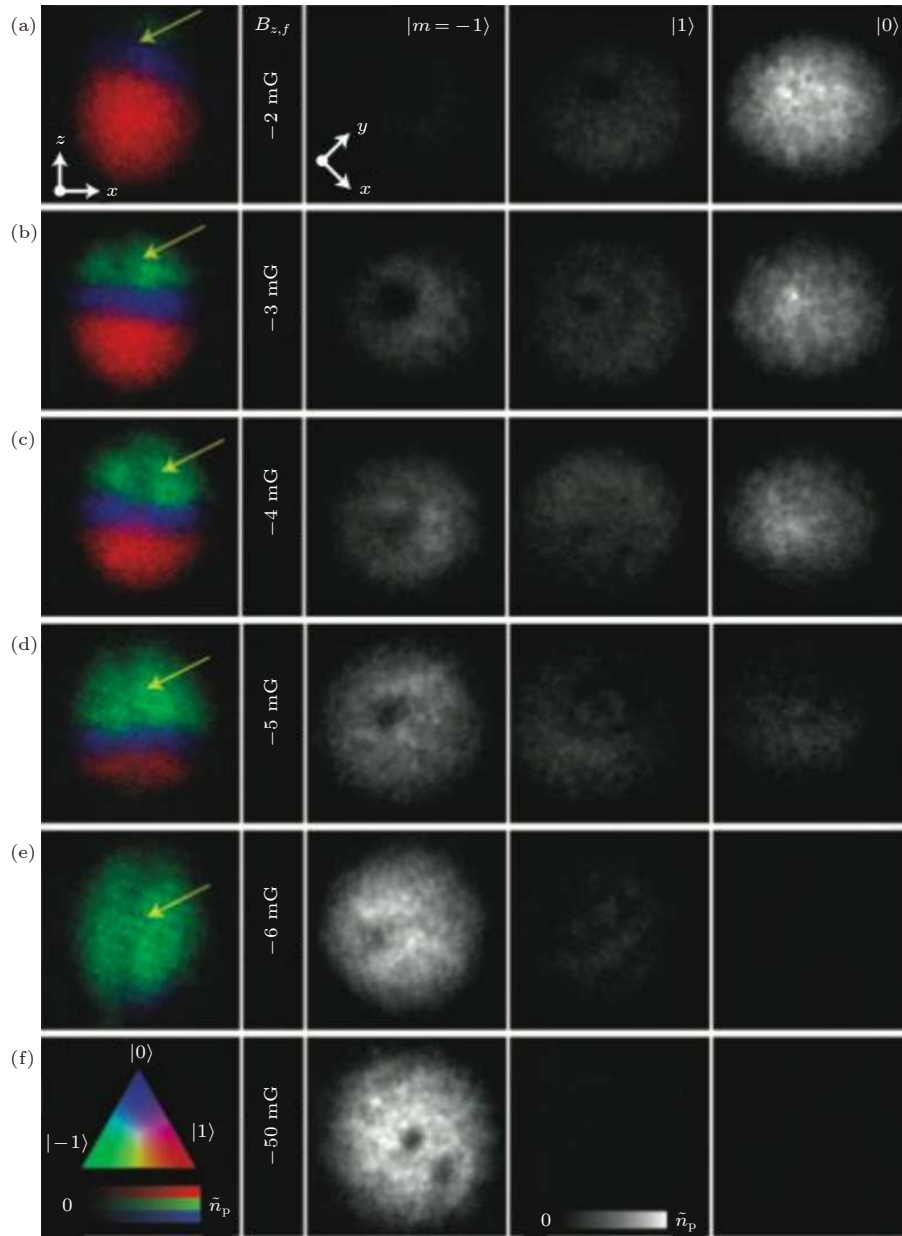


图 12 狄拉克磁单极子的实验产生^[80] (a)–(f) 每一行都包含单个凝聚体的图像. 最左边的列显示了三种自旋状态 $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ 沿水平轴的柱状密度彩色图像; 最右边三列显示沿纵轴拍摄的图像

Fig. 12. Experimental creation of Dirac monopoles. Each row (a)–(f) contains images of an individual condensate. The leftmost column shows colour composite images of the column densities taken along the horizontal axis for the three spin states $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$; The rightmost three columns show images taken along the vertical axis^[80].

脉冲磁捕获势的情况下, 旋转光势阱中可以同时产生独立的半量子涡旋和涡旋晶格, 同时还发现, 一个明显的周期调制的自旋密度波空间结构总是嵌入在方形半量子涡旋晶格中. 2012 年 Liu 和 Liu^[118] 研究了旋转和快速淬火的自旋 1BEC 中由自旋-轨道耦合引起的半 skyrmion 激发, 给出了描述半 skyrmion 自旋矢量的三个表达式. 结果表明, 半 skyrmion 激发依赖于自旋-轨道耦合和旋转的结合, 当自旋-轨道耦合强度和旋转频率均大于某

些临界值时, 半 skyrmion 由一个或几个圆包围中心, 形成径向晶格, 即使在强铁磁 (或反铁磁) 凝聚体中也会发生. 图 13 为旋转频率对 ^{23}Na 旋量 BEC 自旋纹理的影响.

2013 年 Liu 等^[119] 利用阻尼映射 Gross-Pitaevskii 方程, 研究了二维体系中自旋-轨道耦合的 ^{23}Na 自旋 1BEC 中的涡旋斑图, 研究发现较弱的自旋-轨道耦合可以完全破坏不考虑自旋-轨道耦合情况下出现的周期性涡旋晶格; 在自旋-轨道耦

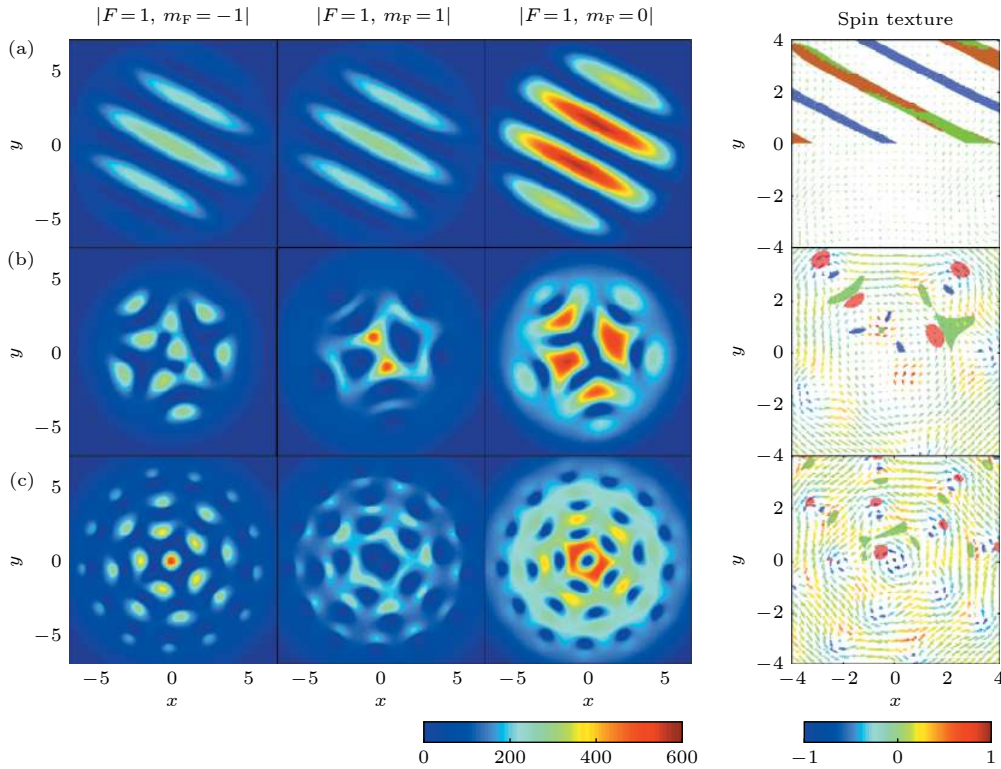


图 13 旋转频率对 ^{23}Na 旋量 BEC 的影响^[118], 其中 $\mu_{j,0}$ ($j = 0, \pm 1$) = $3.6 \hbar\omega$, $\mu = 25 \hbar\omega$, $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 1$, $a_0 = 50 a_B$, and $a_2 = 55 a_B$. (a) $\Omega = 0$; (b) $\Omega = 0.2 \omega$; (c) $\Omega = 0.5 \omega$. 第四列显示了相应的自旋纹理和涡旋的位置

Fig. 13. The effect of rotation frequency for spinor BEC of ^{23}Na with $\mu_{j,0}$ ($j = 0, \pm 1$) = $3.6 \hbar\omega$, $\mu = 25 \hbar\omega$, $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 1$, $a_0 = 50 a_B$, and $a_2 = 55 a_B$: (a) $\Omega = 0$; (b) $\Omega = 0.2 \omega$; (c) $\Omega = 0.5 \omega$. The fourth column shows the corresponding spin textures and the positions of the vortices^[118].

合较强的情况下, 各自旋态的涡旋易形成涡旋组, 并绕凝聚体中心形成花瓣状涡旋斑图. 2014 年 Song 等^[120]利用精确对角化和平均场理论研究了弱相互作用的自旋-轨道耦合自旋 1 玻色气体在外谐波势阱中的碎裂问题, 研究发现这种碎裂倾向源于总角动量守恒, 且受自旋-轨道耦合强度和自旋相关相互作用的影响. Lovegrove 等^[121]将铁磁态无核涡旋通过相位植入法, 在极化态凝聚体中得到了混合态下稳定的无核涡旋. 2015 年 Zhao 等^[122]在自旋 1BEC 中解析得到了两种不均匀的自旋畴构型, 它们分别由正二次塞曼效应和负二次塞曼效应所致. 分析表明, 二次塞曼效应可以诱导自旋畴的动态相变, 其符号可以影响自旋模式的拓扑结构. 2016 年, Gautam 和 Adhikari^[123]对零磁化强度的自旋 1 和自旋 2 旋量 BEC 中的分数涡旋进行分类, 并利用精确的数值解和拉格朗日变分近似研究了准二维旋量 BEC 中涡旋的静力学和动力学性质.

2017 年 Liu 等^[124]通过虚实演化方法研究了具有面内四极磁场自旋 1 的旋量 BEC 的基态结

构. 研究发现, 面内四极磁场和旋转双重作用可导致中央 Mermin-Ho 涡旋的产生; 随着磁场梯度增强, Mermin-Ho 涡旋周围环绕的涡旋趋向对称化排布; 在四极磁场下, 密度相互作用和自旋交换相互作用作为体系的调控参数, 可以控制 Mermin-Ho 涡旋周围的涡旋数目. Li 等^[125]研究了铁磁自旋 1BEC 中由自旋-轨道耦合引起具有极核旋涡的狄拉克磁单极子, 随着自旋-轨道耦合强度的增加, 具有极核旋涡的狄拉克磁单极子可以转化为正方形晶格. 在自旋-轨道耦合确定的情况下, 增大相互作用强度可引起从具有极核旋涡的狄拉克磁单极子向具有 Mermin-Ho 涡旋的循环相变. 图 14 显示了具有 Mermin-Ho 涡旋的磁单极子的形成.

5 总结与展望

1998 年 Ketterle 研究组首次在自旋为 1 的 ^{23}Na 原子系统中实现了 BEC, 为冷原子物理开辟了旋量 BEC 的研究领域. 尤其是在超冷原子气体中人造自旋-轨道耦合的实验实现, 为研究拓扑量

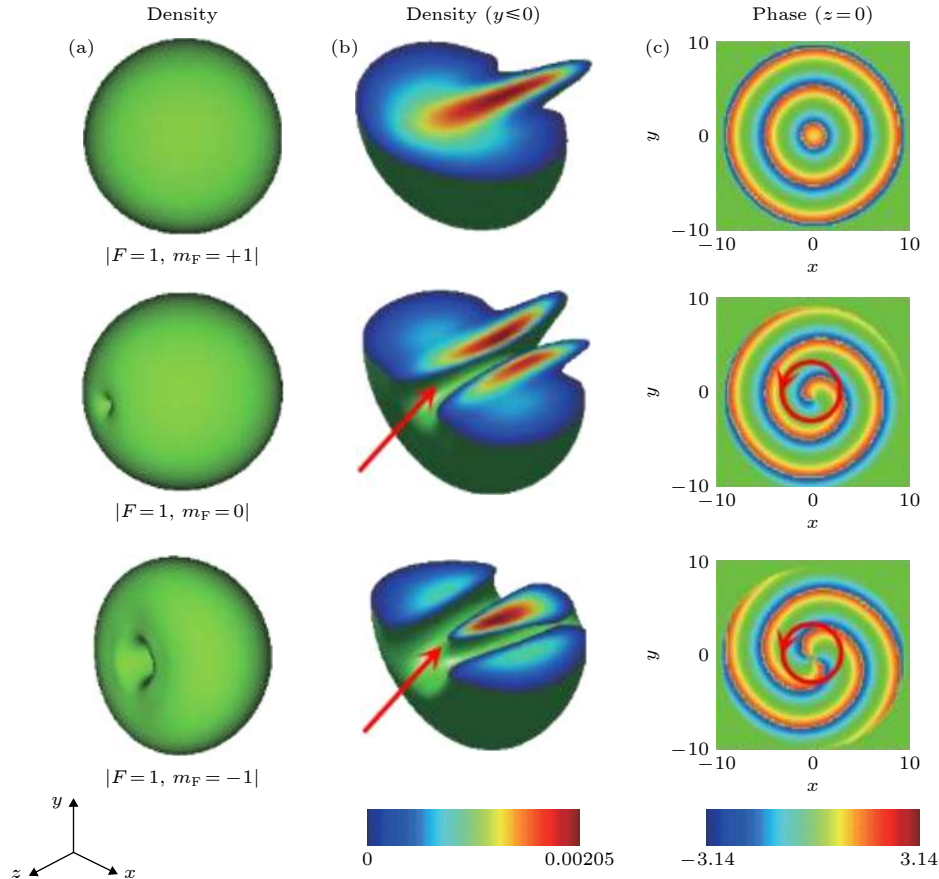


图 14 具有 Mermin-Ho 涡旋的磁单极子^[125] (a) 等值面的粒子数密度; (b) 粒子数密度等深线段 ($y \leq 0$), 节点线 (Dirac 线) 的位置用红色箭头突出显示; (c) $z=0$ 平面上的位相分布. 单涡旋 ($m_F = 0$) 和双涡旋 ($m_F = -1$) 具有相同的环流, 由红圈突出显示

Fig. 14. The monopoles with the Mermin-Ho vortex: (a) Isosurface of particle densities; (b) segments of isosurface of particle densities ($y \leq 0$), the position of the nodal line (Dirac string) is highlighted by the red arrow; (c) phase distributions in the $z = 0$ planes. the single vortex ($m_F = 0$) and double vortex ($m_F = -1$) have the same circulations, as highlighted by the red circles^[125].

子态提供了一个理想的实验平台. 本文综述了旋量 BEC 的实验和理论研究, 旋量 BEC 中产生的拓扑缺陷的种类, 如自旋畴壁、涡旋、磁单极子、skyrmion、扭结, 着重介绍了两分量和三分量旋量 BEC 中拓扑缺陷的研究进展. 今后的工作可以推广到具有高自旋 BEC 体系, 以及不同自旋-轨道耦合形式的玻色气体等, 如 Rashba 自旋-轨道耦合和旋转势作用下的铁磁自旋 2BEC 中新奇的拓扑结构研究. 此外, 在冷原子平台上研究具有长程相互作用的拓扑缺陷也是未来的一个方向, 以及通过研究自旋-轨道耦合旋量 BEC 的动力学行为, 并从非平衡过程中来观察一些拓扑结构, 如冯卡门涡街和量子扭结, 也是非常有意义的工作.

参考文献

- [1] Coen S, Haelterman M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 140401
- [2] Williams J E, Holland M J 1999 *Nature* **401** 568
- [3] Abo-Shaeer J R, Raman C, Vogels J M, Ketterle W 2001 *Science* **292** 476
- [4] Leanhardt A E, Shin Y, Kielpinski D, Pritchard D E, Ketterle W 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 140403
- [5] Sadler L E, Higbie J M, Leslie S R, Vengalattore M, Stamper-Kurn D M 2006 *Nature* **443** 312
- [6] Alan L M, John V P, William D P 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 2596
- [7] Reichel J, Hansel W, Hansch T W 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 3398
- [8] Wolfgang P, Michael H A, Jason R E 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 3352
- [9] Pethick C, Smith H 2008 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (UK: Cambridge Univ. Press) p569-584
- [10] Pitaevskii L, Stringari S 2002 *Bose-Einstein Condensation* (Oxford: Clarendon Press) p382-395
- [11] Stenger J, Stamper-Kurn D M, Andrews M R, Chikkatur A P, Inouye S, Miesner H J, Ketterle W 1998 *J. Low Temp. Phys.* **113** 167
- [12] Bloch I, Dalibard J, Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [13] Stenger J, Inouye S, Stamper-Kurn D M, Miesner H-J, Chikkatur A P, Ketterle W 1988 *Nature* **336** 345
- [14] Kawaguchi Y, Ueda M 2012 *Phys. Rep.* **520** 253
- [15] Weiler C N, Neely T W, Scherer D R, Bradley A S, Davis M

- J, Anderson B P 2008 *Nature* **455** 948
- [16] Stamper-Kurn D M, Andrews M R, Chikkatur A P, Inouye S, Miesner H-J, Stenger J, Ketterle W 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2027
- [17] Barrett M D, Sauer J A, Chapman M S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 010404
- [18] Gustavson T L, leanhardt A E, Chikkatur A P 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 090401
- [19] Chang M S, Hamley C D, Barrett M D 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 140403
- [20] Schmaljohann H, Erhard M, Kronjager J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 040402
- [21] Kuwamoto T, Araki K, Eno T 2004 *Phys. Rev. A* **69** 063604
- [22] Pasquiou B, Marechal E, Vernac L 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 045307
- [23] Lin Y J, Jimenez G K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [24] Galitski V, Spielman I B 2013 *Nature* **494** 49
- [25] Dalibard J, Gerbier F, Juzeliunas G, Ohberg P 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1523
- [26] Zhai H 2012 *Int. J. Mod. Phys. B* **26** 1230001
- [27] Goldman N, Juzeliunas G, Ohberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [28] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301
- [29] Wang P J, Yu Z Q, Fu Z K, Miao J, Huang L H 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [30] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
- [31] Liao R, Huang Z G, Lin X M, Fialko O 2014 *Phys. Rev. A* **89** 063614
- [32] Bhat I A, Mithun T, Malomed B A, Porsezian K 2015 *Phys. Rev. A* **92** 063606
- [33] Hu F Q, Wang J J, Yu Z F, Zhang A X, Xue J K 2016 *Phys. Rev. E* **93** 022214
- [34] Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225301
- [35] Qu C, Hamner C, Gong M, Zhang C, Engels P 2013 *Phys. Rev. A* **88** 021604
- [36] Leblanc L J, Beeler M C, Garcia K J, Perry A R, Sugawa S, Williams R A, Spielman I B 2013 *New J. Phys.* **15** 073011
- [37] Beeler M C, Williams R A, Garcia K J, LeBlanc L J, Perry A R, Spielman I B 2013 *Nature* **498** 201
- [38] Kennedy C J, Siviloglou G A, Miyake H, Burton W C, Ketterle W 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 225301
- [39] Liu X J, Law K T, Ng T K 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 086401
- [40] Gong M, Tewari S, Zhang C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 195303
- [41] Ho T L 1988 *Phys. Rev. Lett.* **81** 742
- [42] Ohmi T, Machida K 1998 *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** 1822
- [43] Law C K, Pu H, Bigelow N P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5257
- [44] Koashi M, Ueda M 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1066
- [45] Ueda M, Koashi M 2002 *Phys. Rev. A* **65** 063602
- [46] Ciobanu C V, Yip S K, Ho T L 2000 *Phys. Rev. A* **61** 033607
- [47] Zhou F, Semenov G W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 180411
- [48] Santos L, Pfau T 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 190404
- [49] Diener R B, Ho T L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 190405
- [50] Makela H, Suominen K A 2007 *Phys. Rev. A* **75** 033610
- [51] Yip S K 2007 *Phys. Rev. A* **75** 023625
- [52] Li J 2018 *Ph.D. Dissertation* (Beijing: Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [李吉 2018 博士学位论文 (北京: 中国科学院大学)]
- [53] Jin J J 2014 *Ph. D. Dissertation* (Taiyuan: Shanxi University) (in Chinese) [靳晶晶 2014 博士学位论文 (太原: 山西大学)]
- [54] Modugno G, Modugno M, Riboli F, Roati G, Inguscio M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 19040
- [55] Papp S B, Pino J M, Wieman C E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 040402
- [56] Schweikhard V, Coddington I, Engels P, Tung S, Cornell E A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 210403
- [57] Leslie L S, Hansen A, Wright K C, Deutsch B M, Bigelow N P 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 250401
- [58] Matthews M R, Anderson B P, Haljan P C, Hall D S, Wieman C E, Cornell E A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2498
- [59] Zhou F 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 080401
- [60] Yip S K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4677
- [61] Leonhardt U, Volovik G E 2000 *JETP Lett.* **72** 46
- [62] Isoshima T, Machida K, Ohmi T 2001 *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** 1604
- [63] Makela H, Zhang Y, Suominen K A 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 8555
- [64] Semenov G W, Zhou F 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 100401
- [65] Kobayashi M, Kawaguchi Y, Nitta M, Ueda M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 115301
- [66] Stoof H T C, Vliegen E, Khawaja U A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 120407
- [67] Blaha S 1976 *Phys. Rev. Lett.* **36** 874
- [68] Ruostekoski J, Anglin J R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 190402
- [69] Shankar R 1977 *J. Phys.* **38** 1405
- [70] Volovik G E, Mineev V P 1976 *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **23** 647
- [71] Khawaja U A, Stoof H 2001 *Nature* **411** 918
- [72] Kawaguchi Y, Nitta M, Ueda M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 180403
- [73] Jin J J, Zhang S Y, Han W 2011 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44** 165302
- [74] Liu J S 2017 *Ph.D. Dissertation* (Beijing: Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [刘静思 2017 博士学位论文 (北京: 中国科学院大学)]
- [75] Eto M, Kasamatsu K, Nitta M, Tsuchi H, Tsubota M 2011 *Phys. Rev. A* **83** 063603
- [76] Volovik G E 2000 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **97** 2431
- [77] Liu C F, Liu W M 2017 *Opt. Exp.* **25** 32800
- [78] Huhtamaki J A M, Simula T P, Kobayashi M 2009 *Phys. Rev. A* **80** 051601
- [79] Fert A, Cros V, Sampaio J 2013 *Nature Nanotech.* **8** 152
- [80] Ray M W, Ruokokoski E, Kandel S, Möttönen M, Hall D S 2014 *Nature* **505** 657
- [81] Ray M W, Ruokokoski E, Tiurev K, Möttönen M, Hall D S 2015 *Science* **348** 544
- [82] Ruostekoski J, Anglin J R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3934
- [83] Kawakami T, Mizushima T, Nitta M, Machida K 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 015301
- [84] Stamper-Kurn D M, Ueda M 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1191
- [85] Choi J Y, Kwon W J, Shin Y I 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 035301
- [86] Hall D S, Matthews M R, Ensher J R, Wieman C E, Cornell E A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1539
- [87] Madison K W, Chevy F, Wohlleben W, Dalibard J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 806
- [88] Anderson B P, Haljan P C, Regal C A, Feder D L, Collins L A, Clark C W, Cornell E A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2926
- [89] Hall D S, Ray M W, Tiurev K, Ruokokoski E, Gheorghe A H, Möttönen M 2016 *Nat. Phys.* **12** 478

- [90] Leanhardt A E, Gorlitz A, Chikkatur A P 1999 *Phys. Rev. Lett.* **89** 190403
- [91] Battye R A, Cooper N R, Sutcliffe P M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 080401
- [92] Martikainen J P, Collin A, Suominen K A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 090404
- [93] Kasamatsu K, Tsubota M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 100402
- [94] Wang C J, Cao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [95] Sinha S, Nath R, Santos L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 270401
- [96] Hu H, Ramachandran B, Pu H, Liu X J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 010402
- [97] Xu X Q, Han J H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 200401
- [98] Zhou X F, Zhou J, Wu C J 2011 *Phys. Rev. A* **84** 063624
- [99] Liu C F, Fan H, Zhang Y C, Wang D S, Liu W M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 053616
- [100] Wang X, Tan R B, Du Z J, Zhao W Y, Zhang X F, Zhang S G 2014 *Chin. Phys. B* **23** 070308
- [101] Fetter A L 2014 *Phys. Rev. A* **89** 023629
- [102] Sakaguchi H, Umeda K 2016 *J. Phys. Soc. Jpn.* **85** 064402
- [103] Sakaguchi H 2017 *Phys. Rev. A* **96** 043620
- [104] Wang H, Wen L H, Yang H, Shi C X, Li J H 2017 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **50** 155301
- [105] Kato M, Zhang X F, Saito H 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043605
- [106] Shi C X, Wen L H, Wang Q B, Yang H, Wang H 2018 *J. Phys. Soc. Jpn.* **87** 094003
- [107] Li J, Liu W M 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 110302 (in Chinese) [李吉, 刘伍明 2018 物理学报 **67** 110302]
- [108] Pu H, Raghavan S, Bigelow N P 2001 *Phys. Rev. A* **63** 063603
- [109] Ogawa S I, Möttöen M, Nakahara M, Ohmi T, Shimada H 2002 *Phys. Rev. A* **66** 013617
- [110] Itin A P, Morishita T, Satoh M, Tolstikhin O I, Watanabe S 2006 *Phys. Rev. A* **73** 063615
- [111] Isoshima T, Machida K 2002 *Phys. Rev. A* **66** 053610
- [112] Mizushima T, Machida K, Kita T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 030401
- [113] Saito H, Kawaguchi Y, Ueda M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 065302
- [114] Saito H, Kawaguchi Y, Ueda M 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013621
- [115] Turner A M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 080603
- [116] Pietila V, Möttöen M, Virtanen S M 2007 *Phys. Rev. A* **76** 023610
- [117] Ji A C, Liu W M, Song J L, Zhou F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 010402
- [118] Liu C F, Liu W M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 033602
- [119] Liu C F, Wan W J, Zhang G Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 200306 (in Chinese) [刘超飞 王文娟 张赣源 2013 物理学报 **62** 200306]
- [120] Song S W, Zhang Y C, Zhao H, Wang Xuan, Liu W M 2014 *Phys. Rev. A* **89** 063613
- [121] Lovegrove J, Borgh M O, Ruostekoski 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 075301
- [122] Zhao D, Song S W, Wen L, Li Z D, Luo H G, Liu W M 2015 *Phys. Rev. A* **91** 013619
- [123] Gautam S, Adhikari S K 2016 *Phys. Rev. A* **93** 013630
- [124] Liu J S, Li J, Liu W M 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 130305 (in Chinese) [刘静思 李吉 刘伍明 2017 物理学报 **66** 130305]
- [125] Li J, Yu Y M, Zhuang L, Liu W M 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043633

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

The research progress of topological properties in spinor Bose-Einstein condensates^{*}Wang Li¹⁾ Liu Jing-Si²⁾ Li Ji³⁾ Zhou Xiao-Lin⁴⁾ Chen Xiang-Rong¹⁾Liu Chao-Fei^{5)†} Liu Wu-Ming^{6)7)‡}¹⁾ (*College of Physics, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)²⁾ (*Beijing Jingshan School Chaoyang Branch School, Beijing 100012, China*)³⁾ (*College of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong, 030619, China*)⁴⁾ (*School of Physics and Electronic engineering, Sichuan Normal University, Chengdu 610101, China*)⁵⁾ (*School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China*)⁶⁾ (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)⁷⁾ (*School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(Received 28 October 2019; revised manuscript received 2 December 2019)

Abstract

Most of the atoms that realize Bose-Einstein condensation have internal spin degree of freedom. In the optical potential trap, the internal spin of the atom is thawed, and the atom can be condensed into each hyperfine quantum state to form the spinor Bose-Einstein condensate. Flexible spin degrees of freedom become dynamic variables related to the system, which can make the system appear novel topological quantum states, such as spin domain wall, vortex, magnetic monopole, skyrmion, and so on. In this paper, the experimental and theoretical study of spinor Bose-Einstein condensation, the types of topological defects in spinor Bose-Einstein condensate, and the research progress of topological defects in spinor two-component and three-component Bose-Einstein condensate are reviewed.

Keywords: spinor Bose - Einstein condensation, spin domain wall, vortex, magnetic monopole, skyrmion**PACS:** 03.75.Lm, 03.75.Hh, 03.75.Nt, 05.30.Jp**DOI:** 10.7498/aps.69.20191648

^{*} Project supported by the NK RDP, China (Grant No. 2016YFA0301500) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11434015, 61835013, 11875149, 61565007).

[†] Corresponding author. E-mail: liuchaofei0809@163.com

[‡] Corresponding author. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn

离散可积系统：多维相容性

张大军

Discrete integrable systems: Multidimensional consistency

Zhang Da-Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010202 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191647

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191647>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

Birkhoff系统的离散最优控制及其在航天器交会对接中的应用

Discrete optimal control for Birkhoffian systems and its application to rendezvous and docking of spacecrafts

物理学报. 2017, 66(8): 084501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.084501>

强迫Lorenz系统的可预报性研究

Predictability of forced Lorenz system

物理学报. 2017, 66(6): 060503 <https://doi.org/10.7498/aps.66.060503>

多维温度场对光纤环Shupe效应误差影响的理论分析

Shupe effect of fiber sensing coils in multidimensional thermal field

物理学报. 2018, 67(1): 010701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20170271>

离散发热器件基于(火积)耗散率最小和最高温度最小的构形优化比较

Comparative studies on constructal optimizations of discrete heat generation components based on entransy dissipation minimization and maximum temperature minimization

物理学报. 2017, 66(20): 204401 <https://doi.org/10.7498/aps.66.204401>

一种基于压缩感知和 multidimensional 混沌系统的多过程图像加密方案

Multi-process image encryption scheme based on compressed sensing and multi-dimensional chaotic system

物理学报. 2019, 68(20): 200501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190553>

基于Hadoop大数据平台和无简并高维离散超混沌系统的加密算法

Encryption algorithm based on Hadoop and non-degenerate high-dimensional discrete hyperchaotic system

物理学报. 2017, 66(23): 230503 <https://doi.org/10.7498/aps.66.230503>

专题：非线性物理

离散可积系统：多维相容性*

张大军†

(上海大学数学系, 上海 200444)

(2019 年 10 月 28 日收到; 2019 年 11 月 14 日收到修改稿)

对比已有完善而系统理论的微分方程领域, 差分方程理论尚处于发展之中. 近年来离散可积理论的进展, 带来了差分方程理论的革命. 多维相容性是伴随离散可积系统研究出现的新的概念, 作为对离散可积性的一种理解, 提供了构造离散可积系统的 Bäcklund 变换、Lax 对和精确解的工具. 本文旨在综述多维相容性的概念及其在离散可积系统研究中的应用.

关键词：离散可积系统, 多维相容性

PACS: 02.30.Ik, 05.45.Yv

DOI: 10.7498/aps.69.20191647

1 引言

离散系统泛指含有离散自变量的常差分、微分差分、偏差分系统、以及变换和映射等. 由于缺少导数、积分等局部化的数学工具, 对于非线性离散系统的研究, 往往伴随着新的数学概念、理论和方法的出现.

现代可积理论兴起于 20 世纪 60 年代中期孤立子的命名^[1]、反散射变换方法的建立^[2]和 Lax 对概念的提出^[3], 参见文献^[4]. 早期对离散可积系统的探索主要是可积离散化, 早在 20 世纪 70 年代: Case 和 Kac^[5]对 Schrödinger 谱问题的离散以及 Ablowitz 和 Ladik^[6–8]对 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur(AKNS)谱问题的离散建立了基于差分的反散射变换过程; Hirota^[9–11]对双线性方程的离散利用双线性 Bäcklund 变换与 Lax 对的联系获得了一系列离散可积系统. 进入 80 年代后, 对离散可积系统的研究逐渐向形成独立于连续系统的研究方法, 系统进展有: 京都学派 Date 等^[12–16]和 Ueno 等^[17]对 Sato 理论的离散; 荷兰学者 Nijhoff

等^[18–22]和 Quispel 等^[23]基于 Fokas 和 Ablowitz^[24]的直接线性化格式以及 Levi 和 Benguria^[25]的变换与离散的同等性认识发展起来的构造和研究离散可积系统的系统方法. 进入 90 年代以后, 离散可积系统的显著进展包括: 超离散可积系统的提出及其连续极限的建立^[26,27], 基于奇点囿禁的奇点理论与可积性的联系的发现^[28,29], 奇点囿禁在可积性判别上的不充分性的发现^[30], 以及基于代数熵理论对可积性的判别^[31]. 这些进展相继推动了超离散可积系统、离散 Painlevé 方程、可积性检验等方面的发展.

进入新世纪后, 离散可积系统继续迎来新的发展. Sakai^[32]基于有理曲面理论和 Blow-up 分析对离散 Painlevé 方程的分类, 揭示了离散 Painlevé 方程丰富的代数几何结构, Bobenko 和 Suris^[33]、Adler 等^[34]和 Nijhoff 等^[35,36]学者对于“多维相容性”的理解以及对若干离散可积系统的分类, 各种精确求解方法在离散可积系统中相继实现^[37–45], 等等, 一系列进展标志着对离散可积系统的研究进入到一个新的阶段. 2009 年在著名的英国剑桥牛顿所 (The Isaac Newton Institute for

* 国家自然科学基金 (批准号: 11875040, 11631007) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: djzhang@staff.shu.edu.cn

Mathematical Sciences) 举办的为期半年的离散可积系统主题研讨活动, 是对当时离散可积系统蓬勃发展的一个反映.

可积系统与数学和物理的众多分支都有联系, 已经渗透到数学物理的各个领域^[4]. 在数学方面, 离散可积系统的发展伴随着离散几何和离散复分析的发展, 这与连续意义下可积系统丰富的几何背景以及分析的工具在其研究中的重要作用是分不开的. 对与离散可积系统相关的差分算子理论与复分析方面的研究, 如势函数的渐近性、散射理论、Riemann-Hilbert 问题、解的长时间渐近分析、初边值问题等等, 建议参考文献 [42,46]. 除了提及的上述进展, 还有如离散几何、对称理论、Galois 理论、Lagrangian 多形式理论等许多方面的重要进展. 值得指出的是, 最近由 Hietarinta, Joshi 和 Nijhoff^[47]完成的一部专著《Discrete Systems and Integrability》已经出版. 读者可以参考了解其更多内容. 国际上每两年一届的 SIDE 会议 (Symmetries and Integrability of Difference Equations) 是离散可积系统及其相关问题的首要国际会议, 1994 年始于加拿大 Montreal, 至今已经成功举办 13 届, 其中 SIDE-10 于 2012 年在我国宁波召开.

本文将在第二、三节重点介绍多维相容性的概念及其应用. 希望通过具体的例子让更多读者了解离散可积系统及其中的概念和方法.

2 多维相容性

离散可积系统从未独立于连续系统. 下面首先来介绍两种引入离散变量的途径.

2.1 离散变量的引入

离散化是引入离散变量的方式之一. 从熟悉的 AKNS 谱问题开始:

$$\Phi_x = M\Phi, \quad M = \begin{pmatrix} \eta & u \\ v & -\eta \end{pmatrix}, \quad \Phi = (\phi_1, \phi_2)^T, \quad (1)$$

其中 $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, η 是谱参数, 为了方便, 记 $M = M(\eta, U)$, $U = (u, v)^T$. 定义

$$\Phi_{n+j} = \Phi(x + j\epsilon), \quad (2)$$

然后利用差分 $(\Phi_{n+1} - \Phi_n)/\epsilon$ 替代导数 Φ_x , 得到

$$\Phi_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon\eta & \epsilon u \\ \epsilon v & 1 - \epsilon\eta \end{pmatrix} \Phi_n, \quad \Phi_n = (\phi_{1,n}, \phi_{2,n})^T. \quad (3)$$

Ablovitz-Ladik (AL) 谱问题指^[7]

$$\Phi_{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda & Q_n \\ R_n & 1/\lambda \end{pmatrix} \Phi_n, \quad \Phi_n = (\phi_{1,n}, \phi_{2,n})^T. \quad (4)$$

在 (2) 式和

$$(Q_n, R_n) = \epsilon(u, v), \quad \lambda = e^{\epsilon\eta} \quad (5)$$

之下, 对 $\Phi_{n+1} = \Phi(x + \epsilon)$ 在 $\epsilon = 0$ 展开, 并取 $\epsilon \rightarrow 0$, 则 AKNS 谱问题 (1) 式可以作为领头项从 AL 谱问题 (4) 式中恢复出来, 同时谱参数从 λ -平面变到 η -平面.

(2) 式是我们所熟悉的数值 (差分) 离散: 如图 1, 将区间 $[x_0, x]$ 等分成 n 份, 步长为 ϵ . 在 x 点, Φ_n 与 $\Phi(x)$ 仍然表示相同的数值, 但是自变量的空间已经从实数域 $\mathbb{R}$ 变为整数域 $\mathbb{Z}$. 差分离散是计算连续极限的基础, 但是对于可积系统而言, 差分离散 (也称为直接离散) 不足以保持原有系统的可积特征. 关于由 AL 谱问题 (4) 式引出的半离散 AKNS 系统, 读者可以参考文献 [48–51].

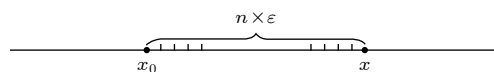


图 1 $[x_0, x]$ 上的数值离散

Fig. 1. Numerical discretisation on $[x_0, x]$.

递推关系可以很自然地视为离散的方程. 例如 Hermite 正交多项式 $\{H_n(x)\}$ 满足递推关系

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

第 I 型 Bessel 函数

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)}$$

满足方程常微分方程

$$x^2 w'' + x w' + (x^2 - \alpha^2) w = 0,$$

其中 x 是自变量, α 是参数. 由此方程可以建立 Bessel 函数的递推关系 (参考文献 [47] 的第 37 页)

$$x(w_{\alpha+1} + w_{\alpha-1}) - 2\alpha w_\alpha = 0,$$

此时 x 和 α 互换了角色, x 是参数, α 成为自变量. 再如, Painlevé II 方程

$$f''(t) = 2f^3 + tf - \alpha$$

的解满足递推关系

$$f_{\alpha+1}(t) = -f_{\alpha}(t) - \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{f'_{\alpha}(t) - f_{\alpha}^2(t) - \frac{t}{2}},$$

这里 $f'(t)$ 表示对 t 的导数.

在上面 Bessel 函数和 Painlevé II 方程的解的例子中, 递推关系分别来自于两个微分方程的解之间的变换, 可以视为通过变换建立起来的解之间的叠加关系. 这是由连续系统到离散系统的常见过程. 尤其, KdV 方程的 Bäcklund 变换的非线性叠加公式提供了对 KdV 方程的完美的离散化.

对于著名的 KdV 方程,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (6)$$

Wahlquist 和 Estabrook^[52] 在 1973 年发现形如

$$(\tilde{w} + w)_x = 2\lambda - \frac{1}{2}(\tilde{w} - w)^2, \quad (7a)$$

$$(\tilde{w} - w)_t = \frac{1}{2}[(\tilde{w} - w)^3]_x - 6\lambda(\tilde{w} - w)_x - (\tilde{w} - w)_{xxx} \quad (7b)$$

的非线性 Bäcklund 变换, 其中 w 满足势 KdV 方程

$$w_t + 3(w_x)^2 + w_{xxx} = 0, \quad (8)$$

$u = w_x$ 满足 KdV 方程 (6).

利用 Bäcklund 变换 (7a) 式可以建立 KdV 方程的解的非线性叠加公式. 首先在 (7a) 式中, 从同样的种子解 w 出发, 分别记由 $\lambda = \lambda_1$ 和 $\lambda = \lambda_2$ 引出的 $\tilde{w}$ 为 w_1 和 w_2 , 即

$$(w_1 + w)_x = 2\lambda_1 - \frac{1}{2}(w_1 - w)^2, \quad (9a)$$

$$(w_2 + w)_x = 2\lambda_2 - \frac{1}{2}(w_2 - w)^2. \quad (9b)$$

接下来, 在 (7a) 式中取 $w = w_1$, $\lambda = \lambda_2$, 记 $\tilde{w} = w_{12}$, 有

$$(w_{12} + w_1)_x = 2\lambda_2 - \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2; \quad (10a)$$

取 $w = w_2$, $\lambda = \lambda_1$, 记 $\tilde{w} = w_{21}$, 有

$$(w_{21} + w_2)_x = 2\lambda_1 - \frac{1}{2}(w_{21} - w_2)^2. \quad (10b)$$

上述过程可以描述为图 2.

可以证明 w_{12} 和 w_{21} 能够相等 (参考文献 [49]). 进一步, 从 (9) 式和 (10) 式得到

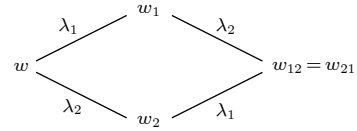


图 2 Bäcklund 变换解的交换性质

Fig. 2. Permutation property of Bäcklund transformation.

$$4(\lambda_1 - \lambda_2) = (w_1 - w_2)(w_{12} - w), \quad (11)$$

称为 (势)KdV 方程解的非线性叠加公式, 也称为 Bianchi 等式^①, 还称为离散的势 KdV 方程^[47]. 作为离散的方程时, (11) 式通常写为

$$(w_{n+1,m} - w_{n,m+1})(w_{n,m} - w_{n+1,m+1}) = p - q, \quad (12)$$

其中 p 和 q 分别是对应于 n -方向和 m -方向的方向参数.

modified KdV(mKdV) 方程

$$u_t = 6u^2u_x - u_{xxx} \quad (13)$$

和 sine-Gordon 方程

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} = \sin \theta \quad (14)$$

拥有形式相同的非线性叠加公式 (文献 [53,54]):

$$\tan \frac{\theta_{12} - \theta}{4} = \frac{p+q}{p-q} \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}, \quad (15)$$

即

$$p \sin \frac{\theta_{12} - \theta_1 + \theta_2 - \theta}{4} = q \sin \frac{\theta_{12} + \theta_1 - \theta_2 - \theta}{4}. \quad (16)$$

此方程经过变换 $u = e^{\frac{i\theta}{2}}$ 以后, 可以写为

$$p(u_{12}u_2 - u_1u) = q(u_{12}u_1 - u_2u), \quad (17)$$

此方程也称为离散势 mKdV 方程. 有意思的是, 离散的 sine-Gordon 方程形如

$$p \sin \frac{\varphi_{12} + \varphi - \varphi_1 - \varphi_2}{4} = q \sin \frac{\varphi_{12} + \varphi + \varphi_1 + \varphi_2}{4}, \quad (18)$$

由 Hirota^[11] 和 Orfanidis^[55] 先后得到, 与 (16) 式只有部分符号差别, 经过同样的变换 $u = e^{\frac{i\varphi}{2}}$ 以后, 可以写为^[18]

$$p(u_{12}u - u_1u_2) = q(uu_1u_2u_{12} - 1). \quad (19)$$

2 阶 AKNS 方程组

$$u_t = u_{xx} - 2u^2v, \quad v_t = -v_{xx} - 2v^2u \quad (20)$$

的 Bäcklund 变换的非线性叠加公式形如

$$(u_1 - u_2)(uv_{12} + 1) + (p - q)u = 0, \quad (21a)$$

^①Luigi Bianchi 最早得到了 sine-Gordon 方程解的非线性叠加公式 (15) 式, 并证明了形如图 2 的解的交换性质^[56,57].

$$(v_1 - v_2)(uv_{12} + 1) - (p - q)v_{12} = 0, \quad (21b)$$

由 Konopelchenko^[58] 于 1982 年获得.

Bäcklund 变换提供了引入离散变量的一种方式. (9a) 式中 w_1 可视为 w 沿一个方向上的平移, (9b) 式中 w_2 可视为 w 沿另一个方向上的平移. 非线性叠加公式 (11) 式是这两个方向上平移相容性的结果. 同时, (9a) 式作为一个独立方程, 也可视为一个微分-差分方程.

Bäcklund 变换应用于非线性模型, Darboux 变换的目标对象则是在线性层面 (Lax 对). 对于给定的连续谱问题, 存在与之相应的连续等谱发展方程族; 它的 Darboux 变换可视为一个离散的谱问题, 与原有连续谱问题之间的相容性引出的微分差分方程 自然给出连续等谱发展方程族的解之间的 Bäcklund 变换. 这一漂亮的联系首先由 Levi 和 Benguria^[25,59] 发现, 对于研究和理解离散可积系统具有重要意义. AKNS 谱问题 (1) 式存在如下 Darboux 变换^[60]:

$$\tilde{\Phi} = T\Phi, \quad T = T(\gamma, U, \tilde{U}) = \begin{pmatrix} 2(\eta - \gamma) + u\tilde{v} & u \\ \tilde{v} & 1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

式中 $U = (u, v)^T$. 作为 Darboux 变换, $\tilde{\Phi}$ 满足 AKNS 谱问题 (1) 式, 即 $\tilde{\Phi}_x = \tilde{M}\Phi$, $\tilde{M} = M(\eta, \tilde{U})$, 这相当于要求 (1) 式与 (22) 式相容, 即 $(\tilde{\Phi})_x = (\tilde{\Phi}_x)$, 由此有

$$T_x - \tilde{M}T + TM = 0, \quad (23)$$

引出的方程

$$u_x = \tilde{u} - u - u^2\tilde{v}, \quad v_x = v - \tilde{v} + u\tilde{v}^2, \quad (24)$$

可视为连续的等谱 AKNS 方程族的 Bäcklund 变换. 作为离散的谱问题, (22) 式引出一个新的半离散 AKNS 族^[61,62], 可视为微分-差分 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程族 Lax 三重组的对称约束的结果^[63]. 若考虑两个不同方向上的 Darboux 变换:

$$\tilde{\Phi} = T(p/2, U, \tilde{U})\Phi, \quad \hat{\Phi} = T(q/2, U, \hat{U})\Phi, \quad (25)$$

作为离散的 Lax 对, 其相容性得到方程 (21), 且在适当的连续极限下, (21) 式引出 (20) 式 (参考文献 [43]). 显然, 由 Darboux 变换作为 Lax 对引出的 4 点方程 $Q(U, \tilde{U}, \hat{U}, \hat{\tilde{U}}; p, q) = 0$ 即为 4 个解之间的非线性叠加公式. 更多的关于 Darboux 变换作为离散谱问题的例子可见文献 [64].

当作为离散的方程时, 变换的符号意义可以理解为

$$\begin{aligned} u &= u_{n,m}, \\ \tilde{u} &= u_{n+1,m}, \\ \hat{u} &= u_{n,m+1}, \\ \hat{\tilde{u}} &= u_{n+1,m+1}, \end{aligned} \quad (26)$$

变换引入的参数 p 和 q 分别表示 n -方向和 m -方向上的链参数. 如图 3 所示.

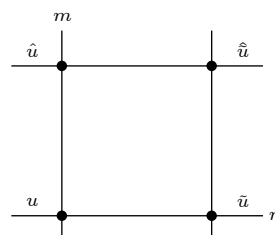


图 3 变换与平面网格
Fig. 3. Map and lattice.

2.2 多维相容性

对于离散可积系统的研究需要引入新的概念. 下面介绍离散可积系统的“多维相容性”的概念.

回到 (势)KdV 方程解的非线性叠加公式 (12) 式, 这一叠加关系可以重复下去. 为了方便, 我们采用 (26) 式中的符号, 将 (12) 式写为

$$(u - \hat{u})(\tilde{u} - \hat{\tilde{u}}) = p - q. \quad (27)$$

这是一个定义在平面网格上的四方格方程. 我们引入第三个方向 l , 该方向上的平移表示为 $\bar{u} = u_{n,m,l+1}$, 方向参数为 r , 如图 4 所示.

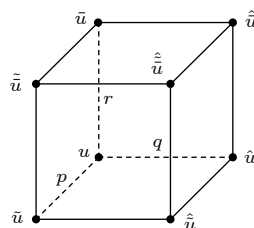


图 4 相容立方体
Fig. 4. Consistent cube.

观察方程在 $(\tilde{\cdot}, p)$ 和 $(\hat{\cdot}, q)$ 互换下保持不变, 要求 $(\bar{\cdot}, r)$ 与另外两个方向之间也存在对称性, 则有

$$(u - \tilde{u})(\tilde{u} - \bar{u}) = p - r, \quad (28a)$$

$$(u - \hat{u})(\bar{u} - \hat{\tilde{u}}) = r - q, \quad (28b)$$

视 (27) 式定义在图 4 中立方体的底面, (28a) 式和

(28b) 式则分别定义在左侧和后侧. 如何体现这种维数扩充后的相容性? 首先, 由上述 3 个方程有

$$\widehat{u} = \frac{p-q}{\widehat{u}-\widetilde{u}} + u, \quad (29a)$$

$$\widetilde{u} = \frac{r-q}{\widehat{u}-\widetilde{u}} + u, \quad (29b)$$

$$\widetilde{\widetilde{u}} = \frac{p-r}{\widehat{u}-\widetilde{u}} + u, \quad (29c)$$

引入方向 l 以后的相容性体现在 $\overline{(29a)} = \widehat{(29b)} = \widetilde{(29c)}$. 将 (29a) 式和 (29b) 式代入到 (29c) 算得

$$\widetilde{\widetilde{u}} = \frac{(q-p)\widetilde{u}\widehat{u} + (r-q)\widehat{u}\widetilde{u} + (p-r)\widetilde{u}\widehat{u}}{(q-r)\widetilde{u} + (p-q)\widehat{u} + (r-p)\widetilde{\widetilde{u}}}.$$

此式右端在任意交换 $(\sim, p)$, $(\sim, q)$ 和 $(\sim, r)$ 下都保持不变, 说明从 $\overline{(29a)}$ 和 $\widehat{(29b)}$ 也将得到同样的 $\widetilde{\widetilde{u}}$.

方程 (27) 的这种性质称 $\sim$ 为该方程的 3 维相容性, 也称为立方体相容 (consistent-around-the-cube (CAC)), 它体现了 (27) 式自身的性质. 方程 (17) 也具有同样的性质. 一般地, 对于一个定义在平面四方格上的方程

$$Q(u, \widetilde{u}, \widehat{u}, \widetilde{\widetilde{u}}; p, q) = 0, \quad (30)$$

将其嵌入到图 4 中立方体的 6 个面中, 得到

$$\begin{aligned} Q(u, \widetilde{u}, \widehat{u}, \widetilde{\widetilde{u}}; p, q) &= 0, & Q(\widetilde{u}, \widetilde{\widetilde{u}}, \widehat{u}, \widetilde{\widetilde{u}}; p, q) &= 0, \\ Q(u, \widetilde{u}, \widetilde{\widetilde{u}}, \widehat{u}; p, r) &= 0, & Q(\widehat{u}, \widetilde{\widetilde{u}}, \widetilde{\widetilde{u}}, \widehat{u}; p, r) &= 0, \\ Q(u, \widehat{u}, \widetilde{\widetilde{u}}, \widetilde{\widetilde{u}}; q, r) &= 0, & Q(\widetilde{\widetilde{u}}, \widehat{u}, \widetilde{\widetilde{u}}, \widetilde{\widetilde{u}}; q, r) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

如果从上式左侧的 3 个方程中分别解出 $\widehat{u}$, $\widetilde{u}$ 和 $\widetilde{\widetilde{u}}$, 代入到右侧的 3 个方程后得到同样的 $\widetilde{\widetilde{u}}$, 则称方程 (30) 具有 3 维相容性.

对于离散系统而言, 上述多维相容性将提供一系列的可积特征, 后文将进一步介绍. 对于一个 d -维的离散方程, 如果嵌入到一个 $(d+1)$ -维链后, 所有的 d -维子链都是相容的, 则称原 d -维离散方程具有 $(d+1)$ -维相容性. 对于 2 维离散方程, 这种多维相容性即为 3 维相容性, 或 CAC 性质.

2.3 ABS 方程

本世纪初, 多维相容性逐渐被系统地认识并作为工具应用到离散系统的研究中^[65,35,36,33]. 2003 年, Adler, Bobenko 和 Suris (ABS)^[34] 发表了他们在多维相容性的基础上对四方格方程的分类, 他们得到的方程列表被统称为 ABS 方程.

ABS 在假设方程 (30) 具有 3 维相容性的基础

上, 进一步要求 (30) 式满足:

- (i) 仿线性 (affine linear),
- (ii) 在正方形对称群 D_4 下不变,
- (iii) 四面体性质 (tetrahedron property).

在前两条要求下方程 (30) 的一般形式可以设为

$$\begin{aligned} & k_0 u \widetilde{u} \widehat{u} \widetilde{\widetilde{u}} + k_1 (u \widetilde{u} \widehat{u} + u \widetilde{\widetilde{u}} \widehat{u} + u \widehat{u} \widetilde{\widetilde{u}} + \widetilde{u} \widehat{u} \widetilde{\widetilde{u}}) \\ & + k_2 (\widetilde{u} \widehat{u} + u \widehat{u}) + k_3 (u \widetilde{u} + \widehat{u} \widetilde{u}) + k_4 (u \widehat{u} + \widetilde{u} \widehat{u}) \\ & + k_5 (u + \widetilde{u} + \widehat{u} + \widetilde{\widetilde{u}}) + k_6 = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

其中 k_i 都是待定系数; 四面体性质指 $\widehat{u}$ 只与 $\widetilde{u}$, $\widetilde{\widetilde{u}}$ 和 $\widehat{u}$ 有关, 而与 u 无关, 即 $(\widetilde{u}, \widehat{u}, \widetilde{\widetilde{u}}, \widehat{u})$ 四个点在立方体 (图 4) 中构成一个四面体. ABS 证明了满足上面 3 条要求的 3 维相容方程 (30) 只有 9 个 (允许存在 Möbius 变换), 并分别命名为 H1, H2, H3(δ), A1(δ), A2, Q1(δ), Q2, Q3(δ), Q4:

$$H1: (u - \widehat{u})(\widetilde{u} - \widehat{u}) - p + q = 0, \quad (33a)$$

$$H2: (u - \widehat{u})(\widetilde{u} - \widehat{u}) - (p - q)(u + \widetilde{u} + \widehat{u} + \widetilde{\widetilde{u}} + p + q) = 0, \quad (33b)$$

$$H3(\delta): p(u \widetilde{u} + \widehat{u} \widetilde{\widetilde{u}}) - q(u \widehat{u} + \widetilde{u} \widetilde{\widetilde{u}}) + \delta(p^2 - q^2) = 0, \quad (33c)$$

$$A1(\delta): p(u + \widehat{u})(\widetilde{u} + \widehat{u}) - q(u + \widetilde{u})(\widehat{u} + \widetilde{\widetilde{u}}) - \delta^2 pq(p - q) = 0, \quad (33d)$$

$$\begin{aligned} A2: & p(1 - q^2)(u \widetilde{u} + \widehat{u} \widetilde{\widetilde{u}}) - q(1 - p^2)(u \widehat{u} + \widetilde{u} \widetilde{\widetilde{u}}) \\ & - (p^2 - q^2)(1 + u \widetilde{u} \widehat{u} \widetilde{\widetilde{u}}) = 0, \end{aligned} \quad (33e)$$

$$\begin{aligned} Q1(\delta): & p(u - \widehat{u})(\widetilde{u} - \widehat{u}) - q(u - \widetilde{u})(\widehat{u} - \widetilde{\widetilde{u}}) \\ & + \delta^2 pq(p - q) = 0, \end{aligned} \quad (33f)$$

$$\begin{aligned} Q2: & p(u - \widehat{u})(\widetilde{u} - \widehat{u}) - q(u - \widetilde{u})(\widehat{u} - \widetilde{\widetilde{u}}) \\ & + pq(p - q)(u + \widetilde{u} + \widehat{u} + \widetilde{\widetilde{u}} - p^2 + pq - q^2) = 0, \end{aligned} \quad (33g)$$

$$\begin{aligned} Q3(\delta): & p(1 - q^2)(u \widehat{u} + \widetilde{u} \widetilde{\widetilde{u}}) - q(1 - p^2)(u \widetilde{u} + \widehat{u} \widetilde{\widetilde{u}}) \\ & - (p^2 - q^2) \left(\widetilde{u} \widehat{u} + u \widehat{u} + \frac{\delta^2(1 - p^2)(1 - q^2)}{4pq} \right) = 0, \end{aligned} \quad (33h)$$

$$\begin{aligned} Q4: & \text{sn}(p)(u \widetilde{u} + \widehat{u} \widetilde{\widetilde{u}}) - \text{sn}(q)(u \widehat{u} + \widetilde{u} \widetilde{\widetilde{u}}) \\ & - \text{sn}(p - q)(\widetilde{u} \widehat{u} + u \widehat{u}) \\ & + \text{sn}(p)\text{sn}(q)\text{sn}(p - q)(1 + k^2 u \widetilde{u} \widehat{u} \widetilde{\widetilde{u}}) = 0, \end{aligned} \quad (33i)$$

其中, H1 即为离散势 KdV 方程 (27), H3($\delta = 0$) 为离散势 mKdV 方程 (17) ($u \rightarrow i^{n+m}u$), Q1($\delta =$

0) 为离散的 Schwarzian KdV 方程, 也称为交比 (cross-ratio) 方程, $A1(\delta)$ 在 $u \rightarrow (-1)^{n+m}u$ 下即为 $Q1(\delta)$, $A2$ 在 $u \rightarrow u^{(-1)^{n+m}}$ 下为 $Q3(\delta = 0)$, $Q4$ 是著名的 Krichever-Novikov 方程的 Bäcklund 变换的非线性叠加公式, 原型中系数用 Weierstrass 椭圆函数表示^[34,66], (33i) 中 Jacobi 椭圆函数的参数化形式来自于 Hietarinta^[67], 式中 k 为 Jacobi 椭圆函数的模 (modulus).

2.4 离散 Boussinesq 型方程

离散的势 Boussinesq 方程是平面 9 点方程, 定义在 3×3 格子上:

$$\begin{aligned} & \frac{P-Q}{x_{11}-x_{20}} - \frac{P-Q}{x_{02}-x_{11}} \\ & = (x_{00}-x_{21})(x_{10}-x_{01}) \\ & \quad - (x_{01}-x_{22})(x_{21}-x_{12}), \end{aligned} \quad (34)$$

式中 P, Q 分别表示 n, m 的方向参数, $x_{ij} = x_{n+i, m+j}$. 这类方程早期由 Nijhoff 等^[68-70] 学者构造并研究. 借助于其他 (因) 变量, (34) 式可以改写为 (参考文献^[65])

$$\tilde{y} - x\tilde{x} + z = 0, \quad \hat{y} - x\hat{x} + z = 0, \quad (35a)$$

$$y - x\hat{x} + \hat{z} - \frac{P-Q}{\tilde{x}-\hat{x}} = 0. \quad (35b)$$

取向量 $\mathbf{u} = (x, y, z)^T$, 方程可以视为向量意义下的四方格系统, 并具有 3 维相容性.

2011 年, Hietarinta^[71] 在 (35) 式形式的基础上, 寻找了可能的离散 Boussinesq 型的 3 维相容系统, 代表方程为 (考虑到对称性和 Möbius 变换):

$$[B-2]: \quad \tilde{y} = x\tilde{x} - z, \quad \hat{y} = x\hat{x} - z, \quad (36a)$$

$$y = x\hat{x} - \hat{z} + b_0(\hat{x} - x) + b_1 + \frac{P-Q}{\tilde{x}-\hat{x}}, \quad (36b)$$

$$[A-2]: \quad \tilde{y} = z\tilde{x} - x, \quad \hat{y} = z\hat{x} - x, \quad (37a)$$

$$y = x\hat{z} - b_0x + \frac{P\tilde{x} - Q\hat{x}}{\tilde{z} - \hat{z}}, \quad (37b)$$

$$[C-3]: \quad \tilde{y}z = \tilde{x} - x, \quad \hat{y}z = \hat{x} - x, \quad (38a)$$

$$\hat{z}y = b_0x + b_1 + z\frac{P\tilde{y}\hat{z} - Q\hat{y}\tilde{z}}{\tilde{z} - \hat{z}}, \quad (38b)$$

式中 P, Q 仍然分别表示 n, m 的方向参数, b_i 都是任意常数, 有的 b_i 可以通过适当的变换去掉. 显然, [B-2] 是 (35) 式的推广. 文献^[71] 中还得到 [C-4] 方程, 现已证明与 [C-3] 之间存在 Möbius 变换, 故不再

列出.

2.5 不同方程间的 3 维相容性

离散的 sine-Gordon 方程 (19) 不是 3 维相容的, 但是它与离散势 mKdV 方程 (17) 一起可以实现立方体相容^[72]. 在符号 (26) 式下, 两个方程分别表示为

$$B1(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = p(u\hat{\tilde{u}} - \tilde{u}\hat{u}) - q(u\tilde{u}\hat{\tilde{u}} - 1) = 0, \quad (39)$$

和

$$B2(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = p(\hat{\tilde{u}}\tilde{u} - u\hat{u}) - q(\tilde{u}\hat{\tilde{u}} - u\hat{u}) = 0. \quad (40)$$

方程 (39) 在变换 $u \rightarrow (-1)^n u$ 下成为 (40) 式.

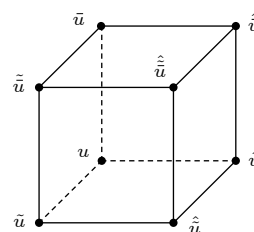


图 5 离散 sine-Gordon 和势 mKdV 方程的相容立方体
Fig. 5. The consistent cube for the discrete sine-Gordon equation and potential mKdV equation.

将方程 (39) 和方程 (40) 以如下方式放置于立方体的 6 个面:

$$\text{底: } B1(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = 0,$$

$$\text{顶: } B1(\tilde{u}, \hat{\tilde{u}}, u, u; p, q) = 0,$$

$$\text{左: } B1(u, \tilde{u}, \tilde{u}, \hat{\tilde{u}}; p, r) = 0,$$

$$\text{右: } B1(\hat{\tilde{u}}, \tilde{u}, \hat{\tilde{u}}, \hat{\tilde{u}}; p, r) = 0,$$

$$\text{后: } B2(u, \hat{u}, \tilde{u}, \hat{\tilde{u}}; q, r) = 0,$$

$$\text{前: } B2(\tilde{u}, \hat{\tilde{u}}, \tilde{u}, \hat{\tilde{u}}; q, r) = 0. \quad (41)$$

可以检验, 在给定初值 $u, \tilde{u}, \hat{u}, \tilde{u}$ 以后, $\hat{\tilde{u}}$ 是唯一的. 这说明两个方程按照如此方式放置于立方体的 6 个面时, 它们 (在一起) 具有 3 维相容性.

ABS 方程和离散 Boussinesq 型方程都是利用同一方程构成相容立方体, 而上面这个例子说明允许用不同的方程构成相容立方体. 文献^[73] 给出了更多的例子. Adler 等^[74] 和 Boll^[75] 对这种情况进行了讨论. 详细结果列于 Boll^[76] 的博士学位论文中.

2.6 高维的多维相容方程

对于定义在 6 面体上的 8 点 3 维 (标量) 离散方程, 如图 6(a), 目前已知的具有四维相容性 (见图 7) 的方程有^[34]

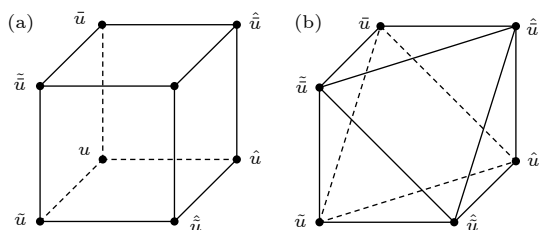


图 6 定义 3 维方程的 6 面体以及 8 面体
Fig. 6. Cube and octahedron for 3D equations.

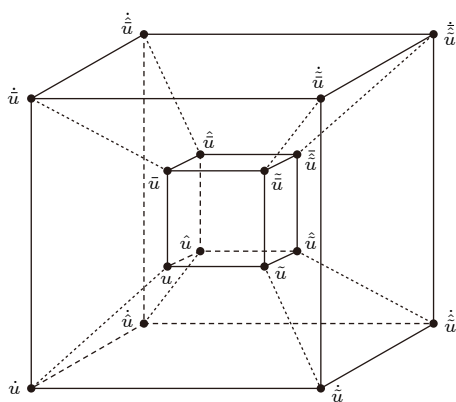


图 7 围绕超立方体的 4D 相容性
Fig. 7. 4D consistency around the hyper cube.

$$u\hat{\tilde{u}} - \hat{\tilde{u}}u + \tilde{u}\hat{u} - \hat{u}\tilde{u} = 0, \quad (42a)$$

$$\frac{(\tilde{u} - \bar{u})(\hat{u} - \hat{\tilde{u}})}{(\bar{u} - \hat{u})(\hat{\tilde{u}} - \tilde{u})} = \frac{(u - \tilde{u})(\hat{\tilde{u}} - \hat{u})}{(\tilde{u} - \hat{u})(\hat{u} - u)}. \quad (42b)$$

对于定义在 8 面体上的 6 点 3 维离散方程, 如图 6(b), 要求这些方程具有 4 维相容性, Adler 等^[77]于 2011 年进行了分类. 满足条件的方程共有 5 个:

$$\text{i) } \hat{\tilde{u}}\tilde{u} - \hat{\tilde{u}}\tilde{u} + \tilde{u}\hat{u} = 0, \quad (43a)$$

$$\text{ii) } \frac{(\hat{\tilde{u}} - \hat{u})(\hat{u} - \bar{u})(\tilde{u} - \tilde{u})}{(\hat{\tilde{u}} - \tilde{u})(\hat{u} - \hat{\tilde{u}})(\tilde{u} - \bar{u})} = 1, \quad (43b)$$

$$\text{iii) } (\hat{\tilde{u}} - \hat{u})\hat{u} + (\hat{u} - \tilde{u})\bar{u} + (\tilde{u} - \hat{\tilde{u}})\tilde{u} = 0, \quad (43c)$$

$$\text{iv) } \frac{(\hat{\tilde{u}} - \hat{u})}{\hat{u}} + \frac{(\hat{u} - \tilde{u})}{\bar{u}} + \frac{(\tilde{u} - \hat{\tilde{u}})}{\tilde{u}} = 0, \quad (43d)$$

$$\text{v) } \frac{(\hat{\tilde{u}} - \tilde{u})}{\bar{u}} = \hat{\tilde{u}} \left(\frac{1}{\tilde{u}} - \frac{1}{\hat{u}} \right). \quad (43e)$$

这些方程可以存在方向参数, 但是这些参数可

以通过适当的变换移除. 这些方程均已经出现于早期的文献中. 如: (42a) 式是离散的 BKP 方程, 又称为 Miwa 方程^[78]; (42b) 式被认为是离散 Schwarzian BKP, 首先从几何中得到^[79]; (43a) 式由 Hirota^[80]在 1981 年给出, 又称为离散广义 Toda 方程; (43b) 式, (43c) 式和 (43d) 式分别称为离散 Schwarzian KP、离散势 KP 和离散 modified KP 方程, 最早由 Nijhoff 等系统构造 (见文献^[20]中 (4) 式和 (23) 式和文献^[22]中 (4.16) 式); (43e) 式由 Date 等于 1982 年获得 (见文献^[13]中 (N-1) 方程).

3 多维相容性的应用

“多维相容性”不仅作为一类离散系统的可积性的理解, 还提供了研究手段, 可用于构造离散可积系统的 Bäcklund 变换、Lax 对、精确解等等.

3.1 Bäcklund 变换

Bäcklund 变换始于对伪球面的构造. Bianchi^[81]首先证明了 Bäcklund 给出的含任意参数的变换可以保持 sine-Gordon 方程不变. 变换不仅是引入离散变量的一个渠道, 也是联系离散与连续的一座桥梁. 通常, auto-Bäcklund 变换指同一方程的解之间的变换, nonauto-Bäcklund 变换指不同方程的解之间的变换.

“多维相容性”提供了非常直观的构造 auto-Bäcklund 变换的方法. 对于任意具有 3 维相容性的方程 (30), 将其置于相容立方体的 6 个面中, 如图 8 所示.

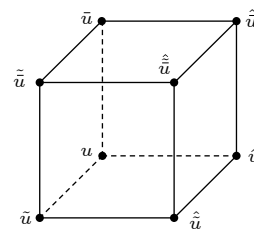


图 8 相容立方体
Fig. 8. The consistent cube.

底面和顶面的方程分别为

$$Q(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = 0, \quad (44a)$$

$$Q(\bar{u}, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = 0. \quad (44b)$$

当将 $\bar{u}$ 也视为方程 (44a) 的解时, 相容立方体侧面

的两个方程

$$Q(u, \tilde{u}, \bar{u}, \tilde{\bar{u}}; p, r) = 0, \quad (45a)$$

$$Q(u, \bar{u}, \hat{u}, \hat{\bar{u}}; r, q) = 0. \quad (45b)$$

自然地构成方程 (44a) 的一个 Bäcklund 变换. 对于 H1 方程 (33a) 来说, 多维相容性为它提供的 Bäcklund 变换是 (28) 式.

即使是对于两个方程合作构成相容立方体时, 上述思想依然有效. 对于离散 sine-Gordon 方程 (39) 和离散势 mKdV 方程 (40) 而言, 它们合作构成相容立方体 (见 (41) 式). 此时, 左侧和后侧的两个方程, 即

$$p(u\tilde{u} - \tilde{u}\bar{u}) - r(u\tilde{u}\tilde{\bar{u}} - 1) = 0, \quad (46a)$$

$$r(\hat{u}\hat{\bar{u}} - u\bar{u}) - q(\bar{u}\hat{u} - u\hat{u}) = 0, \quad (46b)$$

构成离散 sine-Gordon 方程 (39) 的 Bäcklund 变换. 不过这个变换没有对称性.

多维相容性也可以用于构造不同方程间的 nonauto-Bäcklund 变换. 下面以 Q2 和 Q1(δ) 为例来解释如何利用相容立方体建立 nonauto-Bäcklund 变换. 首先, 将 Q2 方程 (33g) 置于相容立方体的 6 个面. 然后在顶层方程 Q2($\bar{u}, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\bar{u}}; p, q) = 0$ 中引入关系

$$\bar{u} = \frac{v}{\epsilon} + \frac{\delta^2}{4\epsilon^2}, \quad (47)$$

对方程乘以 ϵ^2 以后取极限 $\epsilon \rightarrow 0$, 顶层方程变为

$$p(v - \hat{v})(\tilde{v} - \hat{\tilde{v}}) - q(v - \tilde{v})(\hat{v} - \hat{\tilde{v}}) + \delta^2 pq(p - q) = 0, \quad (48)$$

即 Q1(δ). 此时, 立方体的左侧和后侧的两个方程, 经过替换 (47) 式以及取极限以后, 得到

$$\delta(u - \tilde{u})(v - \tilde{v}) = -p[\delta^2(u + \tilde{u}) - 2v\tilde{v}] + p^2\delta(v + \tilde{v} + p\delta), \quad (48a)$$

$$\delta(u - \hat{u})(v - \hat{v}) = -q[\delta^2(u + \hat{u}) - 2v\hat{v}] + q^2\delta(v + \hat{v} + q\delta), \quad (48b)$$

这就是 Q2 与 Q1(δ) 之间的 nonauto-Bäcklund 变换.

2008 年, Atkinson 构造了 ABS 方程之间一系列 nonauto-Bäcklund 变换, 详细结果请参考文献 [73] 中表 3. 除了上述方法, Bäcklund 变换可以利用 Yang-Baxter 映射以及 ABS 方程的分解性质来构造, 相关内容读者可以分别参考文献 [82] 和文献 [83].

3.2 Lax 对

众所周知, Bäcklund 变换与 Lax 对存在密切

联系, 对于多维相容系统来说, 这种联系更加直接. 下面以 H1 方程 (33a) 为例, 利用其 3 维相容性引出的 Bäcklund 变换构造它的 Lax 对.

将 H1 的 Bäcklund 变换 (28) 式改写为

$$\tilde{\bar{u}} = \frac{p-r}{\bar{u}-\tilde{u}} + u, \quad \hat{\bar{u}} = \frac{r-q}{\hat{u}-\bar{u}} + u. \quad (49)$$

取 $\bar{u} = g/f$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{g}}{\tilde{f}} &= \frac{ug + (p-r-u\tilde{u})f}{g-\tilde{u}f}, \\ \frac{\hat{g}}{\hat{f}} &= \frac{ug + (q-r-u\hat{u})f}{g-\hat{u}f}. \end{aligned} \quad (50)$$

引入 $\Phi = (g, f)^T$, 上式改写为

$$\tilde{\Phi} = \gamma_1 M \Phi, \quad \hat{\Phi} = \gamma_2 N \Phi, \quad (51a)$$

$$M = \begin{pmatrix} u & p-r-u\tilde{u} \\ 1 & -\tilde{u} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} u & q-r-u\hat{u} \\ 1 & -\hat{u} \end{pmatrix}, \quad (51b)$$

式中 γ_i 可视为分式线性形式 (50) 式写成矩阵形式 (51) 式后保留的原分子、分母的公因子, 一般取为 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{|M|}}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{|N|}}$, 对于 H1 来说, γ_i 可以取为任意常数. 相容性 $\hat{\tilde{\Phi}} = \tilde{\hat{\Phi}}$ 引出

$$\hat{M}N = \tilde{N}M, \quad (52)$$

计算后可得 H1 方程 (33a).

在 H1 的 Lax 对 (51) 式中, 取 $\Phi = (\phi_1, \phi_2)^T$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, 从 $\tilde{\Phi} = M\Phi$ 中消去 ϕ_1 , 得到

$$\tilde{\phi}_2 = (u - \tilde{u})\tilde{\phi}_2 - (p - r)\phi_2, \quad (53)$$

此为 H1 方程谱问题的标量形式. 由此出发可以构造 H1 方程的无穷守恒律 [84].

上面以 H1 为例给出了利用 Bäcklund 变换构造 Lax 对的方法, 事实上, 所有的 ABS 方程都具有相同结构的 Lax 对, 且存在一般形式. 具体地, 对于任一 ABS 方程 $Q(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\bar{u}}; p, q) = 0$, 其 Lax 对为 (参考文献 [85])

$$\tilde{\Phi} = \gamma_1 M \Phi, \quad \hat{\Phi} = \gamma_2 N \Phi, \quad (54a)$$

其中

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} -\partial_{\tilde{u}}Q & -Q \\ \partial_{\tilde{u}}\partial_{\tilde{u}}Q & \partial_{\tilde{u}}Q \end{pmatrix}_{\hat{u}=\hat{\bar{u}}=0, q=r}, \\ N &= \begin{pmatrix} -\partial_{\hat{u}}Q & -Q \\ \partial_{\hat{u}}\partial_{\hat{u}}Q & \partial_{\hat{u}}Q \end{pmatrix}_{\tilde{u}=\tilde{\bar{u}}=0, p=r}, \end{aligned} \quad (54b)$$

$\gamma_1 = \sqrt{|M|}, \gamma_2 = \sqrt{|N|}$. 显然, 将矩阵谱问题改

写成标量形式后, 可以发现所有的 ABS 方程都具有类似于 (53) 式的二阶离散谱问题.

通常, 对于由一个方程构成相容立方体时, 由于方程的对称性, 其 Bäcklund 变换具有对称性, Lax 对也具有对称性, 即在上式 $\mathbf{M}$ 中, 将 $(\cdot, p)$ 换为 $(\cdot, q)$, 即得到 $\mathbf{N}$. 在文献 [86] 中搜集了更多的利用 3 维相容性构造 Lax 对的例子. 对于由两个方程构成相容立方体时, 例如 2.5 节中的离散 sine-Gordon 方程和势 mKdV 方程, 由它们的相容立方体构造的离散 sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换具有非对称性, 由此引出的离散 sine-Gordon 方程的 Lax 对也是非对称的:

$$\tilde{\Phi} = \frac{-1}{\sqrt{u\tilde{u}}} \begin{pmatrix} -p\tilde{u} & r \\ ru\tilde{u} & -pu \end{pmatrix} \Phi, \quad (55a)$$

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{u\hat{u}}} \begin{pmatrix} -ru & qu\hat{u} \\ q & -r\hat{u} \end{pmatrix} \Phi. \quad (55b)$$

3.3 孤子解

下面以离散势 KdV (即 H1) 方程 (33a) 为例, 演示如何通过其 Bäcklund 变换构造单孤子解 (1-soliton solution (1SS)). 首先需要种子解. 取

$$a^2 = -p, \quad b^2 = -q, \quad (56)$$

不难发现

$$u_0 = an + bm + \lambda, \quad (57)$$

是方程 (33a) 的一个解, 其中 γ 是任意常数.

方程 (33a) 的 Bäcklund 变换是 (28) 式, 即

$$(u - \tilde{u})(\tilde{u} - \bar{u}) = -a^2 + k^2, \quad (58a)$$

$$(u - \hat{u})(\bar{u} - \hat{u}) = -k^2 + b^2. \quad (58b)$$

相应于参数化 (56) 式, 这里取 $r = -k^2$. 取 u 为 (57) 作为种子解, 设新解 $\bar{u}$ 形如

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + v, \quad (59)$$

其中 $\bar{u}$ 是种子解 (57) 沿 l 方向的一次平移:

$$\bar{u}_0 = an + bm + k + \lambda, \quad (60)$$

v 是待定函数. 将 (59) 式和 (57) 式代入 Bäcklund 变换 (58) 式得到

$$\tilde{v} = \frac{Ev}{v+F}, \quad \hat{v} = \frac{Gv}{v+H}, \quad (61)$$

其中

$$E = -(a+k), \quad F = -(a-k),$$

$$G = -(b+k), \quad H = -(b-k).$$

引入 $v = f/g$ 和 $\Phi = (f, g)^T$, 将 (61) 改写为

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 1 & F \end{pmatrix} \Phi, \quad \hat{\Phi} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 1 & H \end{pmatrix} \Phi. \quad (62)$$

验算可见成立相容性 $\tilde{\hat{\Phi}} = \hat{\tilde{\Phi}}$, 否则需要在上式的矩阵前乘上平衡因子 (类似于 (51) 式中的 γ_i). 进一步求解, 先后得到

$$f_{n,m} = E^n f_{0,m}, \quad g_{n,m} = \frac{E^n - F^n}{-2k} f_{0,m} + F^n g_{0,m},$$

以及

$$f_{n,m} = G^m f_{n,0}, \quad g_{n,m} = \frac{G^m - H^m}{-2k} f_{n,0} + H^m g_{n,0}.$$

从而有

$$\Phi_{n,m} = \begin{pmatrix} E^n G^m & 0 \\ \frac{E^n G^m - F^n H^m}{-2k} & F^n H^m \end{pmatrix} \Phi_{0,0}. \quad (63)$$

取

$$\rho_{n,m} = \left(\frac{E}{F}\right)^n \left(\frac{G}{H}\right)^m \rho_{0,0} = \left(\frac{a+k}{a-k}\right)^n \left(\frac{b+k}{b-k}\right)^m \rho_{0,0}, \quad (64)$$

其中 $\rho_{0,0}$ 为常数, 从 (63) 式可得

$$v_{n,m} = \frac{v_{0,0} \rho_{n,m} / \rho_{0,0}}{1 + \frac{v_{0,0}}{2k} - \frac{v_{0,0}}{2k} \rho_{n,m} / \rho_{0,0}}. \quad (65)$$

重新定义常数 $\rho_{0,0}$ 后, 有

$$v_{n,m} = \frac{-2k \rho_{n,m}}{1 + \rho_{n,m}}. \quad (66)$$

代入到 (59) 式, 离散势 KdV 方程 (33a) 的 1-孤子解为

$$u_{n,m}^{1SS} = \bar{u}_0 + v_{n,m} = an + bm + \lambda + \frac{k(1 - \rho_{n,m})}{1 + \rho_{n,m}}. \quad (67)$$

依据上述过程, 若利用 Bäcklund 变换获得 2-孤子解显然不容易. 但是 1-孤子解的结构往往可以“暗示”一些 2-孤子解的结构信息, 有助于发现合适的变换公式将离散方程双线性化, 并进一步获得 N -孤子解. 相关内容可以参考文献 [38, 87, 88].

3.4 0-孤子解与不动点方法

对于 (33) 式中所列的 ABS 方程, $u = 0$ 一般都不是解, 而且也不易明显看出一些简单的解. “不动点方法”是在 Bäcklund 变换的基础上求解 0-孤子解的方法. 从上一节的求解过程来看, 对于方程 $Q(u, \tilde{u}, \hat{u}, \bar{u}; p, q) = 0$ 的 Bäcklund 变换 (3.1), 其中的参数 r 是孤子参数, 将作为离散谱在 $\bar{u}$ 中引

出一个孤子. 现在, 如果孤子参数 r 在变换中“失效”, 即 $\bar{u} = u$, 则有

$$Q(u, \tilde{u}, u, \tilde{u}; p, r) = 0, \quad (68a)$$

$$Q(u, u, \hat{u}, \hat{u}; r, q) = 0. \quad (68b)$$

由此变换引出的原方程的解应当是最简单的, 可以作为 0-孤子解.

对于 H1 方程 (33a), 有

$$(\tilde{u} - u)^2 = r - p, \quad (\hat{u} - u)^2 = r - q.$$

由此很容易得到

$$u = an + bm + \gamma, \quad a^2 = r - p, \quad b^2 = r - q,$$

即 (57) 式.

如果方程 $Q(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{u}; p, q) = 0$ 在变换 $u \rightarrow T(u)$ 下不变, 可在变换 (3.1) 中取 $\bar{u} = T(u)$, 从而有

$$Q(u, \tilde{u}, T(u), T(\tilde{u}); p, r) = 0, \quad (69a)$$

$$Q(u, T(u), \hat{u}, T(\hat{u}); r, q) = 0. \quad (69b)$$

对于 Q1(δ) 方程 (33f), 在 $T(u) = u + c$ 下不变, 对于的 Bäcklund 变换 (69) 式有

$$\begin{aligned} r(u - \tilde{u})^2 &= p(c^2 + \delta^2 r(p - r)), \\ r(u - \hat{u})^2 &= q(c^2 + \delta^2 r(q - r)). \end{aligned} \quad (70)$$

经过参数化 $(p, q) \rightarrow (\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} p &= \frac{c^2/r - \delta^2 r}{a^2 - \delta^2}, \quad q = \frac{c^2/r - \delta^2 r}{b^2 - \delta^2}, \\ \alpha &:= pa, \quad \beta := qb, \end{aligned} \quad (71)$$

可得 Q1(δ) 的线性 0-孤子解:

$$u_0 = \alpha n + \beta m + \lambda,$$

其中 λ 是任意常数. 此外, Q1(δ) 方程 (33f), 还在 $T(u) = -u$ 下不变. 此时的 Bäcklund 变换 (69) 式给出

$$\begin{aligned} 4pu\tilde{u} + r(u - \tilde{u})^2 &= \delta^2 pr(p - r), \\ 4qu\hat{u} + r(u - \hat{u})^2 &= \delta^2 r(q - r). \end{aligned} \quad (72)$$

经过参数化 $(p, q) \rightarrow (\alpha, \beta)$:

$$p = \frac{1}{2}r(1 - \cosh(\alpha')) = -\frac{1}{4}r(1 - \alpha)^2/\alpha, \quad (73)$$

$$q = \frac{1}{2}r(1 - \cosh(\beta')) = -\frac{1}{4}r(1 - \beta)^2/\beta, \quad (74)$$

得到解

$$u_0 = A\alpha^n \beta^m + B\alpha^{-n} \beta^{-m}, \quad AB = \delta^2 r^2 / 16. \quad (75)$$

上述所描述的过程称为“不动点方法”. 首先用于构造 Q4 方程的种子解^[89], 其后又系统地应用于其他 ABS 方程 0-孤子解的构造^[37,38]. 当然, 也可

以利用其他的方法构造 0-孤子解, 例如, 利用方程间的 Bäcklund 变换 (如 (48) 式), 从一个方程的 0-孤子解得到另一个方程的 0-孤子解.

4 结 论

通过简单的描述和例子介绍了多维相容性的概念及其在离散可积系统中的应用. 对于多维相容性, 存在一定的几何背景, 换言之, 经典的初等几何中的点线之间的关系蕴含着若干离散可积系统的多维相容性 (如文献 [79,90]). 此外, 多维相容性也可以从平面波因子的对称性来理解. Miwa 映射提供的离散的平面波因子^[78]

$$\psi = \prod_i (1 - p_i k)^{n_i}$$

在各个方向上具有对称性; 考虑到不少离散可积系统可以从平面波因子出发通过 Cauchy 矩阵方法^[37,45]等途径来构造, 不难理解由此获得的离散可积系统具有多方向上的相容性.

对比连续系统, 目前, 离散可积系统在代数结构和工具、几何背景、离散的分析工具等方面都仍待发展. 例如, 基于谱问题、零曲率方程和 Kac-Moody 代数的连续可积系统理论并不适用于离散系统, 许多连续意义下的几何体系仍未实现离散化, 离散的复分析也尚未成熟.

对于离散可积系统的研究也是一个在不断认识离散可积性、发展研究方法和工具、与新兴数学工具结合 (如 Tropical 几何、Cluster 代数等) 的过程. 关于离散可积系统中值得关注的发展与研究方向, 建议读者关注 SIDE 会议的网站.

参考文献

- [1] Zabusky N J, Kruskal M D 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 240
- [2] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095
- [3] Lax P D 1968 *Commun. Pure Appl. Math.* **21** 467
- [4] Deift P 2019 arXiv: 1902.10267
- [5] Case K M, Kac M 1973 *J. Math. Phys.* **14** 594
- [6] Ablowitz M J, Ladik J F 1975 *J. Math. Phys.* **16** 598
- [7] Ablowitz M J, Ladik J F 1976 *J. Math. Phys.* **17** 1011
- [8] Ablowitz M J, Ladik J F 1976 *Stud. Appl. Math.* **55** 213
- [9] Hirota R 1977 *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** 1424
- [10] Hirota R 1977 *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** 2074
- [11] Hirota R 1977 *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** 2079
- [12] Date E, Jimbo M, Miwa T 1982 *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** 4116
- [13] Date E, Jimbo M, Miwa T 1982 *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** 4125
- [14] Date E, Jimbo M, Miwa T 1983 *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** 388

- [15] Date E, Jimbo M, Miwa T 1983 *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** 761
- [16] Date E, Jimbo M, Miwa T 1983 *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** 766
- [17] Ueno K, Takasaki K 1984 In: Okamoto K (ed) *Group Representations and Systems of Differential Equations Advanced Studies in Pure Mathematics* (Vol. 4) (Tokyo: Kinokuniya) pp1–95
- [18] Nijhoff F W, Quispel G R W, Capel H W 1983 *Phys. Lett. A* **97** 125
- [19] Nijhoff F W, Quispel G R W, Capel H W 1983 *Phys. Lett. A* **98** 83
- [20] Nijhoff F W, Capel H W, Wiersma G L, Quispel G R W 1984 *Phys. Lett. A* **105** 267
- [21] Nijhoff F W 1985 *Lett. Math. Phys.* **9** 235
- [22] Nijhoff F W, Capel H W, Wiersma G L 1985 In: Martini R (ed) *Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems (Scheveningen 1984)* Lecture Notes in Phys (Vol. 239) (Berlin: Springer) pp263–302
- [23] Quispel G R W, Nijhoff F W, Capel H W, van der Linden J 1984 *Physica A* **125** 344
- [24] Fokas A S, Ablowitz M 1981 *Phys. Rev. Lett.* **47** 1096
- [25] Levi D, Benguria R 1980 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **77** 5025
- [26] Takahashi D, Satsuma J 1990 *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** 3514
- [27] Tokihiro T, Takahashi D, Matsukidaira J, Satsuma J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3247
- [28] Grammaticos B, Ramani A, Papageorgiou V G 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 1825
- [29] Ramani A, Grammaticos B, Hietarinta J 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 1829
- [30] Hietarinta J, Viallet C 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 325
- [31] Bellon M P, Viallet C 1999 *Commun. Math. Phys.* **204** 425
- [32] Sakai H 2001 *Commun. Math. Phys.* **220** 165
- [33] Bobenko A I, Suris Yu B 2002 *Int. Math. Res. Not.* **2002** 573
- [34] Adler V E, Bobenko A I, Suris Yu B 2003 *Commun. Math. Phys.* **233** 513
- [35] Nijhoff F W, Walker A J 2001 *Glasg. Math. J.* **43A** 109
- [36] Nijhoff F W 2002 *Phys. Lett. A* **297** 49
- [37] Nijhoff F W, Atkinson J, Hietarinta J 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 404005
- [38] Hietarinta J, Zhang D J 2008 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 404006
- [39] Atkinson J, Nijhoff F W 2010 *Commun. Math. Phys.* **299** 283
- [40] Nijhoff F W, Atkinson J 2010 *Int. Math. Res. Not.* **2010** 3837
- [41] Butler S, Joshi N 2010 *Inverse Prob.* **26** 115012
- [42] Butler S 2012 *Nonlinearity* **25** 1613
- [43] Cao C W, Xu X X 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 055213
- [44] Cao C W, Zhang G Y 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 095203
- [45] Zhang D J, Zhao S L 2013 *Stud. Appl. Math.* **131** 72
- [46] Bobenko A I, Its A 2016 *Duke Math. J.* **165** 2607
- [47] Hietarinta J, Joshi N, Nijhoff F W 2016 (Cambridge: Camb. Univ. Press)
- [48] Zhang D J, Chen S T 2010 *Stud. Appl. Math.* **125** 393
- [49] Zhang D J, Chen S T 2010 *Stud. Appl. Math.* **125** 419
- [50] Fu W, Qiao Z J, Sun J W, Zhang D J 2013 arXiv: 1307.3671
- [51] Fu W, Qiao Z J, Sun J W, Zhang D J 2015 *J. Nonlinear. Math. Phys.* **22** 321
- [52] Wahlquist H D, Estabrook F B 1973 *Phys. Rev. Lett.* **31** 1386
- [53] Lamb JR G L 1971 *Rev. Mod. Phys.* **43** 99
- [54] Chen H H 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 925
- [55] Orfanidis S J 1978 *Phys. Rev. D* **18** 3828
- [56] Bianchi L 1892 *Rend. Lincei* **5** 2
- [57] Bianchi L 1894 *Lezioni di Geometria Differenziale* (3rd Ed.) (Pisa: Enrico Spoerri)
- [58] Konopelchenko B G 1982 *Phys. Lett. A* **87** 445
- [59] Levi D 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** 1083
- [60] Adler V E, Yamilov R I 1994 *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** 477
- [61] Merola I, Ragnisco O, Tu G Z 1994 *Inverse Prob.* **10** 1315
- [62] Zhang H W, Tu G Z, Oevel W, Fuchssteiner B 1991 *J. Math. Phys.* **32** 1908
- [63] Chen K, Deng X, Zhang D J 2017 *J. Nonlinear. Math. Phys.* **24(Suppl.1)** 18
- [64] Cao C W, Zhang G Y 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 050202
- [65] Walker A J 2001 *Ph.D. Thesis* (Leeds: University of Leeds)
- [66] Adler V E 1998 *Int. Math. Res. Not.* **1998** 1
- [67] Hietarinta J 2005 *J. Nonlinear. Math. Phys.* **12** 223
- [68] Nijhoff F W, Papageorgiou V G, Capel H W, Quispel G R W 1992 *Inverse Prob.* **8** 597
- [69] Nijhoff F W 1997 In: Fokas A S, Gel'fand I M (eds) *Algebraic Aspects of Integrable Systems: In memory of Irene Dorfman* (Boston: Birkhauser) pp237–260
- [70] Nijhoff F W 1999 In: Bobenko A I, Seiler R (eds) *Discrete Integrable Geometry and Physics* (Oxford: Clarendon Press) pp209–234
- [71] Hietarinta J 2011 *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 165204
- [72] Hietarinta J, Zhang D J 2008 preprint
- [73] Atkinson J 2008 *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 135202
- [74] Adler V E, Bobenko A I, Suris Yu B 2009 *Funct. Anal. Appl.* **43** 3
- [75] Boll R 2011 *J. Nonlinear. Math. Phys.* **18** 337
- [76] Boll R 2012 *Ph.D. Dissertation* (Berlin: Technischen Universität Berlin)
- [77] Adler V E, Bobenko A I, Suris Yu B 2012 *Int. Math. Res. Not.* **2012** 1822
- [78] Miwa T 1982 *Proc. Jpn. Acad.* **58A** 9
- [79] Konopelchenko B G, Schief W K 2002 *Stud. Appl. Math.* **109** 89
- [80] Hirota R 1981 *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** 3785
- [81] Bianchi L 1885 *Ann. Matem.* **13** 177
- [82] Atkinson J, Nieszporski M 2014 *Int. Math. Res. Not.* **2014** 4215
- [83] Zhang D D, Zhang D J 2018 *J. Nonlinear. Math. Phys.* **25** 34
- [84] Zhang D J, Cheng J W, Sun Y Y 2013 *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 265202
- [85] Xenitidis P 2011 *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 435201
- [86] Bridgman T, Hereman W, Quispel G R W, van der Kamp P H 2013 *Found. Comput. Math.* **13** 517
- [87] Hietarinta J, Zhang D J 2010 *J. Math. Phys.* **51** 033505
- [88] Hietarinta J, Zhang D J 2011 *SIGMA* **7** 061
- [89] Atkinson J, Hietarinta J, Nijhoff F W 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** F1
- [90] Konopelchenko B G, Schief W K 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 6125

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Discrete integrable systems: Multidimensional consistency^{*}

Zhang Da-Jun[†]

(*Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China*)

(Received 28 October 2019; revised manuscript received 14 November 2019)

Abstract

In contrast to the well-established theory of differential equations, the theory of difference equations has not quite developed so far. The most recent advances in the theory of discrete integrable systems have brought a true revolution to the study of difference equations. Multidimensional consistency is a new concept appearing in the research of discrete integrable systems. This property, as an explanation to a type of discrete integrability, plays an important role in constructing the Bäcklund transformations, Lax pairs and exact solutions for discrete integrable system. In the present paper, the multidimensional consistency and its applications in the research of discrete integrable systems are reviewed.

Keywords: discrete integrable systems, multidimensional consistency

PACS: 02.30.Ik, 05.45.Yv

DOI: 10.7498/aps.69.20191647

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11875040, 11631007).

[†] Corresponding author. E-mail: djzhang@staff.shu.edu.cn

Boussinesq方程的Lax对、Beklund变换、对称群变换和Riccati展开相容性

刘萍 徐恒睿 杨建荣

The Boussinesq equation: Lax pair, Beklund transformation, symmetry group transformation and consistent Riccati expansion solvability

Liu Ping Xu Heng-Rui Yang Jian-Rong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010203 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191316

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191316>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于场变换的毫米波半波片设计

Millimeter-wave half-waveplate based on field transformation

物理学报. 2018, 67(7): 070201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171774>

基于变换热力学的三维任意形状热斗篷设计

Design and research of three-dimensional thermal cloak with arbitrary shape based on the transformation thermodynamics

物理学报. 2017, 66(10): 104401 <https://doi.org/10.7498/aps.66.104401>

广义(3+1)维Zakharov-Kuznetsov方程的对称约化、精确解和守恒律

Symmetry reductions, exact equations and the conservation laws of the generalized (3+1) dimensional Zakharov-Kuznetsov equation

物理学报. 2017, 66(8): 080201 <https://doi.org/10.7498/aps.66.080201>

间隙原子H,B,C对LaFe_{11.5}Al_{1.5}化合物磁性和磁热效应的影响

Influences of interstitial atoms H, B and C on magnetic properties and magnetocaloric effect in LaFe_{11.5}Al_{1.5} compound

物理学报. 2018, 67(7): 077501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172250>

Cu掺杂对TiNi合金马氏体相变路径影响的第一性原理研究

First principles study of the effect of Cu doping on the martensitic transformation of TiNi alloy

物理学报. 2017, 66(13): 130501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.130501>

基于自适应无参经验小波变换和选择集成分类模型的运动想象

Motor imagery based on adaptive parameterless empirical wavelet transform and selective integrated classification

物理学报. 2018, 67(11): 118701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180181>

专题：非线性物理

Boussinesq 方程的 Lax 对、Bäcklund 变换、对称群变换和 Riccati 展开相容性*

刘萍^{1)†} 徐恒睿²⁾ 杨建荣³⁾

1) (电子科技大学中山学院电子信息学院, 中山 528402)

2) (电子科技大学物理学院, 成都 610054)

3) (上饶师范学院物理与电子信息学院, 上饶 334001)

(2019 年 9 月 2 日收到; 2019 年 12 月 9 日收到修改稿)

Boussinesq 方程是流体力学等领域一个非常重要的方程. 本文推导了 Boussinesq 方程的 Lax 对. 借助于截断 Painlevé 展开, 得到了 Boussinesq 方程的自 Bäcklund 变换, 以及 Boussinesq 方程和 Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程之间的 Bäcklund 变换. 探讨了 Boussinesq 方程的非局域对称, 研究了 Boussinesq 方程的单参数群变换和单参数子群不变解. 运用 Riccati 展开法研究了 Boussinesq 方程, 证明 Boussinesq 方程具有 Riccati 展开相容性, 得到了 Boussinesq 方程的孤立波-椭圆余弦波解.

关键词: Boussinesq 方程, lax 对, Bäcklund 变换, Riccati 展开

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr

DOI: 10.7498/aps.69.20191316

1 引言

一般来讲, Boussinesq 方程可写为

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta(u^2)_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0, \quad (1)$$

其中, 下角标 x 和 t 表示偏微分. Boussinesq 方程可以用于描绘浅水波、等离子体、非线性晶格等众多物理现象^[1-5].

由于该方程应用广泛, 一些特殊形式的或者修正的 Boussinesq 方程被推导出来研究. 例如, “坏” Boussinesq 方程 (也叫不适定 Boussinesq 方程) 的形式为

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0. \quad (2)$$

这个方程是在 1872 年由 Boussinesq^[1] 提出来用于描绘浅水波问题的. Benny 和 Luke^[6] 发现这个 Boussinesq 方程非线性弱散色现象的一般近似.

“好” Boussinesq 方程的形式为

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0. \quad (3)$$

这个方程是作为描绘弦的非线性振动模型提出来的, 也可以用于描绘非线性介质材料中的电磁波^[7]. 一种修正的 Boussinesq 方程的形式为

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} - u_{xxtt} = 0. \quad (4)$$

这个方程也经常被称为“改进的” Boussinesq 方程^[8], 它由流体力学推导而来, 也可以用于描绘波在磁场中的传播, 并取代“坏” Boussinesq 方程.

很多不同形式的 Boussinesq 方程, 是方程 (1) 的特殊形式. 本文旨在研究 Boussinesq 方程 (1) 的可积性、对称性和严格解. 在下文中, 如果没有特殊说明, Boussinesq 方程指的是方程 (1). 论文结构如下: 在第 2 节中, 从一个简化的 Boussinesq 方程的 Lax 对, 推导出 Boussinesq 方程 (1) 的一组 Lax 对; 在第 3 节, 对 Boussinesq 方程 (1) 进行截

* 国家自然科学基金 (批准号: 11775047, 11865013) 和中山市科技计划项目 (批准号: 2017B1016) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liuping49@126.com

断的 Painlevé 展开, 得到 Boussinesq 方程的 Bäcklund 变换; 第 4 节研究了 Boussinesq 方程的单参数群变换; 第 5 节讨论了 Boussinesq 方程的全点李对称性相似解; 第 6 节应用 CRE (consistent Riccati expansion, CRE) 方法证明了 Boussinesq 方程的 CRE 相容性. Boussinesq 方程孤立波-周期波在第 7 节进行了讨论; 第 8 节是本文的结论和讨论.

2 Boussinesq 方程的 Lax 对

当 $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1/3$ 时, 方程 (1) 退化成

$$v_{\tau\tau} + (v^2)_{\chi\chi} + \frac{1}{3}v_{\chi\chi\chi\chi} = 0, \quad (5)$$

为了将方程 (1) 和方程 (5) 的变量进行区分, 我们将方程 (1) 中的变量 $\{u, x, t\}$ 对应地写成方程 (5) 中的 $\{v, \chi, \tau\}$. Weiss^[9] 通过研究方程 (5) 的 painlevé 性质, 推出了方程 (5) 的一组 Lax 对, 其形式如下

$$\psi_{\chi\chi\chi} = -\frac{3}{2}v\psi_{\chi} - \frac{3}{4}\psi v_{\chi} - \frac{3}{4}\psi \int v_{\tau} d\chi + \lambda\psi, \quad (6a)$$

$$\psi_{\tau} = \psi_{\chi\chi} + v\psi. \quad (6b)$$

方程 (1) 和方程 (5) 之间存在标度变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left(\frac{3\gamma}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{3}} v(\chi, \tau) - \frac{\alpha}{2\beta}, \\ \chi &= \pm \frac{\beta(\frac{1}{6})3(\frac{2}{3})x}{3\gamma^{\frac{1}{3}}}, \\ \tau &= \pm \frac{3(\frac{5}{6})\beta(\frac{1}{3})t}{3\gamma(\frac{1}{6})}. \end{aligned} \quad (7)$$

结合方程 (5) 的 Lax 对 (6) 式以及标度变换, 可以得到方程 (1) 的 Lax 对.

定理 1 (Lax 对定理)

Boussinesq 方程 (1) 具有如下形式 Lax 对:

$$\begin{aligned} \phi_{xxx} &= -\frac{\sqrt{3}\gamma\beta\phi}{12\gamma^2} \int u_t dx - \frac{(2u\beta + \alpha)}{4\gamma} \phi_x \\ &\quad - \frac{\phi\beta}{4\gamma} u_x \pm \frac{\phi\lambda\sqrt{\beta}}{3\gamma}, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\phi_t = \sqrt{3}\gamma\phi_{xx} + \frac{\sqrt{3}\phi(2\beta u + \alpha)}{6\sqrt{\gamma}}, \quad (8b)$$

这里的 λ 代表谱函数, φ 表示 $\{x, t\}$ 的任意函数.

3 与截断 Painlevé 展开相关联的 Bäcklund 变换

截断 Painlevé 展开法, 是分析非线性系统最有效的方法之一^[10–12]. 对 Boussinesq 方程 (1), 可将 u 展开成

$$u = u_0 + \frac{u_1}{f} + \frac{u_2}{f^2}, \quad (9)$$

这里的 u_0, u_1, u_2 和 f 都是 $\{x, t\}$ 的函数, f 是奇异流函数. 将 (9) 式代入到方程 (1) 中, 所得到的多项式中, f 的所有不同阶次的系数都应该为零. 由 f^{-6} 的系数为零, 可得到

$$u_2 = -\frac{6\gamma f_x^2}{\beta}. \quad (10)$$

由 f^{-5} 的系数为零, 可得

$$u_1 = \frac{6\gamma f_{xx}}{\beta}. \quad (11)$$

由 f^{-4} 的系数, 容易得到

$$u_0 = \frac{3}{2} \frac{\gamma f_{xx}^2}{\beta f_x^2} - \frac{2\gamma f_{xxx}}{\beta f_x} - \frac{1}{2} \frac{f_t^2}{\beta f_x^2} - \frac{\alpha}{2\beta}. \quad (12)$$

将 (10) 式–(12) 式代入到 f^{-3} 的系数中, 得

$$\gamma \left(\frac{f_{xxx}}{f_x} - \frac{3}{2} \frac{f_{xx}^2}{f_x^2} \right)_x + \left(\frac{f_t}{f_x} \right)_t + \frac{f_t}{f_x} \left(\frac{f_t}{f_x} \right)_x = 0, \quad (13)$$

方程 (13) 在 Möbius 变换下, 保持形式不变, 因此被称为 Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程^[9].

将 (9) 式–(13) 式代入到方程 (1) 中, 比较所得方程中 f^0 的系数, 可发现 u_0 也是 Boussinesq 方程的一个解, 这表示 $u = u_0$ 是 Boussinesq 方程的一个自 Bäcklund 变换. 而且, 对以上截断 Painlevé 展开进行总结, 可得到一个非自 Bäcklund 变换.

定理 2 (Bäcklund 变换定理)

如果 f 是 Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程 (13) 的解, 那么

$$u = u_0 = \frac{3}{2} \frac{\gamma f_{xx}^2}{\beta f_x^2} - \frac{2\gamma f_{xxx}}{\beta f_x} - \frac{1}{2} \frac{f_t^2}{\beta f_x^2} - \frac{\alpha}{2\beta} \quad (14)$$

也是 Boussinesq 方程 (1) 的解.

定理 3 (Bäcklund 变换定理)

如果 f 是 Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程 (13) 的解, 那么

$$u = u_0 + \frac{u_1}{f} + \frac{u_2}{f^2} = \frac{3}{2} \frac{\gamma f_{xx}^2}{\beta f_x^2} - \frac{2\gamma f_{xxx}}{\beta f_x} - \frac{1}{2} \frac{f_t^2}{\beta f_x^2} - \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{6\gamma f_{xx}}{f\beta} - \frac{6\gamma f_x^2}{\beta f^2} \quad (15)$$

也是 Boussinesq 方程 (1) 的解.

4 单参数群变换

将 $\frac{6\gamma f_{xx}}{\beta}$ 代入 Boussinesq 方程 (1) 的对称决定性方程, 可发现 $\frac{6\gamma f_{xx}}{\beta}$ 是 Boussinesq 方程 (1) 的一个非局域对称. 为了将传统的点李对称和非局域对称结合在一起, 我们需要建立一个包含 Boussinesq 方程、Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程以及这两个方程的变换关系式的拓展系统, 其形式如下:

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta(u^2)_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0, \quad (16a)$$

$$\gamma \left(\frac{f_{xxx}}{f_x} - \frac{3}{2} \frac{f_{xx}^2}{f_x^2} \right)_x + \left(\frac{f_t}{f_x} \right)_t + \frac{f_t}{f_x} \left(\frac{f_t}{f_x} \right)_x = 0, \quad (16b)$$

$$u = \frac{3}{2} \frac{\gamma f_{xx}^2}{\beta f_x^2} - \frac{2\gamma f_{xxx}}{\beta f_x} - \frac{1}{2} \frac{f_t^2}{\beta f_x^2} - \frac{\alpha}{2\beta}, \quad (16c)$$

$$f_x = g, \quad (16d)$$

$$f_{xx} = h. \quad (16e)$$

Boussinesq 方程的对称 σ^u 也相应地拓展为满

足下式的四分量对称 $\{\sigma^u, \sigma^f, \sigma^g, \sigma^h\}$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma^u \\ \sigma^f \\ \sigma^g \\ \sigma^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6\gamma f_{xx}}{\beta} \\ -f^2 \\ -2ff_x \\ -2f_x^2 - 2ff_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6\gamma h}{\beta} \\ -f^2 \\ -2fg \\ -2g^2 - 2fh \end{pmatrix}. \quad (17)$$

对方程 (16), 我们也可以研究它的全点李对称. 基于这个目的, 四分量对称 $\{\sigma^u, \sigma^f, \sigma^g, \sigma^h\}$ 应该满足 Boussinesq 方程的线性化的非线性系统. 按照点李对称的方法, 经过计算可得总的对称矢量为

$$\underline{V} = C_1 \underline{V}_1 + C_2 \underline{V}_2 + C_3 \underline{V}_3 + C_4 \underline{V}_4 + C_5 \underline{V}_5 + C_6 \underline{V}_6, \quad (18)$$

各个对称矢量为:

$$\underline{V}_1 = \frac{x}{2} \partial_x + t \partial_t - u \partial_u - \frac{\alpha}{2\beta} \partial_u - \frac{g}{2} \partial_g - h \partial_h,$$

$$\underline{V}_2 = \partial_x, \quad \underline{V}_3 = \partial_t,$$

$$\underline{V}_4 = -h \partial_u + \frac{\beta f^2}{6\gamma} \partial_f + \frac{g\beta f}{3\gamma} \partial_g + \frac{\beta(fh + g^2)}{3\gamma} \partial_h,$$

$$\underline{V}_5 = -f \partial_f - g \partial_g - h \partial_h, \quad \underline{V}_6 = -\partial_f. \quad (19)$$

其中, $\underline{V}_1, \underline{V}_5$ 表示标度变换, $\underline{V}_2$ 表示空间平移不变性, $\underline{V}_3$ 代表时间平移不变性, $\underline{V}_4$ 与非局域对称关联, 而 $\underline{V}_6$ 则表示相平移不变性.

由对称矢量 (19) 式, 可得到六个单参数不变子群:

$$g_\varepsilon(\underline{V}_1) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \left\{ x e^{\frac{\varepsilon}{2}}, t e^\varepsilon, e^{-\varepsilon} u + \frac{\alpha}{2\beta} (e^{-\varepsilon} - 1), f, g e^{-\frac{\varepsilon}{2}}, h e^{-\varepsilon} \right\}, \quad (20a)$$

$$g_\varepsilon(\underline{V}_2) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \{x + \varepsilon, t, u, f, g, h\}, \quad (20b)$$

$$g_\varepsilon(\underline{V}_3) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \{x, t + \varepsilon, u, f, g, h\}, \quad (20c)$$

$$g_\varepsilon(\underline{V}_4) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \left\{ x, t, u - \frac{6\gamma \varepsilon^2 \beta g^2}{(\varepsilon \beta f - 6\gamma)^2} + \frac{6\gamma \varepsilon h}{\varepsilon \beta f - 6\gamma}, \frac{6\gamma f}{6\gamma - \varepsilon \beta f}, \frac{36\gamma^2}{(\varepsilon \beta f - 6\gamma)^2}, \frac{36\gamma^2(-2g^2 \varepsilon \beta + f h \varepsilon \beta - 6h\gamma)}{(\varepsilon \beta f - 6\gamma)^3} \right\}, \quad (20d)$$

$$g_\varepsilon(\underline{V}_5) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \{x, t, u, e^{(-\varepsilon)} f, e^{(-\varepsilon)} g, e^{(-\varepsilon)} h\}, \quad (20e)$$

$$g_\varepsilon(\underline{V}_6) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \{x, t, u, f - \varepsilon, g, h\}. \quad (20f)$$

从以上六个单参数不变子群, 可到到下列 Bäcklund 变换定理.

定理 4 (单参数群变换)

如果 $\{u(x, t), f(x, t), g(x, t), h(x, t)\}$ 是拓展的 Boussinesq 系统 (16) 的一组解, 则下列函数也是拓展的 Boussinesq 系统 (16) 的一组解,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 = e^{-\varepsilon} u(xe^{-\frac{\varepsilon}{2}}, te^{-\varepsilon}) + \frac{\alpha}{2\beta}(e^{-\varepsilon} - 1), \quad \bar{f}_1 = f(xe^{-\frac{\varepsilon}{2}}, te^{-\varepsilon}), \\ \bar{g}_1 = g(xe^{-\frac{\varepsilon}{2}}, te^{-\varepsilon}) e^{-\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \bar{h}_1 = h(xe^{-\frac{\varepsilon}{2}}, te^{-\varepsilon}) e^{-\varepsilon} \end{array} \right\}, \quad (21a)$$

$$\{\bar{u}_2 = u(x - \varepsilon, t), \quad \bar{f}_2 = f(x - \varepsilon, t), \quad \bar{g}_2 = g(x - \varepsilon, t), \quad \bar{h}_2 = h(x - \varepsilon, t)\}, \quad (21b)$$

$$\{\bar{u}_3 = u(x, t - \varepsilon), \quad \bar{f}_3 = f(x, t - \varepsilon), \quad \bar{g}_3 = g(x, t - \varepsilon), \quad \bar{h}_3 = h(x, t - \varepsilon)\}, \quad (21c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_4 = u(x, t) - \frac{6\gamma\varepsilon^2\beta g(x, t)^2}{(\varepsilon\beta f(x, t) - 6\gamma)^2} + \frac{6\gamma\varepsilon h(x, t)}{\varepsilon\beta f(x, t) - 6\gamma}, \quad \bar{f}_4 = \frac{6\gamma f(x, t)}{6\gamma - \varepsilon\beta f(x, t)}, \\ \bar{g}_4 = \frac{36\gamma^2 g(x, t)}{(\varepsilon\beta f(x, t) - 6\gamma)^2}, \quad \bar{h}_4 = \frac{36\gamma^2(\varepsilon\beta f(x, t)h(x, t) - 2\varepsilon\beta g(x, t)^2 - 6\gamma h(x, t))}{(\varepsilon\beta f(x, t) - 6\gamma)^3} \end{array} \right\}, \quad (21d)$$

$$\{\bar{u}_5 = u(x, t), \quad \bar{f}_5 = e^{(-\varepsilon)} f(x, t), \quad \bar{g}_5 = e^{(-\varepsilon)} g(x, t), \quad \bar{h}_5 = e^{(-\varepsilon)} h(x, t)\}, \quad (21e)$$

$$\{\bar{u}_6 = u(x, t), \quad \bar{f}_6 = f(x, t) - \varepsilon, \quad \bar{g}_6 = g(x, t), \quad \bar{h}_6 = h(x, t)\}. \quad (21f)$$

5 全点李对称相似解

对称性理论是求解偏微分方程的一种有效系统的方法^[13-19]. 从对称矢量 (19) 式, 不仅可以得到单参数不变子群和群不变解, 而且可以得到 Boussinesq 的相似解和约化方程. 将约化方程的严格解和相似解相结合, 则可以得到所研究系统的严格解. 可得到下列四组非平庸情况.

情况 1 $C_1 \neq 0, C_4 \neq 0$.

在种情这况, 群不变量可写为

$$\xi = \frac{C_3 + C_1 t}{C_1(2C_2 + C_1 x)^2}. \quad (22)$$

相似解的形式为

$$\begin{aligned} u = & \frac{U(\xi)}{(2C_2 + C_1 x)^2} - \frac{(4C_2 + C_1 x)\alpha C_1 x}{2\beta(2C_2 + C_1 x)^2} \\ & - \frac{6\gamma C_4 H(\xi) e^{(-2F(\xi)C_1)}}{(2C_2 + C_1 x)^2 \delta} \\ & \times \tanh\left[\frac{\delta \ln(2C_2 + C_1 x) + \delta F(\xi) C_1}{3\gamma C_1}\right] \\ & + \frac{6\beta\gamma C_4^2 G(\xi)^2 e^{(-2F(\xi)C_1)}}{\delta^2(2C_2 + C_1 x)^2} \\ & \times \operatorname{sech}\left[\frac{\delta \ln(2C_2 + C_1 x) + \delta F(\xi) C_1}{3\gamma C_1}\right]^2, \quad (23a) \end{aligned}$$

$$f = \frac{3\gamma C_5}{C_4\beta} - \frac{\delta}{C_4\beta} \tanh\left[\frac{\delta \ln(2C_2 + C_1 x) + \delta F(\xi) C_1}{3\gamma C_1}\right], \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} g = & \frac{G(\xi) e^{(-F(\xi)C_1)}}{(2C_2 + C_1 x)} \\ & \times \operatorname{sech}\left[\frac{\delta \ln(2C_2 + C_1 x) + \delta F(\xi) C_1}{3\gamma C_1}\right]^2, \quad (23c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h = & \frac{H(\xi) e^{(-2F(\xi)C_1)}}{(2C_2 + C_1 x)^2} \\ & \times \operatorname{sech}\left[\frac{\delta \ln(2C_2 + C_1 x) + \delta F(\xi) C_1}{3\gamma C_1}\right]^2 \\ & + \frac{2\beta C_4 G(\xi)^2 e^{(-2F(\xi)C_1)}}{(2C_2 + C_1 x)^2 \delta} \\ & \times \frac{\sinh\left[\frac{\delta \ln(2C_2 + C_1 x) + \delta F(\xi) C_1}{3\gamma C_1}\right]}{\cosh\left[\frac{\delta \ln(2C_2 + C_1 x) + \delta F(\xi) C_1}{3\gamma C_1}\right]^3}, \quad (23d) \end{aligned}$$

其中 $\delta = \sqrt{6\gamma\beta C_4 C_6 + 9\gamma^2 C_5^2}$, 约化函数 $\{U(\xi), F(\xi), G(\xi), H(\xi)\}$ 需要满足相应的约化方程. 这种情况的约化方程非常长, 这里省略不写.

情况 2 $C_1 \neq 0, C_4 = 0$.

$\{\sigma^u, \sigma^f, \sigma^g, \sigma^h\}$ 包含 C_4 , 而 C_4 是与非局域对称相关联的, 那么如果令 $C_4 = 0$, 则相似解会变得更加简化. 这样, 相似解为:

$$u = -\frac{4x\alpha C_1 C_2 + x^2\alpha C_1^2 - 2U(\xi)\beta}{2\beta(2C_2 + C_1 x)^2}, \quad (24a)$$

$$f = (2C_2 + C_1 x)^{\left(-\frac{2C_5}{C_1}\right)} F(\xi) - \frac{C_6}{C_5}, \quad (24b)$$

$$g = (2C_2 + C_1 x)^{\left(-1-\frac{2C_5}{C_1}\right)} G(\xi), \quad (24c)$$

$$h = (2C_2 + C_1 x)^{\left(-2 - \frac{2C_5}{C_1}\right)} H(\xi). \quad (24d)$$

与情况一相比, 时间和空间的对称性都没有改变, 因此这种情况的群不变量与情况一相同, 仍为

$$\xi = \frac{C_3 + C_1 t}{C_1 (2C_2 + C_1 x)^2}. \quad (25)$$

将 (24b) 式代入 (16d) 式和 (16e) 式, 则变量 f 和 g 变成:

$$g = -2(2C_2 + C_1 x)^{\left(-1 - \frac{2C_5}{C_1}\right)} (C_1 F_\xi \xi + C_5 F), \quad (26)$$

$$h = 2(2C_2 + C_1 x)^{\left(-2 - \frac{2C_5}{C_1}\right)} (2C_1^2 F_{\xi\xi} \xi^2 + 3C_1^2 F_\xi \xi + C_1 C_5 F + 4C_1 F_\xi C_5 \xi + 2C_5^2 F), \quad (27)$$

将 (24b) 式代入 (16c) 式, 可以得到用和 F 表示的 u 的表达式, 将 (24b) 代入到 (16b) 式, 可以得到 F 满足的约束方程. 由于这两个式子都很长, 此处省略不写.

情况 3 $C_1 = 0, C_2 \neq 0, C_4 \neq 0$.

(18) 式和 (19) 式说明空间 x 和时间 t 的对称受到 C_1 的影响. 当 $C_1 = 0$ 时, 群不变量 ξ 将比情况一和情况二的群不变量简单. 此时, 群不变量变为

$$\xi = \frac{C_2 t - C_3 x}{C_2}, \quad (28)$$

相似解为:

$$u = U(\xi) + \frac{3\gamma C_4 e^{\frac{\delta F(\xi)}{3C_2\gamma}} H(\xi)}{\delta \left[e^{\frac{\delta(x+F(\xi))}{3C_2\gamma}} + 1 \right]} - \frac{24\beta\gamma C_4^2 G(\xi)^2}{\delta^2 \left[e^{\frac{\delta(x+F(\xi))}{3C_2\gamma}} + 1 \right]^2}, \quad (29a)$$

$$f = -\frac{\delta}{\beta C_4} \tanh \left[\frac{\delta(x+F(\xi))}{6\gamma C_2} \right] + \frac{3\gamma C_5}{\beta C_4}, \quad (29b)$$

$$g = -\frac{2G(\xi)}{\cosh \left[\frac{\delta(x+F(\xi))}{3C_2\gamma} \right] + 1}, \quad (29c)$$

$$h = \frac{e^{\frac{\delta(2F(\xi)+x)}{3C_2\gamma}} H(\xi)}{\left[e^{\frac{\delta(x+F(\xi))}{3C_2\gamma}} + 1 \right]^2} - \frac{16\beta C_4 G(\xi)^2 e^{\frac{\delta(x+F(\xi))}{3C_2\gamma}}}{\delta \left[e^{\frac{\delta(x+F(\xi))}{3C_2\gamma}} + 1 \right]^3}. \quad (29d)$$

其中 $F(\xi)$ 满足

$$\begin{aligned} & 27C_2^2 C_3^5 \gamma^2 F_{\xi\xi}^3 + 4F_{\xi\xi} C_3^4 C_2 \delta^2 F_\xi^3 \\ & + (-6C_3^3 C_2^2 \delta^2 F_{\xi\xi} + 9C_3^5 F_{\xi\xi\xi} C_2^2 \gamma^2) F_\xi^2 \\ & + \{ [2C_2^3 (2\delta^2 C_3^2 - 9\gamma C_2^4) \\ & - 36C_2^2 C_3^5 \gamma^2 F_{\xi\xi\xi}] F_{\xi\xi} - 18C_2^3 C_3^4 F_{\xi\xi\xi} \gamma^2 \} F_\xi \\ & - C_3^5 F_{\xi\xi} \delta^2 F_\xi^4 \\ & + \left[36\gamma^2 C_3^4 C_2^3 F_{\xi\xi\xi} + \frac{C_2^4 (9\gamma C_2^4 - \delta^2 C_3^2)}{C_3} \right] \\ & \times F_{\xi\xi} + 9\gamma^2 C_2^4 F_{\xi\xi\xi} C_3^3 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

将 (29b) 式代入到 (16c) 式, 可得到关于 Boussinesq 方程的下列 Bäcklund 变换.

定理 5 (Bäcklund 变换定理).

如果 F 满足 (30) 式, 则 Boussinesq 方程的解为

$$\begin{aligned} u = & -\frac{1}{6} \frac{(C_2 - F_\xi C_3)^2 \delta^2}{\beta \gamma C_2^4} \tanh \left[\frac{\delta(x+F)}{6C_2\gamma} \right]^2 \\ & + \frac{\delta C_3^2 F_{\xi\xi}}{C_2^3 \beta} \tanh \left[\frac{\delta(x+F)}{6C_2\gamma} \right] \\ & - \frac{1}{18\gamma\beta C_2^4 (C_2 - F_\xi C_3)^2} \{ 3C_2^2 (3\gamma C_2^4 \\ & + 3C_2^2 \alpha \gamma C_3^2 - 4\delta^2 C_3^2) F_\xi^2 \\ & + [36F_{\xi\xi} C_3^4 C_2^2 \gamma^2 - 2C_2^3 C_3 (9C_2^2 \alpha \gamma \\ & - 4\delta^2)] F_\xi - 27\gamma^2 F_{\xi\xi}^2 C_3^4 C_2^2 \\ & - 2\delta^2 F_\xi^4 C_3^4 - 36F_{\xi\xi\xi} C_3^3 C_2^3 \gamma^2 \\ & + C_2^4 (9\alpha\gamma C_2^2 - 2\delta^2) + 8\delta^2 C_2 F_\xi^3 C_3^3 \}. \end{aligned} \quad (31)$$

情况 4 $C_1 = 0, C_2 \neq 0, C_4 = 0$.

这种情况下, 拓展系统 (16) 的相似解为:

$$u = U(\xi), \quad (32a)$$

$$f = e^{\left(-\frac{C_5 x}{C_2}\right)} F(\xi) - \frac{C_6}{C_5}, \quad (32b)$$

$$g = G(\xi) e^{\left(-\frac{C_5 x}{C_2}\right)}, \quad (32c)$$

$$h = H(\xi) e^{\left(-\frac{C_5 x}{C_2}\right)}, \quad (32d)$$

这里, 群不变量 ξ 为

$$\xi = \frac{C_2 t - C_3 x}{C_2}. \quad (33)$$

将 (32b) 式代入到 (16b) 式, 可得到 $F(\xi)$ 满足的约束方程. 将 (32b) 式代入到 (16c) 式, 则得到下列

定理.

定理 6 (Bäcklund 变换定理).

如果 $F(\xi)$ 满足 (32b) 式, 则 Boussinesq 方程的解可以写为

$$u = -\frac{1}{2} \frac{1}{(F_\xi C_3 + F C_5)^2 C_2^2 \beta} \{ [4\gamma F_{\xi\xi\xi} C_3^4 + 2C_3 C_5 F (2C_5^2 \gamma + \alpha C_2^2)] F_\xi - 3\gamma F_{\xi\xi}^2 C_3^4 + C_2^2 (\alpha C_3^2 + C_2^2) F_\xi^2 + 6\gamma F F_{\xi\xi} C_3^2 C_5^2 + 4\gamma F_{\xi\xi\xi} C_3^3 F C_5 + C_5^2 F^2 (C_5^2 \gamma + \alpha C_2^2) \}. \quad (34)$$

6 Boussinesq 方程的 CRE 相容性

本节将通过 CRE (consistent Riccati expansion, CRE) 方法来讨论 Boussinesq 方程的严格解^[20]. Riccati 方程的形式为

$$R_w = a_0 + a_1 R(w) + a_2 R(w)^2, \quad (35)$$

这里的 a_0, a_1 和 a_2 是任意常数. Riccati 方程的严格解可写为

$$R(w) = -\frac{\sqrt{\theta}}{2a_2} \tanh\left(\frac{\sqrt{\theta}w}{2}\right) + \frac{a_1}{2a_2}, \quad (36)$$

其中,

$$\theta \equiv a_1^2 - 4a_0 a_2. \quad (37)$$

对于一个偏微分系统

$$P(x, t, v) = 0, \quad P = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}, \\ x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \quad (38)$$

我们可假设它可以展开为

$$v_i = \sum_{j=0}^{J_i} v_{i,j} R^j(w), \quad (39)$$

这里的 $R(w)$ 是 Riccati 方程的严格解. 将 (39) 式代入到 (38) 式, 并令 $R^i(w)$ 的系数为零, 可得:

$$P_{j,i}(x, t, v_{l,k}, w) = 0. \quad (40)$$

如果系统 (40) 是自洽的, 则展开式 (39) 式是“CRE”, 且非线性系统 (38) 是“CRE”相容系统^[20].

为了得到孤立波-周期波碰撞解, 可应用 CRE 方法. CRE 方法可被用于证明一个系统是 CRE 相容系统, 并可用于寻求非线性系统的碰撞波解. 对 Boussinesq 方程, u 可展开成截断展开的形式:

$$u = u_3 + u_4 R(w) + u_5 R(w)^2, \quad (41)$$

这里, u_3, u_4, u_5 和 w 都是 x 和 t 的函数, $R(w)$ 是 Riccati 方程的一个解.

将 (35) 式和 (41) 式代入到方程 (1) 中, 并令 $R(w)$ 所有阶次的系数为零, 可得

$$u_3 = -\frac{\gamma(a_1^2 + 8a_2 a_0)w_x^2}{2\beta} - \frac{\alpha + 6\gamma w_{xx} a_1}{2\beta} - \frac{2\gamma w_{xxx}}{w_x \beta} - \frac{w_t^2 - 3\gamma w_{xx}^2}{2\beta w_x^2}, \quad (42a)$$

$$u_4 = -\frac{6a_2 \gamma (w_x^2 a_1 + w_{xx})}{\beta}, \quad (42b)$$

$$u_5 = -\frac{6\gamma w_x^2 a_2^2}{\beta}, \quad (42c)$$

这里 w 满足

$$w_t^2 w_{xx} - \gamma(4a_2 a_0 - a_1^2) w_{xx} w_x^4 - (\gamma w_{xxx} + w_{tt}) w_x^2 + 4\gamma w_x w_{xx} w_{xxx} - 3\gamma w_{xx}^3 = 0. \quad (43)$$

通过 CRE 和 CRE 相容性的定义, Boussinesq 方程显然是一个 CRE 相容系统. 基于以上讨论, 可得到如下定理:

定理 7 (CRE 相容性定理)

Boussinesq 方程是一个 CRE 相容系统. 如果 w 是相容性条件 (43) 式的一个解, 则下列形式的 u 也是 Boussinesq 方程的一个解.

$$u = u_3 + u_4 R(w) + u_5 R(w)^2 \\ = -\frac{\gamma(a_1^2 + 8a_2 a_0)w_x^2}{2\beta} - \frac{\alpha + 6\gamma w_{xx} a_1}{2\beta} - \frac{2\gamma w_{xxx}}{w_x \beta} - \frac{w_t^2 - 3\gamma w_{xx}^2}{2\beta w_x^2} \\ - \frac{6a_2 \gamma (w_x^2 a_1 + w_{xx})}{\beta} R(w) - \frac{6\gamma w_x^2 a_2^2}{\beta} R(w)^2, \quad (44)$$

这里的 $R(w)$ 和 θ 分别满足 (36) 式和 (37) 式.

7 孤立波-周期波碰撞解

从 Boussinesq 方程的 CRE 性质, 可进一步研究 Boussinesq 方程的严格解. 将 (36) 式代入到 (44) 式中可得

$$\begin{aligned}
 u = & -\frac{3}{2} \frac{w_x^2 \gamma \theta}{\beta} \tanh \left(\frac{w \sqrt{\theta}}{2} \right)^2 \\
 & + \frac{3 \gamma w_{xx} \sqrt{\theta}}{\beta} \tanh \left(\frac{w \sqrt{\theta}}{2} \right) - \frac{\alpha}{2 \beta} \\
 & - \frac{\gamma (4 a_2 a_0 - a_1^2) w_x^2}{\beta} - \frac{2 \gamma w_{xxx}}{w_x \beta} \\
 & - \frac{1}{2} \frac{w_t^2 - 3 \gamma w_{xx}^2}{\beta w_x^2}. \quad (45)
 \end{aligned}$$

从 (45) 式可看到, 如果我们想知道 u 的具体形式, 那么需要先知道 w 的表达式. 如果 w 具有如下形式:

$$w = k_1 x + \omega_1 t + a_3 E_\pi(\operatorname{sn}(k_2 x + \omega_2 t, m), n, m), \quad (46)$$

这里 $k_1, k_2, \omega_1, \omega_2, a_3, n$ 和 m 是常数, E_π 是第三类不完全椭圆积分. 将 (46) 式代入到 (43) 式中, 并令 $\operatorname{sn}(k_2 x + \omega_2 t, m)$ 的所有不同阶次的系数为零, 可发现参数应该满足:

$$\begin{cases}
 a_0 = \frac{n a_1^2 a_3^2 - 4 m^2 + 4 m^2 n - 4 n^2 + 4 n}{4 a_3^2 a_2 n}, \\
 \gamma = \frac{3 [k_1^2 a_4 n^2 - k_1 a_4^2 (1 + m^2) n + m^2 a_4^3] k_1 \omega_2^2 n a_3^2}{k_2^2 [k_1^2 (k_1 + 3 a_4) n^2 - 2 k_1 a_4 (k_1 + a_4) (1 + m^2) n + m^2 (a_4 + 3 k_1) a_4^2]^2}, \\
 \omega_1 = -\frac{\omega_2 k_1 [k_1^2 (3 a_4 - k_1) n^2 - 2 k_1 a_4 (2 a_4 - k_1) (1 + m^2) n + m^2 (5 a_4 - 3 k_1) a_4^2]}{k_2 [k_1^2 (k_1 + 3 a_4) n^2 - 2 k_1 a_4 (k_1 + a_4) (1 + m^2) n + m^2 (a_4 + 3 k_1) a_4^2]},
 \end{cases} \quad (47)$$

或

$$\begin{cases}
 \omega_1 = -\frac{1}{2} \frac{\omega_2 k_1}{k_2}, \\
 \gamma = -\frac{3}{16} \frac{\omega_2^2 a_3^2 (3 a_4 - 2 k_1 n)}{k_2^2 a_4 (k_1 n - a_4)^2}, \\
 m = \pm \frac{\sqrt{(2 k_1 n - 3 a_4) a_4 k_1 n (k_1 n - 2 a_4)}}{a_4 (3 a_4 - 2 k_1 n)}, \\
 a_0 = \frac{1}{4} \frac{a_1^2}{a_2} - \frac{(n-1) (k_1^2 n + 2 k_1 n a_3 k_2 - k_1^2 - 4 k_1 a_3 k_2 - 3 a_3^2 k_2^2)}{a_2 (2 k_1 n - 3 a_4) a_3^2 a_4},
 \end{cases} \quad (48)$$

这里 $a_4 = k_1 + a_3 k_2$.

将 (46) 式代入到 (45) 式中, 得:

$$u = \frac{3}{2} \frac{(a_4 - k_1 n S^2) \gamma \theta T^2}{(n S^2 - 1)^2 \beta} + \frac{6 \gamma a_3 k_2^2 n S C D \sqrt{\theta} T}{(n S^2 - 1)^2 \beta} - \frac{[a_5 S^8 + a_6 S^6 + a_7 S^4 + a_8 S^2 + a_9]}{2 [(k_1 n S^2 - a_4)^2 (n S^2 - 1)^2 \beta]}, \quad (49)$$

其中

$$\begin{aligned}
 T & \equiv \tanh \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\theta} [k_1 x + \omega_1 t + a_3 E_\pi(\operatorname{sn}(k_2 x + \omega_2 t, m), n, m)] \right\}, \\
 S & \equiv \operatorname{sn}(k_2 x + \omega_2 t, m), \quad C \equiv \operatorname{cn}(k_2 x + \omega_2 t, m), \quad D \equiv \operatorname{dn}(k_2 x + \omega_2 t, m), \\
 a_5 & = -n^3 (2 n \gamma \theta k_1^4 - \alpha k_1^2 n - \omega_1^2 n + 8 \gamma a_3 k_2^3 k_1 m^2), \\
 a_6 & = 2 n^3 [8 \gamma a_3 k_2^3 k_1 (m^2 + 1) + 4 \gamma a_4 \theta k_1^3 - \alpha k_1^2 - \alpha k_1 a_4 - 2 \omega_1^2 - \omega_1 a_3 \omega_2] - 4 n^2 m^2 a_3 \gamma k_2^3 (a_4 + 3 k_1), \\
 a_7 & = 24 n \gamma a_3 k_2^3 (a_4 m^2 - n^2 k_1) + n^2 (\omega_2^2 a_3^2 - 4 \gamma a_3^2 k_2^4 - 12 \gamma k_1^2 a_4^2 a_1^2 \\
 & \quad + 6 \omega_1^2 + 48 \gamma a_2 k_1^2 a_4^2 a_0 + 6 \omega_1 a_3 \omega_2 - 4 \gamma a_3^2 k_2^4 m^2 + 6 \alpha k_1 a_4 + \alpha a_3^2 k_2^2), \\
 a_8 & = 4 \gamma n^2 a_3 k_2^3 (k_1 + 3 a_4) + 8 n \gamma k_1 a_4^3 \theta - 16 n \gamma a_3 k_2^3 a_4 (m^2 + 1) \\
 & \quad - 2 n (a_3^2 \omega_2^2 + \alpha k_1 a_4 + 2 \omega_1^2 + 3 \omega_1 a_3 \omega_2 + a_4^2 \alpha), \\
 a_9 & = a_4^2 \alpha + (a_3 \omega_2 + \omega_1)^2 + 8 a_3 \gamma k_2^3 n a_4 - 2 \gamma a_4^4 \theta, \quad (50)
 \end{aligned}$$

上式中的参数满足 (47) 式或 (48) 式.

图 1 和图 2 展示了满足约束关系 (47) 的解 (49) 式. 图 1 中的自由参数选为 $\{n = 0.2, m = 0.5, a_1 = 1, a_3 = 1, k_1 = 1, k_2 = 1, \omega_2 = 1, \alpha = -0.8, \beta = 1\}$, 图 2 中的自由参数选为 $\{n = 0.2, m = 0.9, a_1 = 1, a_3 = 1, k_1 = 1, k_2 = 1, \omega_2 = 1, \alpha = -0.8, \beta = 1\}$. 图 1 和图 2 展示了亮孤子和周期波的碰撞行为. 图 3 展示了图 1 和图 2 中 u 的密度函数, 图 3(a) 对应图 1, 图 3(b) 对应图 2. 两种情况的周期波和孤立波的方向是一致的, 而碰撞处的形状则不相同.

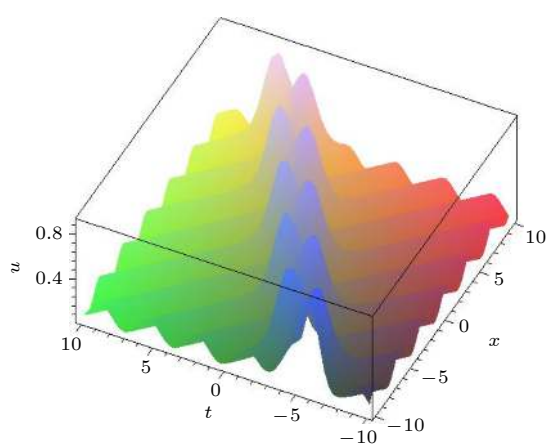


图 1 满足 (47) 式的碰撞波解 (49) 式. 自由参数为 $\{n = 0.2, m = 0.5, a_1 = 1, a_3 = 1, k_1 = 1, k_2 = 1, \omega_2 = 1, \alpha = -0.8, \beta = 1\}$

Fig. 1. The solution (49) with Formula (47). The free parameters are $\{n = 0.2, m = 0.5, a_1 = 1, a_3 = 1, k_1 = 1, k_2 = 1, \omega_2 = 1, \alpha = -0.8, \beta = 1\}$.

图 4 和图 5 展示了满足参数限制 (48) 式的碰撞波解 (49) 式, 里边的周期波在扭结孤立波上运动, 而不是在常数背景上运动. 图 4 中的自由参数选为 $\{n = 0.4, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2.2, k_1 = 1, k_2 = -0.22, \omega_2 = 1, \alpha = -400, \beta = 80\}$, 其中 (48) 式中的 m 选“+”; 图 5 中的自由参数选为 $\{n = 0.6, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 4, k_1 = 1, k_2 = -0.12, \omega_2 = 0.1, \alpha = -14, \beta = 6\}$, 其中 (48) 式中的 m 选“-”. 图 6 展示了图 4 和图 5 中 u 的密度函数, 图 6(a) 对应图 4, 图 6(b) 对应图 5. 图 6 清楚地展示了扭结孤立波和周期波的碰撞.

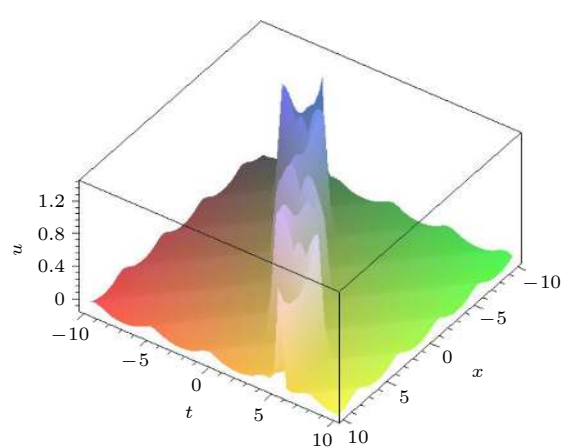


图 2 满足 (47) 式的碰撞波解 (49) 式. 自由参数为 $\{n = 0.2, m = 0.9, a_1 = 1, a_3 = 1, k_1 = 1, k_2 = 1, \omega_2 = 1, \alpha = -0.8, \beta = 1\}$

Fig. 2. The solution (49) with Formula (47). The free parameters are $\{n = 0.2, m = 0.9, a_1 = 1, a_3 = 1, k_1 = 1, k_2 = 1, \omega_2 = 1, \alpha = -0.8, \beta = 1\}$.

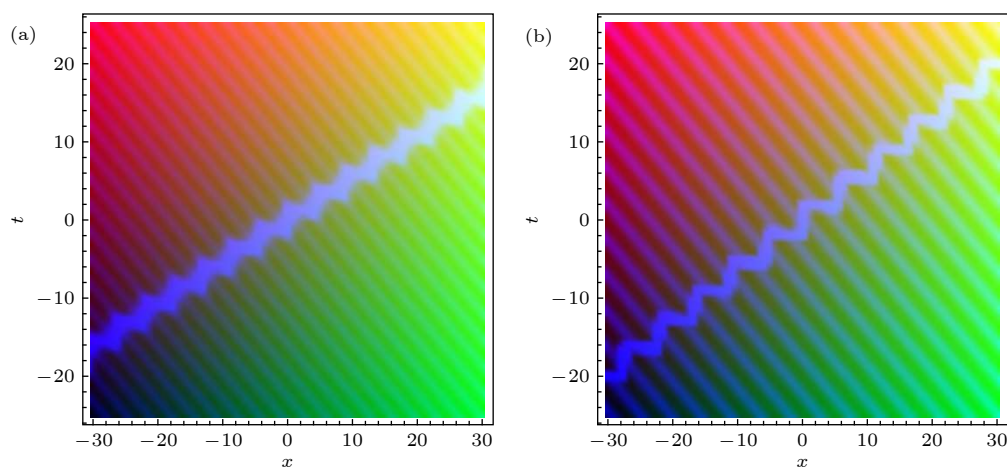


图 3 u 的密度函数图. 图 (a) 的参数与图 1 相同, 图 (b) 的参数与图 2 相同

Fig. 3. The density of u . The parameters of the Fig. (a) are the same as those of Figure 1 and the parameters of the Fig. (b) are the same as those of Figure 2.

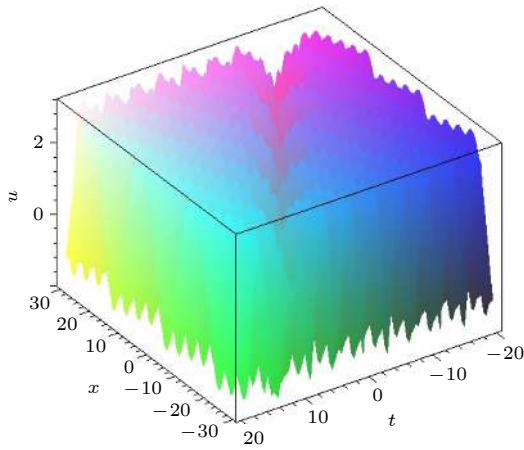


图 4 参数关系满足 (48) 式的碰撞波解 (49) 式的演化图. 自由参数为 $\{n = 0.4, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2.2, k_1 = 1, k_2 = -0.22, \omega_2 = 1, \alpha = -400, \beta = 80\}$

Fig. 4. The interaction solution (49) with parameter satisfying Formula (48). The free parameters are chosen as $\{n = 0.4, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2.2, k_1 = 1, k_2 = -0.22, \omega_2 = 1, \alpha = -400, \beta = 80\}$.

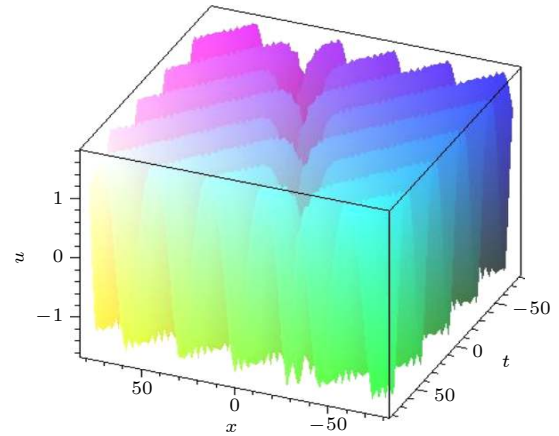


图 5 参数关系满足 (48) 式的碰撞波解 (49) 式. 自由参数为 $\{n = 0.6, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 4, k_1 = 1, k_2 = -0.12, \omega_2 = 0.1, \alpha = -14, \beta = 6\}$

Fig. 5. The interaction solution (49) with parameter satisfying Formula (48). The free parameters are selected as $\{n = 0.6, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 4, k_1 = 1, k_2 = -0.12, \omega_2 = 0.1, \alpha = -14, \beta = 6\}$.

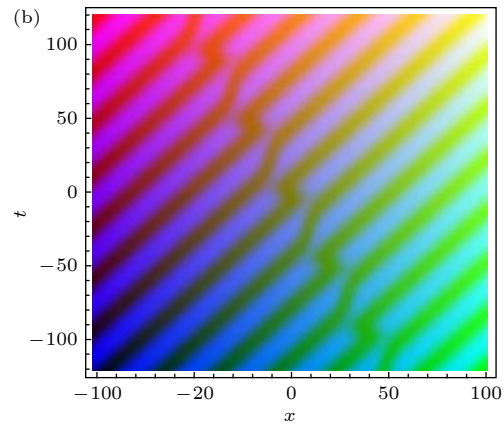
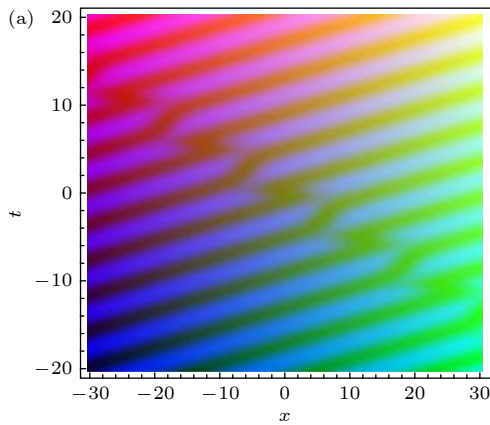


图 6 u 的密度函数图. 图 (a) 对应图 4, 图 (b) 对应图 5

Fig. 6. The density of u . The Fig. (a) is related to Fig. 4 and the Fig. (b) is corresponding to Fig. 5.

8 总结和讨论

本文推导了 Boussinesq 方程的 Lax 对, 说明 Boussinesq 方程是 Lax 可积模型. 运用截断 Painlevé 展开法研究了 Boussinesq 方程, 得到了 Boussinesq 方程的自 Bäcklund 变换, 以及 Boussinesq 方程和 Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程之间的非自 Bäcklund 变换. 研究了 Boussinesq 方程的全点李对称, 得到了单参数群变换和单参数子群不变解. 运用 CRE 方法研究了 Boussinesq 方程, 证明了 Boussinesq 方程是一个 CRE 相容模型, 得到了 Boussinesq 方程的孤立

波-椭圆余弦波碰撞解. Boussinesq 方程广泛地应用于描绘流体动力学、电磁学、等离子体、非线性晶格等物理现象. 它作为一个著名的孤立子方程, 各种各样的激发模式, 以及它在各种物理情景中的应用, 值得不断深入研究.

感谢楼森岳教授和任博博士的宝贵讨论.

参考文献

- [1] Boussinesq J 1872 *J. Math. Pures Appl.* **17** 55
- [2] Ursell F 1953 *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49** 685
- [3] Daripa P 1998 *J. Comput. Appl. Math.* **100** 161
- [4] Guo B, Gao Z, Lin J 2016 *Commun. Theor. Phys.* **64** 589

- [5] Liu W 2009 *Z. Naturforschung A* **64** 709
- [6] Benny D J, Luke J C 1964 *J. Math. Phys.* **43** 309
- [7] Himonas A A, Mantzavinos D 2015 *J. Differ. Equations* **258** 3107
- [8] Li S, Zhang W, Bu X 2017 *J. Math. Anal. Appl.* **449** 96
- [9] Weiss J 1983 *J. Math. Phys.* **24** 1405
- [10] Guo B X, Lin J 2013 *Int. J. Mod. Phys. B* **30** 1640013
- [11] Guo B X, Gao Z J, Lin J 2016 *Commun. Theor. Phys.* **66** 589
- [12] Liu Y K, Li B 2016 *Chin. J. Phys.* **54** 718
- [13] Gao X N, Lou SY, Tang X Y 2013 *J. High Energy Phys.* **5** 029
- [14] Olver P J 1993 *Applications of Lie Group to Differential Equations* (2nd ed.) (New York: Springer) pp75–238
- [15] Liu P, Zeng B Q, Ren B 2015 *Commun. Theor. Phys.* **63** 413
- [16] Liu Y K, Li B 2017 *Chin. Phys. Lett.* **34** 010202
- [17] Liu P, Zeng B Q, Deng B B, Yang J R 2015 *AIP Adv.* **5** 087162
- [18] Liu P, Wang Y X, Ren B, Li J H 2016 *Commun. Theor. Phys.* **66** 595
- [19] Jiao X Y, Jia M, An H L 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 140201 (in Chinese) [焦小玉, 贾曼, 安红利 2019 物理学报 **68** 140201]
- [20] Lou S Y 2015 *Stud. Appl. Math.* **134** 372

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

The Boussinesq equation: Lax pair, Bäcklund transformation, symmetry group transformation and consistent Riccati expansion solvability*

Liu Ping^{1)†} Xu Heng-Rui²⁾ Yang Jian-Rong³⁾

1) (School of Electronic and Information Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Zhongshan Institute, Zhongshan 528402, China)

2) (School of Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

3) (School of Physics and Electronic Information, Shangrao Normal University, Shangrao 334001, China)

(Received 2 September 2019; revised manuscript received 9 December 2019)

Abstract

The Boussinesq equation is a very important equation in fluid mechanics and some other disciplines. A Lax pair of the Boussinesq equation is proposed. With the help of the truncated Painlevé expansion, auto-Bäcklund transformation of the Boussinesq equation and Bäcklund transformation between the Boussinesq equation and the Schwarzian Boussinesq equation are demonstrated. Nonlocal symmetries of the Boussinesq equation are discussed. One-parameter subgroup invariant solutions and one-parameter group transformations are obtained. The consistent Riccati expansion solvability of the Boussinesq equation is proved and some interaction structures between soliton-cnoidal waves are obtained by consistent Riccati expansion.

Keywords: Boussinesq equation, lax pair, Bäcklund transformation, consistent Riccati expansion

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr

DOI: 10.7498/aps.69.20191316

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 11775047, 11865013) and the Science and Technology Project of Zhongshan,China(Grant No. 2017B1016).

† Corresponding author. E-mail: liuping49@126.com

一个可积的逆空时非局部Sasa–Satsuma方程

宋彩芹 朱佐农

An integrable reverse space–time nonlocal Sasa–Satsuma equation

Song Cai-Qin Zhu Zuo-Nong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010204 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191887

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191887>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

弯曲时空中转动对自旋流的影响

Rotation effect on spin current in curved space–time

物理学报. 2019, 68(12): 120401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182260>

机载极化阵列多输入多输出雷达极化空时自适应处理性能分析

Performance analysis of polarization–space–time adaptive processing for airborne polarization array multiple–input multiple–output radar

物理学报. 2017, 66(4): 048401 <https://doi.org/10.7498/aps.66.048401>

Korteweg–de Vries方程的准孤立子解及其在离子声波中的应用

Quasi–soliton solution of Korteweg–de Vries equation and its application in ion acoustic waves

物理学报. 2018, 67(11): 110201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180094>

场方法的改进及其在积分Riemann–Cartan空间运动方程中的应用

Improvement of field method and its application to integrating motion equation in Riemann–Cartan space

物理学报. 2018, 67(3): 034501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171583>

耦合含时滞的相互依存网络的局部自适应异质同步

Local adaptive heterogeneous synchronization for interdependent networks with delayed coupling

物理学报. 2018, 67(5): 050504 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171927>

非一致通信时滞动力学网络上的接连滞后同步

Successive lag synchronization on dynamical networks with non–uniform communication delays

物理学报. 2018, 67(1): 018901 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171630>

专题: 非线性物理

一个可积的逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程*

宋彩芹¹⁾ 朱佐农^{2)†}¹⁾ (上海理工大学理学院, 上海 200093)²⁾ (上海交通大学数学科学学院, 上海 200240)

(2019 年 12 月 14 日收到; 2019 年 12 月 21 日收到修改稿)

本文给出了一个可积的逆空时 (逆空间-逆时间) 非局部 Sasa-Satsuma 方程. 建立了这个方程的 Darboux 变换, 并且构造了这个逆空时非局部方程在零背景条件下的孤子解.

关键词: 可积的逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程, 达布变换, 孤子解

PACS: 02.30.Ik, 04.20.Jb, 04.30.Nk, 05.45.Yv

DOI: 10.7498/aps.69.20191887

1 一个可积的逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程

耦合的 Sasa-Satsuma 系统

$$\begin{aligned} iQ_T + \frac{Q_{XX}}{2} + Q^2 R \\ + i [Q_{XXX} + 9QRQ_X + 3Q^2 R_X] = 0, \\ iR_T - \frac{R_{XX}}{2} - QR^2 \\ + i [R_{XXX} + 9QRR_X + 3R^2 Q_X] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

是一个非线性可积系统. 这个系统在约化条件 $R(X, T) = \pm Q^*(X, T)$ 下转化为经典的 Sasa-Satsuma 方程^[1-14],

$$\begin{aligned} iQ_T + \frac{1}{2}Q_{XX} \pm |Q|^2 Q \\ + i [Q_{XXX} \pm 9|Q|^2 Q_X \pm 3|Q|^2 Q_X^*] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

这是一个可积的高阶非线性薛定谔方程. 这个方程可以用来描述光纤中飞秒脉冲的传播^[2,3].

最近, Ablowitz 和 Musslimani^[15] 给出了一个逆空时的可积非局部 NLS 方程,

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) \pm 2q^2(x, t)q^*(-x, t) = 0. \quad (3)$$

这个逆空时的可积非局部 NLS 方程引起了人们对这类非局部可积非线性系统的极大研究兴趣. 若干逆空间、逆时间或逆空时非局部可积方程被提出并被研究^[15-24]. 作者在文献^[20]中研究了一个逆空时可积非局部 Sasa-Satsuma 方程:

$$u_t + u_{xxx} \pm (9uu_x u^*(-x, -t) + 3u^2(u^*(-x, -t))_x) = 0. \quad (4)$$

我们注意到这样一个事实: 对于系统 (1), 如果做约化 $R(X, T) = Q(-X, -T)$, 则可得到如下逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程:

$$\begin{aligned} iQ_T + \frac{Q_{XX}}{2} + Q^2 Q(-X, -T) \\ + i \left[Q_{XXX} + 9QQ(-X, -T)Q_X \right. \\ \left. + 3Q^2 \frac{\partial Q(-X, -T)}{\partial X} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

在变换

$$\begin{aligned} u(x, t) = Q(X, T) \exp \left\{ \frac{-i}{6} \left(X - \frac{T}{18} \right) \right\}, \\ t = T, x = X - \frac{T}{12} \end{aligned} \quad (6)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11671255, 11801367) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zznzhu@sjtu.edu.cn

下, 逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程 (5) 转化为如下形式:

$$u_t + u_{xxx} + 9uu(-x, -t)u_x + 3u^2 \frac{\partial u(-x, -t)}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

显然, 方程 (7) 也可以看作为一个逆空时非局部 mKdV 型方程. 本文的主要目的是建立逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的 Darboux 变换, 并给出这个方程的孤子解.

2 逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的 Darboux 变换

我们注意到方程 (7) 可以从系统

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + 9uvu_x + 3u^2v_x &= 0, \\ v_t + v_{xxx} + 9uvv_x + 3v^2u_x &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

通过约化 $v = u(-x, -t)$ 而得到. Sasa-Satsuma 系统 (8) 和耦合系统 (1) 是等价的. 事实上, 在变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= Q(X, T) \exp \left\{ \frac{-i}{6} \left(X - \frac{T}{18} \right) \right\}, \\ v(x, t) &= R(X, T) \exp \left\{ \frac{i}{6} \left(X - \frac{T}{18} \right) \right\}, \\ t = T, \quad x &= X - \frac{T}{12} \end{aligned}$$

下, 这两个系统可以相互转化. 对于耦合 Sasa-Satsuma 系统 (8) 在不同的约束条件下可以化为不同的方程: 当 $v = u$ 时, 系统 (8) 化为 mKdV 方程; 当 $v = u^*$ 时, 系统 (8) 化为一个复的 mKdV 型方程即经典的 Sasa-Satsuma 方程. Sasa-Satsuma 方程 (8) 是 Lax 可积的. 事实上, 系统 (8) 可由如下的线性谱问题

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U\Phi, \quad U = i\lambda\sigma_3 + P, \quad \Phi_t = V\Phi, \\ V &= 4i\lambda^3\sigma_3 + 4\lambda^2P + 2i\lambda(P^2 + P_x)\sigma_3 \\ &\quad + P_xP - PP_x - P_{xx} + 2P^3 \end{aligned} \quad (9)$$

的可积性条件 $U_t - V_x + UV - VU = 0$ 得到, 其中

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \\ -v & -u & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \text{diag}(1, 1, -1). \quad (10)$$

我们用 $\Phi(x, t; \lambda_j)$ 来表示线性谱问题 (9) 在谱参数 $\lambda = \lambda_j$ 下的特征向量函数. 令 $\Theta_j = \Phi'(x, t; \lambda_j)M$, 那么可以直接验证

$$\Theta_j = (\phi_2(x, t, \lambda_j), \phi_1(x, t, \lambda_j), \phi_3(x, t, \lambda_j))$$

是线性谱问题 (9) 的伴随问题

$$\Theta_x = -\Theta U, \quad \Theta_t = -\Theta V \quad (11)$$

在谱参数 $\lambda = -\lambda_j$ 下的特征函数, 这里上标, 表示矩阵的转置, 矩阵 M 是

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

将 $\Phi(x, t; \lambda_j)$ 和 $\phi_l(x, t; \lambda_j)$ 分别简记为 Φ_j 和 $\phi_{j,l}$. 类似于文献 [20], 我们可以获得 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的 Darboux 变换. 首先给出 (8) 式的双 Darboux 变换. 作如下特征函数的变换:

$$\Phi[1] = T\Phi = \Phi - \eta_1 \Omega(\eta_1, \eta_1)^{-1} \Omega(\eta_1, \Phi), \quad (13)$$

其中 $\eta_1 = (\Phi_1, \Phi_2)$,

$$\begin{aligned} \Omega(\eta_1, \eta_1) &= \begin{pmatrix} \frac{\Theta_1\Phi_1}{-2\lambda_1} & \frac{\Theta_1\Phi_2}{-\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{\Theta_2\Phi_1}{-\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\Theta_2\Phi_2}{-2\lambda_2} \end{pmatrix}, \\ \Omega(\eta_1, \Phi) &= \begin{pmatrix} \frac{\Theta_1\Phi}{-\lambda_1 - \lambda} \\ \frac{\Theta_2\Phi}{-\lambda_2 - \lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

则联系于耦合的 Sasa-Satsuma 系统 (8) 的线性谱问题 (9) 变换为

$$\Phi[1]_x = U[1]\Phi[1], \quad \Phi_x = V[1]\Phi[1], \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} U[1] &= i\lambda\sigma_3 + P[1], \\ V[1] &= 4i\lambda^3\sigma_3 + 4\lambda^2P[1] + 2i\lambda(P[1]^2 + P[1]_x)\sigma_3 \\ &\quad + P[1]_xP[1] - P[1]P[1]_x - P[1]_{xx} + 2P[1]^3. \end{aligned} \quad (15)$$

我们期望矩阵 $P[1]$ 与矩阵 P 有完全相同的结构. 可以验证如果矩阵 $P[1]$ 中的 $u[1], v[1]$ 与矩阵 P 中的 u, v 有如下关系:

$$u[1] = u - 2iS_{13}, \quad v[1] = v - 2iS_{23}, \quad (16)$$

其中 $S = \eta_1 \Omega(\eta_1, \eta_1)^{-1} \eta_1' M$, 则矩阵 $P[1]$ 与矩阵 P 有完全相同的结构, 即方程 (8) 的双 Darboux 变换被获得. 值得指出的是如果取约化 $v = u^*$, 耦合 Sasa-Satsuma 方程 (8) 约化为经典的 Sasa-Satsuma 方程. 我们在变换 (13) 式中取 $\lambda_2 = -\lambda_1^*$ 及特征函数 $\Phi_2 = (\phi_2^*(x, t; \lambda_1), \phi_1^*(x, t; \lambda_1), \phi_3^*(x, t; \lambda_1))'$,

那么变换后 (16) 式的势函数满足 $v[1] = u[1]^*$, 其表达式与文献 [5,7,8] 中得到的经典 Sasa-Satsuma 方程的势函数变换关系相同.

如果令矩阵 $\mathbf{P}$ 中的 $v = u(-x, -t)$ 并选取适当的参数使得 $S_{23} = S_{13}(-x, -t)$, 那么 $\mathbf{P}[1]$ 中的 $v[1]$ 就等于 $u[1](-x, -t)$. 从而 $u[1]$ 与 u 的关系实质上就是逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的 Bäcklund 变换. $u[1]$ 是这个逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程的解.

进一步, 可以给出耦合 Sasa-Satsuma 系统 (8) 的 n 次双 Darboux 变换. 令

$$\Phi[n] = \Phi - \mathbf{R}\mathbf{W}^{-1}\Omega, \quad (17)$$

其中 $\mathbf{R} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 并且

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \Omega(\eta_1, \eta_1) & \Omega(\eta_1, \eta_2) & \cdots & \Omega(\eta_1, \eta_n) \\ \Omega(\eta_2, \eta_1) & \Omega(\eta_2, \eta_2) & \cdots & \Omega(\eta_2, \eta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega(\eta_n, \eta_1) & \Omega(\eta_n, \eta_2) & \cdots & \Omega(\eta_n, \eta_n) \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega(\eta_1, \Phi) \\ \Omega(\eta_2, \Phi) \\ \vdots \\ \Omega(\eta_n, \Phi) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中 $\eta_k = (\Phi_{2k-1}, \Phi_{2k})$,

$$\Omega(\eta_k, \eta_l) = \begin{pmatrix} \frac{\Theta_{2k-1}\Phi_{2l-1}}{-\lambda_{2k-1} - \lambda_{2l-1}} & \frac{\Theta_{2k-1}\Phi_{2l}}{-\lambda_{2k-1} - \lambda_{2l}} \\ \frac{\Theta_{2k}\Phi_{2l-1}}{-\lambda_{2k} - \lambda_{2l-1}} & \frac{\Theta_{2k}\Phi_{2l}}{-\lambda_{2k} - \lambda_{2l}} \end{pmatrix},$$

$$\Omega(\eta_k, \Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\Theta_{2k-1}\Phi}{-\lambda_{2k-1} - \lambda} \\ \frac{\Theta_{2k}\Phi}{-\lambda_{2k} - \lambda} \end{pmatrix}.$$

变换后位势函数 $u[n]$ 和 $v[n]$ 可以由矩阵 $\mathbf{P}[n]$ 与矩阵 $\mathbf{P}$ 之间的关系

$$\mathbf{P}[n] = \mathbf{P} + i[\mathbf{R}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}'\mathbf{M}, \sigma_3] \quad (19)$$

给出. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是一个 $2n$ 阶行向量, 那么根据等式关系

$$\mathbf{a}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{b}' = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{b}' \\ -\mathbf{a} & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{W}|},$$

可以得到

$$u[n] = u - 2i \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{r}'_3 \\ -\mathbf{r}_1 & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{W}|},$$

$$v[n] = v - 2i \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{r}'_3 \\ -\mathbf{r}_2 & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{W}|}, \quad (20)$$

其中 $\mathbf{r}_l = (\phi_{1,l}, \phi_{2,l}, \dots, \phi_{2n-1,l}, \phi_{2n,l})$, $l = 1, 2, 3$. 需要指出, 文献 [5] 给出了 Sasa-Satsuma 方程 (即方程 (8) 中取 $v = u^*$) 的 Darboux 变换, 但没有给出高阶 Darboux 变换. 这里给出了 Sasa-Satsuma 系统 (8) 的高阶双 Darboux 变换. 在约化 $v = u^*$ 下, 取 $\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}^*$ 及特征函数 $\Phi_{2j} = (\phi_2^*(x, t; \lambda_{2j-1}), \phi_1^*(x, t; \lambda_{2j-1}), \phi_3^*(x, t; \lambda_{2j-1}))'$, 即可获得 Sasa-Satsuma 方程的高阶 Darboux 变换.

3 逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的解

借助于 Darboux 变换, 我们将构造方程 (7) 的解. 方程 (7) 有指数形式的解 $u = r e^{\kappa(x - (\kappa^2 + 6r^2)t)}$, 其中 r 和 κ 是任意的实数. 特别地, $u = 0$ 是一个解. 解对应的线性谱问题得到在谱参数 $\lambda = \lambda_j$ 时的特征函数为

$$\phi_{j1} = \alpha_j e^{\theta_j}, \quad \phi_{j2} = \beta_j e^{\theta_j}, \quad \phi_{j3} = e^{-\theta_j},$$

$$\theta_j = i\lambda_j(x + 4\lambda_j^2 t).$$

用 Darboux 变换, 获得 $u[1]$ 和 $v[1]$ 如下:

$$u[1] = 4i(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{g_1}{h}, \quad v[1] = 4i(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{g_2}{h}, \quad (21)$$

其中

$$h = -2\lambda_1\lambda_2(1 - 2\alpha_1\beta_1 e^{4\theta_1} - 2\alpha_2\beta_2 e^{4\theta_2} + 4(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2) e^{2(\theta_1+\theta_2)} + 2e^{4(\theta_1+\theta_2)}(\alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2) + (1 + 2\alpha_1\beta_1 e^{4\theta_1})(1 + 2\alpha_2\beta_2 e^{4\theta_2})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2),$$

$$g_1 = (\alpha_1\lambda_1 e^{2\theta_1} - \alpha_2\lambda_2 e^{2\theta_2})(\lambda_1 - \lambda_2) + 2(\beta_1\alpha_2\lambda_1 - \beta_2\alpha_1\lambda_2)(\alpha_2\lambda_1 e^{2\theta_2} - \alpha_1\lambda_2 e^{2\theta_1}) e^{2(\theta_1+\theta_2)},$$

$$g_2 = (\beta_1\lambda_1 e^{2\theta_1} - \beta_2\lambda_2 e^{2\theta_2})(\lambda_1 - \lambda_2) + 2(\beta_1\alpha_2\lambda_1 - \beta_2\alpha_1\lambda_2)(\beta_2\lambda_1 e^{2\theta_2} - \beta_1\lambda_2 e^{2\theta_1}) e^{2(\theta_1+\theta_2)}. \quad (22)$$

显然, 要得到逆空时非局部方程 (7) 的解, 需要选

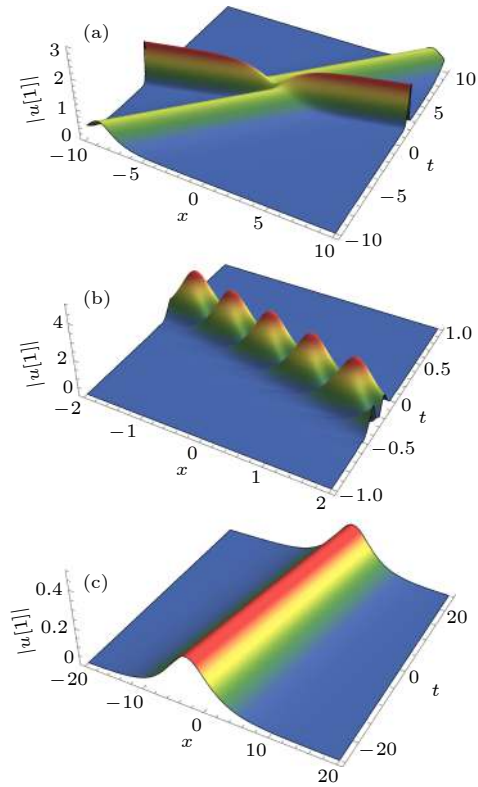


图 1 可积的逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的孤子解 (a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i/2$; (b) $\alpha_1 = -\alpha_2 = \beta_1 = -\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$; (c) $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \beta_2 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \lambda_2$

Fig. 1. Soliton solutions of integrable reverse space-time nonlocal Sasa-Satsuma equation (7): (a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i/2$; (b) $\alpha_1 = -\alpha_2 = \beta_1 = -\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$; (c) $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \beta_2 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \lambda_2$.

择适当的参数,使得 $v[1] = u[1](-x, -t)$. 经过分析,我们发现在如下几种参数情况下:

- (1) $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- (2) $\alpha_1 = -\alpha_2 = \beta_1 = -\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- (3) $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \beta_2 = 0, \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \lambda_2$;
- (4) $\alpha_1 = \alpha_2 = -\beta_1 = -\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- (5) $\alpha_1 = -\alpha_2 = -\beta_1 = \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

有 $v[1] = u[1](-x, -t)$. 从而逆空时非局部方程 (7) 的解被构造. 对于情形 (1)—(3), 有 $u(x, t) = u(-x, -t)$, 而对于情形 (4)—(5) 有 $u(x, t) = -u(-x, -t)$. 我们给出了对应于情形 (1)—(3) 的解 $u(x, t)$ 的图, 如图 1 所示.

值得指出,经典的 Sasa-Satsuma 方程有一个显著的特征,即存在双峰孤波解. 对于逆空时非局部可积方程 (4),我们也给出了类似的双峰孤波解. 但对于本文研究的逆空时非局部可积方程 (7),并没有发现这样的双峰孤波解的存在. 从这个意义上说,逆空时非局部可积方程 (4) 和方程 (7) 确有不同的性质. 逆空时非局部可积方程 (7) 值得进一步研究.

参考文献

- [1] Sasa N, Satsuma J 1991 *J. Phys. Soc. Jpn* **60** 409
- [2] Porsezian K, Nakkeeran K 1996 *Phys. Rev. Lett* **76** 3955
- [3] Mihalache D, Torner L, Moldoveanu F, Panoiu N C, Truta N 1993 *Phys. Rev. E* **48** 4699
- [4] Ghosh S, Kundu A, Nandy S 1999 *J. Math. Phys.* **40** 1993
- [5] Li Y S, Han W T 2001 *Chin. Ann. Math.* **22B** 171
- [6] Gilson C, Hietarinta J, Nimmo J, Ohta Y 2003 *Phys. Rev. E* **68** 016614
- [7] Wright O C 2007 *Chaos, Solitons Fractals* **33** 374
- [8] Nimmo J, Yilmaz H 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 425202
- [9] Bandelow U, Akhmediev N 2012 *Phys. Rev. E* **86** 026606
- [10] Li Z H, Li L, Tian H P, Zhou G S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4096
- [11] Ohta Y 2010 *AIP Conference Proceeding* **1212** 114
- [12] Zhao L C, Li S C, Ling L M 2014 *Phys. Rev. E* **89** 023210
- [13] Xu T, Li M, Li L 2015 *Europhys. Lett.* **109** 30006
- [14] Liu Y K, Li B 2017 *Chin. Phys. Lett.* **34** 010202
- [15] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 064105
- [16] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2016 *Stud. Appl. Math.* **139** 7
- [17] Ji J L, Zhu Z N 2017 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **42** 699
- [18] Lou S Y 2018 *J. Math. Phys.* **59** 083507
- [19] Yang B, Yang J 2018 *Stud. Appl. Math.* **140** 178
- [20] Song C Q, Xiao D M, Zhu Z N 2017 *J. Phys. Soc. Jpn.* **86** 054001
- [21] Rao J, Cheng Y, He J S 2017 *Stud. Appl. Math.* **139** 568
- [22] Rao J, Cheng Y, Porsezian K, Mihalache S, He J S 2020 *Physica D* **401** 132180
- [23] Ji J L, Zhu Z N 2017 *J. Math. Anal. Appl.* **453** 973
- [24] Ma L Y, Zhu Z N 2016 *J. Math. Phys.* **57** 083507

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

An integrable reverse space-time nonlocal Sasa-Satsuma equation^{*}

Song Cai-Qin¹⁾ Zhu Zuo-Nong^{2)†}

1) (*College of Sciences, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

2) (*School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*)

(Received 14 December 2019; revised manuscript received 21 December 2019)

Abstract

In this paper, we introduce an integrable reverse space-time nonlocal Sasa-Satsuma equation. The Darboux transformation and soliton solutions for this nonlocal integrable equation are constructed.

Keywords: integrable reverse space-time nonlocal Sasa-Satsuma equation, Darboux transformation, soliton solution

PACS: 02.30.Ik, 04.20.Jb, 04.30.Nk, 05.45.Yv

DOI: [10.7498/aps.69.20191887](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191887)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos.11671255, 11801367).

[†] Corresponding author. E-mail: znzhu@sjtu.edu.cn

高阶Ablowitz-Ladik方程的局域波解 及稳定性分析

闻小永 王昊天

Dynamics of localized wave solutions for a higher-order Ablowitz-Ladik equation

Wen Xiao-Yong Wang Hao-Tian

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010205 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191235

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191235>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体简介

Higher-order topological insulators and superconductors

物理学报. 2019, 68(22): 226101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191101>

三端磁隧道结的稳定性分析

Stability analysis in three-terminal magnetic tunnel junction

物理学报. 2019, 68(20): 207201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190927>

正三角型三芯光纤中等腰对称平面波的调制不稳定性分析

Modulation instabilities in equilateral three-core optical fibers for isosceles-triangle symmetric continuous waves

物理学报. 2018, 67(5): 054203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171650>

高次谐波发射的亚原子尺度研究

Subatomic scale study of atom-generated higher-order harmonic

物理学报. 2019, 68(17): 173202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190790>

基于场变换的毫米波半波片设计

Millimeter-wave half-waveplate based on field transformation

物理学报. 2018, 67(7): 070201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171774>

非线性薛定谔方程的高阶分裂改进光滑粒子动力学算法

Numerical study of nonlinear Schrödinger equation with high-order split-step corrected smoothed particle hydrodynamics method

物理学报. 2019, 68(9): 090203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190169>

专题：非线性物理

高阶 Ablowitz-Ladik 方程的局域波解及稳定性分析*

闻小永[†] 王昊天

(北京信息科技大学理学院, 北京 100192)

(2019 年 8 月 17 日收到; 2019 年 11 月 25 日收到修改稿)

本文构造了一类高阶 Ablowitz-Ladik 方程的广义 $(M, N-M)$ -波 Darboux 变换, 借助符号计算从不同背景出发研究了该模型丰富的局域波解, 并利用数值模拟研究了这些解的动力学稳定性.

关键词: 高阶 Ablowitz-Ladik 方程, 广义 $(M, N-M)$ -波 Darboux 变换, 局域波, 怪波

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr, 05.45.Yv, 04.60.Nc

DOI: 10.7498/aps.69.20191235

1 引言

1955 年, Fermi, Pasta 和 Ulam 领导的科学家小组用数值方法计算了用非线性弹簧联结的 64 个质点组成的谐振子的振动, 其目的是从数值实验上验证统计力学中的能量均分定理, 这在后来被人们称为著名的 FPU 实验^[1]. 1967 年, Toda^[2]考虑晶体的非线性振动, 提出了著名的 Toda 晶格方程近似模拟这种情况, 并得到了该模型的孤子解, 从而使 FPU 试验问题得到合理的解释和正确解答^[1]. Toda 晶格方程作为一类可积的半离散的非线性微分差分方程可以描述一些物理学中的非线性波的传播现象, 该方程的提出引起了人们对可积的离散孤子方程研究的热潮. 可积系统中的非线性微分差分方程 (又称离散的孤子方程) 是一类重要的半离散的非线性偏微分方程, 近年来国际上对这类模型的研究有着极大的兴趣, 这些方程与元胞自动机、DNA 的研究、辛算法有密切的关系, 在电学、光学、磁性流体、超导、生物和等离子体中有着广泛的应用, 有十分广阔的应用前景, 目前离散问题的

研究是国际上研究热点之一^[3]. 日本科学家 Hirota^[4]指出连续的孤子方程可以被离散化, 并且不久的将来将会是差分方程的时代, 这里所说的差分方程就是离散的孤子方程.

近年来, 孤子方程的局域波解受到了数学家和物理学家的广泛关注, 按传播特性, 局域波主要包括孤子、呼吸子、怪波等^[5–18], 广泛存在于非线性光学、玻色斯坦凝聚、等离子物理等各种非线性物理系统^[5–16]. 孤子又称孤立波, 是一种在传播过程中形状、幅度和速度都维持不变的脉冲状行波, 并且孤子与其他同类孤子相遇后, 能维持其幅度、形状和速度不变^[5,6]. 呼吸子是一种特殊的局域周期振荡孤子, 按传播方向有空间周期的 Akhmediev 呼吸子和时间周期的 Kuznetsov-Ma 呼吸子^[5,6], 从光学和流体力学到玻色-爱因斯坦凝聚体和等离子体等各种物理情况下都能广泛地观察到呼吸子的传播现象, 关于呼吸子碰撞特性的研究最近取得一系列有趣的结果, 包括棋盘干涉时空结构^[7], 具有不同传播特征的 super-regular 呼吸子作用现象^[8–11]等. 怪波最初是用来描述海洋中出现的大振幅波, 突然出现然后又很快消失得无影无踪, 怪

* 国家自然科学基金 (批准号: 61471406) 和北京信息科技大学“拔尖人才”培育项目 (批准号: QXTCP-B201704) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: xiaoyongwen@163.com

波也被称为畸形波, 是一种短时间内存在的大振幅的局域波动 [5,6,14–18]. 怪波发生物理机理的研究是怪波研究的重点, 调制不稳定性通常被认为是呼吸子和怪波发生的主要机制, 并且一些文献认为它可能是形成怪波和呼吸子的必要条件 [10,11]. 目前不同类型的局域波作用解是国际上研究的热点问题, 然而大部分问题和方法仅限于连续的孤子方程的局域波及其作用 [5–24]. 例如文献 [5,6] 研究了高维非线性模型的局域波作用解包括呼吸子和怪波以及 Lump 解之间的相互作用解; 文献 [14] 研究了非线性光纤中呼吸子和怪波的相互作用现象. 这些局域波作用对于理解新的物理现象具有重要的理论意义. 然而对于离散孤子方程的局域波的研究, 由于研究的困难性, 据我们所知, 研究还不充分, 不系统 [25,26], 因此本文将研究离散的非线性微分差分方程丰富的局域波解. 作为例子, 研究下面的非线性微分差分方程

$$\begin{aligned} r_{n,t} = & i(1 - \sigma|r_n|^2)[\sigma r_n^*(r_{n-1}^2 + r_{n+1}^2) \\ & + \sigma r_n(r_{n-1}r_{n+1}^* + r_{n-1}^*r_{n+1}) \\ & - r_{n-2}(1 - \sigma|r_{n-1}|^2) \\ & - r_{n+2}(1 - \sigma|r_{n+1}|^2) + 2(r_{n-1} + r_{n+1})], \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $r_n = r(n, t)$, $r_{n,t} = dr_n/dt$, 星号 * 表示共轭, i 是虚数单位, $\sigma = \pm 1$, 这里加号和减号分别表示聚焦和散焦情况. 方程 (1) 可以通过 AKNS 方法得到 [3], 这里为节省篇幅不给出具体推导过程. 由于方程 (1) 和 Ablowitz-Ladik 方程 [3,27] (即 $ir_{n,t} = r_{n-1} + r_{n+1} - 2r_n - \sigma|r_n|^2(r_{n-1} + r_{n+1})$) 属于同一个梯队, 是这个梯队的第二个方程, 我们称方程 (1) 为高阶的 Ablowitz-Ladik 方程. 正如五阶 KdV 方程可以像 KdV 方程能描述浅水波的运动一样 [3], 我们有理由相信方程 (1) 也可能像它对应的低阶 Ablowitz-Ladik 方程一样可以描述光纤中光孤子的传播, 因此研究方程 (1) 具有重要的理论和物理意义. 虽然对离散的 Ablowitz-Ladik 方程的局域波已经有了一定的研究结果, 特别是应用双线性方法得到了它的怪波 [28–30], 然而对于离散的孤子方程 (1) 还没有系统的方法进行研究, 特别是仍然没有通过我们提出的广义 $(M, N-M)$ 波 Darboux 变换进行系统的研究. 因此本文将应用广义 $(M, N-M)$ 波 Darboux 变换从研究方程 (1) 的精确解出发, 寻找其新奇的局域波结构, 特别是不同类型的局域波相互作用的新奇局域波结构.

本文的主要结构安排如下: 第二节构造出方程 (1) 的 Lax 对和广义 $(M, N-M)$ 波 Darboux 变换; 第三节将应用广义 $(M, N-M)$ -波 Darboux 变换给出方程 (1) 不同类型的局域波解, 并通过数值模拟研究其传播稳定性; 最后是本文的结论.

2 Lax 对和广义 $(M, N-M)$ -波 Darboux 变换

由 AKNS 方法 [3], 可以构造方程 (1) 的 Lax 对如下

$$E\varphi_n = U_n\varphi_n, \quad \varphi_{n,t} = V_n\varphi_n, \quad (2)$$

这里

$$U_n = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda r_n \\ \sigma \lambda r_n^* & 1 \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} V_{11} = & -\frac{i}{2}\lambda^4 + i(1 + \sigma r_n r_{n-1}^*)\lambda^2 \\ & + \sigma i r_{n+1} r_{n-1}^* (1 - \sigma|r_n|^2) \\ & + i\sigma r_n r_{n-2}^* (1 - \sigma|r_{n-1}|^2) - i r_n^2 r_{n-1}^{*2} \\ & - \frac{i}{2\lambda^4} + \frac{i(1 + \sigma r_{n-1} r_n^*)}{\lambda^2}, \\ V_{12} = & i(\sigma|r_n|^2 r_{n+1}^* + \sigma r_n^2 r_{n-1}^* - r_{n+1} + 2r_n)\lambda \\ & - i r_n \lambda^3 + \frac{i r_{n-1}}{\lambda^3} \\ & + \frac{i(r_{n-2} - \sigma r_{n-1}^2 r_n^* - \sigma r_{n-1} r_{n-1}^* r_{n-2} - 2r_{n-1})}{\lambda}, \\ V_{21} = & i(-\sigma r_{n-2}^* + r_{n-1}^{*2} r_n + |r_{n-1}|^2 r_{n-2}^* \\ & + 2\sigma r_{n-1}^* \lambda - \sigma i r_{n-1}^* \lambda^3 + \frac{i\sigma r_n^*}{\lambda^3} \\ & + \frac{i(\sigma r_{n+1}^* - r_n^{*2} r_{n-1} - |r_n|^2 r_{n+1}^* - 2\sigma r_n^*)}{\lambda}, \\ V_{22} = & \frac{i}{2}\lambda^4 - i(1 + \sigma r_n r_{n-1}^*)\lambda^2 \\ & - i\sigma r_{n-1} r_{n+1}^* (1 - \sigma|r_n|^2) \\ & - i\sigma r_{n-2} r_n^* (1 - \sigma|r_{n-1}|^2) + i r_n^{*2} r_{n-1}^2 \\ & + \frac{i}{2\lambda^4} - \frac{i(1 + \sigma r_{n-1} r_n^*)}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

这里 $\varphi_n = (\phi_n, \psi_n)^T$ 表示 Lax 对 (2) 式的解, T 表示转置. 借助符号计算 Maple, 容易验证方程 (2) 的相容性条件 $U_{n,t} = V_{n+1}U_n - U_nV_n$ 等价于方

程 (1). 接下来基于 Lax 对 (2) 式, 构造方程 (1) 的广义 $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换, 然后通过它构造方程 (1) 的局域波解. 为此考虑下面的规范变换

$$\tilde{\varphi}_n = T_n \varphi_n, \quad (3)$$

其中是 T_n 是 2×2 的矩阵, 根据 Darboux 变换的知识, $\tilde{\varphi}_n$ 必须满足

$$\tilde{\varphi}_{n+1} = \tilde{U}_n \tilde{\varphi}_n, \quad \tilde{\varphi}_{n,t} = \tilde{V}_n \tilde{\varphi}_n, \quad (4)$$

这里 $\tilde{U}_n, \tilde{V}_n$ 和 U_n, V_n 有相同的形式, 是将 U_n, V_n 的 r_n 替换为 $\tilde{r}_n$ 得到的. 由 (3) 式和 (4) 式, 可知 $T_n, \tilde{U}_n, \tilde{V}_n, U_n, V_n$ 必须满足

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n &= T_{n+1} U_n T_n^{-1}, \\ \tilde{V}_n &= (T_{n,t} + T_n V_n) T_n^{-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

为此, 我们构造一个特殊的 Darboux 阵如下

$$T_n = \begin{pmatrix} \lambda^{2N} + \sum_{j=1}^N a_n^{(2j-2)} \lambda^{2j-2} & \sum_{j=1}^N b_n^{(2j-1)} \lambda^{2j-1} \\ -\sigma \sum_{j=1}^N b_n^{(2N-2j+1)*} \lambda^{2j-1} & 1 + \sum_{j=1}^N a_n^{(2N-2j)*} \lambda^{2j} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

这里 N 是正整数, $a_n^{(k)}, b_n^{(k)}$ 是 n, t 的未知函数. 当选择 N 个合适的 $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, N)$, $a_n^{(k)}, b_n^{(k)}$ 可以通过解下面的方程组得到:

$$\Delta_{j,s}^{(i)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{j-1} C_{2N-2s}^k \lambda_i^{(2N-2s-k)} \phi_i^{(j-1-k)}, & 1 \leq j \leq m_i + 1, 1 \leq s \leq N, \\ \sum_{k=0}^{j-1} C_{4N-2s+1}^k \lambda_i^{(4N-2s+1-k)} \psi_i^{(j-1-k)}, & 1 \leq j \leq m_i + 1, N+1 \leq s \leq 2N, \\ \sum_{k=0}^{j-(N+1)} C_{2N-2s}^k \lambda_i^{2N-2s-k*} \psi_i^{(j-1-k)*}, & m_i + 2 \leq j \leq 2(m_i + 1), 1 \leq s \leq N, \\ -\sigma \sum_{k=0}^{j-(N+1)} C_{4N-2s+1}^k \lambda_i^{2s-1+k*} \phi_i^{(j-N-1-k)*}, & m_i + 2 \leq j \leq 2(m_i + 1), N+1 \leq s \leq 2N, \end{cases}$$

$\Delta a_n^{(0)}$ 和 $\Delta b_n^{(1)}$ 由向量 $(g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(n)})$ 替换 Δ_N^ϵ 中第 N 列和 $2N$ 列得到, 将 $\Delta a_n^{(0)}$ 和 $\Delta b_n^{(1)}$ 中的 n 替换为 $n+1$ 可以得到 $\Delta a_{n+1}^{(0)}$ 和 $\Delta b_{n+1}^{(1)}$, 这里 $g^{(i)} = (g_j^{(i)})_{2(m_i+1) \times 1}$, 这里当 $1 \leq j \leq (m_i + 1)$ 时, $g_j^{(i)} = -\sum_{k=0}^{j-1} C_{2N}^k \lambda_i^{2N-k} \phi_i^{(j-1-k)}$, 当 $m_i + 2 \leq j \leq 2(m_i + 1)$ 时, $g_j^{(i)} = -\psi_i^{(j-N-1)*}$.

这里需要说明的是: 对于定理 1, (3) 式和 (8) 式 (即 $(r_n, \varphi_n) \rightarrow (\tilde{r}_n, \tilde{\varphi}_n)$) 称为方程 (1) 的广义 $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换, 这里 M 表示使用

$$\begin{cases} T_n^{(0)}(\lambda_i) \varphi_n^{(0)}(\lambda_i) = 0, \\ T_n^{(0)}(\lambda_i) \varphi_n^{(1)}(\lambda_i) + T_n^{(1)}(\lambda_i) \varphi_n^{(0)}(\lambda_i) = 0, \\ \dots, \\ \sum_{j=0}^{m_i} T_n^{(j)}(\lambda_i) \varphi_n^{(m_i-j)}(\lambda_i) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

这里 $N = M + \sum_{i=1}^M m_i$, 其中 $1 \leq M \leq N$ 是正整数.

通过上面的分析并根据文献 [7–10] 中的步骤, 若 $\varphi(\lambda_k) = (\phi(\lambda_k), \psi(\lambda_k))^T, (k = 1, 2, \dots, M)$ 是 Lax 对的 M 个解, 且 r_n 是方程 (1) 的种子解, 则可以得到关于方程 (1) 如下的广义 $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换定理:

定理 1 当方程 (1) 的新解 $\tilde{r}_n$ 和旧解 r_n 的变换如下

$$\tilde{r}_n = b_{n+1}^{(1)} + r_n a_{n+1}^{(0)}, \quad (8)$$

则由 (4) 式确定的矩阵 $\tilde{U}_n, \tilde{V}_n$ 和 U_n, V_n 具有相同的形式. 这里在 (8) 式中 $a_n^{(0)} = \Delta a_n^{(0)} / \Delta_N^\epsilon$, $b_n^{(1)} = \Delta b_n^{(1)} / \Delta_N^\epsilon$,

$$\Delta_N^\epsilon = \det([\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}]^T),$$

$$\Delta^{(i)} = (\Delta_{j,s}^{(i)})_{2(m_i+1) \times 2N},$$

其中

谱参数的个数, $N - M$ 表示 Darboux 阵中使用泰勒展开式最高阶导数的和. 当 $M = N, m_i = 0 (i = 1, 2, \dots, M)$, 通常的 N -波 Darboux 变换就是定理 1 的特殊情况, 可以从零种子解 (平面波种子解) 求得方程 (1) 的多孤子解 (多呼吸子解); 当 $M = 1, m_1 = N - 1$, 定理 1 就约化为 $(1, N - 1)$ -波 Darboux 变换, 可以从平面波种子解求得方程 (1) 的怪波解; 当 $M = 2, m_2 = N - 2$, 定理 1 就约化为 $(2, N - 2)$ -波 Darboux 变换, 可以从平面波种子解求得方程 (1) 的怪波与呼吸子的混合作用解; 当

M 取 3 到 $N-1$ 之间的整数时, 可以得到更丰富的局域波作用解.

3 方程 (1) 的局域波解及其动力学稳定性

在这一节将讨论如何应用定理 1 中的 $(M, N-M)$ -波 Darboux 变换得到方程 (1) 丰富的

局域波解. 下面考虑两类种子解情形下的 Lax 对的解.

情形 1 把种子解 $r_n = 0$ 代入 (2) 式中得到 Lax 对的解为 $\varphi_n = (\phi_n, \psi_n)^T = (\lambda^{2n} e^\xi, e^{-\xi})^T$, 这里 $\xi = \left(-\frac{i\lambda^4}{2} + i\lambda^2 - \frac{i}{2\lambda^4} + \frac{i}{\lambda^2}\right)t$.

情形 2 把种子解 $r_n = ce^{i(c^2+1)(-6c^2+2)t}$ 代入 (2) 中得到 Lax 对的解为

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \tau_+^n e^{\rho_+ t + \delta(\varepsilon)} + C_2 \tau_-^n e^{\rho_- t - \delta(\varepsilon)} \\ \frac{e^{2i(c^2+1)(3c^2-1)t}}{c} [C_1(-\lambda^2 + \tau_+^n) \tau_+^n e^{\rho_+ t + \delta(\varepsilon)} + C_2(-\lambda^2 + \tau_-^n) \tau_-^n e^{\rho_- t - \delta(\varepsilon)}] \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} \tau_{\pm} &= \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^4 c^2 - 2\lambda^2 + 1}, \\ \rho_{\pm} &= -\frac{i(c^2+1)(6c^2-2)\lambda^4 \pm i(\lambda^2-1)(2\lambda^2 c^2 + \lambda^4 + 1)\sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^4 c^2 - 2\lambda^2 + 1}}{2\lambda^4}, \\ \delta(\varepsilon) &= \sqrt{-4\lambda^2 c^2 + \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1} \sum_{\omega=0}^N (e_\omega + i d_\omega) \varepsilon^{2k}, \end{aligned}$$

这里 e_ω, d_ω 是任意的实常数. 为了得到怪波解, 需要对情形 2 的解进行泰勒展开, 为此令 $\lambda = -c + \sqrt{1+c^2} + \varepsilon^2$, $C_1 = -C_2 = 1/\varepsilon$, $c = 3/4$, 在 $\varepsilon = 0$ 处对情形 2 的解进行泰勒展开, 有 $\varphi(\varepsilon^2) = \sum_{\omega=0}^{\infty} \varphi^{(\omega)} \varepsilon^{(2k)} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} \varepsilon^2 + \varphi^{(2)} \varepsilon^4 + \dots$, 这里略去 $\varphi^{(i)} (i \geq 1)$ 的展开式, 仅列出 $\varphi^{(0)} = (\phi^{(0)}, \psi^{(0)})^T$, 这里 $\phi^{(0)} = \frac{\sqrt{15}}{80} \left(\frac{5}{8}\right)^n (64in - 645t) e^{-\frac{275i}{256}t}$, $\psi^{(0)} = \frac{\sqrt{15}}{240} \left(\frac{5}{8}\right)^n (192in + 320i - 1935t) e^{\frac{275i}{256}t}$. 下面将讨论三种特殊情况的 Darboux 变换得到不同的局域波解.

3.1 应用 N -波 Darboux 变换得到多孤子和多呼吸子解

根据定理 1, 当 $M = N$, 广义 $(M, N-M)$ -波 Darboux 变换可以约化为通常的 N -波 Darboux 变换, 当 $N = 1$, 使用情形 1 中 Lax 对的解, 一孤子解 $\tilde{r}_n = b_{n+1}^{(1)}$ 可以整理为

$$\tilde{r}_n = -\frac{\lambda_1 (|\lambda_1|^4 - 1) e^{\eta_1 - \eta_1^*}}{2\lambda_1^{*2} |\lambda_1|} \operatorname{sech}(\eta_1 + \eta_1^* + \ln |\lambda_1|), \quad (9)$$

这里 $\eta_1 = n \ln \lambda_1 + \left(-\frac{i\lambda_1^4}{2} + i\lambda_1^2 - \frac{i}{2\lambda_1^4} + \frac{i}{\lambda_1^2}\right)t$. 关

于一孤子解 (9) 式, 我们能计算出一些重要物理量:

振幅为 $\left|\frac{(|\lambda_1|^4 - 1)}{2|\lambda_1|^2}\right|$, 波数为 $2 \ln |\lambda_1|$, 波宽为 $\frac{1}{2 \ln |\lambda_1|}$, 速度为 $i \left(-\frac{\lambda_1^4}{2} + \lambda_1^2 - \frac{1}{2\lambda_1^4} + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_1^{*4}}{2} - \lambda_1^{*2} + \frac{1}{2\lambda_1^{*4}} - \frac{1}{\lambda_1^{*2}}\right) \frac{1}{2 \ln |\lambda_1|}$,

能量为 $\frac{(|\lambda_1|^4 - 1)^2}{4|\lambda_1|^6 |\ln |\lambda_1||}$, 初相为 $\ln |\lambda_1|$. 当参数 $\lambda_1 = -1 + 2i$ 时, 图 1(a1) 显示了一孤子解 (9) 式的钟型亮孤子结构; 下面进一步通过向前差分格式^[31]研究一孤子解 (9) 式的动力学传播稳定性, 图 1(b1) 显示了一孤子精确解 (9) 式作为初值时的数值演化, 从图像上看, 数值解几乎重现了精确解, 这也说明 (9) 式的精确解和数值算法的正确性; 图 1(c1) 显示了加入了 2% 小噪声时一孤子解的数值演化, 可以看出小噪声在较短的时间内对一孤子的稳定传播影响很小. 这里需要说明的是, 在下面的图像中左边第 1 列表示精确解, 中间第 2 列表示没有加入噪声的数值解, 右边第 3 列表示加入 2% 小噪声的数值解.

当 $N = 2$, 由定理 1 中 (8) 式, 我们能够得到二孤子解, 这里为节省篇幅, 不列出具体的表达式,

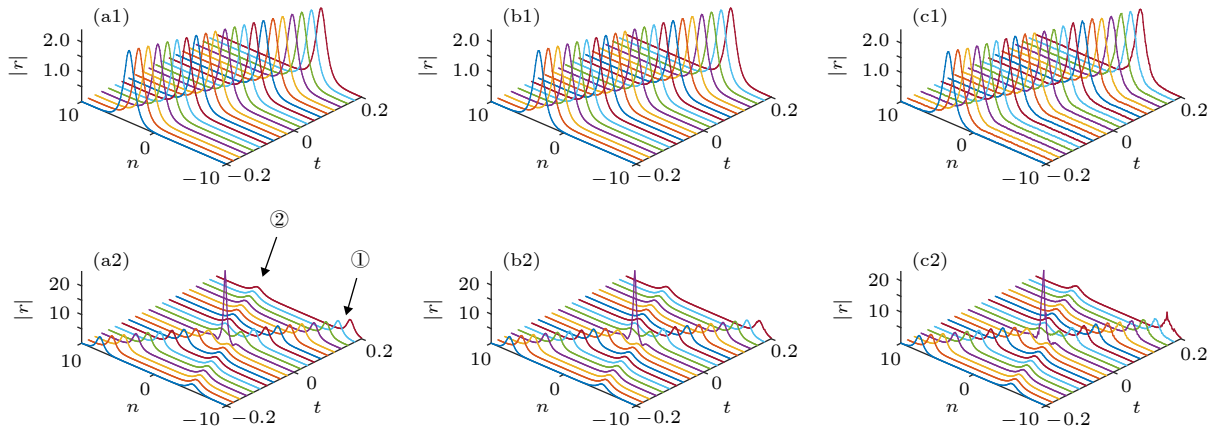


图 1 (a1)–(c1) 取参数 $\lambda_1 = -1 + 2i$ 时的一孤子解; (a2)–(c2) 取参数 $\lambda_1 = 3 + i, \lambda_2 = 1 + 2i$ 时的二孤子解. 左列: 精确解; 中列: 数值解; 右列: 加 2% 小噪声的数值解. 圈中的数字 1 和 2 分别表示参数 λ_1 和 λ_2 对应的孤子

Fig. 1. (a1)–(c1) One-soliton solution with parameter $\lambda_1 = -1 + 2i$; (a2)–(c2) two-soliton solution with parameters $\lambda_1 = 3 + i, \lambda_2 = 1 + 2i$. Left column: Exact solutions; Middle column: Numerical solutions without noise; Right column: Numerical solutions with 2% small noise.

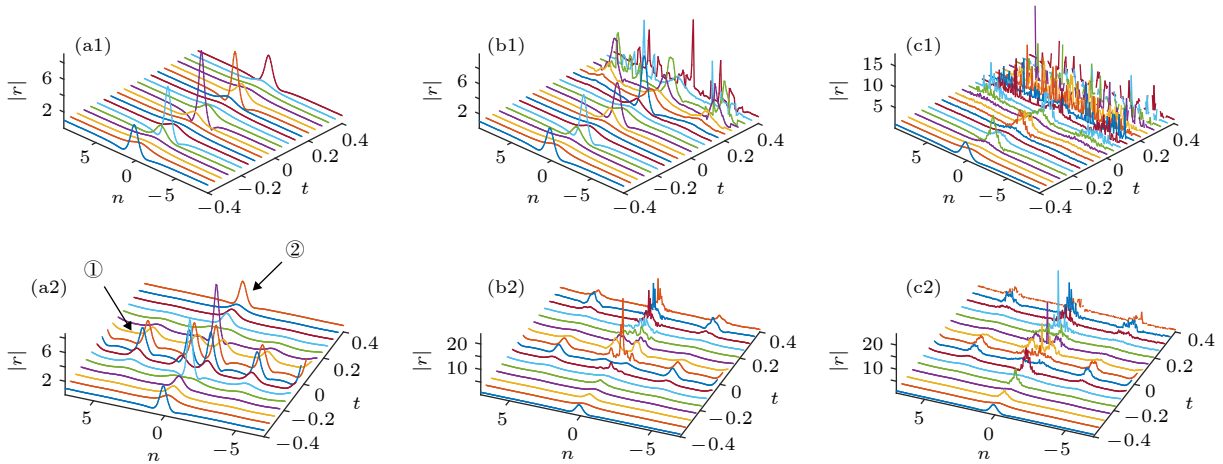


图 2 (a1)–(c1) 取参数 $\lambda_1 = 11/4$ 时的一呼吸子解; (a2)–(c2) 取参数 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ 时的二呼吸子解. 左列: 精确解; 中列: 数值解; 右列: 加 2% 小噪声的数值解. 圈中的数字 1 和 2 分别表示参数 λ_1 和 λ_2 对应的呼吸子

Fig. 2. (a1)–(c1) One-breather solution with parameter $\lambda_1 = 11/4$; (a2)–(c2) two-breather solution with parameters $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Left column: Exact solutions; Middle column: Numerical solutions without noise; Right column: Numerical solutions with 2% small noise.

通过渐近分析, 可以知道二孤子之间的碰撞是弹性作用. 图 1(a2) 显示了二孤子的弹性作用结构, 两孤子在碰撞前后, 形状振幅速度没有发生改变. 图 1(b2) 显示了二孤子没有加入噪声时的数值演化, 图 1(c2) 显示了二孤子加入 2% 小噪声时的数值演化. 类似于一孤子, 在较短的时间内小噪声对二孤子的碰撞作用影响很小.

下面利用 N -波 Darboux 变换和情形 2 时的 Lax 对的解研究方程 (1) 的呼吸子解. 这里取参数 $C_1 = -C_2 = c = 1, \delta(\varepsilon) = 0$. 当 $N = 1, 2$, 由 (8) 式可以得到一呼吸子和二呼吸子解. 图 2(a1)–图 2(c1)

和图 (a2)–图 2(c2) 分别显示了一和二呼吸子的精确解、数值解以及加 2% 小噪声的数值解. 在较短的时间内, 一、二呼吸子都有较好的数值稳定性, 随着时间的增加, 不论是否有噪声, 数值演化都显示出较大的振动, 表现出不稳定.

3.2 应用 $(1, N-1)$ -波 Darboux 变换得到怪波解

根据定理 1, 当 $M = 1$ 时, 我们仅使用一个谱参数, 利用 $(1, N-1)$ -波 Darboux 变换和情形 2 时 Lax 对的解结合泰勒展开式可以得到方程 (1)

的怪波解. 这里取参数 $C_1 = -C_2 = 1/\varepsilon$, $c = 3/4$, 当 $N = 1, 2$, 由 (8) 式可以得到一阶和二阶怪波解.

当 $N = 1$ 时, 由 (1, 0)-波 Darboux 变换可以得到一阶怪波解 $\tilde{r}_n = b_{n+1}^{(1)} + r_n a_{n+1}^{(0)}$, 通过整理为

$$\tilde{r}_n = \frac{3715200it + 110592n^2 + 11232675t^2 + 294912n - 61440}{16384(3n+4)^2 + 14976900t^2 + 65536} e^{-\frac{275i}{128}t}, \quad (10)$$

该解是非奇性的, 并且在时间和空间上都是局部的. 图 3(a1)—图 3(c1) 显示了一阶怪波 (10) 式的精确解、数值解以及加 2% 小噪声的数值解. 在较短的时间内, 一阶怪波解具有较好的数值稳定性.

由定理 1 中 (8) 式, 当 $N = 2$ 时, 由 (1, 1)-波 Darboux 变换可以得到二阶怪波解, 这里为节省篇幅, 不列出具体的表达式. 图 3(a2)—图 3(c2) 和图 3(a3)—图 3(c3) 分别显示了具有强作用和弱作用的二阶怪波解的精确解、数值解以及加 2% 小噪声的数值解. 在较短的时间内, 二阶怪波具有较好的数值稳定性. 随着时间的增加, 不论是否有噪声, 数值演化都表现出较强的振动和不稳定.

3.3 应用 (2, N-2)-波 Darboux 变换得到怪波与呼吸子的混合作用解

根据定理 1, 当 $M = 2$ 时, 我们将使用两个谱参数, 利用 (2, N-2)-波 Darboux 变换和情形 2 时 Lax 对的解结合泰勒展开式, 可以得到方程 (1)

的怪波与呼吸子的混合作用解. 由 (8) 式, 当 $N = 2$ 时, 需要说明的是, 对于两个谱参数, 一个谱参数使用情形 2 时 Lax 对的解结合泰勒展开式, 参数选取与 3.2 小节中求怪波的参数相同, 对另一个谱参数仍使用情形 2 时 Lax 对的解但不使用泰勒展开, 参数 $C_1 = -C_2 = 1$, $c = 3/4$, $\delta(\varepsilon) = 0$. 由 (2, 0)-波 Darboux 变换可以得到一阶怪波和一呼吸子的混合作用解, 这里不列出具体的表达式. 如果在泰勒展开式中对变量 n 做一定的平移变换, 就可以控制怪波的位置. 图 4(a1)—图 4(c1) 和图 4(a2)—图 4(c2) 分别显示了一阶怪波和一呼吸子的强作用和弱作用情况下的精确解、数值解以及加 2% 小噪声的数值解. 两行图的区别是弱作用时, 对怪波沿 n 轴正半轴平移了 10 个单位, 实现了怪波和呼吸子的分离. 数值模拟显示了这些混合解的正确性, 在较短时间内, 不论是否有噪声, 混合作用解均具有较好的数值稳定性.

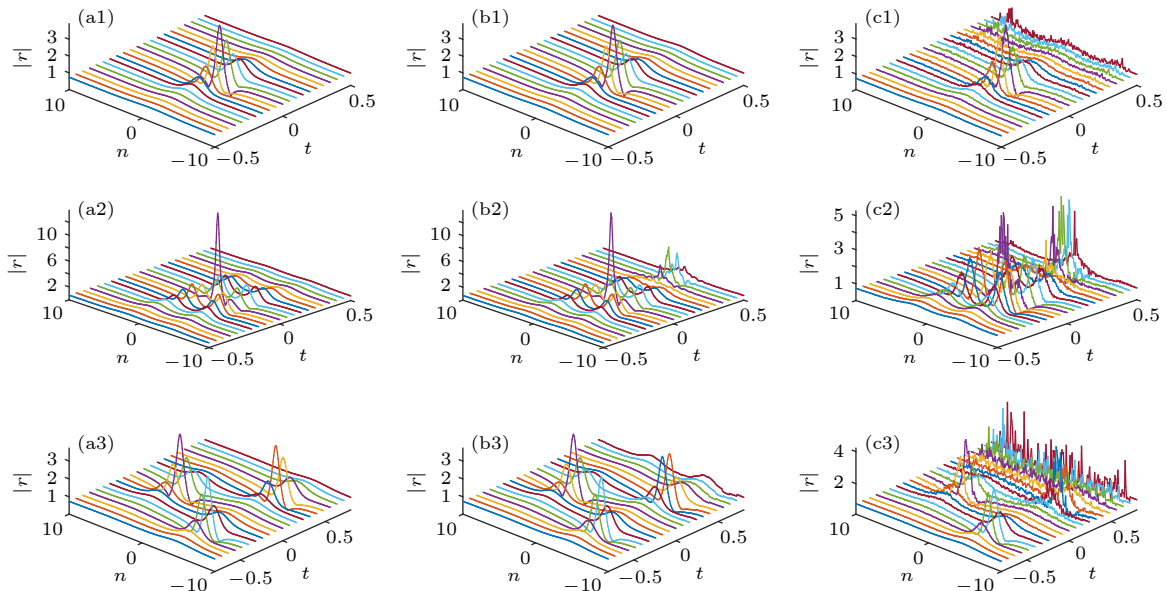


图 3 (a1)—(c1) 一阶怪波解; (a2)—(c2) 取参数 $e_1 = d_1 = 0$ 时具有强作用的二阶怪波解; (a3)—(c3) 取参数 $e_1 = 100, d_1 = 0$ 时具有弱作用的二阶怪波解. 左列: 精确解; 中列: 数值解; 右列: 加 2% 小噪声的数值解

Fig. 3. (a1)–(c1) First-order rogue wave solution; (a2)–(c2) strong interaction second-order rogue wave solution with $e_1 = d_1 = 0$; (a3)–(c3) weak interaction second-order rogue wave solution with $e_1 = 100, d_1 = 0$. Left column: Exact solutions; Middle column: Numerical solutions without noise; Right column: Numerical solutions with 2% small noise.

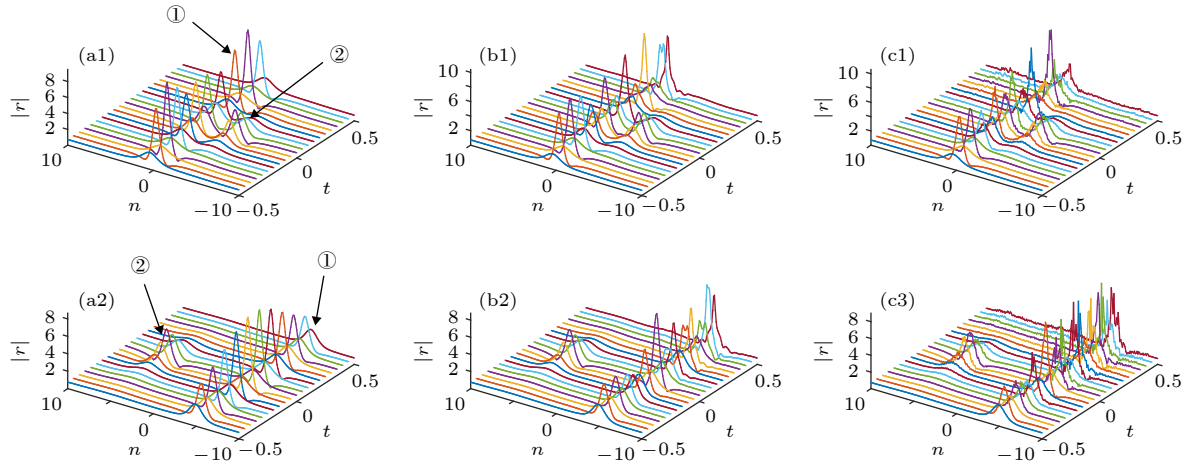


图 4 (a1)–(c1) 一呼吸子和一阶怪波的混合强作用; (a2)–(c2) 一呼吸子和一阶怪波的混合弱作用. 左列: 精确解; 中列: 数值解; 右列: 加 2% 小噪声的数值解. 圈中的数字 1 表示呼吸子, 数字 2 表示怪波

Fig. 4. (a1)–(c1) Mixed strong interaction between one-breather and first-order rogue wave; (a2)–(c2) mixed weak interaction between one-breather and first-order rogue wave. Left column: Exact solutions; Middle column: Numerical solutions without noise; Right column: Numerical solutions with 2% small noise.

4 结 论

本文构造了高阶 Ablowitz-Ladik 方程的广义 $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换, 借助符号计算和数值计算, 通过不同特殊情形的 Darboux 变换, 得到了该模型多孤子解、多呼吸子解、高阶怪波解以及怪波与呼吸子的相互作用解, 并且应用数值模拟研究了它们的稳定性. 需要说明的是当 $3 \leq M \leq N - 1$, 利用广义 $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换, 也可以得到更丰富的局域波作用结构, 本文不做讨论. 本文给出的广义 $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换方法为研究 Lax 可积模型丰富的局域波提供了很好的解决思路, 得到的结果更为全面, 比通常的 Darboux 变换更具有普遍性, 关于方程 (1) 的局域波结构的研究丰富了非线性微分方程的已知结果, 将为实际应用提供可靠的理论支持, 希望本文得到的结果为解释实际的物理现象提供理论依据.

感谢北京信息科技大学理学院孤子与可积系统讨论班成员的讨论.

参考文献

- [1] You F C 2008 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: Shanghai University) (in Chinese) [尤福财 2008 博士学位论文 (上海: 上海大学)]
- [2] Toda M 1967 *J. Phys. Soc. Jpn.* **23** 501
- [3] Li Y S 1999 *Soliton and Integrable System* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p25 (in Chinese) [李翊神 1999 孤子与可积系统 (上海: 上海科技教育出版社) 第25页]
- [4] Hirota R (translated by Wang H Y, Li C X, Zhao J X, Yu G F) 2004 *The Direct Method in Soliton Theory* (New York: Cambridge University Press) p59 (in Chinese) [广田良吾 著 (王红艳, 李春霞, 赵俊霄, 虞国富 译) 2004 孤子理论中的直接方法 (北京: 清华大学出版社) 第59页]
- [5] Yue Y F, Huang L L, Chen Y 2018 *Comput. Math. Appl.* **75** 2538
- [6] Huang L L, Yue Y F, Chen Y 2018 *Comput. Math. Appl.* **74** 831
- [7] Liu C, Yang Z Y, Yang W L, Akhmediev N 2019 *J. Opt. Soc. Am. B* **36** 1294
- [8] Ren Y, Wang X, Liu C, Yang Z Y, Yang W L 2018 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **63** 161
- [9] Liu C, Ren Y, Yang Z Y, Yang W L 2017 *Chaos* **27** 083120
- [10] Liu C, Yang Z Y, Yang W L 2017 *Chaos* **28** 083110
- [11] Ren Y, Liu C, Yang Z Y, Yang W L 2018 *Phys. Rev. E* **98** 062223
- [12] Li H, Lou S Y 2019 *Chin. Phys. Lett.* **36** 050501
- [13] Zhao L C, Yang Z Y, Yang W L 2019 *Chin. Phys. B* **28** 010501
- [14] Liu X S, Zhao L C, Duan L, Peng G, Yang Z Y, Yang W L 2018 *Chin. Phys. Lett.* **35** 020501
- [15] Li S Q, Yang G Y, Li L 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 104215 (in Chinese) [李淑青, 杨光晔, 李禄 2014 物理学报 **63** 104215]
- [16] Sun J C, Zhang Z G, Dong H H, Yang H W 2014 *Acta Phys. Sin.* **21** 210201 (in Chinese) [孙俊超, 张宗国, 董焕河, 杨红卫 2014 物理学报 **21** 210201]
- [17] Wen X Y, Yan Z Y 2015 *Chaos* **25** 123115
- [18] Wen X Y, Yang Y Q, Yan Z Y 2015 *Phys. Rev. E* **92** 012917
- [19] Wen X Y, Yan Z Y, Yang Y Q 2016 *Chaos* **26** 063123
- [20] Wen X Y, Yan Z Y 2017 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **43** 311
- [21] Wang H T, Wen X Y, Wang D S 2019 *Wave Motion* **91** 102396
- [22] Huang L L, Qiao Z J, Chen Y 2018 *Chin. Phys. B* **27** 020201
- [23] Zhang G, Yan Z Y, Wen X Y, Chen Y 2017 *Phys. Rev. E* **95**

042201

- [24] Zhang G, Yan Z Y, Wen X Y 2018 *Physica D* **366** 27
- [25] Yang J, Zhu Z N 2018 *Chin. Phys. Lett.* **35** 090201
- [26] Wen X Y, Yan Z, Malomed B A 2016 *Chaos* **26** 123110
- [27] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (New York: Cambridge University Press) p55
- [28] Ankiewicz A, Akhmediev N, Soto-Crespo J M 2010 *Phys. Rev. E* **82** 026602
- [29] Ankiewicz A, Akhmediev N, Lederer F 2011 *Phys. Rev. E* **83** 056602
- [30] Ohta Y, Yang J 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 255201
- [31] Lee L, Lyng G, Vankova I 2012 *Physica D* **241** 1767

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Dynamics of localized wave solutions for a higher-order Ablowitz-Ladik equation^{*}

Wen Xiao-Yong[†] Wang Hao-Tian

(School of Applied Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China)

(Received 17 August 2019; revised manuscript received 25 November 2019)

Abstract

It is an important research topic to study diverse local wave interaction phenomena in nonlinear evolution equations, especially for the semi-discrete nonlinear lattice equations, there is little work on their diverse local wave interaction solutions due to the complexity and difficulty of research. In this paper, a semi-discrete higher-order Ablowitz-Ladik equation is investigated via the generalized $(M, N - M)$ -fold Darboux transformation. With the aid of symbolic computation, diverse types of localized wave solutions are obtained starting from constant and plane wave seed background. Particularly, for the case $M = N$, the generalized $(M, N - M)$ -fold Darboux transformation may reduce to the N -fold Darboux transformation which can be used to derive multi-soliton solutions from constant seed background and breather solutions from plane wave seed background, respectively. For the case $M = 1$, the generalized $(M, N - M)$ -fold Darboux transformation reduce to the generalized $(1, N - 1)$ -fold one which can be used to obtain rogue wave solutions from plane wave seed background. For the case $M = 2$, the generalized $(M, N - M)$ -fold Darboux transformation reduce to the generalized $(2, N - 2)$ -fold one which can be used to give mixed interaction solutions of one-breather and first-order rogue wave from plane wave seed background. To study the propagation characteristics of such localized waves, the numerical simulations are used to explore the dynamical stability of such obtained solutions. Results obtained in the present work may be used to explain related physical phenomena in nonlinear optics and relevant fields.

Keywords: higher-order Ablowitz-Ladik equation, generalized $(M, N - M)$ -fold Darboux transformation, localized wave, rogue wave

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr, 05.45.Yv, 04.60.Nc

DOI: 10.7498/aps.69.20191235

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61471406) and Qin Xin Talents Cultivation Program of Beijing Information Science and Technology University, China (Grant No. QXTCP-B201704).

[†] Corresponding author. E-mail: xiaoyongwen@163.com

三体相互作用下准一维玻色-爱因斯坦凝聚体中的带隙孤子及其稳定性

唐娜 杨雪滢 宋琳 张娟 李晓霖 周志坤 石玉仁

Gap solitons and their stabilities in a quasi one-dimensional Bose-Einstein condensate under three-body interaction

Tang Na Yang Xue-Ying Song Lin Zhang Juan Li Xiao-Lin Zhou Zhi-Kun Shi Yu-Ren

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010301 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191278

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191278>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究

Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field

物理学报. 2018, 67(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180539>

具有面内四极磁场的旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态结构研究

Ground state of a rotating Bose-Einstein condensate with in-plane quadrupole field

物理学报. 2017, 66(13): 130305 <https://doi.org/10.7498/aps.66.130305>

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

光腔中两组分玻色-爱因斯坦凝聚体的受激辐射特性和量子相变

Stimulated radiation characteristics and quantum phase transition for two-component Bose-Einstein condensate in optical cavity

物理学报. 2018, 67(18): 183701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180971>

自旋-轨道耦合作用下玻色-爱因斯坦凝聚在量子相变附近的朗道临界速度

Landau critical velocity of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate across quantum phase transition

物理学报. 2017, 66(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.220301>

碟形玻色-爱因斯坦凝聚体中(0, 0, 2)剪刀模的朗道阻尼和频移

Landau damping and frequency-shift of (0, 0, 2) scissors mode in a disc-shaped Bose-Einstein condensate

物理学报. 2019, 68(23): 230304 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190661>

专题：非线性物理

三体相互作用下准一维玻色-爱因斯坦凝聚体中的带隙孤子及其稳定性*

唐娜¹⁾²⁾ 杨雪滢¹⁾²⁾ 宋琳¹⁾²⁾ 张娟¹⁾²⁾³⁾ 李晓霖¹⁾²⁾周志坤¹⁾²⁾ 石玉仁^{1)2)†}

1) (西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

2) (甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室, 兰州 730070)

3) (兰州工业学院基础学科部, 兰州 730050)

(2019 年 8 月 23 日收到; 2019 年 10 月 12 日收到修改稿)

具有三体相互作用的玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein Condensate, BEC) 束缚于雅可比椭圆周期势中, 在平均场近似下可用 3—5 次 Gross-Pitaevskii 方程 (GPE) 描述. 首先利用多重尺度法对该系统进行了理论分析, 将 GPE 化为一定态非线性薛定谔方程 (Nonlinear Schrödinger Equation, NLSE), 并给出了一类带隙孤子的解析表达式. 然后采用牛顿共轭梯度法数值得到了该系统中存在的两类带隙孤子, 发现孤子的振幅随着三体相互作用的增强而减小, 这与多重尺度法分析所得结论一致. 最后用时间劈裂傅里叶谱方法对 GPE 进行长时间动力学演化以考察孤子的稳定性, 发现系统中既存在稳定的带隙孤子, 也存在不稳定的带隙孤子, 且外势的模数会对孤子的结构和稳定性产生明显影响.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 带隙孤子, 三体相互作用, 稳定性

PACS: 03.75.Lm, 02.30.Mv, 04.30.Db

DOI: 10.7498/aps.69.20191278

1 引言

玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensate, BEC) 现象是在宏观尺度上能观察到的最显著的多体量子现象之一, 最早是由 Bose 和 Einstein 在 1924 年提出, 即理想的玻色子在非常低的温度下, 大部分粒子会突然跌落到最低能级上, 处于这种新状态的物质被称为 BEC^[1,2]. 随着在 ^{87}Rb 和 ^{23}Na 等一系列碱金属原子气体实验中实现了 BEC, 对于具有弱相互作用的原子气体中的 BEC 物质波孤子现象引起了研究者的注意^[3]. 孤子也是自然界中普遍存在的一种非线性现象, 广泛存在于水波、粒子

物理、等离子体、分子生物学及纤维等各种非线性介质中^[4,5]. 作为一种非线性波, 孤子因其独特的传播性质及潜在的应用价值, 成为非线性科学研究领域的重要研究课题之一. 随着 BEC 和简并费米气体的实验实现, 研究表明超冷原子气体中也存在物质波孤子现象. 实验中已经相继发现物质波亮孤子、暗孤子及涡旋孤子等非线性现象^[6-9].

一般在低浓度 BEC 中, 原子间相互作用距离尺度远小于原子间距离, 这时只需考虑两体相互作用, s-波散射很重要^[10,11]. 但浓度较高时, 例如 BEC 在原子芯片和原子波导表面的发展将会涉及到强压缩和密度的提高, 则需考虑三体相互作用的影响^[12-16]. 近年来在铯原子超冷气体实验中已发

* 国家自然科学基金 (批准号: 11565021)、西北师范大学青年教师科研能力提升计划 (批准号: NWNNU-LKQN-16-3) 和西北师范大学“创新创业能力提升计划” (批准号: NWNNU2019KT232) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shiyr@nwnu.edu.cn

现三体相互作用现象^[17]. 三体作用对于玻色凝聚气体的稳定性有着重要作用. 例如, 它可以明显改变凝聚体的稳定区域, 即使强度很小也可使得凝聚原子数量增加. 另一方面, 三体作用除了使凝聚体密度分布发生变化外, 也会改变集体振荡激发的光谱, 因为这时系统的可压缩性受到三体相互作用对基态能量贡献的影响^[18]. 考虑三体相互作用对于研究 BEC 在光晶格中呼吸子的性质也有重要意义^[19]. 在平均场近似下, 超低温下稀薄 BEC 的动力学行为可用 Gross-Pitaevskii 方程 (GPE) 描述, 它可从海森堡方程导出^[20,21]. GPE 是一非线性方程, 一般情况下很难得到其精确解析解, 不过在特殊情形下却能由许多方法给出它的精确孤子解, 例如 Darboux 变换法^[22]、Backlund 变换^[23]、Hirota 直接法^[24]、Painleve 展开方法^[25,26] 和变分法^[27] 等.

具有周期调制的系统中会出现一系列新的效应, 特别是线性能带谱的带隙中会存在一种结构丰富的孤子, 称为带隙孤子^[28,29]. 该类孤子可存在于不同类型的非线性系统中, 包括低维光子晶体、光子层状结构^[30,31] 和光晶格势中的 BEC^[32-34] 等. 本文考虑具有三体相互作用的准一维 BEC 束缚于雅可比椭圆周期势中 (实验中该势可由两束不同频率的激光叠加来近似), 在平均场近似下系统的动力学可由 3—5 次 GPE 描述. 利用多重尺度法对系统的带隙孤子进行了理论分析, 将 3—5 次 GPE 化为一定态非线性薛定谔方程 (nonlinear Schrödinger equation, NLSE), 并给出了一类带隙孤子的解析表达式. 然后采用牛顿共轭梯度法数值得到了该系统中存在的带隙孤子, 包括两类基本带隙孤子 (on-site 孤子和 off-site 孤子) 与亚基本带隙孤子 (sub-fundamental gap soliton). 最后, 用时间劈裂傅里叶谱方法对 GPE 进行长时间动力学演化以考察孤子的稳定性, 发现 on-site 孤子始终稳定, 同相偶极孤子和异相偶极孤子既有稳定的也有不稳定的. 外势的模数对孤子的结构和稳定性会产生明显影响.

2 三体相互作用 BEC 中的带隙孤子

2.1 理论模型

具有三体相互作用的 BEC 束缚于外势中, 在平均场近似下系统的动力学行为可用如下 GPE 描述^[35]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, t) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + \eta |\Psi(\mathbf{r}, t)|^4 \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

其中 $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$ 是系统的序参量 (波函数), $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 是位矢, $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ 表征原子间相互作用强度, m 是原子质量. a_s 是 s 波散射长度 ($a_s > 0$ 表示原子间相互排斥, $a_s < 0$ 表示原子间相互吸引), 可由 Feshbach 共振调节^[36]. η 表征三体相互作用强度, $V(\mathbf{r})$ 表示外势, 总粒子数 $N = \int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r}$. 实验中, BEC 通常束缚于一谐振子势阱 $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)$ 内, 其中 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 分别表示 x, y, z 方向的频率. 当 $\omega_x \approx \omega_y$ 且 $\omega_z \gg \omega_x$ 时, BEC 在 z 方向被“冻结”于基态, 这时系统可用准二维 GPE 描述; 当 $\omega_y, \omega_z \gg \omega_x$ 时, BEC 在 y, z 方向均被“冻结”, 将在 x 方向呈雪茄状分布, 系统的动力学行为可用准一维 GPE 描述^[37].

考虑 BEC 被囚禁于光晶格势下的准一维情形, 并做如下无量纲化处理: $\tilde{x} = x/a_0, \tilde{t} = \omega_x t, \Psi(\mathbf{r}, t) = \tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{t}) \left(\frac{m^2 \omega_y \omega_z}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{1/4} e^{-m(\omega_y y^2 + \omega_z z^2)/2\hbar}$, $\tilde{g} = \frac{n_0 \sqrt{\omega_z \omega_y} g}{2\pi \hbar a_0^3 \omega_x} = \frac{2a_s n_0 \sqrt{\omega_z \omega_y}}{a_0 \omega_x}, \tilde{\eta} = \frac{n_0^2 \omega_z \omega_y}{3\pi^2 a_0^3 \hbar \omega_x^3} \eta$, $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega_x)}$, 使得

$$i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}^2} + V(\tilde{x}) \tilde{\Psi} + \tilde{g} |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} + \tilde{\eta} |\tilde{\Psi}|^4 \tilde{\Psi}, \quad (2)$$

其中 n_0 为无量纲化时粒子数密度的特征量, 此时总粒子数为 $N = n_0 \int |\tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{t})|^2 d\tilde{x}$. 为方便起见, 这里已省略变量上面的“~”.

取外势 $V(x) = V_0 \text{sn}^2(x, q)$, 其中 $\text{sn}(x, q)$ 为雅可比椭圆正弦函数, q 是其模数 ($0 \leq q \leq 1$). 当 $q = 0$ 时, $V(x) = V_0 \sin^2 x$, 文献^[38] 中考虑的外势即为此情形, 所以该势可看作是对相关文献的推广. 当 $q = 1$ 时, $V(x) = V_0 \tanh^2 x$, 此时 $V(x)$ 并非周期势, 故后面不考虑此情形. 若考虑该势的实验实现, 可用下面公式^[39]

$$\text{sn}(x, q) = \frac{2\pi}{qK(q)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1/2}}{1 - \alpha^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2K(q)}, \quad (3)$$

其中 $\alpha = \exp \{ -\pi[K(\sqrt{1-q^2})/K(q)] \}$, $K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-q^2 \sin^2 \theta}}$ 是第一类完全椭圆积分. $V(x)$ 可近似为

$$V(x) \approx \frac{2V_0\pi^2\alpha}{q^2K^2(q)(1-\alpha)^2} \left[1 - \cos \frac{\pi x}{K(q)} + \frac{2\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} \left(\cos \frac{\pi x}{K(q)} - \cos \frac{2\pi x}{K(q)} \right) \right], \quad (4)$$

从中可以看出, 该势在实验中可用两束不同频率的激光来近似实现. 当 $q < 0.9$ 时, 其近似程度可达 99%.

寻找方程 (2) 下列形式的定态解

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\mu t}, \quad (5)$$

其中 $\psi(x)$ 为实函数, μ 为化学势. 代入方程 (2) 后得

$$-\frac{1}{2}\psi_{xx} + V(x)\psi - \mu\psi + g\psi^3 + \eta\psi^5 = 0. \quad (6)$$

若波函数振幅为无穷小, 则可忽略非线性项, 得

$$-\frac{1}{2}\psi_{xx} + V(x)\psi - \mu\psi = 0. \quad (7)$$

方程 (7) 为一广义马丢 (Mathieu) 方程, 它的有界解被称为布洛赫模 (Bloch Modes), 对应的化学势 μ 构成了布洛赫带 (Bloch Bands). 一般情况下, 它的有界解可写为

$$\psi = p(x) = e^{ikx}\tilde{p}(x; \mu). \quad (8)$$

将 (8) 式代入方程 (7) 后, 通过求解所得本征问题便可得色散关系 $\mu = \mu(k)$, 从而得到系统的能带结构. 这一点在文献 [29] 中有详细讨论, 此处不再赘述. 在 Bands 中, 线性波可以传播; 在 Gaps 中, 虽然线性波无法传播, 但可存在具有局域结构的非线性波, 即带隙孤子 (gap soliton).

2.2 带隙孤子的多重尺度法分析

若波函数振幅不是无穷小, 则方程 (6) 中非线性项不能忽略. 考虑化学势 μ 从 Band 的边界 $k = k_0$, $\mu_0 = \mu(k_0)$ 处进入带隙, 且 $k - k_0$, $\mu - \mu_0$ 均为小量的情形, 可用多重尺度法对其进行理论分析. 引入多重尺度 $X_0 = x$, $X_1 = \varepsilon x$, 将化学势与波函数展开为

$$\mu = \mu_0 + \mu_2\varepsilon^2 + \cdots, \quad (9)$$

$$\psi(x) = \varepsilon\psi_0(X_0, X_1) + \varepsilon^2\psi_1(X_0, X_1) + \varepsilon^3\psi_2(X_0, X_1) + \cdots, \quad (10)$$

其中 $\varepsilon = k - k_0$ 是一小量. 将此展开式代入方程 (6), 并假设 $\eta = \hat{\eta}\varepsilon^{-2} = O(\varepsilon^{-2})$. 按 ε 的同次幂项合并后得

$$\varepsilon^1: L_0\psi_0 = 0, \quad (11)$$

$$\varepsilon^2: L_0\psi_1 = \frac{\partial^2\psi_0}{\partial X_0\partial X_1}, \quad (12)$$

$$\varepsilon^3: L_0\psi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial X_0\partial X_1} + \mu_2\psi_0 - g\psi_0^3 - \hat{\eta}\psi_0^5, \quad (13)$$

其中 $L_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X_0^2} + V(X_0) - \mu_0$.

方程 (11) 与 (7) 形式相同, 故具有下列形式的解

$$\psi_0(X_0, X_1) = B(X_1)p(X_0),$$

其中 $B(X_1)$ 表示慢变包络 (调制波), $p(X_0)$ 为快变载波, 显然该解满足 Fredholm 条件 [40], 这里函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的内积定义为

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^{4K(q)} f_1(x)f_2^*(x)dx,$$

“*”表示复共轭. 方程 (12) 的解可写为

$$\psi_1(X_0, X_1) = \frac{dB}{dX_1}H(X_0),$$

则有 $L_0H = p'(X_0)$, 此时 Fredholm 条件也自动成立.

将 ψ_0 和 ψ_1 代入方程 (13) 得

$$L_0\psi_2 = \frac{d^2B}{dX_1^2} \left[H'(X_0) + \frac{1}{2}p(X_0) \right] - gB^3p^3(X_0) - \hat{\eta}B^5p^5(X_0) + \mu_2Bp(X_0), \quad (14)$$

再次应用 Fredholm 条件, 得

$$-D\frac{\partial^2B}{\partial X_1^2} - \mu_2B + g\alpha_1B^3 + \hat{\eta}\alpha_2B^5 = 0, \quad (15)$$

$$\text{其中 } \alpha_1 = \frac{\int_0^{4K(q)} p^4(x)dx}{\int_0^{4K(q)} p^2(x)dx}, \quad \alpha_2 = \frac{\int_0^{4K(q)} p^6(x)dx}{\int_0^{4K(q)} p^2(x)dx}$$

均为正数, $D = \frac{\langle p/2 + H', p \rangle}{\langle p, p \rangle} = \frac{1}{2} \frac{d^2\mu}{dk^2} \big|_{k=k_0}$ [38]. 方程 (15) 为一定态 NLSE, 它有局域型孤立波解

$$B(X_1) = \frac{\pm \text{sech}(\beta X_1)}{\sqrt{\delta + \gamma \text{sech}^2(\beta X_1)}}, \quad (16)$$

其中 $\beta = \sqrt{\frac{-2\mu_2}{D}}$, $\delta = \frac{\sqrt{3g^2\alpha_1^2 + 16\hat{\eta}\alpha_2\mu_2}}{2\sqrt{3}|\mu_2|}$, $\gamma = \frac{g\alpha_1 - 2\delta\mu_2}{4\mu_2}$. 当 $\hat{\eta} = 0$ 时, 方程 (15) 退化为 3 次 NLSE; 相应地, 解 (16) 也退化为 3 次 NLSE 的孤立波解.

在 $X_1 = 0$ 处 $B(X_1)$ 取得极值, 故调制波的振幅

$A \sim \frac{1}{\sqrt{\delta+\gamma}} = \sqrt{\frac{4\mu_2}{g\alpha_1+2\mu_2\delta}}$. 由此可知在其他参数给定时, 随着非线性相互作用 g, η 的增大, 带隙孤子的振幅会单调递减, 后面的数值结果也证实了该结论. 另外, 为保证 β 为实数, 则 μ_2 与 D 须异号, 即 $\text{sgn}(\mu_2) = -\text{sgn}(D)$, 这里 $\text{sgn}(x)$ 为符号函数. 该式表示此时的 μ 必位于带隙内, 即孤子确为带隙孤子. 为保证解不存在奇性, 须 δ 为正实数且 $\delta + \gamma > 0$, 则有 $\hat{\eta}\mu_2 > -\frac{3g^2\alpha_1^2}{16\alpha_2}$. 举例来说, 如果要研究半无界带隙内的孤子, 则此时 $D > 0, \mu_2 < 0$, 若取 $g, \eta < 0$ 则两个条件必同时满足 (充分非必要); 但若研究第一带隙内接近第一 Band 的孤子, 则 $\mu_2 > 0, D < 0$, 取 $g, \eta > 0$ 则两个条件必同时满足 (充分非必要). 以上分析对于数值研究带隙孤子有一定的指导意义.

2.3 牛顿共轭梯度法寻找带隙孤子

牛顿共轭梯度法 (Newton-Conjugate-Gradient, NCG)^[41] 是一种高效的数值方法, 可用来求解非线性演化方程的孤立波解. 该方法的主要思路是用牛顿迭代法结合共轭梯度法求解所得线性方程, 其收敛速度比共轭梯度法和牛顿法等其他现有的迭代法要快, 而且容易编程实现. 文献 [42] 也提出了牛顿法与共轭梯度法的组合方法, 并证明该方法的全局收敛性. NCG 法是解决无约束最小优化问题的方法之一^[43]. 文献 [44] 中运用该方法讨论了路径约束动力学演化过程的优化问题. NCG 法在一些物理模型上得到了广泛应用, 例如具有周期外势或无周期外势的二维非线性薛定谔方程, Kortewegde Vries (KdV) 方程和五阶 Kadomtsev Petviashvili (KP) 方程的求解等^[41]. 它可用来寻找各种物理系统 (如非线性光学, BEC 和水波等) 中的孤立波, 而且既能寻找基态也能求解激发态, 可以作为处理这类问题的首选方法.

下面采用 NCG 寻找方程 (6) 的带隙孤子. 计算时, 需要将无穷区间 $x \in (-\infty, +\infty)$ 截断为有限区间. 通常可取外势的足够多个周期作为计算的空间范围, 然后对该区间进行离散化后便可应用 NCG 求解. 计算表明, 所得结果对迭代初值有一定的依赖性 (但并不十分敏感). 若迭代初值选择不当, 则迭代过程会发散或者收敛于平凡解 $\psi = 0$. 计算时, 取以下多个高斯波包的叠加

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} A_j e^{-(x-x_j)^2/W_j} \quad (17)$$

作为迭代初始条件, 这里 A_j, x_j, W_j 分别表示开始迭代时第 j 个波包的振幅、中心位置和宽度, $\mathcal{N}$ 表示总波包数. 通过选择合适的 $A_j, x_j, W_j, \mathcal{N}$, 便可得到所需带隙孤子. 若欲寻找结构更为复杂的带隙孤子, 可尝试选用其他形式的迭代初值.

图 1 显示了 $q = 0.1$ 和 0.99 时不同参数条件下的单峰带隙孤子, 迭代时取 $\mathcal{N} = 1, A_1 = 0.6, x_1 = 0, W_1 = K(q)$. 该孤子的峰值位于外势的最低点处, 一般称其为 on-site soliton. 图 1(a) 和图 1(b) 为 $q = 0.1$ 时吸引相互作用下半无界带隙中的带隙孤子, 图 1(c) 和图 1(d) 为 $q = 0.99$ 时排斥作用下第一带隙中的带隙孤子. 从图 1 可以看出, 当三体相互作用强度不变而两体相互作用变强时, 带隙孤子的振幅明显降低; 也可看出, 当两体相互作用强度不变而三体相互作用变强时, 带隙孤子的振幅也会变小. 这与前面理论分析结论一致. $q = 0.1$ 时孤子的结构较为复杂, 但 $q = 0.99$ 时孤子为钟形, 故外势模数对孤子结构有一定影响. 为进一步研究孤子振幅随相互作用强度的变化, 定义 $A = \max |\Psi|$ 为孤子振幅. 图 2(a) 和图 2(b) 分别显示了在吸引相互作用下半无界带隙内和排斥相互作用下第一带隙内单峰孤子振幅随相互作用强度的变化. 可以看出, 随着两体相互作用强度 $|g|$ 和三体相互作用强度 $|\eta|$ 的增大, 孤子的振幅确在单调递减.

图 3 显示了不同参数情形下图 1 中 on-site 孤子三体和两体相互作用能量的比值, 其中 $E_{\text{three}} = \frac{1}{3}\eta \int |\psi(x)|^6 dx, E_{\text{two}} = \frac{1}{2}g \int |\psi(x)|^4 dx$. 可以看出, 当 η 固定时, $|g|$ 越大, 比值越小, 表明二体相互作用越占优; 但当 g 固定时, 随着 $|\eta|$ 的增大, 比值也在增大, 表明三体相互作用逐渐增强. 图 3(a) 中两种能量已处于可比拟的范围; 图 3(b) 中 η 足够大时, 三体相互作用能量已超过两体相互作用能量. 这种情况下, 三体相互作用更不可忽略.

图 1 中所示的带隙孤子是结构最为简单的一类基本孤子. 除此之外, 也存在另一类如图 4 所示的双峰孤子. 这类孤子具有两个波峰, 两波峰间的中心位置在外势的最高点处, 一般称其为 off-site soliton. 图 4(a) 和图 (b) 所示两波峰具有相同的相位, 称为同相偶极孤子 (迭代时取 $\mathcal{N} = 2, A_1 = A_2 = 0.6, x_1 = 0, x_2 = -2K(q), W_1 = W_2 = K(q)$);

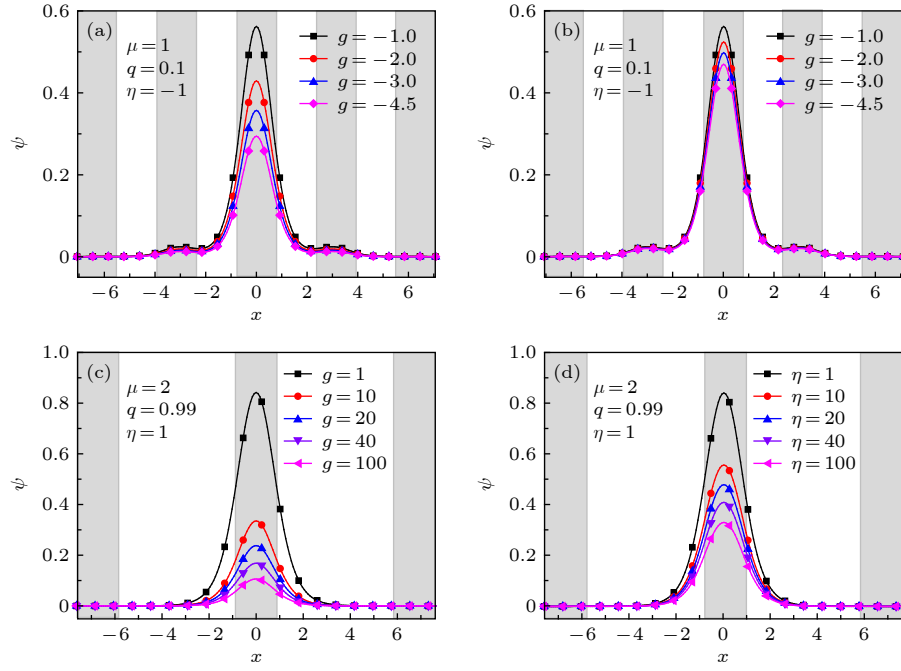


图 1 3—5 次 GPE 的单峰带隙孤子 ($V_0 = 4$) (a), (b) $q = 0.1$; (c), (d) $q = 0.99$. 阴影部分表示外势 $V(x)$ 低处
Fig. 1. Profiles of single-hump gap solitons of the cubic-quintic GPE ($V_0 = 4$): (a), (b) $q = 0.1$; (c), (d) $q = 0.99$. Shaded regions represent lattice sites, i.e., regions of low potential values $V(x)$.

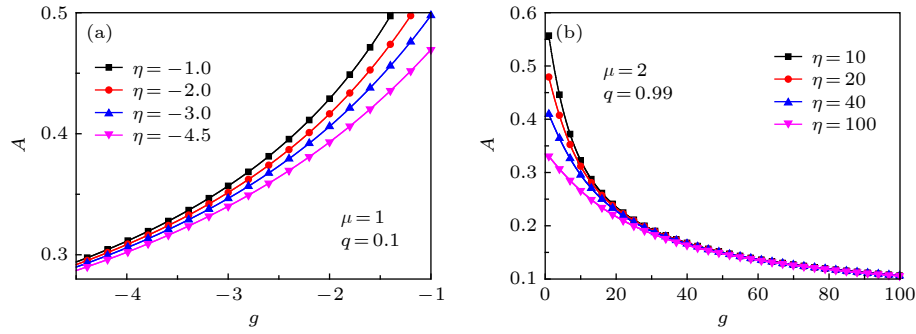


图 2 单峰带隙孤子的振幅随相互作用强度的变化 ($V_0 = 4$)
Fig. 2. Amplitudes of single-hump gap solitons v.s. nonlinear interaction strength.

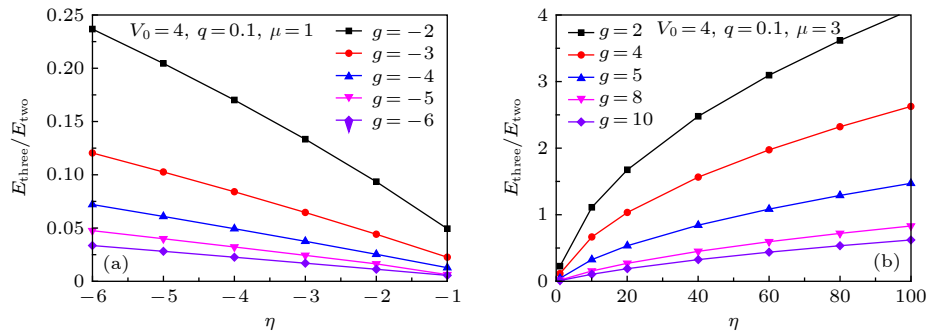


图 3 on-site 孤子三体相互作用能量和两体相互作用能量的比
Fig. 3. The ratio of three-body energy to two-body energy for on-site solitons with different interaction strength.

图 4(c) 和图 4(d) 所示孤子则被称为异相偶极孤子 (迭代时取 $\mathcal{N} = 2$, $A_1 = 0.6$, $A_2 = -0.6$, $x_1 = 0$,

$x_2 = -2K(q)$, $W_1 = W_2 = K(q)$). 该类孤子的振幅也随着 $|g|$ 和 $|\eta|$ 的增大而减小. 从波形结构上来看,

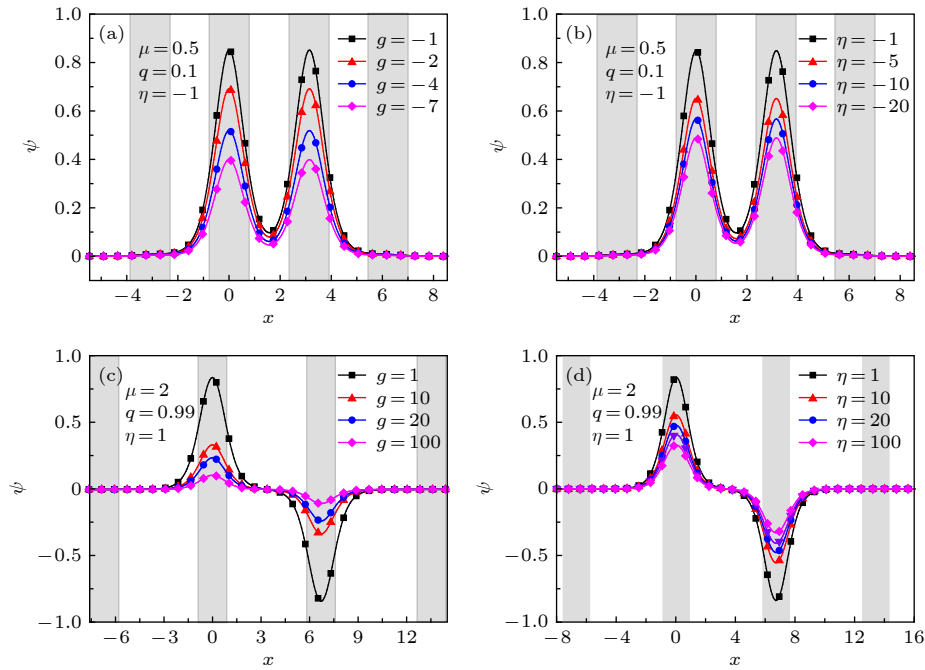


图 4 3—5 次 GPE 的同相偶极孤子和异相偶极孤子 ($V_0 = 4$) (a), (b) $q = 0.1$; (c), (d) $q = 0.99$. 阴影部分表示外势 $V(x)$ 低处
Fig. 4. Profiles of double-hump gap solitons of the cubic-quintic GPE ($V_0 = 4$) (a), (b) $q = 0.1$; (c), (d) $q = 0.99$. Shaded regions represent lattice sites, i.e., regions of low potential values $V(x)$.

off-site 孤子似乎可以看作是两个单峰 on-site 孤子的组合; 但从动力学稳定性来看, on-site 孤子始终稳定而同相偶极孤子始终不稳定, 故同相偶极孤子也被视为另一类基本孤子. 异相偶极孤子的稳定性则较为复杂, 一般依赖于系统的参数.

3 带隙孤子的稳定性

孤子的稳定性无论在理论上还是在实验上都是一个重要的问题, 下面将用非线性动力学演化的方法来研究前面所得带隙孤子的稳定性. 在初始时刻, 给波函数一小扰动. 若经过足够长时间演化后孤子的振幅和波形没有发生明显变化, 则可认为该孤子动力学稳定; 否则认为它动力学不稳定. 数值计算时, 所用方法为时间劈裂傅里叶谱方法^[45]. 该方法具有效率高、精度高、计算过程中粒子数守恒, 而且程序容易实现等优点.

对初始波函数做下面类型的扰动

$$\Psi(x, 0) = \psi(x)e^{i\beta x}, \quad (18)$$

其中 $\psi(x)$ 是前面所得定态带隙孤子, $\beta \ll 1$ 是扰动参数, 计算时取 $\beta = 0.01$.

图 5 为不同参数情形下不同类型带隙孤子动

力学演化的等值线图 ($V_0 = 4$). 可以看出, 不同类型孤子的稳定性有所不同. 图 5(a) 为 $\mu = 1$, $q = 0.1$, $g = -1$, $\eta = -1$ (对应图 1(a) 中情形) 时 on-site 孤子的动力学演化. 可以看出, 经过一段时间演化后波形和振幅都没有发生明显变化, 故它是动力学稳定的. 数值研究中, 通过对各种参数情形进行计算, 结果均表明无论在第一带隙还是半无界带隙中, on-site 孤子始终稳定. 图 5(b) 为 $\mu = 0.5$, $q = 0.1$, $g = -1$, $\eta = -1$ (对应图 4(a) 中同相偶极孤子) 的动力学演化. 很明显孤子演变成振荡状态, 即能量在两个相邻光晶格之间周期性地转移. 初始时刻孤子空间结构的对称性随时间演化时被破坏, 所以这是一种振荡型不稳定. 大量计算表明, 这种同相偶极孤子总是动力学不稳定的. 即使 q 较大时, 尽管两波峰相距较远, 它仍然表现出不稳定 (但不稳定性变弱). 所以这种类型的孤子不宜视为两个 on-site 孤子的组合. 图 5(c) 为 $\mu = 2$, $q = 0.5$, $g = 1$, $\eta = 1$ 时第一带隙内异相偶极孤子 (带隙孤子结构与图 4(c) 和图 4(d) 中类似) 的动力学演化. 可以看出, 此时的孤子仍具有振荡不稳定性. 图 5(d) 为 $q = 0.99$ (其他参数与图 5(c) 中相同) 时异相偶极孤子的动力学演化. 可以看出, 此时的带

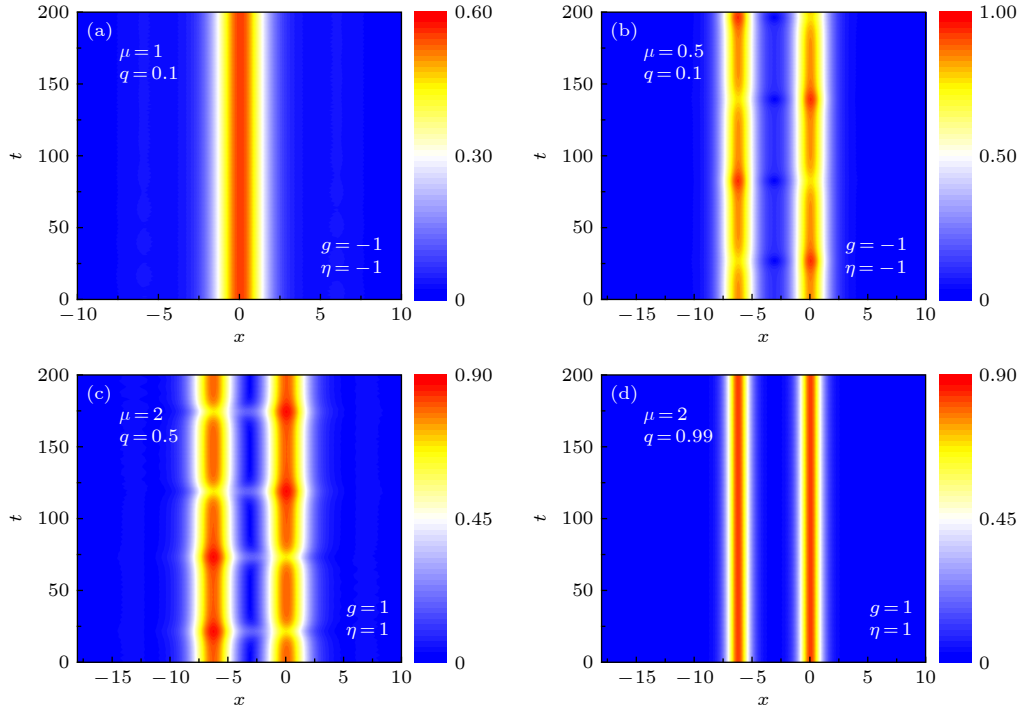


图 5 不同类型带隙孤子的动力学演化 (a) on-site 孤子; (b) 同相偶极孤子; (c), (d) 异相偶极孤子

Fig. 5. Contour plots of $|\Psi(x, t)|$ for perturbed gap solitons: (a) On-site soliton; (b) in-phase dipole soliton; (c), (d) out-phase dipole soliton.

隙孤子是动力学稳定的. 这一结果表明外势的模数会影响带隙孤子的稳定性; 同时也意味着其他参数固定时, 存在临界值 q_c . 当 $q \geq q_c$ 时, 异相偶极孤子稳定; 而当 $q < q_c$ 时, 异相偶极孤子不稳定. 对于图 5(c) 和图 5(d) 参数情形, $q_c \approx 0.968$. 在 g, η, V_0 等参数不变的情况下, 临界值 q_c 随 μ 值而变. 例如对于 $g = -1, \eta = -1, V_0 = 4$ 时的异相偶极孤子, 当 $\mu = 0.55$ 时 $q_c \approx 0.956$; 而当 $\mu = 0.65$ 时, $q_c \approx 0.754$.

值得说明的是, 前面仅讨论了两类基本结构的带隙孤子, 即 on-site 孤子与 off-site 孤子. 实际上, 方程 (6) 存在无穷多结构各异的带隙孤子, 如三峰、四峰等结构更为复杂的孤子. 很多结构复杂的带隙孤子, 可视为这两类基本带隙孤子的组合. 这类孤子的特点是它们的峰值总位于外势的最低点处. 数值结果表明, 方程 (6) 也存在另外一类带隙孤子, 它们的峰值并不位于外势的最低点处. 文献中将该类孤子称为亚基本带隙孤子 (sub-fundamental gap soliton)^[46]. 图 6(a) 和图 6(c) 显示了 $q = 0.1, g = -1, \eta = -2, V_0 = 4$ 不同 μ 值时的亚基本带隙孤子, 它有着和前面两种类型的孤子明显不同的结构特征. 这类孤子在空间上呈奇对称分布, 它的中

心位置位于外势的最低点处, 波峰则介于外势最高点与最低点之间. 图 6(b) 和图 6(d) 为该类带隙孤子的动力学演化, 可以看出, $\mu = 2.9$ 时孤子不稳定而 $\mu = 3$ 时孤子稳定. 该结果意味着存在临界值 μ_c , 当 $\mu < \mu_c$ 时孤子不稳定而 $\mu > \mu_c$ 时孤子稳定. 数值结果表明在该组参数下, $\mu_c \approx 2.992$. 这里取 $\psi(x) = A_1 e^{-x^2/W_1} \sin(k_1 x)$ 作为迭代初始条件, 计算时取 $A_1 = 1, W_1 = 4K(q), k_1 = 1$.

三体相互作用强度对于带隙孤子的稳定性也有一定影响. 图 7 显示了 $V_0 = 2, \mu = 1.25, q = 0.1, g = 1$ 而不同 η 时第一带隙中同相偶极孤子的动力学演化. 图 7(a) 中 $\eta = 0$, 可以看出, 经过一段时间演化后带隙孤子呈现出动力学不稳定; 图 7(b) 中 $\eta = -0.2$, 可以看出此时的带隙孤子是动力学稳定的. 表明三体相互作用强度对于带隙孤子的稳定性确实有着一定影响, 它可以改变带隙孤子的稳定性区域, 该结论与文献 [18] 中结论一致. 注意这里的同相偶极孤子与图 3 中有所不同, 它属于文献 [29] 中提到的 (1, 1) 结构, 并非从 Band 中分岔出来 (迭代时取 $\mathcal{N} = 2, A_1 = A_2 = 0.6, x_1 = 0, x_2 = -2K(q), W_1 = W_2 = K(q)$).

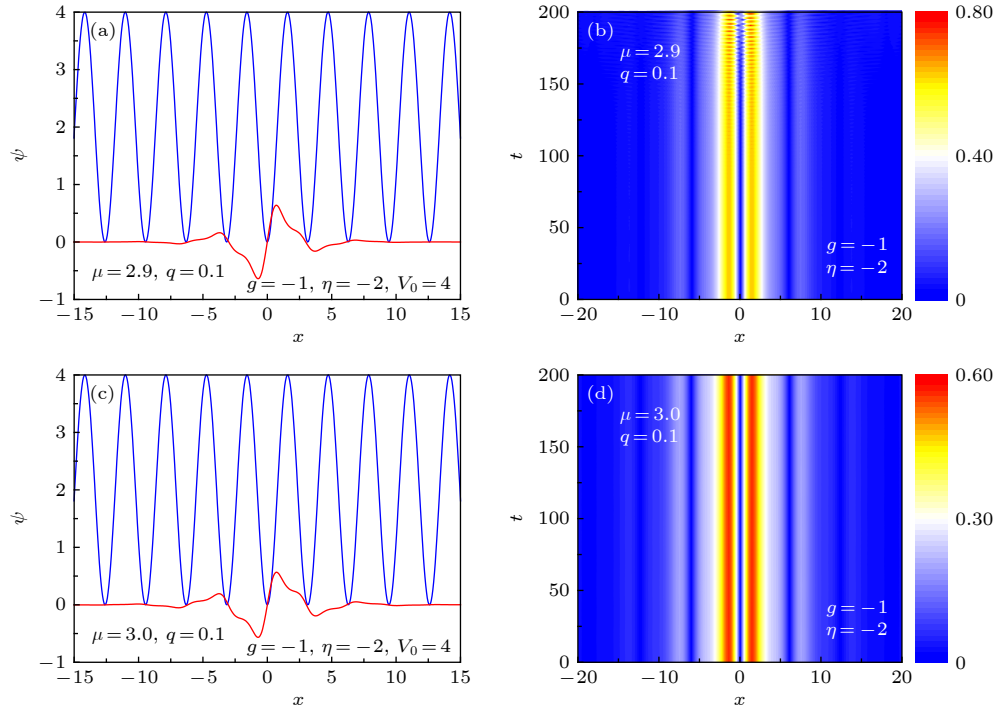


图 6 (a), (c) 第一带隙中的亚基本带隙孤子 (红色). 蓝线表示外势; (b), (d) 亚基本带隙孤子的动力学演化
Fig. 6. (a), (c) Profiles of sub-fundamental gap solitons (red lines) lie in the first bandgap. The solid blue lines denote the external potential; (b), (d) contour plots of $|\Psi(x, t)|$ for perturbed gap solitons.

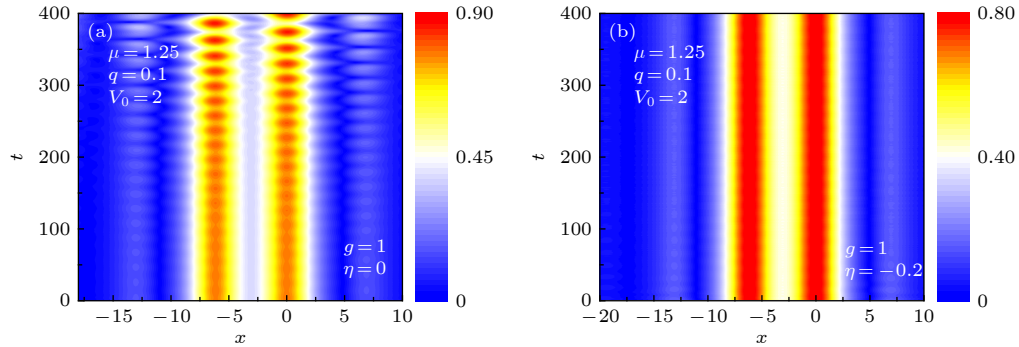


图 7 第一带隙中同相偶极孤子 (a) $\eta = 0$ 和 (b) $\eta = -0.2$ 时的动力学演化
Fig. 7. Contour plots of $|\Psi(x, t)|$ for in-phase dipole solitons lie in the first bandgap with (a) $\eta = 0$ and (b) $\eta = -0.2$.

4 结 论

本文研究了准一维情形下束缚于雅可比椭圆函数周期势中具有三体相互作用 BEC 系统中的带隙孤子及其稳定性. 在平均场近似下, 系统的动力学行为可由 3—5 次 GPE 描述. 首先利用多重尺度法对系统的带隙孤子进行了理论分析, 将 3—5 次 GPE 化为一定态 NLSE, 并给出了一类带隙孤子的解析表达式. 然后采用 NCG 法数值得到了该系统中存在的带隙孤子, 包括两类基本带隙孤

子 (on-site 孤子和 off-site 孤子) 与亚基本带隙孤子 (sub-fundamental gap soliton). 数值结果与理论分析均表明, 三体相互作用强度的增大将会导致带隙孤子的振幅减小. 最后, 用时间劈裂傅里叶谱方法对 GPE 进行长时间动力学演化以考察孤子的稳定性, 发现 on-site 孤子始终稳定, 同相偶极孤子和异相偶极孤子既有稳定的也有不稳定的. 三体相互作用强度对于带隙孤子的稳定性也有一定影响. 外势的模数对孤子的结构和稳定性会产生明显影响, 故实验中可通过调整外势的模数来改变带隙孤子的稳定性.

参考文献

- [1] Bose S N 1924 *Z. Phys.* **26** 178
- [2] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [3] Tsurumi T 2000 *Int. J. Mod. Phys. B* **14** 655
- [4] Malomed B A 2006 *Soliton Management in Periodic Systems* (Vol. 1) (Berlin: Springer) pp 1—6
- [5] Wang D S, Hu X H, Hu J, Liu W M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 025604
- [6] Burger S, Bongs K, Dettmer S, Ertmer W, Sengstock K, Sanpera A, Shlyapnikov G V, Lewenstein M 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198
- [7] Khaykovich L, Schreck F, Ferrari G, Bourdel T, Cubizolles J, Carr L D, Castin Y, Salomon C 2002 *Science* **296** 1290
- [8] Ku M J H, Ji W, Mukherjee B, Guardado S E, Cheuk L W, Yefash T, Zwierlein M W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 065301
- [9] Yu H Y, Yan J R, Xie Q T 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 1881
- [10] Wang Z X, Zhang X H, Shen K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3270
- [11] Li J H, Kuang L M 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 44
- [12] Etienne W B, Alidou M D, Timoléon C K 2008 *Phys. Rev. E* **77** 046216
- [13] Zhang W, Wright E M, Pu H, Meystre P 2003 *Phys. Rev. A* **68** 023605
- [14] Abdullaev F Kh, Gammal A, Tomio L, Frederico T 2001 *Phys. Rev. A* **63** 043604
- [15] Chang N N, Yu Z F, Zhang A X, Xue J K 2017 *Chin. Phys. B* **26** 115202
- [16] Etienne W, Porsezian K, Alidou M, Timoléon C K 2013 *Phys. Lett. A* **377** 262
- [17] Chin C, Kraemer T, Mark M, Herbig J, Waldburger P, Nagerl H C, Grimm R 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 123201
- [18] Peng P, Li G Q 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3221
- [19] Ruan H Y, Chen Y X 2001 *Acta. Phys. Sin.* **4** 0586 (in Chinese) [阮航宇, 陈一新 2001 物理学报 **4** 0586]
- [20] Saito H, Ueda M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 1406
- [21] Fiho V S, Gammal A, Frederico T, Tomio L 2000 *Phys. Rev. A* **62** 033605
- [22] Meng D X, Li K Z 2019 *Phys. Rev. Lett.* **33** 19150123
- [23] Wahlquist H D, Estabrook F B 1973 *Phys. Rev. Lett.* **31** 1386
- [24] Radhakrishnan R, Sahadevan R, Lakshmanan M 1995 *Chaos, Solitons Fractals* **5** 2315
- [25] Weiss J, Tabor M, Carneval G 1983 *J. Math. Phys.* **24** 6
- [26] Wang D S, Liu J 2018 *Appl. Math. Lett.* **79** 211
- [27] Wen L, Liang Y, Zhou J, Yu P, Xia L, Niu L B, Zhang X F 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 080301 (in Chinese) [文林, 梁毅, 周晶, 余鹏, 夏雷, 牛连斌, 张晓斐 2019 物理学报 **68** 080301]
- [28] Dmitry E P, Andrey A S, Yuri S K 2004 *Phys. Rev. E* **70** 036618
- [29] Tang N, Yang X Y, Feng W X, Song L, Li X L, Xi Z H, Wang D S, Shi Y R 2019 *Physica A* **528** 1
- [30] Akozbek N, John S 1998 *Phys. Rev. E* **57** 2287
- [31] Mingaleev S F, Kivshar Yu S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5474
- [32] Louis P J Y, Ostrovskaya E A, Kivshar Yu S 2005 *Phys. Rev. A* **71** 023612
- [33] Eiermann B, Anker Th, Albiez M, Taglieber M, Treutlein M, Marzlin K P, Oberthaler M K 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 230401
- [34] Zhu J, Bian C L, Wang H C 2019 *Chin. Phys. B* **28** 093701
- [35] Li Y, Hai W H 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 840
- [36] Eddy T, Paolo T, Mahir H, Arthur K 1999 *Phys. Rep.* **315** 199
- [37] Bao W 2007 *Dynamics In Models Of Coarsening, Coagulation, Condensation And Quantization.* (Vol. 1) (Singapore: World Scientific) p147—149
- [38] Yang J K 2010 *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems* (Vol. 1) (Philadelphia: SIAM) p269—283
- [39] Kostov N A, Enol'skii V Z, Gerdjikov V S, Konotop V V and Salerno M 2004 *Phys. Rev. E* **70** 056617
- [40] Catarina C, Vitor Nistor, Yu Q 2017 *Operator Theory: Advances and Applications* (Vol. 1) (Berlin: Springer) p20—24
- [41] Yang J K 2009 *J. Comput. Phys.* **228** 7007
- [42] Tang H Y 1985 *J. BJUT. Tech.* **11** 69 (in Chinese) [唐恒永 1985 北京工业大学学报 **11** 69]
- [43] Royer C W, Neill M O', Wright S J 2018 *Math. Program.* **1**-38
- [44] Zhang Q, Li S, Lei Y, Zhang X D 2012 *J. Control Theory Appl.* **10** 223
- [45] Allen A J, Zuccher S, Caliarì M, Proukakis N, Parker N G, Barenghi C F 2014 *Phys. Rev. A* **90** 013601
- [46] Adhikari S F, Malomed B A 2007 *Europhys. Lett.* **79** 50003

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Gap solitons and their stabilities in a quasi one-dimensional Bose-Einstein condensate under three-body interaction*

Tang Na¹⁾²⁾ Yang Xue-Ying¹⁾²⁾ Song Lin¹⁾²⁾ Zhang Juan¹⁾²⁾³⁾
 Li Xiao-Lin¹⁾²⁾ Zhou Zhi-Kun¹⁾²⁾ Shi Yu-Ren¹⁾²⁾†

1) (*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

2) (*Laboratory of Atomic Molecular Physics and Functional Material, Lanzhou 730070, China*)

3) (*Department of Basic Course, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China*)

(Received 23 August 2019; revised manuscript received 12 October 2019)

Abstract

We study the gap solitons and their stability properties in a Bose-Einstein condensation (BEC) under three-body interaction loaded in a Jacobian elliptic sine potential, which can be described by a cubic-quintic Gross-Pitaevskii equation (GPE) in the mean-field approximation. Firstly, the GPE is transformed into a stationary cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation (NLSE) by the multi-scale method. A class of analytical solution of the NLSE is presented to describe the gap solitons. It is shown analytically that the amplitude of the gap soliton decreases as the two-body or three-body interaction strength increases. Secondly, many kinds of gap solitons, including the fundamental soliton and the sub-fundamental soliton, are obtained numerically by the Newton-Conjugate-Gradient (NCG) method. There are two families of fundamental solitons: one is the on-site soliton and the other is the off-site soliton. All of them are bifurcated from the Bloch band. Both in-phase and out-phase dipole solitons for off-site solitons do exist in such a nonlinear system. The numerical results also indicate that the amplitude of the gap soliton decreases as the nonlinear interaction strength increases, which accords well with the analytical prediction. Finally, long-time dynamical evolution for the GPE is performed by the time-splitting Fourier spectrum method to investigate the dynamical stability of gap solitons. It is shown that the on-site solitons are always dynamically stable, while the off-site solitons are always unstable. However, both stable and unstable in-phase or out-phase dipole solitons, which are not bifurcated from the Bloch band, indeed exist. For a type of out-phase soliton, there is a critical value q_c when the chemical potential μ is fixed. The solitons are linearly stable as $q > q_c$, while they are linearly unstable for $q < q_c$. Therefore, the modulus q plays an important role in the stability of gap solitons. One can change the dynamical behavior of gap solitons by adjusting the modulus of external potential in experiment. We also find that there exists a kind of gap soliton, in which the soliton is dynamically unstable if only the two-body interaction is considered, but it becomes stable when the three-body interaction is taken into account. This indicates that the three-body interaction has influence on the stability of gap solitons.

Keywords: Bose-Einstein condensate, gap soliton, three-body interactions, stability

PACS: 03.75.Lm, 02.30.Mv, 04.30.Db

DOI: 10.7498/aps.69.20191278

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11565021), the Scientific Research Ability Improvement Program of Young Teachers of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNULKQN-16-3,) and the Innovation capacity enhancement program of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNU2019KT232).

† Corresponding author. E-mail: shiyu@nwnu.edu.cn

玻色-爱因斯坦凝聚中的环状暗孤子动力学

郭慧 王雅君 王林雪 张晓斐

Dynamics of ring dark solitons in Bose-Einstein condensates

Guo Hui Wang Ya-Jun Wang Lin-Xue Zhang Xiao-Fei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010302 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191424

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191424>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

有效质量法调控原子玻色-爱因斯坦凝聚体的双阱动力学

Effective-mass approach to controlling double-well dynamics of atomic Bose-Einstein condensates

物理学报. 2017, 66(16): 160301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.160301>

⁸⁷Rb玻色-爱因斯坦凝聚体的快速实验制备

Fast production of ⁸⁷Rb Bose-Einstein condensates

物理学报. 2017, 66(8): 083701 <https://doi.org/10.7498/aps.66.083701>

半无限深势阱中自旋相关玻色-爱因斯坦凝聚体的量子反射与干涉

Quantum reflection and interference of spin-dependent Bose-Einstein condensates in semi-infinite potential wells

物理学报. 2017, 66(23): 230301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.230301>

多个子玻色-爱因斯坦凝聚气体膨胀叠加形成的量子涡旋现象研究

Quantum vortex phenomenon of many sub-Bose-Einstein condensations formed by expansion and superposition

物理学报. 2018, 67(1): 010501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171708>

具有面内四极磁场的旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态结构研究

Ground state of a rotating Bose-Einstein condensate with in-plane quadrupole field

物理学报. 2017, 66(13): 130305 <https://doi.org/10.7498/aps.66.130305>

专题：非线性物理

玻色-爱因斯坦凝聚中的环状暗孤子动力学*

郭慧¹⁾²⁾ 王雅君¹⁾²⁾ 王林雪³⁾ 张晓斐^{1)2)†}

1) (中国科学院国家授时中心时间频率基准重点实验室, 西安 710600)

2) (中国科学院大学天文与空间科学学院, 北京 100049)

3) (陕西科技大学文理学院, 西安 710021)

(2019 年 9 月 18 日收到; 2019 年 10 月 29 日收到修改稿)

环状暗孤子最早是在非线性光学系统中理论预言并实验实现的一种二维孤子类型. 跟通常的二维孤子(如条纹孤子)相比, 环状暗孤子具有更好的稳定性和更加丰富的动力学行为. 玻色-爱因斯坦凝聚由于其高度可控性为研究环状暗孤子提供了一个全新的平台. 本文结合玻色-爱因斯坦凝聚和孤子研究的现状, 综述玻色-爱因斯坦凝聚中环状暗孤子的解析解、稳定性调控及其衰变动力学等方面的研究进展. 首先介绍了一套变换方法将均匀系统中非线性系数不随时间变化的环状暗孤子解析解推广到谐振子外势下非线性系数随时间变化的环状暗孤子解析解; 然后讨论在形变扰动下环状暗孤子的稳定性相图, 并介绍了如何利用周期调制的非线性来增强环状暗孤子的稳定性; 此外, 还重点讨论了环状暗孤子衰变导致的涡旋极子动力学以及斑图形成.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 环状暗孤子, 涡旋极子, 斑图

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Kk, 67.85.De, 67.25.dk

DOI: 10.7498/aps.69.20191424

1 引言

孤子是一种存在于非线性系统中的奇异拓扑激发. 孤子的概念最早是在 1965 年由 Zabusky 和 Kruskal^[1] 在研究 Korteweg-de Vries 方程时提出的. 稳定的孤子在传播过程中可以保持形状、幅度和速度不变. 孤子广泛存在于经典和量子流体、非线性光学、等离子体等各种非线性系统中^[2,3], 引起了不同领域科学家的广泛关注^[4–10]. 自从 1995 年超冷原子玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 在实验上实现^[11–14] 以来, BEC 中的孤子性质及其动力学成为冷原子物理领域的重要课题. 跟其他非线性系统(如经典流体等)相比, BEC 具有高度可控性, 可以通过光场、磁场、电场跟冷原子耦合来改变 BEC 的几何结构、维度、外势以及相互作用等^[15–21],

从而为孤子的理论和实验提供了优越的平台, 并为孤子研究注入了新的活力^[2,22–25].

BEC 中的孤子通常可以分为亮孤子和暗孤子. 所谓亮孤子是指在 BEC 背景上激发的稳定的局域密度凸起结构, 而暗孤子是指在 BEC 背景上激发的稳定的局域密度凹陷结构. BEC 中是否存在稳定的亮孤子或者暗孤子一般取决于原子之间的相互作用. 对于吸引相互作用的系统一般存在亮孤子, 而对于排斥相互作用的系统一般存在暗孤子. 早在 BEC 实验实现以前, 科学家已经从理论上预言了该系统中可能存在稳定的孤子^[26]. 1999 年 Denschlag 等^[27] 和 Sanpera 等^[28] 利用相位刻印技术 (phase imprinting technique) 在超冷 ^{23}Na 和 ^{87}Rb 原子的 BEC 中观察到暗孤子, 标志着孤子这一非线性现象在 BEC 系统中的首次实验实现. 两个研究组分别用了不同的原子种类, 即 ^{23}Na 和

* 国家自然科学基金 (批准号: 11775253, 11704383) 和陕西省自然科学基金基础研究计划 (批准号: 2019JQ-058) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xfzhang@ntsc.ac.cn

^{87}Rb . 由于这两种原子之间的相互作用都是排斥相互作用, 因而亮孤子一般是不稳定的. 但当排斥相互作用和孤子的相位梯度达到某种平衡时, 系统中允许存在稳定的暗孤子. 随着 Feshbach 共振技术在超冷原子 BEC 中的广泛应用 [19,29,30], 2002 年 Strecker 等 [31] 和 Khaykovich 等 [32] 科学家利用 Feshbach 共振技术调节原子间的相互作用从排斥到吸引, 首次在 ^7Li 原子 BEC 系统中实验观察到亮孤子. 之后 Cornish 等 [33] 同样利用 Feshbach 共振技术, 在超冷 ^{85}Rb 原子 BEC 系统中实验观察到亮孤子.

在 BEC 系统中, 一般认为一维孤子是可以稳定存在的, 而二维及以上系统的孤子却很难稳定. 随着一维孤子在 BEC 中的实验实现 [27,28,31,32], BEC 中高维孤子的产生、稳定性及其衰变动力学成为当前科学家关注的热点和难点问题 [34]. 以暗孤子为例, 在 BEC 中产生物质波暗孤子需要具备如下几个特点: 首先在原子背景上具有局部的密度最小值, 而且在局部密度最小值处波函数的相位有一个突变, 与此同时局域密度最小值的幅度和形状不发生改变 [28,35]. 研究发现暗孤子两侧的相位对暗孤子的速度和深度起了决定性作用 [36]. 特别地, 当暗孤子两侧的相位差为 π 时, 暗孤子的深度为 100%, 即孤子中心处没有粒子, 我们称之为全暗孤子或黑孤子. 此时孤子的速度为零. 暗孤子的这一特点以及 BEC 中原子分布的不均匀性, 使得在二维 BEC 系统中, 条纹暗孤子很不稳定, 极易受到横向扰动的影响, 表现出蛇形 (snake) 不稳定性 [37,38], 最终衰变为涡旋对 [39]. Dutton 等 [40] 利用慢光技术 (slow light technique) 在 BEC 中引入密度缺陷, 在密度缺陷的衰变过程中产生了条纹暗孤子. 他们进一步观察到条纹暗孤子的蛇形不稳定性, 以及从条纹暗孤子衰变成涡旋的动力学过程. 在三维 BEC 系统中, Anderson 等 [41] 发现条纹暗孤子更加不稳定, 会很快衰变成各种涡旋环结构.

随着对暗孤子性质理解的不断深入 [42], 人们逐渐认识到在二维非线性均匀系统中, 条纹暗孤子的不稳定性区域是由最大扰动波数 $Q_{\max}$ 表征的 [43]. 当条纹暗孤子的长度 $L < 2\pi/Q_{\max}$ 时, 条纹暗孤子的不稳定性会被抑制 [44]. 此时直的条纹暗孤子会发生弯曲, 进而闭合成可以长时间稳定存在的环状暗孤子. 环状暗孤子最早是在非线性光学系统中理论预言 [45,46] 和实验实现的 [47,48]. 在非线性光学系

统中, 环状暗孤子可以用于全光控制、光学开关以及块体介质中光学信息传输通道的多路复用与分解 [47]. 由于环状暗孤子比一般的孤子如条纹暗孤子、块状 (lump) 暗孤子等具有更好的稳定性和更丰富的动力学性质, 因而引起了冷原子物理学家的关注 [24,44,49–51]. Theocharis 等 [44] 最早在 BEC 中引入了环暗孤子的概念, 并讨论了 BEC 中环状暗孤子的解析解、稳定性以及动力学性质. 他们发现由于环状暗孤子特殊的对称性质, 使得即使在谐振子外势下, 密度不均匀的 BEC 系统中, 环状暗孤子在某些条件下仍然可以较长时间稳定存在. 环状暗孤子可用于产生量子湍流, 进而理解量子湍流的统计性质及其内在的物理机理 [52–54]. 利用环状暗孤子衰变可以产生各种类型的涡旋结构和斑图, 从而为深入研究涡旋动力学和斑图动力学等各类非线性现象提供新的技术手段和思路. 在负质量流体 [55]、人造规范系统 [21,56]、SU(3) 自旋轨道耦合 [57] 等特殊量子体系中研究环状暗孤子的性质, 还有望发现新的量子流体动力学规律, 为设计各种新的拓扑功能材料提供理论依据. 因此, 在量子流体系统中研究环状暗孤子的基本性质和动力学行为具有重要的意义.

本文旨在结合 BEC 和孤子研究的现状, 综述 BEC 中环状暗孤子的解析解、稳定性操控及其衰变动力学等方面的相关研究进展. 第二部分针对 BEC 原子一般束缚在谐振子势阱中, 从而使得系统具有密度分布不均匀这一完全不同于非线性光学均匀系统的特点, 首先介绍了一种处理谐振子束缚系统中精确环状暗孤子解的变换方法, 然后将该方法推广到原子间相互作用随时间变化的系统. 这一工作进一步建立了非均匀的 BEC 系统跟均匀的非线性光学系统之间的密切联系, 为孤子问题的解析分析开辟了新的道路. 第三部分致力于讨论 BEC 系统中环状暗孤子的稳定性. 鉴于先前研究中仅讨论了横向扰动对环状暗孤子的影响, 考虑到实际的实验情况, 重点讨论了环状暗孤子形状的微小形变对环状暗孤子稳定性的影响. 通过数值模拟计算, 得到了环状暗孤子关于椭圆偏心率和深度的稳定性相图. 结果表明较浅的孤子可以以较大的偏心率稳定存在. 我们还将亮孤子研究中广泛应用的 Feshbach 共振技术, 引入到环状暗孤子的稳定性操控. 理论预言利用 Feshbach 共振技术周期性调节 BEC 原子间的相互作用, 可以在同等条件下

极大地延长环状暗孤子的寿命. 环暗孤子除了可以在一定程度上克服条纹暗孤子遭遇的蛇形不稳定性之外, 还在其不稳定区域表现出丰富的衰变动力学. 第四部分将讨论 BEC 系统中环状暗孤子衰变为涡旋对以及涡旋在谐振子束缚的 BEC 系统中的运动规律, 还将说明利用环状暗孤子衰变引起的自发对称性破缺, 通过周期性调节原子间的相互作用可以在 BEC 产生各种斑图结构. 最后对 BEC 中环状暗孤子的相关研究进行了简单的总结和展望.

2 相互作用可调的 BEC 中环状暗孤子的解析解

一般来说, BEC 系统中的相互作用是不随时间和空间变化的. 但随着 Feshbach 共振技术的发展, 科学家已经可以对 BEC 系统中的相互作用强度甚至正负进行调节. 目前为止, 科学家已经相继发现了磁 Feshbach 共振^[29,30]、光 Feshbach 共振^[58,59]、束缚诱导的共振^[60,61] 以及轨道 Feshbach 共振^[62,63] 等. 这些类型的 Feshbach 共振技术为调节 BEC 中的相互作用提供了有力工具. 利用 Feshbach 共振相关技术, 科学家已经理论预言和实验实现了各种随时间^[31,64–66] 和空间^[67,68] 变化的原子间相互作用. 因而, 在 BEC 系统中研究相互作用随时间变化的孤子解具有重要的现实意义.

二维谐振子外势中相互作用随时间变化的 BEC 的运动规律可由如下非线性薛定谔方程描述^[51]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2\psi + g(t)|\psi|^2\psi. \quad (1)$$

跟一般的非线性光学系统相比, 求解 BEC 中环状暗孤子解的一个困难是谐振子外势的存在. 当没有谐振子外势即 $\Omega = 0$ 时, 根据环状暗孤子的对称性, 系统可以表示为如下形式:

$$i\frac{\partial Q(R,T)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 Q(R,T)}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial Q(R,T)}{\partial R}\right) - C|Q(R,T)|^2Q(R,T) = 0. \quad (2)$$

利用微扰方法在小振幅近似下, 方程 (2) 可以变换到著名的 CKdV 方程^[45,46]. 利用 CKdV 方程的解析解^[69–74], 可以间接得出方程 (2) 的环状暗孤子解析解. 当存在谐振子外势即 $\Omega \neq 0$ 时, Theocharis 等^[44] 讨论了相互作用为常数时, 系统可能存在的环状暗孤子解.

下面介绍一套变换方法来求解相互作用随时

间变化的 BEC 系统的环状暗孤子解析解^[51]. 首先, 将方程 (1) 做如下变换:

$$\psi(r,t) = Q(R(r,t), T(t))e^{i\alpha(r,t)+\beta(t)}. \quad (3)$$

假设 $R(r,t), T(t), \alpha(r,t)$ 和 $\beta(t)$ 为实函数, 并且满足

$$R(r,t) = \lambda(t)r, \quad (4)$$

$$T(t) = \int \lambda^2(t')dt' + C_0, \quad (5)$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\ln \frac{\lambda^2(t)}{C}, \quad (6)$$

$$\alpha(r,t) = -\frac{1}{2\lambda(t)}\frac{d\lambda(t)}{dt}r^2, \quad (7)$$

其中 C_0 为常数. 该变换成立的条件是

$$\frac{1}{\lambda(t)}\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2} - \frac{2}{\lambda^2(t)}\left(\frac{d\lambda(t)}{dt}\right)^2 - \Omega^2 = 0. \quad (8)$$

在该变换下方程 (2) 的所有解析解都可以转化为方程 (1) 的解析解. 这就在非线性光学均匀系统和非均匀 BEC 系统之间建立了一个桥梁. 利用这一变换关系, 在其中一个系统中得到的相关结果, 都可以在另一个系统中找到对应, 从而为研究非线性光学和 BEC 动力学提供新的思路.

该变换方法还可以推广到更为一般形式的非线性薛定谔方程^[51]

$$i\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} + D(t)\left(\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right) + g(t)|u(r,t)|^2u(r,t) + \frac{1}{2}\Omega^2(t)r^2u(r,t) = 0, \quad (9)$$

其中需满足 $g(t) \propto D(t)$. 对于 BEC 系统来说, 因为 $D(t)$ 为常数, 所以此时相互作用也必须为常数. 因而方程 (9) 转化为谐振子外势束缚强度随时间变化的情形

$$i\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right) + g|u(r,t)|^2u(r,t) + \frac{1}{2}\Omega^2(t)r^2u(r,t) = 0. \quad (10)$$

利用方程 (10), 可以求解谐振子束缚强度随时间变化的 BEC 系统的环状暗孤子解析解.

需要特别强调的是, 该解析方法只是在小振幅近似下才能成立. 所以对应于 BEC 系统, 就要求得到的环状暗孤子深度不能太深. 对于深的环状暗孤子, 目前尚无有效的解析处理方法, 需要借助数值模拟计算, 直接求解原始的非线性薛定谔方程 (1).

3 BEC 中环状暗孤子的稳定性

3.1 环状暗孤子在形变扰动下的稳定性相图

环状暗孤子的稳定性首先受到横向扰动的影响, 表现出蛇形不稳定. Theocharis 等^[44] 率先研究了横向扰动对 BEC 中环状暗孤子稳定性的影响, 指出浅的环状暗孤子可以不受蛇形不稳定影响而长时间稳定存在, 而深的环状暗孤子将遭受蛇形不稳定而衰变成环状分布的涡旋阵列. 考虑到真实的实验情况, 除了横向扰动之外, 环状暗孤子还可能受到包括径向扰动在内的更为复杂形式的外部扰动. 下面重点讨论形变扰动对环状暗孤子稳定性的影响.

环状暗孤子在形变扰动下的稳定性可以通过数值求解非线性薛定谔方程 (1) 来进行分析^[51]. 首先选择如下形式的环状暗孤子解

$$\psi(x, y, 0) = (1 - \Omega^2 r^2 / 4) \times [\cos \phi(0) \tanh Z(r_1) + i \sin \phi(0)], \quad (11)$$

其中 $Z(r_1) = (r_1 - R_0) \cos \phi(0)$, $r_1 = \sqrt{(1 - e_c^2)x^2 + y^2}$, e_c 表示环状暗孤子发生形变的偏心率, $\cos \phi(0)$ 刻画了环状暗孤子的初始深度, R_0 为发生形变之前环状暗孤子的初始半径, 对应于发生椭圆形变后短半轴的长度. 特别地, 固定 $g(t) = 1$, $\Omega = 0.028$, $R_0 = 28.9$, 通过调节环状暗孤子的深度和形变程度观察环状暗孤子的稳定性. 数值模拟计算结果表明环状暗孤子的稳定性明显受到形变扰动的影响. 对于相同深度的浅的环状暗孤子, 当偏心率 e_c 超过某一临界值 $e_{\max}$ 时, 环状暗孤子会由稳定而变得不稳定, 进而衰变成涡旋对 (后面将详细讨论环状暗孤子的衰变动力学). 图 1 给出了环状暗孤子关于深度和最大偏心率的稳定性相图. 从图中可以看出, 当环状暗孤子很浅时, 环状暗孤子即使在很大的偏心率下也可以稳定存在; 当环状暗孤子较深时, 很小的偏心率就会导致环状暗孤子失稳. 特别地, 当深度 $\cos \phi(0) > 0.67$ 时, 即使在零形变下环状暗孤子也变得不稳定.

3.2 基于 Feshbach 共振的环状暗孤子稳定性操控

Feshbach 共振技术在 BEC 孤子研究中扮演

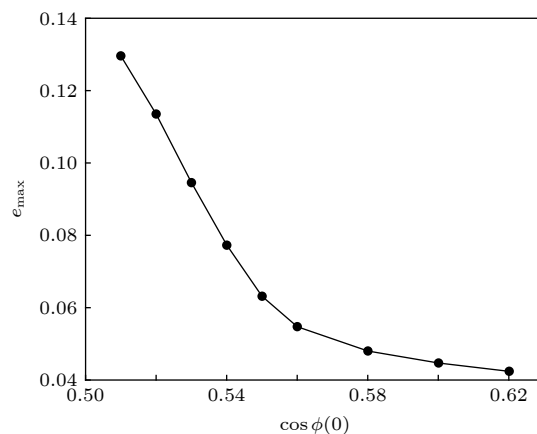


图 1 形变扰动下环状暗孤子的稳定性相图^[51]

Fig. 1. Stability phase diagram of ring dark solitons under deformation perturbation.

了重要的角色. 实验上利用 Feshbach 技术不但可以产生孤子^[31–33], 而且还可以用来调控孤子的稳定性^[75]. 最近, 利用 Feshbach 共振随时间周期性改变原子间的相互作用引起了理论和实验学家的极大兴趣^[65,76–80]. Saito 和 Ueda^[78] 以及 Abdullaev 等^[79] 发现利用 Feshbach 共振调节原子间相互作用在吸引和排斥之间的快速振荡, 可以在二维空间维持稳定的物质波亮孤子. Liang 等^[80] 进一步研究了在周期调控的原子间相互作用下, 物质波亮孤子跟背景之间的原子数目交换规律. 本节将从理论上讨论如何利用 Feshbach 共振技术增强环状暗孤子的稳定性.

假设随时间周期性振荡的相互作用具有如下形式

$$g(t) = 1 - \sin \omega t. \quad (12)$$

方程 (12) 表明原子间的排斥相互作用强度在 0–2 之间周期性振荡. 计算结果表明^[51] 在某一振荡频率附近, 环状暗孤子的稳定性明显增强. 即使对于较深的暗孤子, 在相互作用处于该振荡频率下, 仍然可以具有很长的寿命. 以环状暗孤子深度 $\cos \phi(0) = 0.76$ 为例, 通过上一节的讨论, 我们知道环状暗孤子在此深度下是极不稳定的. 通过数值模拟计算, 得到了环暗孤子寿命随相互作用振荡频率的变化情况, 如表 1 所列. 可以发现, 当相互作用振荡频率在谐振子固有频率 Ω 附近时, 环暗孤子的寿命急剧增长; 当相互作用的振荡频率远离该固有频率时, 环状暗孤子的寿命迅速减小. 这说明环状暗孤子寿命的增长是由于相互作用的振荡频率跟谐振子的振荡频率发生共振引起的.

表 1 环状暗孤子寿命随相互作用振荡频率的变化^[51]

Table 1. Life of the ring dark soliton as a function of the interaction oscillation frequency.

相互作用振荡频率 ω / Ω	环状暗孤子寿命 t/ms
< 0.5	< 15
0.6	17
0.8	43
1.0	45
1.5	16
> 1.7	< 15

注1: 原子间相互作用 $g(t) = 1 - \sin \omega t$, 环状暗孤子深度 $\cos \phi(0) = 0.76$.

我们还发现当相互作用振荡频率处于该谐振子振荡频率时, 较浅的环状暗孤子即使发生了很大的形变, 仍然可以长时间稳定存在. 例如, 计算了环状暗孤子深度为 $\cos \phi(0) = 0.6$, 形变引起的偏心率 $e_c = 0.4$ 时环状暗孤子的寿命. 计算结果表明, 当相互作用为常数即 $g = 1$ 时, 环状暗孤子的寿命小于 10 ms. 而当相互作用以频率 Ω 在 $g = 1$ 附近振荡, 即 $g = 1 - \sin \Omega t$ 时, 环状暗孤子的寿命可以长达 50 ms.

4 环状暗孤子衰变动力学

当环状暗孤子处于不稳定区域时, 通常会在遭遇蛇形不稳定下发生衰变^[39,44], 导致各种类型和数目的涡旋极子或者不同样式的斑图. 从而建立了 BEC 中孤子和涡旋以及斑图^[81] 等非线性现象之间的密切联系. 研究 BEC 中环状暗孤子衰变引起的各种涡旋动力学和斑图形成有助于理解量子湍流^[52,82,83] 和各类相关非线性现象的物理机理.

4.1 环状暗孤子衰变与涡旋动力学

4.1.1 单分量 BEC 中的环状暗孤子衰变与涡旋动力学

Theocharis 等^[44] 最早研究了单分量 BEC 中环状暗孤子的衰变动力学. 他们发现较深的环状暗孤子在横向扰动下将衰变为由涡旋-反涡旋对构成的环形分布的涡旋链. 越深的环状暗孤子将衰变出更多的涡旋. 涡旋-反涡旋对的数目满足某种规律, 即总是 4 的倍数, 并且长时间演化后部分涡旋湮灭, 最后只剩下 4 个涡旋-反涡旋对可以长时间稳

定存在. 与此同时, 环暗孤子在 BEC 中衰变产生的涡旋团簇不是固定不动的, 而是以某种规律做周期性运动. 运动的形式依赖于涡旋的个数和系统的对称性质.

接下来重点讨论在形变扰动下, 环状暗孤子的衰变动力学. 同样选择环状暗孤子解 (11) 式作为初始态代入方程 (1) 进行演化. 特别地, 假设环状暗孤子的深度为 $\cos \phi(0) = 0.6$, 相互作用强度和谐振子束缚频率固定在 $g = 1, \Omega = 0.028$, 发生形变的偏心率为 $e_c = 0.4$. 前边的结果已经表明当不发生形变时, 深度为 0.6 的环状暗孤子是相对稳定的, 因而接下来观察到的孤子衰变主要是由形变引起的. 数值模拟计算指出^[51], 在环状暗孤子发生形变时的衰变行为跟不发生形变时的衰变行为具有明显的不同. 在椭圆形变影响下, 环状暗孤子衰变产生的涡旋-反涡旋对的数目不再是 4 的倍数, 或 2 的偶数倍, 而是 2 的奇数倍, 如图 2 所示. 这可以从椭圆形变扰动打破了系统的旋转对称性来理解. 涡旋个数的不同引起了不同的涡旋运动规律. 对于图 2 所示的两个涡旋对的情况, 可以看到每个涡旋分别在 $1/4$ 圆周的扇形轨迹上做周期性运动. 而对于四个涡旋对的情况, 每个涡旋分别在 $1/8$ 圆周的扇形轨迹上做周期性运动^[44].

环状暗孤子在形变扰动下的详细衰变动力学过程为^[51]: 首先环状暗孤子沿着径向收缩到一个最小半径 $R_{\min}$, 然后在蛇形不稳定性作用下迅速衰变为两个暗块孤子; 这两个暗块孤子随后沿着相反的方向远离 BEC 中心移动, 并随着背景原子数密度的减小而劈裂为两个涡旋极子, 涡旋极子继续向前运动; 当涡旋极子到达凝聚体边界时, 正负涡旋分开并以相反的方向沿着凝聚体边界做近似圆周运动; 当旋转 90° 角后, 来自不同涡旋极子的涡旋相遇, 并重新组合成新的涡旋极子, 然后朝着 BEC 中心运动. 随着背景原子数密度的增大, 涡旋极子中的涡旋间距逐渐减小, 重新融合成暗块孤子, 并试图恢复原来的环状暗孤子状态; 当到达 $R_{\min}$ 附近时, 两个暗块速度降为 0, 然后按照原来的路径返回, 并周期性地沿着四个扇形边界做往复运动. 值得注意的是, 在返回途中由于运动方向相反, 暗块分裂成的涡旋极子中的两个涡旋的旋转方向也同时发生了反转. 此外, 环状暗孤子衰变形成的两个涡旋极子的运动跟涡旋四极子在 BEC 中的运动规律有些类似^[84].

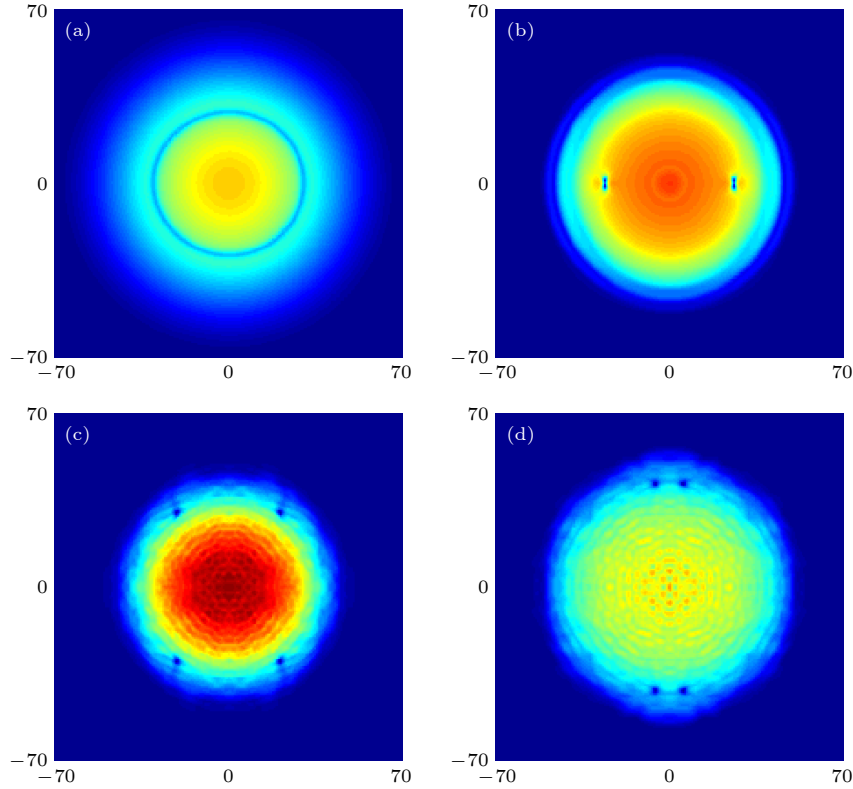
图 2 单分量 BEC 中形变扰动下环状暗孤子的衰变行为^[51]

Fig. 2. Decay of the ring dark soliton under deformation perturbation in a single-component BEC.

4.1.2 两分量 BEC 中的环状暗孤子衰变与涡旋动力学

当 BEC 中的原子处于两个超精细能级时, 系统是由两个非线性薛定谔方程耦合的方程组来描述的, 一般具有如下形式:

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 + g_{11}|\psi_1|^2 + g_{12}|\psi_2|^2\right)\psi_1, \quad (13)$$

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 + g_{21}|\psi_1|^2 + g_{22}|\psi_2|^2\right)\psi_2. \quad (14)$$

在两分量系统中, 孤子的运动表现为两种模式, 类似于非线性光学中处于不同模式的矢量孤子^[2]. 由于不同分量原子之间的相互碰撞, 使得处于不同分量的孤子可以相互耦合, 表现为更为丰富的非线性动力学性质^[85].

假设处于两个不同分量的环状暗孤子在初始时刻具有如下形式

$$\psi_1(x, y, 0) = \left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{4}\right) [\cos \phi_1(0) \tanh Z_1(r_1) + i \sin \phi_1(0)], \quad (15)$$

$$\psi_2(x, y, 0) =$$

$$\left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{4}\right) [\cos \phi_2(0) \tanh Z_2(r_1) + i \sin \phi_2(0)]. \quad (16)$$

其中 $Z_i(r_1) = (r_1 - R_{i0}) \cos \phi_i(0)$, $r_1 = \sqrt{(1 - e_c^2)x^2 + y^2}$. 类似于前边单分量的情况, 固定环状暗孤子偏心率 $e_c = 0.4$, 谐振子束缚频率 $\Omega = 0.028$, 相互作用强度 $g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 1$. 假设两个环状暗孤子具有不同的初始半径, 分别为 $R_{10} = 27.9$ 和 $R_{20} = 28.9$. 与此同时, 假设两个分量的环状暗孤子处于相同的背景深度. 当两分量的环状暗孤子具有相同的深度 $\cos \phi_1(0) = \cos \phi_2(0) = 0.6$ 时, 数值模拟计算结果表明, 两分量 BEC 的环暗孤子衰变动力学跟前边提到的单分量 BEC 的环状暗孤子衰变动力学非常相似^[86].

当将初始环状暗孤子的深度增大为 $\cos \phi_1(0) = \cos \phi_2(0) = 0.75$ 时, 系统表现出完全不同的环状暗孤子衰变动力学^[86], 如图 3 和图 4 所示. 首先, 由于深度的增加, 环状暗孤子衰变生成了更多数目的涡旋极子. 由图 3(b) 可以看到共产生了 6 对涡旋极子, 这跟前边单分量系统中提到的椭圆形变下, 环状暗孤子衰变成涡旋极子的个数总是 2 的奇数倍的结论一致. 这些涡旋极子产生后, 分为两组

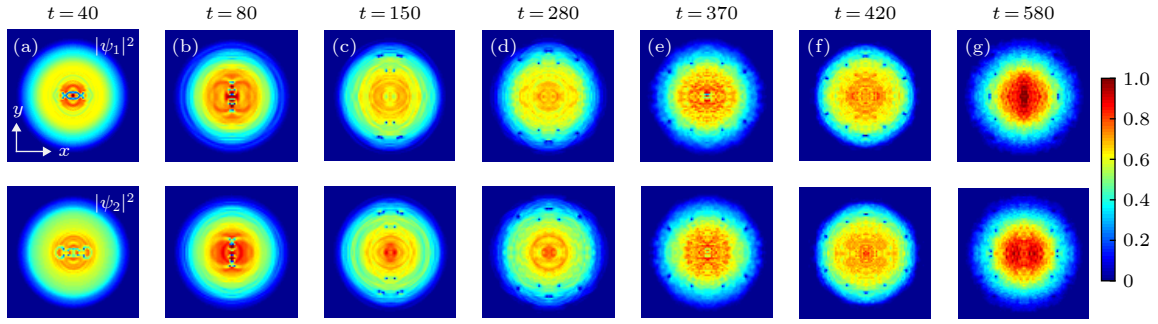
图3 两分量 BEC 中相同深度环状暗孤子的衰变行为^[86]

Fig. 3. Decay of the ring dark solitons with the same depth in two-component BECs.

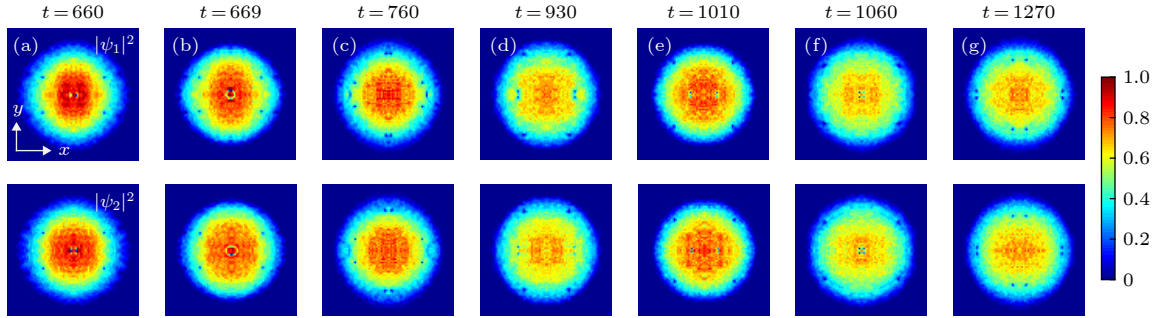
图4 四组涡旋极子在两分量 BEC 中的动力学演化^[86]

Fig. 4. Evolution of four vortex dipoles in two-component BECs.

(每组三对) 分别沿着相反的方向朝 BEC 边界上运动; 在运动的同时同一组的涡旋极子之间逐渐散开, 形成一种三角结构, 如图 3(c) 所示; 之后靠近边缘的两对涡旋极子分别贡献一个涡旋而重组成为一个新的涡旋极子; 新组的涡旋极子沿着 BEC 中心运动, 当到达最小半径 $R_{\min}$ 处后原路返回, 并在到达 BEC 边界后很快湮灭. 剩下的 4 对涡旋极子可以在 BEC 中保持非常的寿命, 并以某种规律做周期性运动, 如图 4 所示.

当没有形变扰动时, 尽管开始的环状暗孤子衰变可能产生很多的涡旋极子 (4 的整数倍), 但最终只剩 4 对涡旋极子可以长时间稳定存在^[44]. 当存在形变扰动时, 环状暗孤子衰变最终生成的 4 对涡旋极子, 表现出跟没有形变扰动时完全不同的运动规律. 当没有形变扰动时, 四对涡旋极子的运动是同步的, 四组涡旋极子会在同一时刻发生重组, 并且每个涡旋都沿着 $1/8$ 的扇形边界做周期性往复运动^[44]. 当存在形变扰动时, 四对涡旋极子分为运动不同步的两组, 当其中一组发生重组时, 另外一组尚未发生重组, 两组涡旋极子中的涡旋以相同的规律分别沿着 $1/4$ 圆的扇形边界做周期性往复运动, 如图 4 所示.

当两分量 BEC 中的环状暗孤子具有不相等的初始深度时, 例如假设 $\cos \phi_1(0) = 0.6$, $\cos \phi_2(0) = 0.75$, 根据经验我们期待较深的环状暗孤子将衰变出更多数目的涡旋. 事实上, 在环状暗孤子发生衰变的初期确实观察到了两个组分中环状暗孤子不同的衰变行为, 如图 5(b) 所示. 但由于两个组分之间的耦合作用, 较深的环状暗孤子衰变成涡旋的数目被抑制, 最终导致衰变产生的涡旋数目跟 $\cos \phi_1(0) = \cos \phi_2(0) = 0.6$ 时相同, 如图 5(c) 所示. 由于初始衰变行为的不同, 本来两个分量的涡旋运动应该是不同步的, 但数值模拟结果显示, 两个分量的涡旋会在产生后很短的时间内趋于同步, 如图 5(c)—图 5(g) 所示, 这可以理解为两分量之间原子相互碰撞耦合的结果.

两分量 BEC 中环状暗孤子衰变成涡旋后的动力学行为跟单分量情况相比还有一个明显的不同是涡旋在沿着扇形轨迹运动的同时, 还伴随着进动现象^[86,87]. 这是由于来自两个分量的涡旋一般是不相互重合的, 一个分量的涡旋核总是被另一个分量的原子填充, 形成所谓的半量子化涡旋^[20,88]. 由于在同一位置附近, 来自两个分量的涡旋具有相同的旋转方向, 在分量间原子的碰撞耦合作用下, 它们

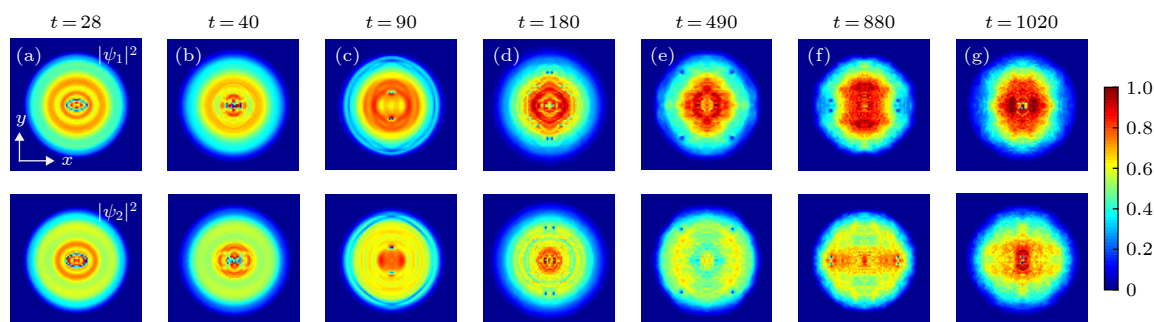


图5 两分量 BEC 中不同深度环状暗孤子的衰变行为 [86]

Fig. 5. Decay of the ring dark solitons with different depths in two-component BECs.

将绕着两个涡旋的中间位置 (即质心处) 沿涡旋自转的同一方向作进动.

4.2 环状暗孤子衰变与斑图形成

斑图 (pattern) 是指空间上具有某种规律性的非均匀分布. 在自然界中, 虽然不同系统所显示的斑图结构无论从时空尺度还是从形成机制等方面都各不相同, 但他们在形态上都有一定的相似性. 斑图动力学就是研究自然界中千变万化的斑图结构的生长与形成、竞争与选择、渐变与突变等的共性规律. 斑图动力学作为非线性科学的一个重要研究方向 [81], 目前已经深入到非常广泛的研究领域, 例如光学 [89]、流体力学 [90]、等离子体物理 [91] 以及材料科学 [92] 等. BEC 作为一种非线性多体系统, 为研究斑图动力学提供了高度可控的优越平台 [93].

可以借助环状暗孤子衰变引起的自发对称性破缺, 通过周期性调控系统的非线性强度, 来实现各种有规律的斑图结构. 考虑两分量的 BEC, 并假设可以通过 Feshbach 共振等技术周期性调控原子间的相互作用. 特别地, 固定组分内部的相互作用强度, 而周期性地改变组分之间的相互作用强度.

此时, 非线性薛定谔方程组 (13) 式和 (14) 式中的非线性系数可表示为 $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 1 - \sin \omega t$. 考虑方程 (15) 式和 (16) 式描述的环状暗孤子, 并假设偏心率 $e_c = 0$. 当谐振子频率 $\Omega = 0.028$, 相互作用的周期调制频率跟谐振子发生共振, 即 $\omega = \Omega$, 初始时刻环状暗孤子深度 $\cos \phi_1(0) = \cos \phi_2(0) = 1$, 半径为 $R_{10} = 27.9$ 和 $R_{20} = 28.9$ 时, 环状暗孤子的衰变行为如图 6 和图 7 所示 [94].

最初环状暗孤子沿着径向做周期性振荡, 并诱导了大量较浅的环状暗孤子. 随着时间的演化, BEC 边缘的环状暗孤子首先遭受蛇形不稳定, 衰变为八角形结构, 如图 6(d) 所示. 这种环状暗孤子的不稳定性逐渐从 BEC 边缘进入到 BEC 内部, 最终在整个 BEC 中形成了随时间不断变化的斑图结构, 如图 6(e)、图 6(f) 和图 7 所示.

在两分量 BEC 中, 两分量的原子是相分离还是相混合一般由原子间相互作用强度决定 [95–98]. 对于不随时间变化的原子间相互作用, 当 $g_{12}^2 < g_{11}g_{22}$ 时, 系统表现为相混合, 此时两分量中的原子密度分布在空间上是相互重叠的; 当 $g_{12}^2 > g_{11}g_{22}$

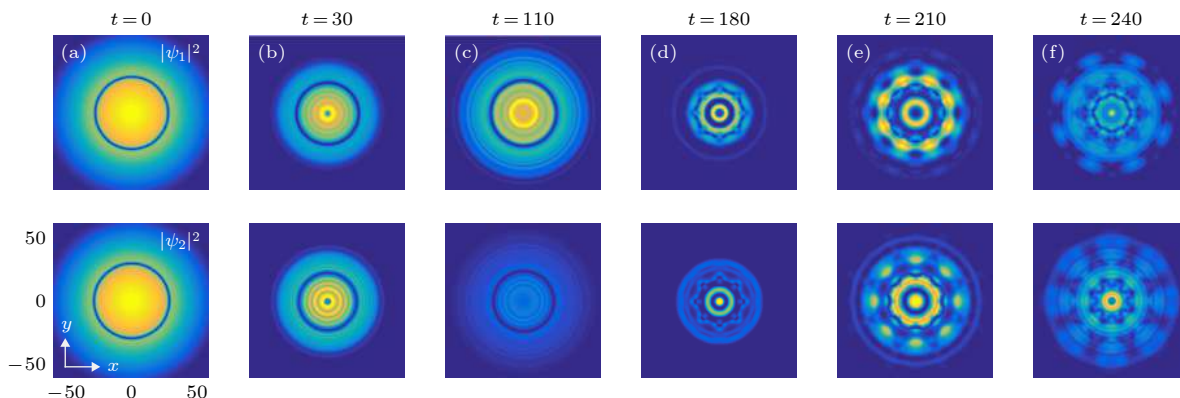


图6 周期调制相互作用系统中环状暗孤子衰变引起的斑图形成 [94]

Fig. 6. Pattern formation induced by the decay of ring dark solitons in a system with periodically modulated interactions.

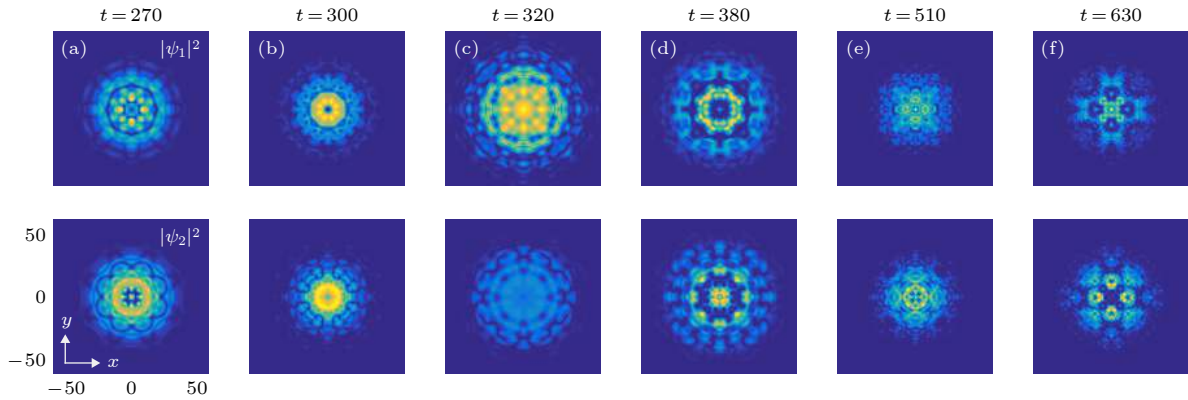
图 7 斑图在周期调制相互作用系统中的演化^[94]

Fig. 7. Evolution of the pattern in a system with periodically modulated interactions.

时, 系统表现为相分离, 此时两分量中的原子密度分布在空间上是相互填充的. 当前考虑的系统相互作用 g_{12} 是在 0—2 之间随时间周期性变化的, 既不满足 $g_{12}^2 > g_{11}g_{22}$ 又不满足 $g_{12}^2 < g_{11}g_{22}$. 数值模拟结果表明: 在该条件下系统倾向于相分离, 两个分量的原子相互在对方的低密度区域填充, 如图 6(d)—图 6(f) 和图 7 所示.

需要特别强调的是, 斑图的形成跟系统的对称性破缺有密切联系. 图 6 和图 7 中斑图的形成依赖于环状暗孤子的自发旋转对称性破缺. 但是单纯依靠环状暗孤子的自发破缺只能得到有限数目的涡旋极子, 并不能得到斑图结构. 周期调制的非线性在斑图形成过程中同样扮演了重要角色. 此外, 由于 BEC 具有多参数、高度可控的特点, 利用环状暗孤子的自发对称性破缺性质, 结合对 BEC 其他相关参数的调控, 模拟量子体系中各种样式的斑图形成是一个非常有益的工作.

5 总结与展望

环状暗孤子作为一种非线性激发跟涡旋、斑图等非线性现象具有密切的联系, 环状暗孤子衰变过程中导致的各类涡旋极子动力学以及斑图形成等正在引起非线性科学研究的广泛关注. 玻色-爱因斯坦凝聚作为一种高度可调控的非线性系统, 为研究环状暗孤子及其相关动力学提供了优越平台. 最近, 超冷原子玻色-爱因斯坦凝聚领域取得了一些新的理论和实验进展, 其中包括人造规范势^[56]、自旋轨道耦合^[99]、量子液体^[100]等. 这些进展也正在促进孤子研究的突破^[101], 例如理论上已经预言自旋轨道耦合可以用于稳定高维孤子^[102,103]. 人造规

范势尤其是非阿贝尔规范势在超冷原子气体中的实验实现^[21], 为研究和发现新的量子流体动力学开辟了道路. 在不同规范势作用下, 环状暗孤子可能表现出各种新奇的动力学行为. 与此同时, 通过设计合适的规范势来增强环状暗孤子的稳定性也是一个非常有益的工作. 本文讨论了环状暗孤子衰变导致的涡旋及其运动规律, 最近的研究表明自旋轨道耦合也可以在超冷原子系统中诱导出各种丰富的涡旋结构^[57,93,104–109]. 因而在自旋轨道耦合作用下, 环状暗孤子的衰变行为将发生明显变化, 可能产生新的涡旋结构和非传统的涡旋运动规律. 量子液体跟量子气体相比, 一个明显的不同是原子数密度发生了急剧增大^[100]. 急剧增大的原子数密度可能对环状暗孤子的稳定性以及衰变动力学产生重要影响. 在这些全新的非线性量子多体系统中, 借助新的实验技术研究环状暗孤子的运动规律、稳定性以及相关的衰变动力学将是一个重要的研究课题.

参考文献

- [1] Zabusky N J, Kruskal M D 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 240
- [2] Kartashov Y V, Malomed B A, Torner L 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 247
- [3] Kivshar Y S, Malomed B A 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 763
- [4] Fan S T, Zhang Y Y, Yan L L, Guo W G, Zhang S G, Jiang H F 2019 *Chin. Phys. B* **28** 064204
- [5] Zhao L C, Yang Z Y, Yang W L 2019 *Chin. Phys. B* **28** 010501
- [6] Shou Q, Liu D W, Zhang X, Hu W, Guo Q 2014 *Chin. Phys. B* **23** 084204
- [7] Lei Y, Lou S Y 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 060202
- [8] Li Q Y, Zhao F, He P B, Li Z D 2015 *Chin. Phys. B* **24** 037508
- [9] Qi W, Li H F, Liang Z X 2019 *Chin. Phys. Lett.* **36** 040501
- [10] Lai X J, Cai X O, Zhang J F 2015 *Chin. Phys. B* **24** 070503

- [11] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [12] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [13] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687
- [14] Bradley C C, Sackett C A, Hulet R G 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 985
- [15] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [16] Leggett A J 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 307
- [17] Morsch O, Oberthaler M 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 179
- [18] Fetter A L 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 647
- [19] Chin C, Grimm R, Julienne P, Tiesinga E 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1225
- [20] Stamper-Kurn D M, Ueda M 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1191
- [21] Goldman N, Juzeliūnas G, Öhberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [22] Balakrishnan R, Satija I I 2011 *Pramana J. Phys.* **77** 929
- [23] Carretero-González R, Frantzeskakis D J, Kevrekidis P G 2008 *Nonlinearity* **21** R139
- [24] Frantzeskakis D J 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 213001
- [25] Kevrekidis P G, Frantzeskakis D J, Carretero-González R 2008 *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates: Theory and Experiment* (Berlin: Springer Press)
- [26] Ruprecht P A, Holland M J, Burnett K, Edwards M 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4704
- [27] Denschlag J, Simsarian J E, Feder D L, Clark C W, Collins L A, Cubizolles J, Deng L, Hagley E W, Helmerson K, Reinhardt W P, Rolston S L, Schneider B I, Phillips W D 2000 *Science* **287** 97
- [28] Sanpera A, Shlyapnikov G V, Lewenstein M 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198
- [29] Tiesinga E, Verhaar B J, Stoof H T C 1993 *Phys. Rev. A* **47** 4114
- [30] Inouye S, Andrews M R, Stenger J, Miesner H J, Stamper-Kurn D M, Ketterle W 1998 *Nature* **392** 151
- [31] Strecker K E, Partridge G B, Truscott A G, Hulet R G 2002 *Nature* **417** 150
- [32] Khaykovich L, Schreck F, Ferrari G, Bourdel T, Cubizolles J, Carr L D, Castin Y, Salomon C 2002 *Science* **296** 1290
- [33] Cornish S L, Thompson S T, Wieman C E 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 170401
- [34] Malomed B A 2016 *Eur. Phys. J. Special Topics* **225** 2507
- [35] Kivshar Y S, Luther-Davies B 1998 *Phys. Rep.* **298** 81
- [36] Reinhardt W P, Clark C W 1997 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **30** L785
- [37] Feder D L, Pindzola M S, Collins L A, Schneider B I, Clark C W 2000 *Phys. Rev. A* **62** 053606
- [38] Brand J, Reinhardt W P 2002 *Phys. Rev. A* **65** 043612
- [39] Huang G, Makarov V A, Velarde M G 2003 *Phys. Rev. A* **67** 023604
- [40] Dutton Z, Budde M, Slowe C, Hau L V 2001 *Science* **293** 663
- [41] Anderson B P, Haljan P C, Regal C A, Feder D L, Collins L A, Clark C W, Cornell E A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2926
- [42] Tikhonenko V, Christou J, Luther-Davies B, Kivshar Y S 1996 *Opt. Lett.* **21** 1129
- [43] Kuznetsov E, Turitsyn S 1998 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **94** 119
- [44] Theocharis G, Frantzeskakis D J, Kevrekidis P G, Malomed B A, Kivshar Y S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 120403
- [45] Kivshar Y S, Yang X 1994 *Phys. Rev. E* **50** R40
- [46] Kivshar Y S, Yang X 1994 *Chaos, Solitons Fractals* **4** 1745
- [47] Balushev S, Dreischuh A, Velchev I, Dinev S, Marazov O 1995 *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **61** 121
- [48] Balushev S, Dreischuh A, Velchev I, Dinev S, Marazov O 1995 *Phys. Rev. E* **52** 5517
- [49] Yang S J, Wu Q S, Zhang S N, Feng S, Guo W, Wen Y C, Yu Y 2007 *Phys. Rev. A* **76** 063606
- [50] Yang S J, Wu Q S, Feng S, Wen Y C, Yu Y 2008 *Phys. Rev. A* **77** 035602
- [51] Hu X H, Zhang X F, Zhao D, Luo H G, Liu W M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 023619
- [52] Barenghi C F, Donnelly R J, Vinen W F 2001 *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence* (Berlin: Springer Press)
- [53] Halperin W P, Tsubota M 2009 *Progress in Low Temperature Physics: Quantum Turbulence* (Amsterdam: Elsevier Press)
- [54] Kusumura T, Tsubota M, Takeuchi H 2012 *J. Phys. Conf. Ser.* **400** 012038
- [55] Khamenechi M A, Hossain K, Mossman M E, Zhang Y, Busch T, Forbes M M, Engels P 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 155301
- [56] Dalibard J, Gerbier F, Juzeliūnas G, Öhberg P 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1523
- [57] Han W, Zhang X F, Song S W, Saito H, Zhang W, Liu W M, Zhang S G 2016 *Phys. Rev. A* **94** 033629
- [58] Fedichev P O, Kagan Y, Shlyapnikov G V, Walraven J T M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2913
- [59] Theis M, Thalhammer G, Winkler K, Hellwig M, Ruff G, Grimm R, Denschlag J H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 123001
- [60] Olshanii M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 938
- [61] Haller E, Gustavsson M, Mark M J, Danzl J G, Hart R, Pupillo G, Nägerl H C 2009 *Science* **325** 1224
- [62] Zhang R, Cheng Y, Zhai H, Zhang P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 135301
- [63] Pagano G, Mancini M, Cappellini G, Livi L, Sias C, Catani J, Inguscio M, Fallani L 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 265301
- [64] Claussen N R, Donley E A, Thompson S T, Wieman C E 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 010401
- [65] Kevrekidis P G, Theocharis G, Frantzeskakis D J, Malomed B A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 230401
- [66] Greiner M, Regal C A, Jin D S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 070403
- [67] Yamazaki R, Taie S, Sugawa S, Takahashi Y 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 050405
- [68] Qi R, Zhai H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 163201
- [69] Infeld E, Rowlands G 1990 *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [70] Hirota R 1979 *J. Phys. Soc. Jpn.* **46** 1681
- [71] Nakamura A 1980 *J. Phys. Soc. Jpn.* **49** 2380
- [72] Nakamura A, Chen H H 1981 *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** 711
- [73] Johnson R S 1999 *Wave Motion* **30** 1
- [74] Ko K, Kuehl H 1979 *Phys. Fluids* **22** 1343
- [75] Malomed B A 2006 *Soliton Management in Periodic Systems* (Berlin: Springer Press)
- [76] Pelinovsky D E, Kevrekidis P G, Frantzeskakis D J, Zharnitsky V 2004 *Phys. Rev. E* **70** 047604
- [77] Kevrekidis P G, Pelinovsky D E, Stefanov A 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 479
- [78] Saito H, Ueda M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 040403
- [79] Abdullaev F K, Caputo J G, Kraenkel R A, Malomed B A 2003 *Phys. Rev. A* **67** 013605
- [80] Liang Z X, Zhang Z D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 050402
- [81] Cross M C, Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851

- [82] Abid M, Huepe C, Metens S, Nore C, Pham C T, Tuckerman L S, Brachet M E 2003 *Fluid Dyn. Res.* **33** 509
- [83] Cuypers Y, Maurel A, Petitjeans P 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 194502
- [84] Yang T, Hu Z Q, Zou S, Liu W M 2016 *Sci. Rep.* **6** 29066
- [85] Busch T, Anglin J R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 010401
- [86] Wang L X, Dai C Q, Wen L, Liu T, Jiang H F, Saito H, Zhang S G, Zhang X F 2018 *Phys. Rev. A* **97** 063607
- [87] See Supplemental Material of Ref.[86] at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevA.97.063607> for movies of the vortex dipole dynamics.
- [88] Kawaguchi Y, Ueda M 2012 *Phys. Rep.* **520** 253
- [89] Arecchi F T, Boccaletti S, Ramazza P 1999 *Phys. Rep.* **318** 1
- [90] Seiden G, Thomas P J 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1323
- [91] Schwabe M, Konopka U, Bandyopadhyay P, Morfill G E 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 215004
- [92] Langer J S 1980 *Rev. Mod. Phys.* **52** 1
- [93] Xu Z F, Lü R, You L 2011 *Phys. Rev. A* **83** 053602
- [94] He Z M, Wen L, Wang Y J, Chen G P, Tan R B, Dai C Q, Zhang X F 2019 *Phys. Rev. E* **99** 062216
- [95] Pethick C J, Smith H 2008 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [96] Pitaevskii L, Stringari S 2003 *Bose-Einstein Condensation* (New York: Oxford University Press)
- [97] Thalhammer G, Barontini G, Sarlo L D, Catani J, Minardi F, Inguscio M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 210402
- [98] Papp S B, Pino J M, Wieman C E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 040402
- [99] Galitski V, Spielman I B 2013 *Nature* **494** 49
- [100] Ferrier-Barbut I, Pfau T 2018 *Science* **359** 274
- [101] Kartashov Y V, Astrakharchik G E, Malomed B A, Torner L 2019 *Nat. Rev. Phys.* **1** 185
- [102] Sakaguchi H, Li B, Malomed B A 2014 *Phys. Rev. E* **89** 032920
- [103] Zhang Y C, Zhou Z W, Malomed B A, Pu H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 253902
- [104] Wu C J, Ian M S, Zhou X F 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 097102
- [105] Wang C, Gao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [106] Sinha S, Nath R, Santos L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 270401
- [107] Hu H, Ramachandran B, Pu H, Liu X J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 010402
- [108] Xu Z F, Kawaguchi Y, You L, Ueda M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 033628
- [109] Xu Z F, Kobayashi S, Ueda M 2013 *Phys. Rev. A* **88** 013621

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Dynamics of ring dark solitons in Bose-Einstein condensates^{*}

Guo Hui¹⁾²⁾ Wang Ya-Jun¹⁾²⁾ Wang Lin-Xue³⁾ Zhang Xiao-Fei^{1)2)†}

1) (*Key Laboratory of Time and Frequency Primary Standards, National Time Service Center,*

Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China)

2) (*School of Astronomy and Space Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

3) (*Department of Arts and Sciences, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China*)

(Received 18 September 2019; revised manuscript received 29 October 2019)

Abstract

Soliton is an exotic topological excitation, and it widely exists in various nonlinear systems, such as nonlinear optics, Bose-Einstein condensates, classical and quantum fluids, plasma, magnetic materials, etc. A stable soliton can propagate with constant amplitude and velocity, and maintain its shape. Two-dimensional and three-dimensional solitons are usually hard to stabilize, and how to realize stable two-dimensional or three-dimensional solitons has aroused the great interest of the researchers. Ring dark soliton is a kind of two-dimensional soliton, which was first theoretically predicted and experimentally realized in nonlinear optical systems. Compared with the usual two-dimensional solitons, ring dark solitons have good stability and rich dynamical behaviors. Owing to their highly controllable capability, Bose-Einstein condensates provide a new platform for studying the ring dark solitons. Based on the recent progress in Bose-Einstein condensates and solitons, this paper reviews the research on the analytic solutions, stability, as well as the decay dynamics of ring dark solitons in Bose-Einstein condensates. A transform method is introduced, which generalizes the analytic solutions of ring dark solitons from a homogeneous system with time-independent nonlinearity to a harmonically trapped inhomogeneous system with time-dependent nonlinearity. The stability phase diagram of the ring dark soliton under deformation perturbations is discussed by numerically solving the Gross-Pitaevskii equations in the mean-field theory. A method of enhancing the stability of ring dark solitons by periodically modulating the nonlinear coefficients is introduced. It is also shown that the periodically modulated nonlinear coefficient can be experimentally realized by the Feshbach resonance technology. In addition, we discuss the dynamics of the decay of ring dark solitons. It is found that the ring dark soliton can decay into various vortex clusters composed of vortices and antivortices. This opens a new avenue to the investigation of vortex dynamics and quantum turbulence. It is also found that the ring dark solitons combined with periodic modulated nonlinearity can give rise to the pattern formation, which is an interesting nonlinear phenomenon widely explored in all the fields of nature. Finally, some possible research subjects about ring dark solitons in future research are also discussed.

Keywords: Bose-Einstein condensation, ring dark soliton, vortex dipole, pattern formation

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Kk, 67.85.De, 67.25.dk

DOI: 10.7498/aps.69.20191424

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11775253, 11704383) and the Natural Science Basic Research Plan of Shaanxi Province, China (Grant No. 2019JQ-058).

[†] Corresponding author. E-mail: xfzhang@ntsc.ac.cn

基本非线性波与调制不稳定性的精确对应

段亮 刘冲 赵立臣 杨战营

Quantitative relations between fundamental nonlinear waves and modulation instability

Duan Liang Liu Chong Zhao Li-Chen Yang Zhan-Ying

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010501 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191385

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191385>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

正三角型三芯光纤中等腰对称平面波的调制不稳定性分析

Modulation instabilities in equilateral three-core optical fibers for isosceles-triangle symmetric continuous waves

物理学报. 2018, 67(5): 054203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171650>

可压流体Rayleigh–Taylor不稳定性的离散Boltzmann模拟

Discrete Boltzmann simulation of Rayleigh–Taylor instability in compressible flows

物理学报. 2018, 67(8): 080501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171952>

声场中空化气泡的耦合振动及形状不稳定性的研究

Coupled oscillation and shape instability of bubbles in acoustic field

物理学报. 2018, 67(3): 034301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171573>

经典瑞利–泰勒不稳定性界面变形演化的改进型薄层模型

Improved thin layer model of classical Rayleigh–Taylor instability for the deformation of interface

物理学报. 2018, 67(9): 094701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172613>

不同磁场构型下Richtmyer–Meshkov不稳定性的数值研究及动态模态分解

Numerical investigations of Richtmyer–Meshkov instability in different magnetic field configurations and the corresponding dynamic mode decomposition

物理学报. 2019, 68(16): 165201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190410>

Weibel不稳定性自生电磁场对探针质子束的偏转作用研究

Deflection effect of electromagnetic field generated by Weibel instability on proton probe

物理学报. 2019, 68(18): 185205 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190775>

专题：非线性物理

基本非线性波与调制不稳定性的精确对应*

段亮¹⁾²⁾ 刘冲¹⁾²⁾ 赵立臣¹⁾²⁾ 杨战营^{1)2)†}

1) (西北大学物理学院, 西安 710127)

2) (陕西省理论物理前沿重点实验室, 西安 710069)

(2019 年 9 月 12 日收到; 2019 年 10 月 31 日收到修改稿)

非线性波作为非线性动力学研究中的重要课题之一, 普遍存在于各种复杂物理系统中. 理解非线性波的产生机制、确定它们的激发条件对于非线性波的实验实现、动力学特征的探测和应用是至关重要的. 本文简要综述了近年来非线性波的实验和理论研究进展, 回顾了非线性波的产生机制. 基于非线性可积模型中的严格解和线性稳定分析结果, 系统讨论了如何建立基本非线性波与调制不稳定性的精确对应关系. 详细介绍了近来发现的扰动能量和相对相位在确定非线性波激发条件中的重要作用, 并提议了一组能够确定非线性波激发条件的完备参数. 基于完备的激发参数, 给出了多种基本非线性波的激发条件和相图. 这些结果有望用于实现多种局域波的可控激发, 并可以推广到更多非线性系统中的激发相图研究.

关键词: 非线性波, 调制不稳定性, 产生机制, 激发条件**PACS:** 05.45.-a, 42.65.Tg, 47.20.Ky, 47.35.Fg**DOI:** 10.7498/aps.69.20191385

1 引言

非线性波是出现在非线性系统中的一类典型的激发结构^[1,2], 它们广泛存在于许多物理系统中, 如水流体^[3-5]、非线性光学^[6-21]、等离子体^[22,23]、原子束^[24,25]、玻色-爱因斯坦凝聚体^[26-38]、毛细管^[39]、铁磁链^[40-44]、金融系统^[45-47]、超材料^[48,49]、光力学^[50]、PT 对称系统^[51,52]等. 并且, 这些非线性波在很多领域都具有潜在的应用价值, 例如孤子干涉仪^[53-56]、超连续谱的产生^[57]、光频梳的产生^[58]、介观贝尔态的制备^[59]、高功率脉冲的制备^[60,61]、利用孤子的抖动效应测量量子阱本征值^[62]等. 目前, 非线性波动力学的研究已经成为非线性物理科学中的一个重要的课题.

对于 1+1 维的可积系统而言, 目前已经发现的非线性波主要有四类, 分别是孤子、怪波、呼吸

子和周期波. 孤子是一种在演化过程中保持形状不变的稳定局域化结构, 除了最早由 Russell 发现的亮孤子之外, 后来人们也得到了许多不同结构孤子激发, 包括暗孤子^[63-65]、反暗孤子^[66,67]、W 形孤子^[68-71]和多峰孤子^[72,73]. 此外也发现了一些呈周期分布并稳定演化的非线性波, 包括周期波和 W 形孤子链^[72-74]. 除了稳定演化的结构之外还有几类振幅随着演化变化的非线性波包括怪波^[75]、Akhmediev 呼吸子^[76]、Kuznetsov-Ma 呼吸子^[77,78]和 Tajiri-Watanabe 呼吸子^[79](也被称为一般呼吸子^[80,81]或动态呼吸子^[82]). 最近的研究表明呼吸子碰撞也表现出诸多有趣的性质, 例如 super-regular 呼吸子^[83-89]、呼吸子分子^[90]、类棋盘干涉斑图^[91]等. 近期, 怪波的激发结构和产生机制也被广泛讨论^[92-108], 常见的怪波激发结构有眼状、反眼状、四花瓣、以及扭曲的双峰怪波等. 不同结构的怪波之间还可以通过调节背景频率或矢量场之间的相对振幅实现相互转换^[98]. 调制不稳定性可

* 国家自然科学基金 (批准号: 11875220, 11775176) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zyyang@nwu.edu.cn

以用来定性理解怪波、呼吸子激发的产生, 近期人们进一步提议了一些更具体的激发机制来解释怪波的产生机制, 如调制不稳定区的共振激发^[109]或基带调制不稳定性^[110]. 这些更具体的激发机制理解可以用来基于线性稳定性分析初步判断非线性系统中是否存在怪波激发. 高阶效应对怪波激发的影响也被广泛讨论^[111–115]. 人们还进一步提议了基于呼吸子的碰撞可以激发高阶怪波^[116–118].

这些非线性波中亮孤子和暗孤子已经有了大量的实验和理论研究并且已经有了广泛的应用. 然而怪波、呼吸子、平面波背景上的孤子和周期波等平面波背景上的非线性波从上个世纪 70 年代开始就陆续被给出. 但是这些非线性波长期以来一直没有被实验上精确地观测到, 相应的激发条件也不清楚. 直到近年来, Kibler 等^[11,14]和 Dudley 等^[12]分析了非线性薛定谔方程的 Akhmediev 呼吸子解、怪波解和 Kuznetsov-Ma 呼吸子解, 发现这几种非线性波的激发由扰动频率和扰动强度决定, 并给出了它们的激发条件. 根据理论分析给出的激发条件, 他们通过输入满足相应条件的初态在实验上分别实现了这几种非线性波的激发. 实验结果与这几种非线性波解析解所描述的结构符合得非常好. 目前平面波背景上的基本非线性波除了几种呼吸子和怪波, 其他非线性波例如反暗孤子、W 形孤子、多峰孤子、周期波和 W 孤子链等都没有被实验实现, 并且决定它们激发的物理参数以及相应激发条件仍然不清楚. 怪波和呼吸子相关实验结果说明非线性方程的解析解描述了非线性系统中一类基本的动力学过程. 通过分析不同的非线性波解可以得到决定不同非线性激发的参数和相应激发条件, 从而用满足相应条件的非理想简单形式的初态分布进行演化, 就可以得到对应的非线性波结构. 非线性波实验实现对非线性波现象的深入理解、非线性波动力学性质的探测和应用是非常重要的. 除了通过分析非线性波解析解得到非线性波的激发调制之外, 还可以分析非线性波的产生机制, 即分析不同非线性波的产生原因, 理解了非线性波的产生机制后自然就可以知道决定非线性波激发的参数以及相应的激发条件. 因此本文主要介绍关于基本非线性波的产生机制及其与调制不稳定性的对应关系的相关研究, 并重点讨论能够确定非线性波激发条件的完备物理参数并给出基本非线性波的激发条件及相图. 这些结果将在很大程度上促进对

多种非线性波实验观测.

2 非线性波的产生机制及其在背景频率和扰动频率空间的相图

目前普遍认为平面波背景上的非线性波的激发依赖于系统的调制不稳定性^[12,76]. 调制不稳定性反应的是连续波背景上的扰动随着演化的增长特征^[119]. 在非线性光学中, 调制不稳定性在时域上表现的是弱扰动的增长与放大, 在频域中调制不稳定性演化的初始阶段反应的是频谱旁带的产生并经历指数形式的增长, 能量从泵浦转移到旁带, 而随后呈现出泵浦和多个旁带之间的循环能量交换等复杂行为^[120,121]. 最近的研究也已经证实调制不稳定性可以用来理解连续波背景上的非线性波的动力学, 如 Peregrine 怪波、Akhmediev 呼吸子、Kuznetsov-Ma 呼吸子甚至是高阶怪波的动力学特征. 分析系统的调制不稳定性特征通常采用线性稳定性分析的方法. 下面以非线性薛定谔方程为例简单介绍线性稳定性分析的主要步骤. 首先标准非线性薛定谔方程形式如下

$$i\psi_z + \frac{1}{2}\psi_{tt} + |\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

参数 z 和 t 分别表示归一化的距离和时间, $|\psi|^2$ 表示光强. 方程 (1) 存在如下的平面波解 $\psi_0(t, z) = ae^{i\theta(t, z)}$, 其中 $\theta(t, z) = kz + \omega t$, 这里 a 和 ω 分别表示平面波的振幅和频率, $k = a^2 - 1/2\omega^2$ 是平面波的波数. 考虑对平面波解增加一个小扰动 $p(t, z)$, 即 $\psi(t, z) = [a + p(t, z)]e^{i\theta(t, z)}$. 将该式代入非线性薛定谔方程 (1), 略去关于 $p(t, z)$ 的高次项, 并取扰动 $p(t, z)$ 的最低阶傅里叶模式, $p(t, z) = f_+e^{i(Kz + \Omega t)} + f_-e^{-i(Kz + \Omega t)}$. 这里 K 和 Ω 分别表示扰动的波数和频率, 值得注意的是扰动后的波函数 $\psi(t, z)$ 中因子 $e^{i\theta(t, z)}$ 已经提取出来, 实际的扰动形式应该是 $p(t, z)e^{i\theta} = p(t, z)e^{i(kz + \omega t)}$, 因此实际的扰动波数和扰动频率分别是 $k \pm K$ 和 $\omega \pm \Omega$, 为了方便我们仍然将 K 和 Ω 称为扰动波数和扰动频率. f_+ 和 f_- 是傅里叶模式的振幅, 并且 f_+ 和 f_- 远小于背景振幅 a . 经过简单计算可以得到扰动 $p(t, z)$ 的波数 K 和频率 Ω 之间的色散关系: $K = -\omega\Omega \pm |\Omega|\sqrt{\Omega^2 - 4a^2}$. 从色散关系可以看出, 对于 $|\Omega| \geq 2a$, 波数 K 都是实数, 此时平面波在微扰下是稳定的. 而 K 在 $|\Omega| < 2a$ 时变为复数, 此时扰动 $p(t, z)$ 随着演化指

数增长,也就是说平面波在扰动频率 $-2a < \Omega < 2a$ 时是不稳定的. 波数 K 的虚部决定了增长的快慢,因此可以定义调制不稳定性增益为

$$G = |\text{Im}(K)| = |\Omega| \sqrt{4a^2 - \Omega^2}. \quad (2)$$

值得注意的是,在色散关系中,波数 K 的虚部来自于根式 $\sqrt{\Omega^2 - 4a^2}$,当扰动频率 $\Omega = 0$ 时,根式 $\sqrt{\Omega^2 - 4a^2}$ 仍然是个虚数,只是在根式前的系数 $|\Omega| = 0$ 导致波数 K 的虚部为零. 此时 K 的虚部并不能真实反应系统的调制不稳定性特征. $\Omega = 0$ 时,调制不稳定特征需要单独求解. 对于 $\Omega = 0$,其扰动可以写为^[122]: $\psi(t, z) = [a + \epsilon \tilde{p}(z)]e^{i\theta(t, z)}$. 这里 ϵ 为实常数并且 $\epsilon \ll 1$. 由于扰动频率为零,因此 $\tilde{p}(z)$ 不含有变量 t . 将该扰动形式代入到非线性薛定谔方程 (1) 中,并略去 ϵ 的二次及二次以上项,然后求解方程可以得到 $\tilde{p} = 1 + 2ia^2 z$. 此时调制不稳定性增益可以定义为

$$G = |\text{Im}(\tilde{p})| = 2a. \quad (3)$$

另外需要注意的是,分析系统调制不稳定性的方法——线性稳定性分析中为了能够将扰动满足的方程线性化要求扰动的振幅远小于平面波背景的振幅,因此该方法不适用于大振幅扰动的演化特征分析. 对于小扰动,初始扰动振幅较小,随着演化呈现指数形式的增长. 当扰动振幅和背景振幅大小相当的时候,扰动将进入非线性演化阶段,此时线性稳定性分析方法不再适用. 系统非线性将对扰动演化起到主导作用使得扰动不能持续增长. 虽然线性稳定性分析方法只能反应弱扰动的增长特征,但是其很好地反应系统中连续波背景上扰动演化的稳定性特征,可以很好地揭示怪波和呼吸子的动力学行为.

最近 Baronio 等^[100] 基于两组分耦合非线性薛定谔方程讨论了怪波激发与调制不稳定性之间的对应关系. 通过标准的线性稳定性分析方法,得到系统调制不稳定增益分布如图 1 所示. 图中彩色区域对应于调制不稳定区,白色区域是调制不稳定性增益为零的区域,即调制稳定区. 图 1(a) 和图 1(b) 分别是调制不稳定性在扰动频率 Ω 和相对背景频率 ω 空间以及扰动频率 Ω 和背景振幅 a_1 空间的分布图. Baronio 等^[100] 将调制不稳定区域分为基频带调制不稳定区和通频带调制不稳定区,其中基频带调制不稳定区定义为从扰动频率 $\Omega = 0$ 处开始的调制不稳定区 (图 1(a) 和图 1(b) 中黑色虚线以

下的彩色区域),而通频带定义为起始于非零扰动频率处的调制不稳定区域 (图 1(a) 和图 1(b) 中黑色虚线以上的彩色区域). 通过分析耦合非线性薛定谔方程的怪波解的激发特征,发现调制不稳定性只是怪波激发的必要不充分条件. 也就是说,有调制不稳定性不一定能够激发怪波,而有怪波激发系统一定有调制不稳定性. 进一步他们证实怪波激发的充要条件是系统调制不稳定性有基频带,并且怪波激发在基频带中扰动频率 Ω 趋于零的位置. 随后该小组将相关的结果推广到 Fokas-Lenells 系统和长短波共振系统都证实了同样的结论^[110,111,112]. 这些结果是关于怪波激发与调制不稳定性关系研究的一个重要突破,然而这些结果中仍然存在一些问题没有被解决,例如: 1) 他们仅仅给出了怪波激发与基频带调制不稳定性的关系,而怪波产生的根本原因没有给出解释; 2) 他们得到的基带调制不稳定区中零频扰动的增益为零,而相关研究结果展示怪波激发在基带调制不稳定区扰动频率趋于零的位置,这个结果似乎与调制不稳定性增益特征相矛盾; 3) 如果一个系统中仅仅在扰动频率 $\Omega = 0$ 处有调制不稳定性,而在 $\Omega = 0$ 的两侧区域都是调制稳定区时,则不能定义基频带,那么此时是否能够激

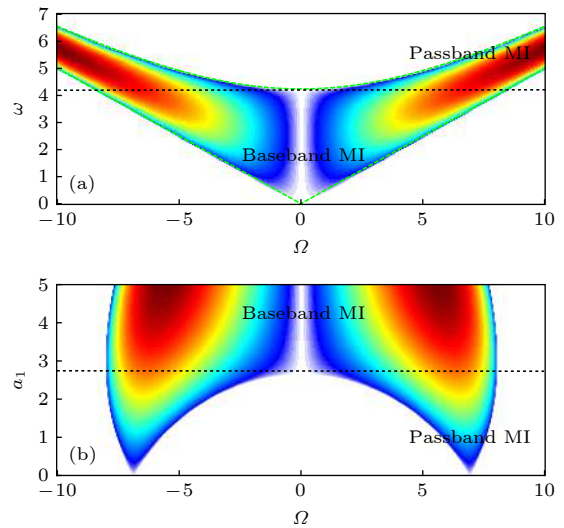


图 1 自散焦的两组分耦合非线性薛定谔系统的调制不稳定增益的分布 (a) 调制不稳定增益在 (Ω, ω) 平面的分布, 绿色点状曲线表示调制不稳定区的边界; (b) 调制不稳定性在 (Ω, a_1) 平面的分布

Fig. 1. Modulation instability distributions of the defocusing two component coupled nonlinear Schrödinger system: (a) Modulation instability distribution in the (Ω, ω) plane, green dot curves are the boundary of the modulation instability regime; (b) modulation instability distribution in the (Ω, a_1) plane.

发怪波,也是不能回答的;4)这些工作中都只分析了怪波与调制不稳定性的关系,而呼吸子等其他非线性波与调制不稳定性的对应关系仍然不清楚.

最近,我们通过系统分析标准非线性薛定谔系统中调制不稳定性的分布与平面波背景上的基本非线性波(Peregrine怪波、Akhmediev呼吸子和Kuznetsov-Ma呼吸子)的对应关系,建立了基本非线性激发与调制不稳定性增益分布之间的定量对应关系^[109].特别地,证实了怪波来自于平面波背景上调制不稳定区的共振扰动^[109].非线性薛定谔方程平面波背景上各种类型的非线性波解已经被广泛研究.所有的这些平面波上的解都可以写为平面波和扰动部分线性叠加的形式,即 $\psi = \psi_0 + \psi_p$. ψ_0 和 ψ_p 分别为平面波解和描述扰动演化动力学的部分.做线性稳定性分析时,平面波背景上加上扰动之后的形式 $\psi(t, z) = [a + p(t, z)]e^{i\theta(t, z)}$ 也是一个平面波 $a e^{i\theta}$ 和扰动 $p e^{i\theta}$ 的线性叠加.调制不稳定性反应的就是扰动 $p e^{i\theta}$ 演化的稳定性特征.因此可以通过调制不稳定性来理解平面波背景上非线性波的动力学特征.

在(3)式和(2)式中分别给出了扰动频率 $0 < |\Omega| < 2a$ 和 $\Omega = 0$ (共振扰动)时调制不稳定性增益 G 的表达式.从 G 的表达式可以看出,标准非线性薛定谔系统的调制不稳定性依赖于平面波背景振幅 a 和扰动频率 Ω .由于非线性薛定谔系统满足伽利略协变性,因此其增益不依赖于背景频率 ω .但是在其他的非线性系统中例如Hirota系统^[71,123]、Sasa-Satsuma系统^[74,124]、四阶非线性薛定谔系统^[125]和五阶非线性薛定谔系统^[126]等广义非线性薛定谔系统中,由于伽利略协变性被破坏,其调制不稳定性也依赖于背景频率 ω .文献^[109]是在背景振幅 a 和扰动频率 Ω 参数空间讨论非线性波与调制不稳定性对应关系的.然而考虑到非线性薛定谔方程(1)是无量纲化的模型,其背景振幅 a 只是一个相对值, a 的大小并不具有实际意义,并且为了和在其他模型中讨论非线性波与调制不稳定的形式一致,这里分别在 (a, Ω) 空间和 (ω, Ω) 空间讨论了两者的对应关系.

图2(a1)和图2(b1)中分别给出调制不稳定性增益 G 在背景频率 ω 和扰动频率 Ω 参数平面的分布(背景振幅取 $a = 1$)以及在背景振幅 a 和扰动频率 Ω 参数平面的分布(背景频率取 $\omega = 0$).从图

中可以看出在 (ω, Ω) 平面,调制不稳定性增益分布为带状结构,其范围为 $-2a < \Omega < 2a$ (图中 a 取1),由于满足伽利略协变性因此调制不稳定性增益在不同背景频率 ω 处的分布都相同.而在 (a, Ω) 平面,调制不稳定性增益分布区域为两个对称的三角区域,三角区域的范围仍然为 $-2a < \Omega < 2a$,在背景振幅 $a = 0$ 处,任意扰动频率都是稳定的.图中 $\Omega = 0$ 处的红色虚线为共振线.

从上面讨论我们知道,与系统调制不稳定性有关的三个参数分别是背景频率 ω 、扰动频率 Ω 和背景振幅 a .因此要建立非线性波激发与调制不稳定性之间的关系,需要分析不同类型非线性波解的这三个参数的范围.背景频率 ω 和背景振幅 a 在解中都有直接体现.对于呼吸子和怪波等非线性波,其扰动部分的频谱都不是单频谱,其扰动频率定义为扰动部分在频谱中强度最大值处所对应的频率^[109].然后根据不同非线性波解的背景频率 ω 、扰动频率 Ω 和背景振幅 a 的范围即可建立其与调制不稳定性增益的对应关系.

非线性薛定谔方程中怪波、Akhmediev呼吸子和Kuznetsov-Ma呼吸子在调制不稳定增益平面分布的相图见图2.从图中可以看出,Kuznetsov-Ma呼吸子激发在调制不稳定增益分布平面的共振线上($\Omega = 0$) $a = 0$ 以外的区域.Akhmediev呼吸子位于共振线两侧的调制不稳定区.另外,Akhmediev呼吸子在分布方向 t 的周期 $T_t = 2\pi/|\Omega|$,也就是说Akhmediev呼吸子的周期由初始的扰动频率决定,并且演化过程中扰动频率保持不变.最近在一些数值和实验工作中通过在平面波背景上加周期扰动的方法得到了Akhmediev呼吸子的激发,并且Akhmediev呼吸子的周期就等于初始扰动信号的周期^[12],这些结果说明我们对非线性波扰动频率的分析方法是合理的.对于不同扰动频率,调制不稳定性增益不同,因此对于同样的初始扰动振幅,不同频率的周期扰动激发出Akhmediev呼吸子的位置不同^[12,127].并且我们注意到,当扰动频率 Ω 趋于调制不稳定区的边界 $\pm 2a$ 时,Akhmediev呼吸子的振幅趋于背景振幅.随着扰动频率从 $\pm 2a$ 趋于0时,Akhmediev呼吸子的最大振幅逐渐增大,当扰动频率等于零时,Akhmediev呼吸子将转变为Peregrine怪波^[11],此时振幅达到最大,为背景振幅的三倍.也就是说最大峰值和增益出现在共振线上.因此,怪波是一种共振激发模式^[109].

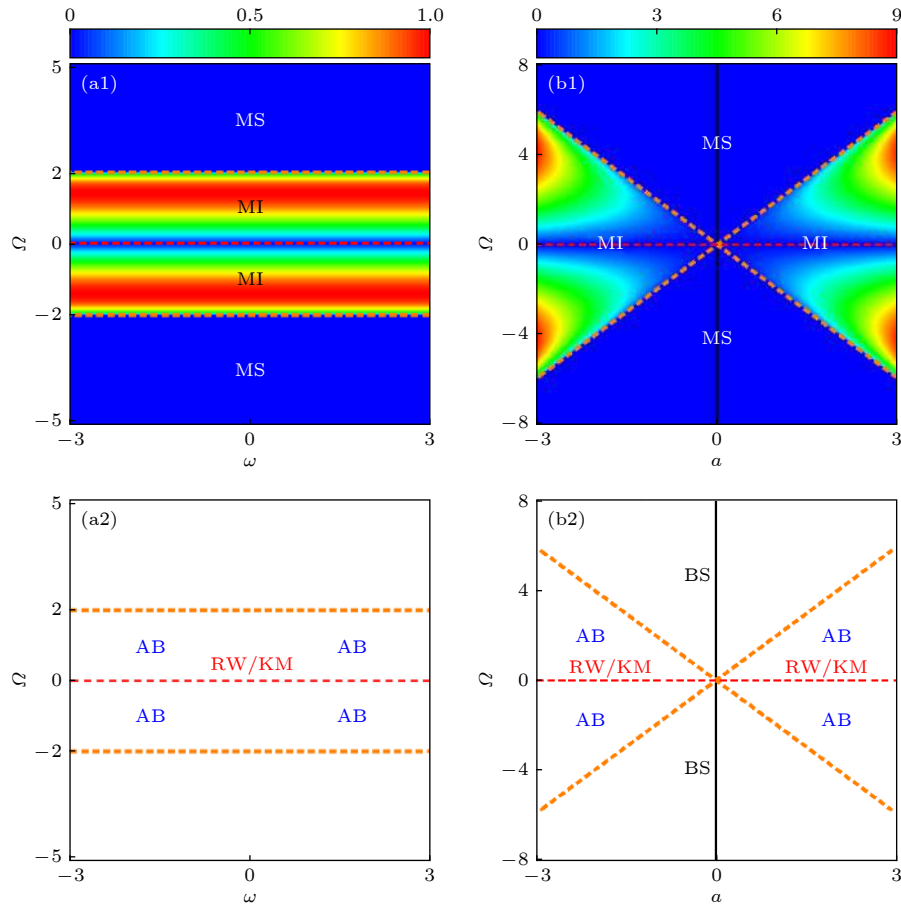


图2 标准非线性薛定谔系统的调制不稳定增益分布和基本非线性波激发的相图 (a1) 和 (b1) 分别为调制不稳定增益在 (ω, Ω) 平面和 (a, Ω) 平面的分布. “MI” 和 “MS” 分别表示调制不稳定性和调制稳定性, 红色虚线是共振线; (a2) 和 (b2) 分别为基本非线性波在 (a1) 和 (b1) 中调制不稳定增益分布平面的相图. “AB”, “RW” 和 “KM” 分别为 Akhmediev 呼吸子、怪波和 Kuznetsov-Ma 呼吸子

Fig. 2. Modulation instability distributions and phase diagrams of fundamental nonlinear waves in standard nonlinear Schrödinger system: (a1) and (b1) are the distributions of the modulation instability gain in the (ω, Ω) plane and the (a, Ω) , respectively. “MI” and “MS” denote modulation instability and modulation stability, respectively. the red dotted line is the resonance line; (a2) and (b2) are the phase diagrams of fundamental nonlinear waves on the modulation instability gain distribution planes correspond to (a1) and (b1), respectively. “AB”, “RW” and “KM” denote Akhmediev breather, rogue wave and Kuznetsov-Ma breather, respectively.

虽然线性稳定性分析方法本身具有一定局限性, 使得它并不能完全预测平面波背景上所有非线性激发类型的动力学特征. 但是其对于 Peregrine 怪波和 Akhmediev 呼吸子动力学预测是非常准确的, 而且线性稳定性方法相比于求解方程解析解来说是非常简单的, 因此通过线性稳定性分析方法可以很方便地预测不同系统中是否可以激发 Peregrine 怪波和 Akhmediev 呼吸子并可以给出对应的激发条件. 此外, 线性稳定性分析方法也不依赖于方程的可积性, 因此在可积系统中建立呼吸子和怪波激发与调制不稳定性之间的对应关系也可以用来预测不可积系统中 Peregrine 怪波和 Akhmediev 呼吸子激发, 这对 Peregrine 怪波和 Akhmediev 呼

吸子激发机制和在各个物理系统中实验实现、可控激发和潜在应用是非常重要的.

目前研究发现基本怪波除了 Peregrine 怪波一峰两谷的眼状结构外, 还存在两峰一谷的反眼状结构以及具有两峰两谷的四花瓣结构 [70,97,99,102]. 上面讨论中已经证实了怪波来自于调制不稳定区的共振扰动, 这就意味着这三种怪波结构都激发在共振线上, 那么是什么参数决定了怪波结构的不同呢? 之前研究已经证实反眼状怪波和四花瓣怪波都只存在于耦合非线性系统中 [70,97,99,102], 因此为了回答这个问题, Ling 等 [103] 基于自聚焦任意 N 组分耦合非线性薛定谔系统分析了怪波时空结构的产生机制. N 组分耦合非线性薛定谔方程如下:

$$i\Psi_z + \frac{1}{2}\Psi_{tt} + \Psi\Psi^\dagger\Psi = 0, \quad (4)$$

其中 $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)^T$, T 和 $\dagger$ 分别表示矩阵的转置和厄米共轭. 这个模型可以用来描述多模非线性光纤中光脉冲的传输^[128]、多组分玻色-爱因斯坦凝聚体的演化^[104,129,130] 以及其他非线性耦合系统. 在 $N = 1$ 时, 这个模型将约化为标准非线性薛定谔方程 (1), 此时只存在眼状 Peregrine 怪波. 在 $N > 1$ 的耦合系统中, 眼状、反眼状和四花瓣三种结构的怪波都可以存在, 并且不同结构之间可以相互转换. 最近 N 组分耦合非线性薛定谔系统中基本怪波解的一般求解方法已经被给出, 通过这个方法可以构造出不同结构基本怪波共存甚至是高阶怪波共存的解^[106].

为了理解基本怪波时空结构的产生机制, 首先分析 N 组分耦合非线性薛定谔系统 (4) 的调制不稳定性特征. 该方程的平面波解如下 $\psi_{0j} = a_j e^{i\theta_j}$, 其中 $\theta_j = k_j z + \omega_j t$, $k_j = \sum_{j=1}^N a_j^2 - 1/2\omega_j^2$, $j = 1, 2, \dots, N$. a_j 和 ω_j 分别是第 j 组分平面波背景的振幅和频率. 在平面波背景上加上扰动后形式为 $\psi_j = a_j e^{i\theta_j} [1 + p_j(t, z)]$, 这里 $p_j(t, z)$ 表示第 j 组分的小扰动, 其形式为 $p_j = f_{j+} e^{i(Kz + \Omega t)} + f_{j-} e^{-i(Kz + \Omega t)}$ (f_{j+} 和 f_{j-} 远小于 1), K 和 Ω 分别为扰动波数和频率. 利用线性稳定性分析方法, 可以很容易得到 K 和 Ω 之间的色散关系. 前面已经证实, 怪波来自于共振扰动即 $\Omega = 0$. 通过分析共振扰动的调制不稳定, 可以得到对于共振扰动的色散关系为 $1 + \sum_{j=1}^N \frac{a_j^2}{(K + \omega_j)^2} = 0$. 然后通过分析方程 (4) 得到一般形式的基本怪波解在不同参数下的结构特征. 通过与线性稳定性分析的结果对比发现基本怪波的结构由如下的判别式决定

$$\Delta = \frac{(K_R + \omega_i)^2}{K_I^2}, \quad (5)$$

这里 K_R 和 K_I 分别为扰动波数 K 的实部和虚部. 当 $\Delta \leq 13$ 时, 基本怪波为眼状结构; $13 < \Delta < 3$ 时, 基本怪波为四花瓣结构; 而 $\Delta \leq 3$ 时, 基本怪波为反眼状结构. 扰动波数 K 的实部和虚部分别表示扰动的传播常数和调制不稳定性增益. 显然, 如果 $K_I = 0$, 则共振线上调制不稳定性增益为零, 此时将不会有怪波激发, 这个结果与怪波共振调制不稳定性机制的研究结果是一致的^[109]. 通过判别式 Δ 可以很方便地判断任意 N 组分非线性薛定谔系统中不同参数条件下的怪波激发结构^[103].

通过线性稳定性分析和解析解, 已经建立了呼吸子和怪波激发与调制不稳定性的对应关系, 并且解释了怪波时空结构的产生机制^[109]. 怪波和呼吸子都是背景上弱扰动调制不稳定放大的结果, 它们都激发在调制不稳定区. 而在一个物理系统不仅有调制不稳定区也存在着调制稳定的区域. 调制稳定区意味着在这些参数区域的弱扰动随着演化并不会被放大而是稳定传播, 这说明在调制稳定区应该存在稳定演化的孤子或周期波. 那么在调制稳定区域是否一定有稳定演化的孤子或周期波激发呢? 我们分析了用来描述飞秒量级光脉冲传输的具有高阶效应的 Sasa-Satsuma 系统, 发现其调制不稳定带中存在一小块调制稳定区域 (见图 3(a)), 并在这个调制稳定区域的共振线上得到了有理形式 W 形孤子激发, 这个 W 形孤子在弱噪声下仍然可以保持稳定演化. 特别地, 这个孤子的频谱对应于超连续光谱^[70]. 随后在共振线上调制不稳定区与调制稳定区的临界点 (见图 3(a) 中共振线上紫色圆点) 处得到了一个小信号产生两个 W 形孤子的独特动力学^[74,131]. 在初始阶段一个小信号被调制不稳定放大, 随着演化峰值逐渐增大, 达到最大峰值后劈裂为两个稳定的 W 形孤子, 在 W 形孤子演化过程中呈现出调制稳定的特征. 这个动力学过程显著区别于怪波的不稳定特征和 W 形孤子的稳定特征, 同时包含了调制不稳定特征和调制稳定性特征. 由于临界点处于调制不稳定区和调制稳定区的交界位置, 其既不属于调制不稳定区又不属于调制稳定区, 但是又同时包含调制不稳定特征和调制稳定特征, 因此可以出现从弱信号放大然后劈裂出 W 形孤子的独特动力学行为. 随后在标准非线性薛定谔系统和耦合非线性薛定谔系统中通过对系统的色散和非线性进行调制, 使得随着演化调制不稳定性增益逐渐减小并过渡到调制稳定区, 也得到了弱信号放大后产生的孤子结构^[132,133]. 但是两者从弱信号产生稳定孤子的本质是不同的.

进一步, 我们在 Sasa-Satsuma 系统中也得到了反暗孤子、周期波、W 形孤子链等非线性激发, 并建立了这些非线性激发与调制不稳定性之间的对应关系^[74], 其对应的相图展示在图 3(b). 从图中可以看出, 怪波仍然来自于调制不稳定区的共振扰动, Kuznetsov-Ma 呼吸子和 Akhmediev 呼吸子也都激发在调制不稳定区, Kuznetsov-Ma 也激发在共振线上, 而 Akhmediev 呼吸子激发在共振线两侧的调制不稳定区 (见图 3 中红色虚线和橙色虚线

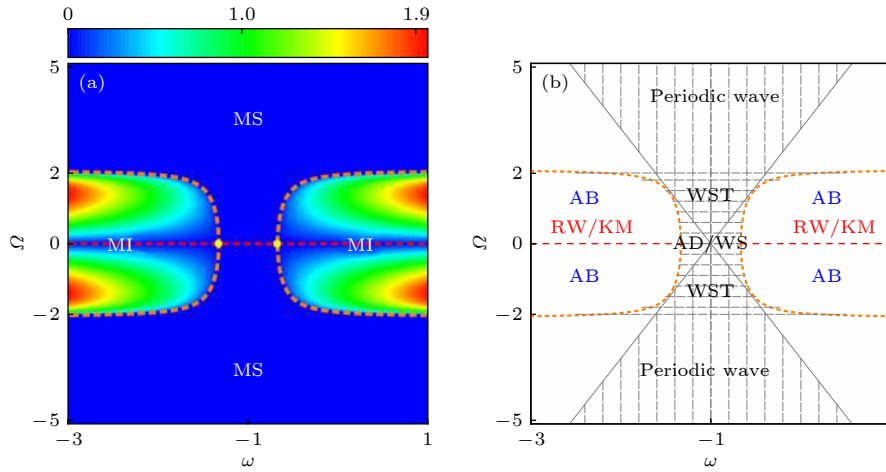


图3 Sasa-Satsuma 系统的调制不稳定增益分布和基本非线性波激发的相图 (a) Sasa-Satsuma 系统中调制不稳定增益在背景频率 ω 和扰动频率 Ω 平面的分布. “MI”和“MS”分别表示调制不稳定和调制稳定, 黄颜色圆点为共振线上临界点; (b) 非线性波在调制不稳定增益分布平面的相图. “AB”, “RW”和“KM”分别为 Akhmediev 呼吸子、怪波和 Kuznetsov-Ma 呼吸子; “WS”, “WST”, “AD”和 Periodic wave 分别表示 W 形孤子、W 形孤子链、反暗孤子和周期波

Fig. 3. Modulation instability distributions and phase diagrams of fundamental nonlinear waves in Sasa-Satsuma system: (a) Distributions of the modulation instability gain in the background frequency ω and perturbation frequency Ω plane. “MI” and “MS” denote modulation instability and modulation stability, respectively. The yellow dots are the critical points on the resonance line; (b) phase diagrams of nonlinear waves in the modulation instability gain distribution planes. “AB”, “RW” and “KM” denote Akhmediev breather, rogue wave and Kuznetsov-Ma breather, respectively; “WS”, “WST” and “AD” denote the W-shaped soliton, W-shaped soliton train and anti-dark soliton, respectively.

之间的区域). 这些结果与标准非线性薛定谔系统中这几种非线性波在调制不稳定增益分布平面的激发位置是类似的. 然而, 与标准非线性薛定谔系统不同的是, 在 Sasa-Satsuma 系统中其调制不稳定带中存在一个调制稳定区, 这也带来了一些新的非线性激发. 调制不稳定区与调制稳定区的边界为 $\Omega = \pm \frac{4\omega^2 - 1}{\omega}$. W 形孤子和反暗孤子激发在共振线上的调制稳定区 (图 3(b) 中两个黄颜色临界点之间的红色虚线). W 形孤子链存在于共振线和调制不稳定带边界 ($\Omega = \pm 2a$) 之间的区域, 见图 3(b) 中水平灰色虚线标记的调制稳定区. 周期波位于直线 $\Omega = \pm 2\omega$ (见图中灰色实线) 之间的调制稳定区, 见图中竖直的灰色虚线标记区域. 从图中可以看出 W 形孤子、反暗孤子、W 形孤子链和周期波都位于调制稳定区, 它们的动力学也证实它们的演化是稳定的. 显然线性稳定性分析也可以用来预测平面波背景上稳定演化的孤子和周期波激发. 需要特别注意的是, 与标准非线性薛定谔系统类似, Sasa-Satsuma 系统中 Kuznetsov-Ma 呼吸子和怪波也激发在同样的位置. 此外 W 形孤子和反暗孤子也存在于相同区域, 周期波与 W 形孤子链的激发区域有部分重合. 这些结果说明决定系统调制不稳定特征的两个参数背景频率 ω 和扰动频率 Ω 并不能

完全决定非线性波的激发.

在另一种描述飞秒光脉冲传输模型——Hirota 模型中 [123], 我们也分析了其调制不稳定性, 发现在调制不稳定带中存在一条调制稳定线 (见图 4(a)). 并且发现当怪波从不稳定区趋于调制稳定线时, 怪波逐渐被拉长, 其演化方向局域性逐渐降低, 当达到稳定线位置时, 怪波完全转换为有理 W 形孤子. 并且怪波的局域性与调制不稳定增益 G 的倒数成正比 [71]. 这个结果进一步加深了人们对调制不稳定性与非线性激发关系的理解, 随后怪波与孤子之间的态转化在其他系统中也被广泛讨论 [134–136]. 随后, 我们也在 Hirota 系统中发现了对称和不对称形式多峰孤子激发和反暗孤子、周期波等非线性激发, 并且给出了 Akhmediev 呼吸子和周期波, Kuznetsov-Ma 呼吸子和反暗孤子与非有理 W 形孤子之间的转换关系, 也系统给出了 Hirota 系统中非线性波激发在调制不稳定性增益平面的相图 [73] (见图 4(b)). 与标准非线性薛定谔系统 [109] 和 Sasa-Satsuma 系统 [74] 类似, 怪波和 Kuznetsov-Ma 呼吸子激发在共振线上的不稳定区, Akhmediev 呼吸子存在于共振线两侧调制不稳定区, 有理 W 形孤子、非有理 W 形孤子和反暗孤子都激发在共振线上的调制稳定区, 周期波位于

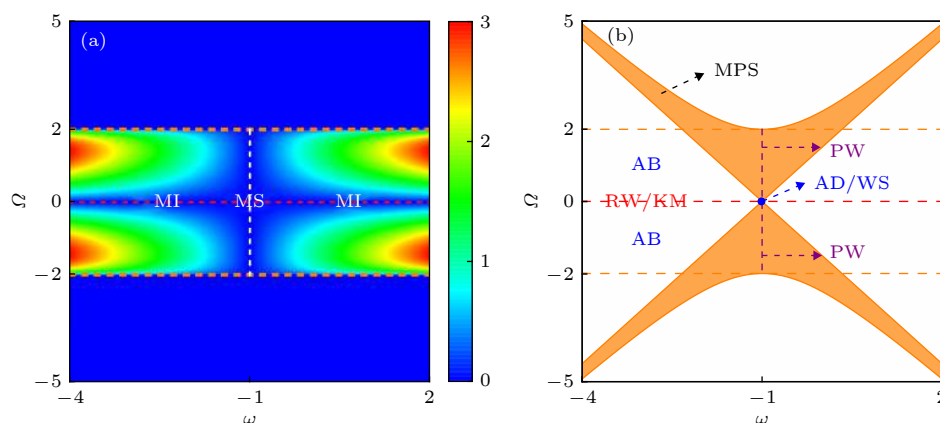


图 4 Hirota 系统中的调制不稳定增益分布和基本非线性波激发的相图 (a) Hirota 系统中调制不稳定增益在背景频率 ω 和扰动频率 Ω 平面的分布. “MI” 和 “MS” 分别表示调制不稳定和调制稳定; (b) 非线性波在调制不稳定增益分布平面的相图. “AB”, “RW” 和 “KM” 分别为 Akhmediev 呼吸子、怪波和 Kuznetsov-Ma 呼吸子; “WS”, “AD”, “PW” 和 “MPS” 分别表示 W 形孤子、反暗孤子、周期波和多峰孤子

Fig. 4. Modulation instability distributions and phase diagrams of fundamental nonlinear waves in Hirota system; (a) Distributions of the modulation instability gain in the background frequency ω and perturbation frequency Ω plane. “MI” and “MS” denote modulation instability and modulation stability, respectively; (b) phase diagrams of nonlinear waves in the modulation instability gain distribution planes. “AB”, “RW” and “KM” denote Akhmediev breather, rogue wave and Kuznetsov-Ma breather, respectively; “WS”, “AD”, “PW” and “MPS” denote the W-shaped soliton, anti-dark soliton, periodic wave and multi-peak soliton, respectively.

共振线两侧调制稳定线上. 特别地, 多峰孤子存在于图中橙色“X”形区域, 这个区域既有调制不稳定区又有调制稳定区, 该结果与线性稳定性分析预测结果是矛盾的, 这是由线性稳定性分析自身局限性导致的. 此外, 我们注意到在 Hirota 系统中非线性激发在 (ω, Ω) 空间的相图中, 怪波和 Kuznetsov-Ma 呼吸子存在于同一位置, 有理 W 形孤子、非有理 W 形孤子和反暗孤子激发在同一区域, 多峰孤子和 Akhmediev 呼吸子的激发区域有部分重合. 这些结果进一步证实了线性稳定性分析的局限性, 也说明了仅仅通过背景频率 ω 和扰动频率 Ω 两个参数并不能完全确定非线性波的激发条件. 因此仍然需要引入新的物理参数来区分在背景频率和扰动频率空间共存的非线性波激发.

3 扰动能量在确定非线性波激发中的作用

在描述超短光脉冲在光纤中传输时, 需要考虑一些高阶效应的影响. 例如在描述飞秒脉冲在光纤

中传输模型中需要考虑三阶色散、自陡峭和延迟非线性效应等三阶效应 (Sasa-Satsuma 系统^[124] 和 Hirota 系统^[123]). 最近一些实验和理论研究显示描述小于飞秒量级光脉冲在光纤中传输需要考虑一些四阶效应^[137]. 此外, 四阶效应在各向异性海森堡铁磁自旋链系统也起到了重要作用^[40,41,138]. 考虑一个同时具有三阶和四阶效应的非线性薛定谔模型^[139–146]

$$i\psi_z + \frac{1}{2}\psi_{tt} + |\psi|^2\psi + i\beta H[\psi(t, z)] + \gamma P[\psi(t, z)] = 0, \quad (6)$$

这里三阶项 $H[\psi(t, z)] = \psi_{ttt} + 6|\psi|^2\psi_t$, 四阶项 $P[\psi(t, z)] = \psi_{tttt} + 8|\psi|^2\psi_{tt} + 6|\psi|^4\psi + 4|\psi_t|^2\psi + 6\psi_t^2\psi^* + 2\psi^2\psi_{tt}^*$. 参数 z 和 t 分别表示归一化的距离和时间, $|\psi|^2$ 表示光强. 当 $\beta = \gamma = 0$ 时, 方程 (6) 约化为标准非线性薛定谔方程, 它可以用来描述皮秒脉冲在光纤中传输动力学. 当 $\gamma = 0$ 时, 方程 (6) 变为描述光纤中飞秒脉冲传输的 Hirota 方程.

通过线性稳定性分析方法可以得到四阶非线性薛定谔系统的调制不稳定性增益为

$$G = |\text{Im}(K)| = \left| \text{Im} \left(\Omega \sqrt{(\Omega^2 - 4a^2) \left[\frac{1}{2} - 3\beta\omega + \gamma(6a^2 - 6\omega^2 - \Omega^2) \right]^2} \right) \right|. \quad (7)$$

共振扰动的调制不稳定性增益为

$$G_0 = |\text{Im}(\tilde{p})| = 24a^2 \left| \gamma \left[\alpha - \left(\omega + \frac{\beta}{4\gamma} \right)^2 \right] \right|, \quad (8)$$

这里 a 和 ω 分别表示平面波解的振幅和频率. 调制不稳定增益的分布展示在图 5(a). 显然四阶非线性薛定谔系统中调制不稳定性增益的分布特征与标准非线性薛定谔系统、Hirota 系统和 Sasa-Satsuma 系统中分布都是不同的. 在标准非线性薛定谔系统中调制不稳定带中不存在调制稳定区, Hirota 系统中调制不稳定带内包含了一条调制稳定线, 在 Sasa-Satsuma 系统中, 调制不稳定带中有一个调制稳定区域, 而在四阶非线性薛定谔系统中, 在调制不稳定带中存在一个调制稳定环 [71,73,74,109]. 通常不同的调制不稳定增益分布会带来不同的非线性激发结

构, 因此自然可以期望在四阶非线性系统中能够得到与标准非线性薛定谔系统、Hirota 系统和 Sasa-Satsuma 系统中不同的激发特征.

通过 Darboux 变换方法可以求得方程 (6) 平面波背景上的非线性波解, 其中包括 Kuznetsov-Ma 呼吸子、非有理 W 形孤子、反暗孤子、Akhmediev 呼吸子、W 形孤子链、周期波、怪波和有理 W 形孤子八种基本非线性波. 进一步通过分析各个非线性波背景频率和扰动频率的关系, 我们建立了其与调制不稳定性的对应关系 [125], 这几种非线性波在调制不稳定性增益分布平面的相图见图 5(b) 和图 5(c). 从图中可以看出, 与标准非线性薛定谔系统、Hirota 系统和 Sasa-Satsuma 系统类似, 怪波仍然存在于共振线上的调制不稳定区, 有理 W 形

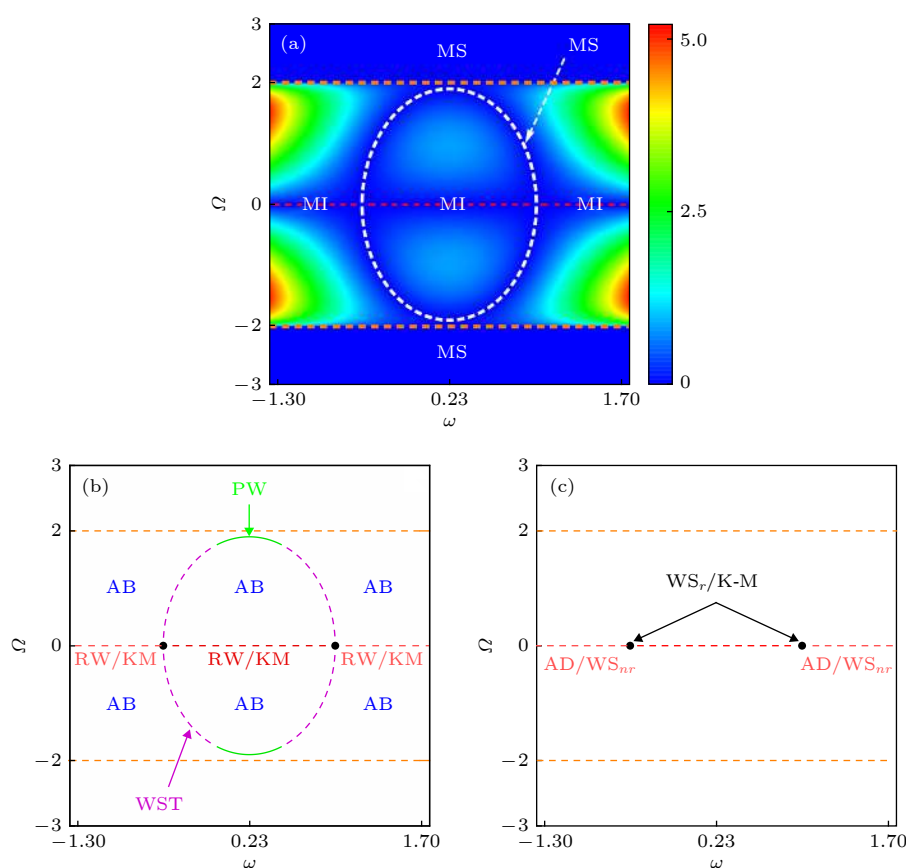


图 5 四阶非线性薛定谔系统调制不稳定增益分布和基本非线性波激发的相图 (a) 调制不稳定增益在背景频率 ω 和扰动频率 Ω 平面的分布, “MI” 和 “MS” 分别表示调制不稳定性 and 调制稳定性; (b), (c) 基本非线性波在背景频率 ω 和扰动频率 Ω 平面的相图, “AB”, “RW”, “KM”, “PW”, “WST”, “WS_r”, “WS_{nr}” 和 “AD” 分别为 Akhmediev 呼吸子、怪波、Kuznetsov-Ma 呼吸子、周期波、W 形孤子链、有理性的 W 形孤子、非有理性的 W 形孤子和反暗孤子

Fig. 5. Modulation instability distributions and phase diagrams of fundamental nonlinear waves in fourth-order nonlinear Schrödinger system: (a) Distributions of the modulation instability gain in the background frequency ω and perturbation frequency Ω plane. “MI” and “MS” denote modulation instability and modulation stability, respectively; (b), (c) phase diagrams of nonlinear waves in the background frequency ω and perturbation frequency Ω plane. “AB”, “RW”, “KM”, “PW”, “WST”, “WS_r”, “WS_{nr}” and “AD” denote Akhmediev breather, rogue wave, Kuznetsov-Ma breather, periodic wave, W-shaped soliton train, rational W-shaped soliton, nonrational W-shaped soliton and anti-dark soliton, respectively.

孤子存在于共振线上的调制稳定区, Akhmediev 呼吸子位于共振线两侧的调制不稳定区, W 形孤子链和周期波激发在共振线两侧调制稳定环上, 并且它们的扰动频率分别满足 $0 < |\Omega| < \sqrt{3}a$ 和 $\sqrt{3}a \leq |\Omega| < 2a$ (见图 5(b) 中环形区域的紫色虚线部分和绿色实线部分). 值得注意的是, 在四阶非线性薛定谔系统中 Kuznetsov-Ma 呼吸子可以存在于共振线上所有区域, 非有理 W 形孤子和反暗孤子存在于共振线上两个调制稳定点之外的调制不稳定区. 这个结果与线性稳定性分析的预测相违背. 需要注意的是, 这两种孤子可以存在于调制稳定点两侧的调制不稳定区而不能存在于两个调制稳定点之间的不稳定区域. 特别地, 当四阶非线性薛定谔系统 (6) 中四阶效应为零, 即 $\gamma = 0$ 时, 四阶非线性薛定谔系统变为 Hirota 系统, 此时这两种孤子都存在于调制稳定区, 显然四阶效应对这两种孤子存在于调制稳定区起到了重要作用. 并且已经证实存在于调制不稳定区的反暗孤子和非有理 W 形孤子演化是稳定的.

为了进一步理解调制不稳定区反暗孤子和非有理 W 形孤子的激发特征, 引入有效扰动能量 ε [125], 其定义为

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi|^2 - a^2) dt, \quad (9)$$

这里有效扰动能量反应的是平面波背景加上扰动后能量相比于未加扰动时平面波背景 $a e^{i\theta}$ 能量多出的部分. 有效扰动能量 $\varepsilon > 0$ 则说明加上扰动后有额外能量输入; $\varepsilon = 0$ 则说明扰动并不带来额外能量, 此时扰动演化过程中的能量完全由平面波背景转化而来; $\varepsilon < 0$ 则意味着扰动时从背景提取出了一部分能量, 例如平面波背景上的暗孤子就可以看作是从平面波背景上除去了一部分能量. 为了方便, 下面讨论中将有效扰动能量简称为扰动能量. 通过分析发现, 调制不稳定增益 G_0 和孤子扰动能量平方 ε_s^2 满足

$$\frac{G}{\varepsilon_s^2} = a^2 |\gamma|. \quad (10)$$

这意味着反暗孤子和非有理 W 形孤子可以在调制不稳定区激发确实是扰动能量和调制不稳定增益平衡的结果. 并且两者平衡依赖于背景振幅 a 和四阶效应系数 γ . 这也进一步解释了在低于四阶效应的非线性薛定谔系统, 例如标准非线性薛定谔系统

和包含三阶效应的非线性薛定谔系统中为什么没有发现反暗孤子和非有理 W 形孤子存在于调制不稳定区的情况.

除了反暗孤子和非有理 W 形孤子存在于调制不稳定区这个与线性稳定性分析预测相违背的情况外, 还存在另外一种与线性稳定性分析预测不一致的情况, 即不稳定的 Kuznetsov-Ma 呼吸子可以在共振线上调制稳定点激发 (见图 5(c)). 这个结果在标准非线性薛定谔系统和具有三阶效应的非线性薛定谔系统中并没有发现, 因此这个现象也可能是由四阶效应引起的. Kuznetsov-Ma 呼吸子扰动能量值与反暗孤子和非有理 W 形孤子的扰动能量的表达式相同, 但是 Kuznetsov-Ma 呼吸子需要满足条件 $\left(\omega + \frac{\beta}{4\gamma}\right)^2 - \frac{\varepsilon_{km}^2}{24} \neq \alpha$. 而反暗孤子和非有理 W 形孤子激发条件为 $\left(\omega + \frac{\beta}{4\gamma}\right)^2 - \frac{\varepsilon_s^2}{24} = \alpha$. 上一节分析已经证明反暗孤子和非有理 W 形孤子激发条件意味着扰动能量和调制不稳定增益的平衡, 因此 Kuznetsov-Ma 呼吸子激发是扰动能量和调制不稳定增益没有达到平衡的结果. 最近, 我们进一步分析了 Kuznetsov-Ma 呼吸子的产生机制, 发现 Kuznetsov-Ma 呼吸子是孤子和平面波之间的干涉和调制不稳定性共同作用的结果 [147].

特别地, 通过计算发现在四阶非线性薛定谔系统中, 除了反暗孤子、非有理 W 形孤子和 Kuznetsov-Ma 呼吸子, 其他非线性波 (怪波、有理 W 形孤子、Akhmediev 呼吸子、周期波和 W 形孤子链) 扰动能量都为零. 另外, 尽管这些非线性波中有理 W 形孤子、周期波和 W 形孤子链都可以具有很大的扰动振幅, 但是这些扰动能量为零的非线性激发特征都与线性稳定性分析预期一致. 例如怪波和 Akhmediev 呼吸子位于调制不稳定区, 有理 W 形孤子、周期波和 W 形孤子链激发在调制稳定区, 并且这些结论在其他系统中 (非线性薛定谔系统、Hirota 系统和 Sasa-Satsuma 系统等) 依然成立. 这些结果显示线性稳定性分析不仅能够适用于弱扰动演化动力学特征分析, 也适用于扰动能量为零的强扰动演化特征预测, 只是对具有非零扰动能量强扰动的演化特征预测失效. 这个结果扩大了线性稳定性分析方法可能的适用范围, 因此对于分析很大一类平面波背景上零扰动能量扰动的演化特

征都有很大帮助.

通过引入扰动能量, 四阶非线性系统中在背景频率和扰动频率空间共存的许多非线性波都可以被区分. 例如在共振线上调制稳定点处共存的 Kuznetsov-Ma 呼吸子和有理 W 形孤子中, Kuznetsov-Ma 呼吸子具有非零扰动能量, 而有理 W 形孤子扰动能量为零; 在共振线上调制不稳定区共存的四种非线性波: 怪波、Kuznetsov-Ma 呼吸子、反暗孤子和非有理 W 形孤子中, 怪波扰动能量为零, Kuznetsov-Ma 呼吸子、反暗孤子和非有理的 W 形孤子的扰动能量非零, 并且反暗孤子和非有理的 W 形孤子的扰动能量满足条件

$$\varepsilon = \pm 2 \sqrt{6 \left[\left(\omega + \frac{\beta}{4\gamma} \right)^2 - \alpha \right]},$$

而 Kuznetsov-Ma 呼吸子扰动能量满足条件

$$\varepsilon \neq \pm 2 \sqrt{6 \left[\left(\omega + \frac{\beta}{4\gamma} \right)^2 - \alpha \right]},$$

显然扰动能量可以用来区分怪波、Kuznetsov-Ma 呼吸子和反暗孤子与非有理 W 形孤子. 然而由于反暗孤子和非有理 W 形孤子扰动能量相等, 这两种非线性波在背景频率、扰动频率和扰动能量参数空间仍然共存. 此外, 通过扰动能量, 在标准非线性薛定谔系统、Hirota 系统和 Sasa-Satsuma 系统中共存的许多非线性波也可以被区分. 然而, 与四阶非线性薛定谔系统类似, 在 Hirota 系统和 Sasa-Satsuma 系统中共存的反暗孤子和非有理 W 形孤子通过扰动能量仍然不能区分; 并且在 Sasa-Satsuma 系统中出现共存的周期波和 W 形孤子链也不能通过扰动能量区分, 因为这两者扰动能量都为零. 显然, 引入扰动能量后, 原来在背景频率和扰动频率共存的许多非线性波都可以被区分, 但是仍然有个别非线性波在背景频率、扰动频率和扰动能量三个参数的空间共存. 因此还需寻找其他物理参数来区分反暗孤子和非有理 W 形孤子以及周期波和 W 形孤子链.

4 相对相位在确定非线性波激发中的作用

为了寻找能够区分反暗孤子和非有理 W 形孤子以及周期波和 W 形孤子链的物理参数, 通过

Darboux 变换方法重新构造了四阶非线性薛定谔方程平面波背景上的解析解 (见文献 [148] 附录). 引入自由参数 ϕ 后, 反暗孤子或非有理 W 形孤子解析表达式可以写为

$$\psi_s = [1 + \psi_{p\pm} e^{i\varphi_{\pm}}] e^{i\theta}, \quad (11)$$

其中

$$\psi_{p\pm} = \frac{\varepsilon_s \sqrt{\varepsilon_s^2 \cos^2(\phi) + 16b^2 \sin^2(\phi)}}{8|b| \cosh(\beta_0) \mp 8a \cos(\phi)},$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_s (t - v_s z),$$

$$v_s = \omega + \beta \left(6 + \frac{\varepsilon_s^2}{4} - 3\omega^2 \right) + \gamma \omega (24 + \varepsilon_s^2 - 4\omega^2),$$

参数 b 为实常数并且满足 $|b| > a$, ε_s 为孤子扰动能量. 这里 ψ_+ 和 ψ_- 以及 φ_+ 和 φ_- 分别对应于 $b > 0$ 和 $b < 0$ 两种情形, 由于 $|b| > 0$, 这里 $\psi_{p\pm}$ 是一个正的实函数. 因此参数 $\varphi_{\pm}$ 是一个相位因子, 它表示扰动部分和平面波背景之间的相对相位. 显然孤子解 (11) 式是平面波背景 $a e^{i\theta}$ 和相对相位为 $\varphi_{\pm}$ 的扰动信号 $\psi_{p\pm} e^{i\varphi_{\pm}} e^{i\theta}$ 的叠加. 孤子解 (11) 式特征依赖于背景振幅 a 、背景频率 ω 、扰动能量 ε_s 和相对相位 $\varphi_{\pm}$. 因此为了分析不同相对相位值时孤子解 (11) 式所对应的孤子类型, 只需分析孤子强度分布 $|\psi_s|^2$ 极值点个数即可. 经过计算发现, 当相对相位 $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right]$ 时, 解 (11) 式为反暗孤子; 当相对相位 $\varphi_{\pm} \in \left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \right]$ 时, 解 (11) 式对应于非有理 W 形孤子.

引入相对相位后, 非有理 W 形孤子和反暗孤子的激发可以被区分. 接下来讨论相对相位对周期波和 W 形孤子链激发条件的影响. 周期波和 W 形孤子链表达式可以写为

$$\psi_{wp} = [a + \psi_{p-wp} e^{i\varphi_{wp}}] e^{i\theta}, \quad (12)$$

其中,

$$\psi_{p-wp} = \frac{|\Omega| \sqrt{\Omega^2 + 4a^2 \sinh^2 d}}{2a \cosh d - 2b \cos \gamma_0},$$

$$\varphi_{wp} = \arctan \times \left[\frac{2b}{\Omega} \tanh d \right] + \pi + 2n\pi,$$

这里 $\gamma_0 = \Omega(t - v_{wp}z)$, 扰动频率 $\Omega = \pm 2\sqrt{a^2 - b^2} \in (-2a, 0) \cup (0, 2a)$ ($|b| < a$), $v_{wp} = \omega + \beta(6a^2 - \Omega^2 - 3\omega^2) + 4\gamma\omega(6a^2 - \Omega^2 - \omega^2)$ 表示周期波和 W 形孤子链的速度, d 为任意实常数. 这里 $n = 0, \pm 1$,

$\pm 2, \dots$, ψ_{p-wp} 是正的实函数, 因此 φ_{wp} 表示扰动和平面波背景之间的相对相位. 由于周期波和 W 形孤子链的扰动频率 $\Omega \in (-2a, 0) \cup (0, 2a)$, 而 d 是一个任意实常数, 因此相对相位 $\varphi_{wp} \in \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$. 当 $\frac{\sqrt{3}a}{|\sec \varphi|} \leq |\Omega| < \frac{2a}{|\sec \varphi|}$ 时, 解 (12) 式对应于周期波, 当 $0 < |\Omega| < \frac{\sqrt{3}a}{|\sec \varphi|}$ 时, 解 (12) 式为 W 形孤子链. 周期波峰和谷的位置以及 W 形孤子链峰的位置都只依赖于扰动频率, 但是它们的峰值和谷值都由扰动频率和相对相位共同决定; W 形孤子链谷的位置由扰动频率和相对相位共同确定, 但是其谷值只依赖于相对相位而与扰动频率无关. 以前的一些研究中 [72,73,125], 周期波和 W 形孤子链并没有引入与相对相位有关的参数 d , 即 $d = 0$, 也就是相对相位 $\varphi_{wp} = \pi$, 这仅仅只是我们得到的解 (12) 式中一个特殊情形. 因此以前研究中得到的 W 形孤子链谷值都为零. 通过引入相对相位周期波和 W 形孤子链的激发条件可以被完全澄清, 相对相位也可以区分 Sasa-Satsuma 系统中共存的周期波和 W 形孤子链 [74].

另外, 当扰动频率 Ω 趋于零时, 周期波和 W 形孤子链周期趋于无穷大, 此时解 (12) 式转化为有理 W 形孤子, 有理 W 形孤子峰值和谷值都依赖于相对相位. 之前一些工作中得到的有理 W 形孤子峰值都是背景振幅的三倍, 而谷值恒等于零 [71,72,73,125], 事实上这都是有理 W 形孤子相对相位为 π 时的特殊情形. 此外, 有理 W 形孤子与相对相位的依赖关系与周期波和 W 形孤子链扰动频率趋于零时的结果一致. 显然这三种激发在调制稳定区的非线性波激发特征依赖于扰动频率和相对相位.

这些结果显示, 除了背景频率、扰动频率和扰动能量外, 相对相位在非线性波激发中也起着至关重要的作用. 而对于随着演化振幅变化的几种非线性波, 例如 Kuznetsov-Ma 呼吸子、Akhmediev 呼吸子和怪波, 由于其在演化过程中相对相位随着演化距离在不断变化, 因此初始相对相位值并不会影响它们的激发特征. 而对于反暗孤子、非有理 W 形孤子、周期波、W 形孤子链和有理 W 形孤子等几种稳定传输的非线性波, 在演化过程中它们的相对相位不随演化距离变化, 其在任意位置的相对相位都等于初始相对相位, 因此相对相位会改变它

们的激发结构.

通过引入相对相位, 在四阶非线性薛定谔系统背景频率、扰动频率和扰动能量三个参数空间中共存的反暗孤子和非有理 W 形孤子的激发条件可以被区分. 此时在标准非线性薛定谔系统、Hirota 系统、Sasa-Satsuma 系统和四阶非线性薛定谔系统中平面波背景上常见的非线性波 (Kuznetsov-Ma 呼吸子、Akhmediev 呼吸子、怪波、反暗孤子、非有理 W 形孤子、有理 W 形孤子、周期波和 W 形孤子链) 在背景频率、扰动频率、扰动能量和相对相位四个参数空间中可以被完全区分开, 不再有共存情况. 也就是说背景频率、扰动频率、扰动能量和相对相位这四个参数是一组能够确定平面波背景上基本非线性波激发类型的完备参数.

5 基本非线性波的激发条件和相图

从前两节的讨论可以看到, 背景频率、扰动频率、扰动能量和相对相位四个参数可以用来确定平面波背景上基本非线性波的激发条件. 然而这四个参数对平面波背景上的 Tajiri-Watanabe 呼吸子和多峰孤子激发条件的影响仍未被讨论. 为了能够完整地给出平面波背景上基本非线性波的激发条件, 需要分析这四个物理参数对 Tajiri-Watanabe 呼吸子和多峰孤子激发条件的影响. 通过前几节的分析方法可以很容易给出 Tajiri-Watanabe 呼吸子和多峰孤子与背景频率、扰动频率、扰动能量和相对相位这四个参数之间的依赖关系. 通过分析我们发现在这四个参数空间 Tajiri-Watanabe 呼吸子和多峰孤子和平面波背景上其他所有非线性波都不存在共存情况. 因此背景频率、扰动频率、扰动能量和相对相位是一组能够决定平面波背景上基本非线性波激发的完备参数, 基于这组参数我们给出平面波背景上基本非线性波 (Tajiri-Watanabe 呼吸子、多峰孤子、Kuznetsov-Ma 呼吸子、反暗孤子、非有理 W 形孤子、怪波、有理 W 形孤子、Akhmediev 呼吸子、周期波和 W 形孤子链) 的激发条件, 如表 1 所列. 从表中可以看到, 一组确定的参数值可以完全决定一种非线性波激发. 因此, 平面波背景加上满足不同条件的初态就可以确定不同的非线性波激发结构. 文献 [75] 通过满足不同条件的非理想初态的数值模拟已经证实满足不同激发条件的非理想初态可以演化出对应的非线性波

表 1 基本非线性波的激发条件

Table 1. Excitation conditions of fundamental nonlinear waves.

激发条件				非线性波类型
Ω	ω	ε	φ	
0	$\omega^2 - \alpha \neq 0$	0	$\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) + 2n\pi$	怪波
	$\omega^2 - \alpha = 0, \alpha \geqslant 0$			有理W形孤子
0	$\omega^2 - \frac{\varepsilon^2}{24} - \alpha \neq 0, \varepsilon > 0$		$\varphi \in \mathbb{R}$	Kuznetsov-Ma呼吸子
	$\omega^2 - \frac{\varepsilon^2}{24} - \alpha = 0, \varepsilon > 0$		$\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] + 2n\pi$	非有理W形孤子
	$\omega^2 - \frac{\varepsilon^2}{24} - \alpha = 0, \varepsilon > 0$		$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + 2n\pi$	反暗孤子
$\omega^2 + \frac{\Omega^2}{6} - \alpha \neq 0, \Omega \in (0, 2)$		0	$\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) + 2n\pi$	Akhmediev呼吸子
$\omega^2 + \frac{\Omega^2}{6} - \alpha = 0$			$0 < \Omega < \frac{\sqrt{3}}{ \sec \varphi }$	W形孤子链
$\omega^2 + \frac{\Omega^2}{6} - \alpha = 0$			$\frac{\sqrt{3}}{ \sec \varphi } < \Omega < \frac{2}{ \sec \varphi }$	周期波
$1 + 2\beta \left(\pm\sqrt{\Delta} - 3\omega\right) + 2\gamma\nabla \neq 0$			$\varphi \in \mathbb{R}$	Tajiri-Watanabe呼吸子
$1 + 2\beta \left(\pm\sqrt{\Delta} - 3\omega\right) + 2\gamma\nabla = 0$				多峰孤子

注1: $\omega, \Omega, \varepsilon$ 和 φ 分别为背景频率、扰动频率、扰动能量和相对相位. 参数 $\alpha = \frac{\beta^2}{16\gamma^2} + \frac{1}{12\gamma} + a^2$,
 $\Delta = \left[\frac{\sqrt{(\varepsilon^2 - 4\Omega^2 + 16a^2)^2 + 16\varepsilon^2\Omega^2 - (\varepsilon^2 - 4\Omega^2 + 16a^2)}}{8} \right]^{1/2}$, $\nabla = -2\Delta \pm 8\omega\sqrt{\Delta} - 6\omega^2 + 6a^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \Omega^2$.

结构. 这进一步证实了背景频率、扰动频率、扰动能量和相对相位这组参数确实可以确定平面波背景上基本非线性波的激发特征.

为了清晰地看出这些基本非线性波与这四个物理参数之间的关系, 以及这些非线性波之间的转换关系, 我们进一步给出基本非线性激发在这四个参数空间的相图. 决定非线性波激发条件的参数有四个, 但是四维参数空间的相图并不能直接呈现出来, 而我们注意到相对相位只影响平面波背景上反暗孤子和非有理 W 形孤子以及周期波和 W 形孤子链的激发条件, 并且相对相位对这几个非线性波激发条件的影响是由波包和平面波的叠加特征本身决定的, 不依赖于物理系统. 因此我们基于背景频率、扰动频率和扰动能量三个参数给出基本非线性波激发的相图, 然后再单独给出反暗孤子和非有理 W 形孤子以及周期波和 W 形孤子链在相对相位空间的相图. 这样就可以给出平面波背景上基本非线性波激发的整体相图. 因为四阶非线性薛定谔系统 (6), 在 $\gamma = 0$ 时约化为 Hirota 系统, 在 $\beta = \gamma = 0$ 时约化为标准非线性薛定谔系统. 因此在图 6(a)—图 6(c) 中分别给出四阶非线性薛定谔

系统、Hirota 系统和非线性薛定谔系统中平面波背景上基本非线性波在背景频率、扰动频率和扰动能量空间的相图. 在图 6(d) 和图 6(e) 中分别给出了反暗孤子和非有理的 W 孤子以及周期波和 W 形孤子链在相对相位空间的相图.

非线性波激发的相图清晰反映了各个非线性波激发是所对应的参数区域以及各个非线性波之间的关系. 从相图中可以看到孤子和周期波结构是相应呼吸子和怪波在特定条件的结果. 随着扰动能量和扰动频率的变化, 不同的呼吸子和怪波之间可以相互转换, 孤子和周期波结构之间也可以相互转换, 特别地, 这个转换关系具有普适应. 图 7(a) 和图 7(b) 中, 分别给出了呼吸子和怪波之间以及孤子和周期波结构之间的转换关系. 这些转换关系清晰地展示了不同基本非线性波之间的区别与联系.

6 总结与讨论

本文分析了平面波背景上基本非线性波的产生机制, 提议了一种建立基本非线性波与调制不稳定性对应关系的方法. 基于简单的对应关系建立方

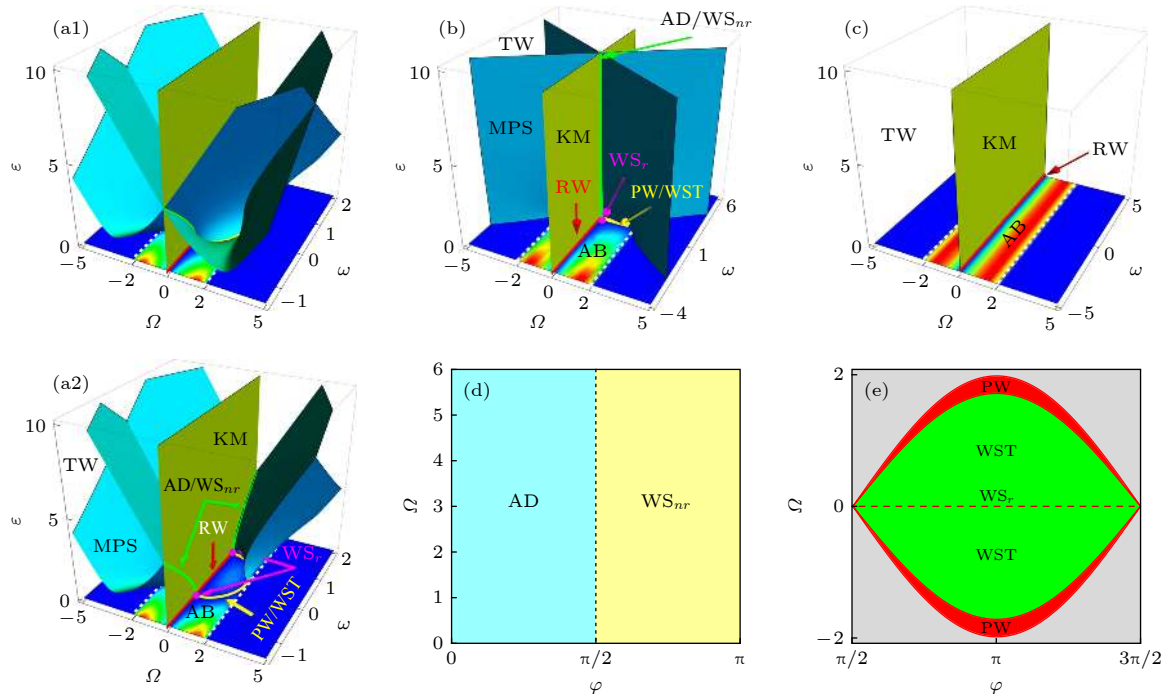


图 6 不同系统中平面波背景上基本非线性波在背景频率 ω , 扰动频率 Ω , 扰动能量 ε 和相对相位 φ 空间的相图 (a) 四阶非线性薛定谔系统, 参数取 $\beta = 1/12$, $\gamma = -1/36$, $a = 1$; (b) Hirota 系统, 参数取 $\beta = 1/12$, $\gamma = 0$, $a = 1$; (c) 非线性薛定谔系统, 参数取 $\beta = 1/12$, $\gamma = 0$, $a = 1$; (d) 反暗孤子和非有理 W 形孤子依赖于相对相位的相图; (e) 周期波, W 形孤子链和有理 W 形孤子在 (φ, Ω) 平面的相图. 图中“TW”, “KM”, “AB”, “RW”, “MPS”, “AD”, “WS_{nr}”, “PW”, “WST”和“WS_r”分别表示 Tajiri-Watanabe 呼吸子、Kuznetsov-Ma 呼吸子、Akhmediev 呼吸子、怪波、多峰孤子、反暗孤子、非有理 W 形孤子、周期波、W 形孤子链和有理 W 形孤子

Fig. 6. Phase diagrams of nonlinear waves in the background frequency ω , perturbation frequency Ω , perturbation energy ε and relative phase φ space for different systems: (a) Fourth-order nonlinear Schrödinger system. Parameters are $\beta = 1/12$, $\gamma = -1/36$, $a = 1$; (b) Hirota system. Parameters are $\beta = 1/12$, $\gamma = 0$, $a = 1$; (c) nonlinear Schrödinger system. Parameters are $\beta = \gamma = 0$, $a = 1$; (d) phase diagram of anti-dark soliton and nonrational W-shaped soliton in relative phase space; (e) phase diagram of periodic wave, W-shaped soliton train and rational W-shaped soliton in the (φ, Ω) plane. “TW”, “KM”, “AB”, “RW”, “MPS”, “AD”, “WS_{nr}”, “PW”, “WST” and “WS_r” denote Tajiri-Watanabe breather, Kuznetsov-Ma breather, Akhmediev breather, rogue wave, multi-peak soliton, anti-dark soliton, nonrational W-shaped soliton, periodic wave, W-shaped soliton train and rational W-shaped soliton.

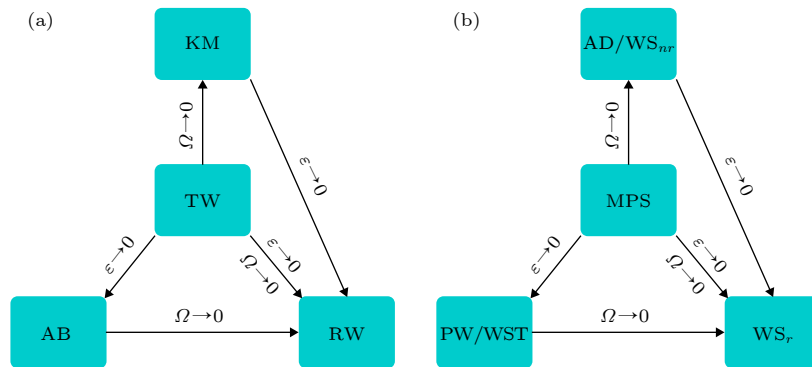


图 7 不同非线性波的转换关系 (a) 呼吸子和怪波之间的转换关系; (b) 孤子和周期波之间的转换关系. 图中“TW”, “KM”, “AB”, “RW”分别为 Tajiri-Watanabe 呼吸子、Kuznetsov-Ma 呼吸子、Akhmediev 呼吸子和怪波, “MPS”, “AD”, “WS_{nr}”, “PW”, “WST”和“WS_r”分别表示多峰孤子、反暗孤子、非有理 W 形孤子、周期波、W 形孤子链和有理 W 形孤子

Fig. 7. Conversion relationship of different nonlinear waves: (a) Conversion relationship between breathers and rogue wave; (b) conversion relationship between the solitons and periodic waves. “TW”, “KM”, “AB”, “RW”, “MPS”, “AD”, “WS_{nr}”, “PW”, “WST” and “WS_r” denote Tajiri-Watanabe breather, Kuznetsov-Ma breather, Akhmediev breather, rogue wave, multi-peak soliton, anti-dark soliton, nonrational W-shaped soliton, periodic wave, W-shaped soliton train and rational W-shaped soliton.

法,给出了常见的几个系统中基本非线性波在背景频率和扰动频率空间的相图.此外,揭示了扰动能量和相对相位在确定非线性波激发中的重要作用.特别地,我们发现平面波背景上基本非线性波的激发完全由背景频率、扰动频率、扰动能量和相对相位四个参数决定.根据非线性波的激发条件,实验上可以通过很简单形式的初态得到对应的非线性波结构.实验上只要构造出基本符合激发条件的初态(可以偏离严格解的初态),就可以激发出相关的局域波动力学.这些结果为非线性波的实现、可控激发和应用提供了坚实的理论基础.当然,这些结果在实际应用中仍然面临着一些问题.例如用简单初态在演化时,虽然基本的激发结构还是可以被观测到的.但是由于其与解析初态有一定偏差,在调制不稳定区中这些偏差随着演化会被放大,从而形成一些非线性振荡结构.这些结构会影响非线性波本身形态,甚至形成更为复杂的动力学行为.目前系统讨论了平面波背景上基本激发元的激发条件和机制,而高阶激发的机制还需要进一步探究.这些结果还有望推广到离散系统^[149,150]、1+2维流体系统^[151]、Davey-Stewartson系统^[152,153]、非局域光学系统^[154,155]等.另外,非线性波的激发条件都是在可积系统中给出的.对于不可积系统,还需要进行更深入的理论分析和实验探索.高维情形下的激发动力学^[156–166]最近成为学界的研究热点之一.我们近期将努力探究高维情形下激发元的激发条件和激发机制.

参考文献

- [1] Guo B, Pan X 1990 *Chin. Phys. Lett.* **7** 241
- [2] Lou S Y, Ni G J, Huang G X 1992 *Commun. Theor. Phys.* **17** 67
- [3] Chabchoub A, Hoffmann N P, Akhmediev N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 204502
- [4] Chabchoub A, Hoffmann N, Onorato M, et al. 2012 *Phys. Rev. X* **2** 011015
- [5] Chabchoub A, Hoffmann N, Onorato M, et al. 2012 *Phys. Rev. E* **86** 056601
- [6] Chen Z, Segev M, et al 1996 *Opt. Lett.* **21** 1821
- [7] Chen Z, Segev M, et al 1997 *J. Opt. Soc. Am. B* **14** 1407
- [8] Guo Q, Luo B, Yi F, Chi S, Xie Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016602
- [9] Deng D, Guo Q 2007 *Opt. Lett.* **32** 3206
- [10] Solli D R, Ropers C, Koonath P, et al. 2007 *Nature* **450** 1054
- [11] Kibler B, Fatome J, Finot C, et al. 2010 *Nat. Phys.* **6** 790
- [12] Dudley J M, Genty G, Dias F, et al. 2009 *Opt. Express* **17** 21497
- [13] Liu X 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053828
- [14] Kibler B, Fatome J, Finot C, et al. 2012 *Sci. Rep.* **2** 463
- [15] Jia J, Lin J 2012 *Opt. Express* **20** 7469
- [16] Zhang Y, Belic M, Wu Z, Zheng H, Lu K, Li Y, Zhang Y 2013 *Opt. Lett.* **38** 4585
- [17] Lin J, Chen W W, Jia J 2014 *J. Opt. Soc. Am. A* **31** 188
- [18] Liu W, Pang L, Han H, Shen Z, Lei M, Teng H, Wei Z 2016 *Photon. Research* **4** 111
- [19] Liu W, Pang L, Yan H, Ma G, Lei M, Wei Z 2016 *EuroPhys. Lett.* **116** 64002
- [20] Liu X, Yao X, Cui Y 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 023905
- [21] Liu X, Popa D, Akhmediev N 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 093901
- [22] Bailung H, Sharma S K, Nakamura Y 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 255005
- [23] Tsai Y Y, Tsai J Y, Lin I 2016 *Nat. Phys.* **12** 573
- [24] Zhang W, Walls D F 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 60
- [25] Zhang W, Walls D F 1994 *Phys. Rev. A* **49** 3799
- [26] Burger S, Bongs K, Dettmer S, et al. 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198
- [27] Denschlag J, Simsarian J E, Feder D L, et al. 2000 *Science* **287** 97
- [28] Huang G X 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 628
- [29] Khaykovich L, Schreck F, Ferrari G, et al. 2002 *Science* **296** 1290
- [30] Strecker K E, Partridge G B, Truscott A G, et al. 2002 *Nature* **417** 150
- [31] Liang Z X, Zhang Z D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 050402
- [32] Bludov Y V, Konotop V V, Akhmediev N 2009 *Phys. Rev. A* **80** 033610
- [33] Zhao D, Luo H G, Chai H Y 2008 *Phys. Lett. A* **372** 5644
- [34] Feng B, Zhao D 2016 *J. Differ. Equations* **260** 2973
- [35] Zeng J, Malomed B A 2017 *Phys. Rev. E* **95** 052214
- [36] Yao Y Q, Han W, Li J, Liu W M 2018 *J. Phys. B* **51** 105001
- [37] Wang D S, Liu J, Wang L 2018 *Phys. Lett. A* **382** 799
- [38] He Z M, Wen L, Wang Y J, Chen G P, Tan R B, Dai C Q, Zhang X F 2019 *Phys. Rev. E* **99** 062216
- [39] Shats M, Punzmann H, Xia H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 104503
- [40] Daniel M, Kavitha L, Amuda R 1999 *Phys. Rev. B* **59** 13774
- [41] Daniel M, Beula J 2009 *Chaos, Solitons Fractals* **41** 1842
- [42] Daniel M, Beula J 2009 *Phys. Lett. A* **373** 2841
- [43] Zhao F, Li Z D, Li Q Y, et al 2012 *Ann. Phys.* **327** 2085
- [44] Qi J W, Li Z D, Yang Z Y, et al. 2017 *Phys. Lett. A* **381** 1874
- [45] Yan Z 2010 *Commun. Theor. Phys.* **54** 947
- [46] Yan Z 2011 *Phys. Lett. A* **375** 4274
- [47] Wu Y, Zhao L C, Lei X K 2015 *Eur. Phys. J. B* **88** 297
- [48] Zheludev N I, Kivshar Y S 2012 *Nat. Mater.* **11** 917
- [49] Wen S, Wang Y, Su W, Xiang Y, Fu X, Fan D 2006 *Phys. Rev. E* **73** 036617
- [50] Xiong H, Gan J, Wu Y 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 153901
- [51] Konotop V V, Yang J, Zezyulin D A 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035002
- [52] Lou S Y, Huang F 2017 *Sci. Rep.* **7** 869
- [53] Polo J, Ahufinger V 2013 *Phys. Rev. A* **88** 053628
- [54] McDonald G D, Kuhn C C N, Hardman K S, et al. 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 013002
- [55] Helm J L, Cornish S L, Gardiner S A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 134101
- [56] Zhao L C, Ling L, Yang Z Y, Liu J 2016 *Nonlinear Dyn.* **83** 659
- [57] Solli D R, Ropers C, Jalali B 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 233902
- [58] Frisquet B, Chabchoub A, Fatome J, et al. 2014 *Phys. Rev. A* **89** 023821

- [59] Gertjerenken B, Billam T P, Blackley C L, et al. 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 100406
- [60] Fatome J, Kibler B, Finot C 2013 *Opt. Lett.* **38** 1663
- [61] Yang G, Wang Y, Qin Z, et al. 2014 *Phys. Rev. E* **90** 062909
- [62] Zhao L C 2018 *Phys. Rev. E* **97** 062201
- [63] Hasegawa A, Tappert F 1973 *Appl. Phys. Lett.* **23** 171
- [64] Zakharov V E, Shabat A B 1973 *Sov. Phys. JETP* **37** 823
- [65] Kivshar Y S, Luther-Davies B 1998 *Phys. Rep.* **298** 81
- [66] Kivshar Y S 1991 *Phys. Rev. A* **43** 1677
- [67] Kivshar Y S, Afanasjev V V 1991 *Phys. Rev. A* **44** R1446
- [68] Dong G, Liu Z 1996 *Opt. Commun.* **128** 8
- [69] Li Z, Li L, Tian H, et al. 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4096
- [70] Zhao L C, Li S C, Ling L 2014 *Phys. Rev. E* **89** 023210
- [71] Liu C, Yang Z Y, Zhao L C, et al. 2015 *Phys. Rev. E* **91** 022904
- [72] Ren Y, Yang Z Y, Liu C, et al. 2015 *Phys. Lett. A* **379** 2991
- [73] Liu C, Yang Z Y, Zhao L C, et al. 2016 *Phys. Rev. E* **94** 042221
- [74] Zhao L C, Li S C, Ling L 2016 *Phys. Rev. E* **93** 032215
- [75] Peregrine D H 1983 *J. Australas. Math. Soc. Ser. B* **25** 16
- [76] Akhmediev N N, Korneev V I 1986 *Theor. Math. Phys.* 1089
- [77] Kuznetsov E A 1977 *Akademiia Nauk SSSR Doklady* **236** 575
- [78] Ma Y C 1979 *Stud. Appl. Math.* **60** 43
- [79] Tajiri M, Watanabe Y 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3510
- [80] Priya N V, Senthilvelan M, Lakshmanan M 2013 *Phys. Rev. E* **88** 022918
- [81] Liu C 2016 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Northwest University) (in Chinese) [刘冲 2016 博士学位论文(西安: 西北大学)]
- [82] Chowdury A, Ankiewicz A, Akhmediev N 2015 *Proc. R. Soc. A* **471** 20150130
- [83] Zakharov V E, Gelash A A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 054101
- [84] Kibler B, Chabchoub A, Gelash A, Akhmediev N, Zakharov V E 2015 *Phys. Rev. X* **5** 041026
- [85] Zhang J H, Wang L, Liu C 2017 *Proc. R. Soc. A* **473** 20160681
- [86] Liu C, Ren Y, Yang Z Y, Yang W L 2017 *Chaos* **27** 083120
- [87] Liu C, Yang Z Y, Yang W L 2018 *Chaos* **28** 083110
- [88] Ren Y, Liu C, Yang Z Y, Yang W L 2018 *Phys. Rev. E* **98** 062223
- [89] Ren Y, Wang X, Liu C, Yang Z Y, Yang W L 2018 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **63** 161
- [90] Xu G, Gelash A, Chabchoub A, Zakharov V, Kibler B 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 084101
- [91] Liu C, Yang Z Y, Yang W L, Akhmediev N 2019 *J. Opt. Soc. Am. B* **36** 1294
- [92] Guo B, Ling L 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 110202
- [93] Guo B, Ling L, Liu Q P 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026607
- [94] Ling L, Zhao L C 2013 *Phys. Rev. E* **88** 043201
- [95] Ling L, Guo B, Zhao L C 2014 *Phys. Rev. E* **89** 041201(R)
- [96] Zhao L C, Liu J 2012 *J. Opt. Soc. Am. B* **29** 3119
- [97] Zhao L C, Liu J 2013 *Phys. Rev. E* **87** 013201
- [98] Zhao L C, Xin G G, Yang Z Y 2014 *Phys. Rev. E* **90** 022918
- [99] Baronio F, Conforti M, Degasperis A, et al. 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 114101
- [100] Baronio F, Conforti M, Degasperis A, et al. 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 034101
- [101] Zhao L C, Ling L, Yang Z Y, Liu J 2015 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **23** 21
- [102] Chen S, Cai X M, Grelu P, et al. 2016 *Opt. Express* **24** 5886
- [103] Ling L, Zhao L C, Yang Z Y, et al. 2017 *Phys. Rev. E* **96** 022211
- [104] Yan Z 2015 *Nonlinear Dyn.* **79** 2515
- [105] Wen X Y, Yang Y, Yan Z 2015 *Phys. Rev. E* **92** 012917
- [106] Zhao L C, Guo B, Ling L 2016 *J. Math. Phys.* **57** 043508
- [107] Zhang G, Yan Z, Wen X Y, Chen Y 2017 *Phys. Rev. E* **95** 042201
- [108] Li M, Shui J J, Xu T 2018 *Appl. Math. Lett.* **83** 110
- [109] Zhao L C, Ling L 2014 arXiv: 1410.7536; 2016 *J. Opt. Soc. Am. B* **33** 850
- [110] Baronio F, Chen S, Grelu P, et al. 2015 *Phys. Rev. A* **91** 033804
- [111] He J S, Xu S, Porsezian K 2012 *J. Phys. Soc. Jpn.* **81** 124007
- [112] Xu S, He J S, Cheng Y, Porsezian K 2015 *Math. Meth. Appl. Sci.* **38** 1106?
- [113] Xu S, He J S 2012 *J. Math. Phys.* **53** 063507
- [114] Zhao L C, Yang Z Y, Ling L 2014 *J. Phys. Soc. Jpn.* **83** 104401
- [115] Zhao L C, Liu C, Yang Z Y 2015 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **20** 9
- [116] Akhmediev N, Soto-Crespo J M, Ankiewicz A 2009 *Phys. Rev. A* **80** 043818
- [117] He J S, Zhang H R, Wang L H, Porsezian K, Fokas A S 2013 *Phys. Rev. E* **87** 052914
- [118] Wang L, He J S, Xu H, Wang J, Porsezian K 2017 *Phys. Rev. E* **95** 042217
- [119] Zakharov V E, Ostrovsky L A 2009 *Physica D* **238** 540
- [120] Hammani K, Wetzel B, Kibler B, et al. 2011 *Opt. Lett.* **36** 2140
- [121] Soto-Crespo J M, Ankiewicz A, Devine N, et al. 2012 *J. Opt. Soc. Am. B* **29** 1930
- [122] Forest M G, McLaughlin D W, Muraki D J, et al. 2000 *J. Nonlinear Sci.* **10** 291
- [123] Hirota R 1973 *J. Math. Phys.* **14** 805
- [124] Sasa N, Satsuma J 1991 *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** 409
- [125] Duan L, Zhao L C, Xu W H, et al. 2017 *Phys. Rev. E* **95** 042212
- [126] Li P, Wang L, Kong L Q, et al. 2018 *Appl. Math. Lett.* **85** 110
- [127] Erkintalo M, Genty G, Wetzel B, et al. 2011 *Phys. Lett. A* **375** 2029
- [128] Agrawal G P 2007 *Nonlinear Fiber Optics* (Massachusetts: Academic Press)
- [129] Kevrekidis P G, Frantzeskakis D, Carretero-Gonzalez R 2007 *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates: Theory and Experiment* (New York: Springer Science and Business Media)
- [130] Kawaguchi Y, Ueda M 2012 *Phys. Rep.* **520** 253
- [131] Gao P, Duan L, Zhao L C, et al. 2019 *Chaos* **29** 083112
- [132] Duan L, Yang Z Y, Zhao L C, et al. 2016 *J. Mod. Opt.* **63** 1397
- [133] Liu X S, Zhao L C, Duan L, et al. 2017 *Chin. Phys. B* **26** 120503
- [134] Liu C, Yang Z Y, Zhao L C, et al. 2015 *Ann. Phys.* **362** 130
- [135] Wang L, Li S, Qi F H 2016 *Nonlinear Dyn.* **85** 389
- [136] Wang X, Liu C, Wang L 2017 *Chaos* **27** 093106
- [137] Blanco-Redondo A, De Sterke C M, Sipe J E, et al. 2016 *Nat. Commun.* **7** 10427
- [138] Daniel M, Kavitha L 2001 *Phys. Rev. B* **63** 172302
- [139] Tao Y, He J S 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026601
- [140] Wang L H, Porsezian K, He J S 2013 *Phys. Rev. E* **87** 053202
- [141] Ankiewicz A, Wang Y, Wabnitz S, et al. 2014 *Phys. Rev. E* **89** 012907
- [142] Chowdury A, Kedziora D J, Ankiewicz A, et al. 2014 *Phys. Rev. E* **90** 032922
- [143] Yang Y, Yan Z, Malomed B A 2015 *Chaos* **25** 103112
- [144] Chowdury A, Kedziora D J, Ankiewicz A, et al. 2015 *Phys. Rev. E* **91** 032928
- [145] Ankiewicz A, Kedziora D J, Chowdury A, et al. 2016 *Phys.*

- Rev. E* **93** 012206
- [146] Wang L, Zhang J H, Wang Z Q, et al. 2016 *Phys. Rev. E* **93** 012214
- [147] Zhao L C, Ling L, Yang Z Y 2018 *Phys. Rev. E* **97** 022218
- [148] Duan L, Yang Z Y, Gao P, et al. 2019 *Phys. Rev. E* **99** 012216
- [149] Wen X Y, Yan Z, Boris A, Malomed B 2016 *Chaos* **26** 123110
- [150] Wen X Y, Yan Z 2018 *J. Math. Phys.* **59** 073511
- [151] Wen X Y, Yan Z 2017 *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* **43** 311
- [152] Ohta Y, Yang J 2012 *Phys. Rev. E* **86** 036604
- [153] Yang B, Chen Y 2018 *Appl. Math. Lett.* **82** 43
- [154] Li M, Xu T, Meng D 2016 *J. Phys. Soc. Jpn.* **85** 124001
- [155] Xu T, Li H, Zhang H, et al. 2017 *Appl. Math. Lett.* **63** 88
- [156] Dai C Q, Zhu H P 2013 *J. Opt. Soc. Am. B* **30** 3291
- [157] Chen J, Chen Y, Feng B F, Maruno K 2015 *Phys. Lett. A* **379** 1510
- [158] Zhang X, Chen Y, Tang X 2018 *Comput. Math. Appl.* **76** 1938
- [159] Qian C, Rao J G, Liu Y B, He J S 2016 *Chin. Phys. Lett.* **33** 110201
- [160] Zhang X, Chen Y 2017 *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* **52** 24
- [161] Liu Y K, and Li B 2017 *Chin. Phys. Lett.* **34** 010202
- [162] Charalampidis E G, Wang W, Kevrekidis P G, Frantzeskakis D J, Cuevas-Maraver J 2016 *Phys. Rev. A* **93** 063623
- [163] Wang W, Kevrekidis P G, Carretero-Gonzalez R, Frantzeskakis D J 2016 *Phys. Rev. A* **93** 023630
- [164] Rao J, Porsezian K, He J S 2017 *Chaos* **27** 083115??
- [165] Rao J, Porsezian K, He J S, Kanna T 2018 *Proc. R. Soc. A* **474** 20170627
- [166] Zeng L, Zeng J, Kartashov Y V, Malomed B A 2019 *Opt. Lett.* **44** 1206

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Quantitative relations between fundamental nonlinear waves and modulation instability*

Duan Liang¹⁾²⁾ Liu Chong¹⁾²⁾ Zhao Li-Chen¹⁾²⁾ Yang Zhan-Ying^{1)2)†}

¹⁾ (School of Physics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

²⁾ (Shaanxi Key Laboratory for Theoretical Physics Frontiers, Xi'an 710069, China)

(Received 12 September 2019; revised manuscript received 31 October 2019)

Abstract

Nonlinear waves are ubiquitous in various physical systems, and they have become one of the research hotspots in nonlinear physics. For the experimental realization, observation and application of nonlinear waves, it is very important to understand the generation mechanism, and determine the essential excitation conditions of various nonlinear waves. In this paper, we first briefly review the experimental and theoretical research progress of nonlinear waves in recent years. Based on the exact nonlinear wave solutions and linear stability analysis results, we systemically discuss how to establish the quantitative relations between fundamental nonlinear waves and modulation instability. These relations would deepen our understanding on the mechanism of nonlinear waves. To solve the excitation conditions degenerations problem for some nonlinear waves, we further introduce the perturbation energy and relative phase to determine the excitation conditions of nonlinear waves. Finally, we present a set of complete parameters that can determine the excitation conditions of nonlinear waves, and give the excitation conditions and phase diagrams of the fundamental nonlinear waves. These results can be used to realize controllable excitation of nonlinear waves, and could be extended to many other nonlinear systems.

Keywords: nonlinear waves, modulation instability, generation mechanism, excitation conditions

PACS: 05.45.-a, 42.65.Tg, 47.20.Ky, 47.35.Fg

DOI: 10.7498/aps.69.20191385

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11875220, 11775176).

† Corresponding author. E-mail: zyyang@nwnu.edu.cn

四阶色散非线性薛定谔方程的明暗孤立波和怪波的形成机制

李敏 王博婷 许韬 水涓涓

Study on the generation mechanism of bright and dark solitary waves and rogue wave for a fourth-order dispersive nonlinear Schrödinger equation

Li Min Wang Bo-Ting Xu Tao Shui Juan-Juan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010502 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191384

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191384>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非线性薛定谔方程的高阶分裂改进光滑粒子动力学算法

Numerical study of nonlinear Schrödinger equation with high-order split-step corrected smoothed particle hydrodynamics method

物理学报. 2019, 68(9): 090203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190169>

基于分裂格式有限点集法对孤立波二维非线性问题的模拟

Simulation of two-dimensional nonlinear problem with solitary wave based on split-step finite pointset method

物理学报. 2019, 68(14): 140203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190340>

孤子内波环境下三维声传播建模

Modeling of three-dimensional sound propagation through solitary internal waves

物理学报. 2019, 68(20): 204302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190478>

激光诱导等离子体的气体动力学和燃烧波扩展速度研究

Gas dynamics and combustion wave expanding velocity of laser induced plasma

物理学报. 2017, 66(9): 094202 <https://doi.org/10.7498/aps.66.094202>

高非线性光纤正常色散区脉冲尾部非频移分量演化

Evolution of non-frequency shift components of pulse tail in normal dispersion region of highly nonlinear fiber

物理学报. 2019, 68(11): 114210 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190111>

自旋-轨道耦合作用下玻色-爱因斯坦凝聚在量子相变附近的朗道临界速度

Landau critical velocity of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate across quantum phase transition

物理学报. 2017, 66(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.220301>

专题：非线性物理

四阶色散非线性薛定谔方程的明暗孤立波
和怪波的形成机制*李敏^{1)†} 王博婷¹⁾ 许韬^{2)‡} 水涓涓¹⁾

1) (华北电力大学数理学院, 北京 102206)

2) (中国石油大学(北京)理学院, 北京 102249)

(2019年9月12日收到; 2019年11月4日收到修改稿)

本文研究了四阶色散非线性薛定谔方程的明暗孤立波和怪波的形成机制, 该模型既可以模拟高速光纤传输系统中超短脉冲的非线性传输和相互作用, 又可以描述具有八极与偶极相互作用的一维海森堡铁磁链的非线性自旋激发现象. 本文首先通过对四阶色散非线性薛定谔方程的相平面分析, 发现由其约化得到的二维平面自治系统具有同宿轨道和异宿轨道, 并在相应条件下求得了方程的明孤立波解和暗孤立波解, 从而揭示了同异宿轨道和孤立波解的对应关系; 其次, 基于非零背景平面上的精确一阶呼吸子解, 给出了呼吸子的群速度和相速度的显式表达式, 进而分析得出呼吸子的速度存在跳跃现象. 最后, 为了验证在跳跃点处呼吸子可以转化为怪波, 将呼吸子解在速度跳跃条件下取极限获得了一阶怪波解, 从而证实怪波的产生与呼吸子速度的不连续性有关.

关键词: 同异宿轨道, 孤立波, 怪波, 速度不连续性**PACS:** 05.45.Yv, 02.30.Ik**DOI:** 10.7498/aps.69.20191384

1 引言

孤子、呼吸子和怪波是自然界中三种典型的非线性波现象, 由于在非线性光学、玻色-爱因斯坦凝聚、大气物理以及等离子体等领域中的潜在应用而受到密切关注^[1–20]. 其中, 孤子在群速度色散和非线性效应均衡作用下可以保持不变的波形和速度稳定地传播, 从而在长距离、大容量和高速率光纤通信系统中有着重要应用^[9]. 呼吸子的产生源于小扰动引起的平面波调制不稳定性^[9]. 研究发现, 经典的非线性薛定谔方程 (NLSE) 具有两类呼吸子解: Kuznetsov-Ma 呼吸子 (简称 KMB)^[10] 和 Akhmediev 呼吸子 (简称 AB)^[11]. 另外, 怪波在数

学上可以通过 NLSE 的有理解 (即 KMB 或 AB 呼吸子解的一种退化情形^[10,11]) 进行描述, 同时也可以作为在周期边界条件下不稳定 Stokes 波的一种同宿轨行为^[12,13]. 怪波最早被用来描述在海洋中发现的来无影去无踪的大振幅畸形波^[14,15], 近年来也在非线性光学和水槽实验中被观察到^[16,17]. 通常情况下, 学者们认为只有非线性可以解释由能量的大量聚集而形成的高于周围波平均高度的单个水峰现象^[18,19], 并且认为调制不稳定性是怪波产生的初始过程^[20].

近几年, 人们在实验和理论上开展了大量关于怪波形成机制的研究. 例如, 文献^[21]在一个大的定向波池实验中讨论了平面波的调制不稳定性, 该研究为有限水深条件下怪波的产生给出了一定解

* 国家自然科学基金 (批准号: 11705284, 61505054) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2017MS051).

† 通信作者. E-mail: ml85@ncepu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: xutao@cup.edu.cn

释; 文献 [22] 通过光学实验研究了在连续波泵浦区域超连续统的时间特性, 从而指出怪波可由孤子之间的相互碰撞产生; 文献 [23] 借助数值模拟发现拉曼效应和三阶色散可以激发怪波的形成; 文献 [24,25] 在理论上指出由速度跳跃可以使得呼吸子演化为怪波, 并且非线性偏微分方程的行波解与对应的常微分方程的轨道存在对应关系, 即, 常微分方程中的同宿轨道和异宿轨道分别与非线性波方程中的孤立波和冲击波相对应, 而对于非线性薛定谔型方程, 其约化后的常微分系统的同宿轨道和异宿轨道则分别对应钟型的明孤立波解、冲击波解或倒钟型的暗孤立波解 [26,27].

本文将从结构不连续性角度研究如下四阶色散非线性薛定谔方程 [28–30] 的孤立波解和怪波解形式机制:

$$iq_t + \alpha_1 q_{xx} + \alpha_2 q|q|^2 + \varepsilon^2(\alpha_3 q_{xxxx} + \alpha_4 |q|^2 q_{xx} + \alpha_5 q^2 q_{xx}^* + \alpha_6 q_x^2 q^* + \alpha_7 q|q_x|^2 + \alpha_8 |q|^4 q) = 0, \quad (1)$$

其中 $q(x, t)$ 代表波的慢变包络振幅, x 和 t 是归一化的空间和时间变量, ε^2 是一个表示高阶线性和非线性强度的无量纲小参数, α_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) 为实参数. 方程 (1) 主要来源于光纤光学和磁力学: 在光学中可以模拟高速光纤传输系统中超短脉冲的非线性传播及相互作用 [31], 在磁力学中亦可描述具有八极与偶极相互作用的一维海森堡铁磁链的非线性自旋激发现象 [32]. 特别地, 当参数取值为 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 8, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 6, \alpha_7 = 4, \alpha_8 = 6$ 时, 该方程是一个可积模型, 具有 Lax 对和无穷多守恒律 [33]. 文献 [34] 借助双线性方法获得了方程 (1) 的双线性形式及 N 孤子解, 并通过渐近分析揭示了孤子的弹性碰撞现象. 文献 [30] 利用达布变换方法构造了呼吸子解和高阶怪波解的精确表达式.

本文将首先利用相平面分析方法研究方程 (1) 经约化后得到的常微分方程的动力学性质, 分别给出同宿轨道和异宿轨道对应的参数条件, 并在相应条件下求得了方程 (1) 的明孤立波解和暗孤立波解, 揭示了同异宿轨道与孤立波解之间的对应关系; 其次, 基于文献 [30] 获得的呼吸子解表达式, 分析了呼吸子的群速度和相速度随参数的变化关系, 进而确定速度发生跳跃的参数条件; 为了验证在速度跳跃的参数条件下呼吸子可以转化成怪波, 在该条

件下对呼吸子解取极限得到一阶怪波解, 从而揭示怪波形成与速度跳跃之间的关联.

2 方程 (1) 的二维相平面分析及明暗孤立波解的产生条件

为了分析方程 (1) 对应常微分方程的平衡点及相轨迹, 对方程 (1) 做如下行波解约化:

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \phi(\xi)e^{ih(x, t)}, \\ \xi &= a(x - ct), \\ h &= Kx - \Omega t, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 a, c, K 和 Ω 都是实数, $\phi(\xi)$ 是 ξ 的实函数. 将其代入方程 (1) 中, 得到关于 ϕ 的常微分方程:

$$\begin{aligned} i[-a(c - 2K\alpha_1 + 4K^3\varepsilon^2\alpha_3)\phi' &+ 2aK\varepsilon^2(\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6)\phi^2\phi' + 4a^3K\varepsilon^2\alpha_3\phi'''] \\ &+ \varepsilon^2\alpha_8\phi^5 + [\alpha_2 - K^2\varepsilon^2(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7)]\phi^3 \\ &+ (\Omega - K^2\alpha_1 + K^4\varepsilon^2\alpha_3 + a^2\varepsilon^2\alpha_6\phi'^2 \\ &+ a^2\varepsilon^2\alpha_7\phi'^2)\phi + a^2\varepsilon^2(\alpha_4 + \alpha_5)\phi^2\phi'' \\ &+ a^2[\alpha_1\phi'' + \varepsilon^2\alpha_3(-6K^2\phi'' + a^2\phi''')] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

进一步, 分离方程 (3) 的实部和虚部, 得到

$$-a(c - 2K\alpha_1 + 4K^3\varepsilon^2\alpha_3)\phi' + 2aK\varepsilon^2 \times (\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6)\phi^2\phi' + 4a^3K\varepsilon^2\alpha_3\phi''' = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2\alpha_8\phi^5 + [\alpha_2 - K^2\varepsilon^2(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7)]\phi^3 \\ + (\Omega - K^2\alpha_1 + K^4\varepsilon^2\alpha_3 + a^2\varepsilon^2\alpha_6\phi'^2 \\ + a^2\varepsilon^2\alpha_7\phi'^2)\phi + a^2\varepsilon^2(\alpha_4 + \alpha_5)\phi^2\phi'' \\ + a^2[\alpha_1\phi'' + \varepsilon^2\alpha_3(-6K^2\phi'' + a^2\phi''')] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

将 (4) 式关于 ξ 积分一次并取积分常数为零, 可得

$$12a^3K\varepsilon^2\alpha_3\phi'' - a(3c - 6K\alpha_1 + 12K^3\varepsilon^2\alpha_3)\phi + 2aK\varepsilon^2(\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6)\phi^3 = 0. \quad (6)$$

而对 (4) 式关于 ξ 求一阶导, 得到 ϕ'''' 如下:

$$\begin{aligned} \phi'''' &= \frac{1}{4a^2K\varepsilon^2\alpha_3}(-4K\varepsilon^2\alpha_4\phi\phi'^2 + 4K\varepsilon^2\alpha_5\phi\phi'^2 \\ &- 4K\varepsilon^2\alpha_6\phi\phi'^2 + c\phi'' - 2K\alpha_1\phi'' \\ &+ 4K^3\varepsilon^2\alpha_3\phi'' - 2K\varepsilon^2\alpha_4\phi^2\phi'' \\ &+ 2K\varepsilon^2\alpha_5\phi^2\phi'' - 2K\varepsilon^2\alpha_6\phi^2\phi''). \end{aligned} \quad (7)$$

结合 (6) 式和 (7) 式消掉方程 (5) 中的 ϕ'' , ϕ''' 和 ϕ'''' , 有

$$\begin{aligned}
& -\phi'^2 + \frac{c^2 + 4K^2[4\varepsilon^2(-cK + \Omega)\alpha_3 - (\alpha_1 - 4K^2\varepsilon^2\alpha_3)^2]}{16a^2K^2\varepsilon^4\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_7)} \\
& + \frac{c(\alpha_4 + 5\alpha_5 - 2\alpha_6) + 2K\alpha_1(-2\alpha_4 - 4\alpha_5 + \alpha_6) + 4K\alpha_3[3\alpha_2 + K^2\varepsilon^2(\alpha_4 - \alpha_5 - 2\alpha_6 + 3\alpha_7)]}{12a^2K\varepsilon^2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_7)}\phi^2 \\
& + \frac{(-\alpha_4 - 3\alpha_5 + \alpha_6)(\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6) + 12\alpha_3\alpha_8}{12a^2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_7)}\phi^4 = 0.
\end{aligned} \quad (8)$$

另一方面, 将方程 (6) 两边同乘以 $2\phi'$, 得

$$12a^3K\varepsilon^2\alpha_3\phi''\phi' - a(3c - 6K\alpha_1 + 12K^3\varepsilon^2\alpha_3)\phi\phi' + 2aK\varepsilon^2(\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6)\phi^3\phi' = 0. \quad (9)$$

同时, 对方程 (8) 关于 ξ 求一阶导数, 有

$$\begin{aligned}
& \frac{c(\alpha_4 + 5\alpha_5 - 2\alpha_6) + 2K\alpha_1(-2\alpha_4 - 4\alpha_5 + \alpha_6) + 4K\alpha_3[3\alpha_2 + K^2\varepsilon^2(\alpha_4 - \alpha_5 - 2\alpha_6 + 3\alpha_7)]}{6a^2K\varepsilon^2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_7)}\phi\phi' \\
& - 2\phi'\phi'' + \frac{(-\alpha_4 - 3\alpha_5 + \alpha_6)(\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6) + 12\alpha_3\alpha_8}{3a^2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_7)}\phi^3\phi' = 0.
\end{aligned} \quad (10)$$

由于方程 (9) 和方程 (10) 含有相同项, 两者需相容, 则参数满足以下条件:

$$c = \frac{2K[6\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1(\alpha_4 - 7\alpha_5 + \alpha_6 - 3\alpha_7) - 4K^2\varepsilon^2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - 3\alpha_7)]}{2\alpha_4 - 8\alpha_5 + 2\alpha_6 - 3\alpha_7}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& 4\alpha_5^2 + \alpha_6^2 + \alpha_4(-4\alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7) - \alpha_6\alpha_7 \\
& + \alpha_5(-5\alpha_6 + \alpha_7) + 12\alpha_3\alpha_8 = 0.
\end{aligned} \quad (12)$$

因此, 在条件 (11) 式和 (12) 式下, 方程 (9) 和方程 (10) 可同时化为如下常微分方程:

$$\phi'' + \beta_1\phi + \beta_2\phi^3 = 0, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\frac{4K^2\varepsilon^2\alpha_3 - 2\alpha_1 + \frac{c}{K}}{4a^2\varepsilon^2\alpha_3}, \\
\beta_2 &= \frac{\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6}{6a^2\alpha_3}.
\end{aligned} \quad (14)$$

为了借助平面动力系统分岔理论讨论二阶常微分方程 (13) 的二维平衡点类型及相轨迹, 在变换 $X \equiv \phi$ 和 $Y = \phi_\xi$ 下, 方程 (13) 可等价于如下二维平面动力系统:

$$X' = Y, \quad (15a)$$

$$Y' = -\beta_1X - \beta_2X^3. \quad (15b)$$

该系统是一个哈密顿系统, 具有如下哈密顿函数:

$$H(X, Y) = \frac{1}{2}Y^2 + \frac{\beta_1}{2}X^2 + \frac{\beta_2}{4}X^4 = h^*. \quad (16)$$

为了判断系统 (15) 的平衡点的类型, 我们得出其相应的雅克比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_1 - 3\beta_2X^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

该雅克比矩阵的特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\beta_1 - 3\beta_2X^2}$.

根据特征值与平衡点的对应关系, 我们对系统 (15) 的平衡点类型及解的稳定性分析如下:

1) 当 $\beta_1/\beta_2 \geq 0$ 时, 系统只有一个平衡点 $(0, 0)$ 并且在该点处 J 的特征值为 $\pm\sqrt{-\beta_1}$. 如果 $\beta_1 > 0$, 则 $(0, 0)$ 点是中心点; 如果 $\beta_1 < 0$, 则 $(0, 0)$ 点是不稳定鞍点.

2) 当 $\beta_1/\beta_2 < 0$ 时, 系统有三个平衡点: $S_0(0, 0)$, $S_1(\sqrt{-\beta_1/\beta_2}, 0)$ 和 $S_2(-\sqrt{-\beta_1/\beta_2}, 0)$. 对应这些平衡点, J 的特征值分别为 $\pm\sqrt{-\beta_1}$, $\pm\sqrt{2\beta_1}$ 和 $\pm\sqrt{2\beta_1}$. 若 $\beta_1 < 0$, 则 S_0 是不稳定鞍点, 而 S_1 和 S_2 是中心点, 此时存在围绕中心点 S_1 和 S_2 绕至 S_0 的同宿轨道. 若 $\beta_1 > 0$, 那么 S_0 是中心点, S_1 和 S_2 是不稳定的鞍点, 此时系统存在异宿轨道.

为了演示系统 (15) 存在的同宿轨道和异宿轨道, 选取特定参数画出系统 (15) 在条件 $\beta_1/\beta_2 < 0$ 下的相位图, 如图 1 所示. 当取定 $\beta_1 = -1/10$ 和 $\beta_2 = 1/18$, 图 1(a) 显示有一个鞍点和两个中心点, 随着时间的变化从鞍点出发的轨道最终会返回形成同宿轨道. 而当 $\beta_1 = 1$ 和 $\beta_2 = -5/9$ 时, 图 1(b) 显示有一个中心点和两个鞍点, 并形成从一个鞍点到另一个鞍点的异宿轨道.

进一步, 根据相位轨道与非线性偏微分方程的解之间的对应关系^[26,27], 可以得出如下结论: 如果 $\beta_1/\beta_2 < 0$ 且 $\beta_1 < 0$, 则方程 (1) 具有明孤立波解; 而当 $\beta_1/\beta_2 < 0$ 且 $\beta_1 > 0$ 时, 方程 (1) 有冲击波解

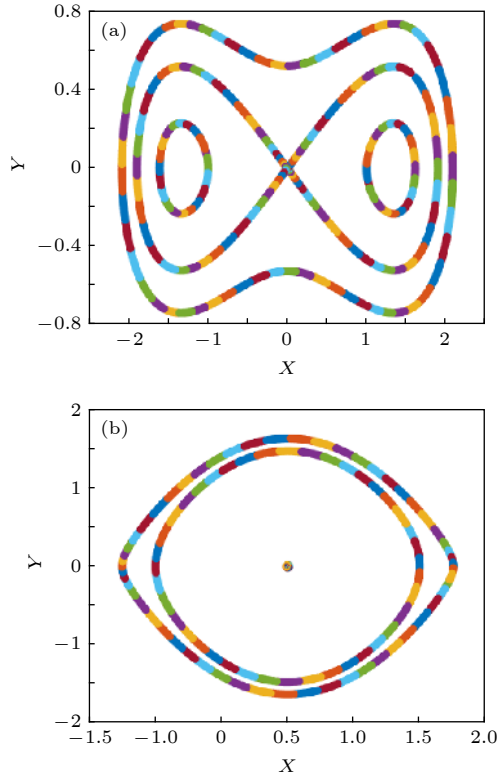


图1 系统(15)的相位图 (a) 同宿轨道 ($\beta_1 = -1/10, \beta_2 = 1/18$); (b) 异宿轨道 ($\beta_1 = 1, \beta_2 = -5/9$)

Fig. 1. Phase portraits of System (15): (a) Homoclinic orbits ($\beta_1 = -1/10, \beta_2 = 1/18$); (b) heteroclinic orbits ($\beta_1 = 1, \beta_2 = -5/9$).

或暗孤立波解. 通过(14)式, 可以将条件 $\beta_1/\beta_2 < 0$ 和 $\beta_1 < 0$ 具体表示为 $6K^2\varepsilon^2\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3c/2K < 0, \alpha_5 - \alpha_4 - \alpha_6 > 0$ 且 $\alpha_3 < 0$ 或者 $6K^2\varepsilon^2\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3c/2K < 0, \alpha_5 - \alpha_4 - \alpha_6 > 0$ 且 $\alpha_3 < 0$. 同样地, 条件 $\beta_1/\beta_2 < 0$ 且 $\beta_1 > 0$ 可具体写成 $6K^2\varepsilon^2\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3c/2K < 0, \alpha_5 - \alpha_4 - \alpha_6 > 0$

且 $\alpha_3 < 0$ 或者 $6K^2\varepsilon^2\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3c/2K < 0, \alpha_5 - \alpha_4 - \alpha_6 > 0$ 且 $\alpha_3 < 0$.

下面为了验证方程(1)中明孤立波解和暗孤立波解的存在性, 分别在同宿轨和异宿轨条件下利用哈密顿函数对系统(15)进行求解. 令 $h^* = h_i = H(S_i) (i = 0, 1, 2)$, 则有

$$h_1 = h_2 = H(S_1) = \frac{-\beta_1^2}{4\beta_2}, \quad h_0 = H(S_0) = 0. \quad (18)$$

事实上, 由相容性条件(11)式和(12)式可知表达式(8)与哈密顿函数(16)式是等价的, 故可得

$$h^* = \frac{c^2 + 4K^2[4\varepsilon^2(-cK + \Omega)\alpha_3 - (\alpha_1 - 4K^2\varepsilon^2\alpha_3)^2]}{16a^2K^2\varepsilon^4\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_7)}. \quad (19)$$

1) 当 $\beta_1 < 0$ 且 $\beta_2 > 0$ 时, 则平衡点 S_0 是不稳定鞍点, 而平衡点 S_1 和 S_2 是中心点, 此时存在围绕中心点 S_1 和 S_2 至 S_0 的同宿轨道. 当 $h^* = h_0$ 时, 由表达式(16)得到

$$\phi'^2 = -\beta_1\phi^2 - \frac{\beta_2}{2}\phi^4. \quad (20)$$

求解得

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{-2\beta_1}{\beta_2}} \operatorname{sech}(\sqrt{-\beta_1}\xi). \quad (21)$$

将解(21)式代入变换(2)式中得到方程(1)的明孤立波解为

$$q(x, t) = \pm e^{i(kx - \Omega t)} \sqrt{\frac{-2\beta_1}{\beta_2}} \operatorname{sech} \sqrt{-\beta_1} a(x - ct), \quad (22)$$

其中

$$c = \frac{2K[6\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1(\alpha_4 - 7\alpha_5 + \alpha_6 - 3\alpha_7) - 4K^2\varepsilon^2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - 3\alpha_7)]}{2\alpha_4 - 8\alpha_5 + 2\alpha_6 - 3\alpha_7},$$

$$\Omega = -\frac{c^2 - 4K^2[4cK\varepsilon^2\alpha_3 + (\alpha_1 - 4K^2\varepsilon^2\alpha_3)^2]}{16K^2\varepsilon^2\alpha_3},$$

$$4\alpha_5^2 + \alpha_6^2 + \alpha_4(-4\alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7) - \alpha_6\alpha_7 + \alpha_5(-5\alpha_6 + \alpha_7) + 12\alpha_3\alpha_8 = 0.$$

2) 当 $\beta_1 > 0$ 且 $\beta_2 < 0$ 时, 那么平衡点 S_0 为中心点, 平衡点 S_1 和 S_2 是不稳定的鞍点, 此时存在异宿轨道. 当 $h^* = h_1 = h_2$ 时, 由表达式(16)得到

$$\phi'^2 = -\beta_1\phi^2 - \frac{\beta_2}{2}\phi^4 - \frac{\beta_1^2}{2\beta_2}. \quad (23)$$

可求得

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{-\beta_1}{\beta_2}} \tanh \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{2}} \xi \right). \quad (24)$$

将解(24)式代入变换(2)式中得到方程(1)的暗孤立波解为

$$q(x, t) = \pm e^{i(kx - \Omega t)} \sqrt{\frac{\beta_1}{-\beta_2}} \tanh \sqrt{\frac{\beta_1}{2}} a(x - ct), \quad (25)$$

其中

$$c = \frac{2K[6\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1(\alpha_4 - 7\alpha_5 + \alpha_6 - 3\alpha_7) - 4K^2\varepsilon^2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - 3\alpha_7)]}{2\alpha_4 - 8\alpha_5 + 2\alpha_6 - 3\alpha_7},$$

$$\Omega = (\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_7) \left[\frac{3(c - 2K\alpha_1 + 4K^3\varepsilon^2\alpha_3)^2}{16K^2\varepsilon^2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6)} + \frac{cK}{\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_7} - \frac{c^2}{16K^2\varepsilon^2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_7)} + \frac{(\alpha_1 - 4K^2\varepsilon^2\alpha_3)^2}{4\varepsilon^2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_7)} \right],$$

$$4\alpha_5^2 = -\alpha_6^2 - \alpha_4(-4\alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7) + \alpha_6\alpha_7 - \alpha_5(-5\alpha_6 + \alpha_7) - 12\alpha_3\alpha_8.$$

根据参数条件, 在解 (22) 式和 (25) 式中选取恰当的参数值得到明暗孤立波的传播图形, 如图 2 所示.

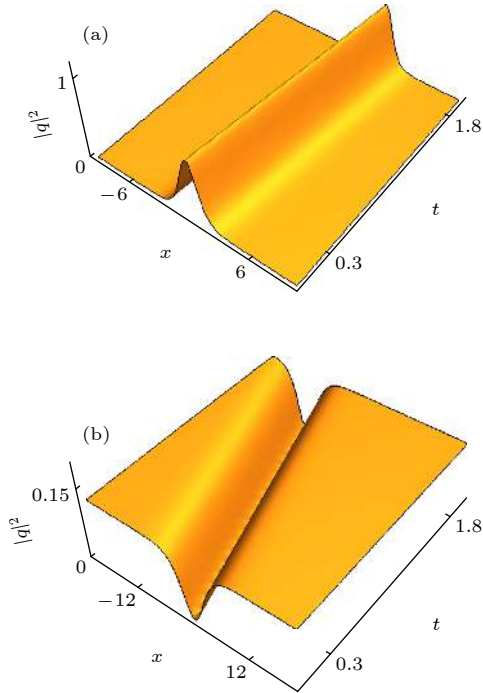


图 2 (a) 由明孤立波解 (22) 式描述的明孤立波传输图形, 其中参数选取为 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 8, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 6, \alpha_7 = 4, \alpha_8 = 6, c = 1, K = 1, \Omega = 51/16, \varepsilon = 1, a = 1$; (b) 由暗孤立波解 (25) 式描述的暗孤立波传输图形, 其中参数选取为 $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -8, \alpha_5 = -2, \alpha_6 = -6, \alpha_7 = -4, \alpha_8 = 6, c = -7, K = 1, \Omega = -123/32, \varepsilon = 1, a = 1$

Fig. 2. (a) Propagation of bright solitary wave via Solution (22) with the parameters chosen as $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 8, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 6, \alpha_7 = 4, \alpha_8 = 6, c = 1, K = 1, \Omega = 51/16, \varepsilon = 1, a = 1$; (b) propagation of dark solitary wave via Solution (25) with the parameters chosen as $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -8, \alpha_5 = -2, \alpha_6 = -6, \alpha_7 = -4, \alpha_8 = 6, c = -7, K = 1, \Omega = -123/32, \varepsilon = 1, a = 1$.

3 呼吸子的速度跳跃点及怪波的形成条件

目前, 怪波解已经被发现存在于很多非线性发展方程中, 例如 NLSE、Hirota 方程、导数非线性

薛定谔方程、Sasa-Satsuma 方程、离散 Ablowitz-Ladik 方程以及变系数高阶非线性薛定谔方程等 [35–37]. 本节将基于方程 (1) 在可积条件下求得的呼吸子解 [30], 分析呼吸子的速度跳跃现象以及怪波产生的条件.

在可积条件下, 分别取方程 (1) 中的参数为 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 8, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 6, \alpha_7 = 4, \alpha_8 = 6$, 得到如下形式:

$$iq_t + q_{xx} + 2q|q|^2 + \varepsilon^2(q_{xxxx} + 6q_x^2q^* + 4q|q_x|^2 + 8|q|^2q_{xx} + 2q^2q_{xx}^* + 6|q|^4q) = 0. \quad (26)$$

基于 AKNS 谱问题, 方程 (26) 的 Lax 对表示如下 [30]:

$$\Phi_x = M\Phi, \quad M = \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ -q^* & i\lambda \end{pmatrix}, \quad (27a)$$

$$\Phi_t = N\Phi, \quad N = \begin{pmatrix} 8i\varepsilon^2A_4 - 2i\lambda^2 + i|q|^2 & 8i\varepsilon^2B_4 + 2\lambda q + iq_x \\ 8i\varepsilon^2C_4 - 2\lambda q^* + iq_x^* & -8i\varepsilon^2A_4 + 2i\lambda^2 - i|q|^2 \end{pmatrix}, \quad (27b)$$

其中

$$\begin{aligned} A_4 &= \lambda^4 - \frac{1}{2}|q|^2\lambda^2 + \frac{i}{4}(qq_x^* - q_xq^*) \\ &\quad + \frac{1}{8}(3q^2q^{*2} + q^*q_{xx} + qq_{xx}^* - q_xq_x^*), \\ B_4 &= iq\lambda^3 - \frac{1}{2}q_x\lambda^2 - \frac{i}{4}(q_{x,x} + 2q^2q^*)\lambda \\ &\quad + \frac{1}{8}(q_{xxx} + 6qq^*q_x), \\ C_4 &= -iq^*\lambda^3 - \frac{1}{2}q_x^*\lambda^2 + \frac{i}{4}(q_{xx}^* + 2qq^{*2})\lambda \\ &\quad + \frac{1}{8}(q_{xxx}^* + 6qq^*q_x^*). \end{aligned} \quad (28)$$

文献 [30] 基于 Lax 对 (27) 式给出了方程 (26) 的一阶达布变换, 其中势函数变换关系如下:

$$q^{[1]} = q^{[0]} - \frac{2i\Delta_1}{\Delta_2}, \quad (29)$$

这里 $\Delta_1 = -2if_{1,1}f_{2,1}\text{Im}(\lambda_1)$, $\Delta_2 = f_{1,1}f_{2,2} - f_{1,2}f_{2,1}$,

其中 $f_{2,1} = -f_{1,2}^*$, $f_{2,2} = f_{1,1}^*$, $(f_{i,1}, f_{i,2})$ ($i = 1, 2$) 是 Lax 对 (27) 式相应 $\lambda = \lambda_i$ ($\lambda_2 = \lambda_1^*$) 的两组线性无关解.

以方程 (26) 的平面波解作为种子解:

$$q^{[0]} = ce^{i\rho}, \quad \rho = ax + bt, \quad (30)$$

其中 $b = \varepsilon^2(a^4 - 12a^2c^2 + 6c^4) + 2c^2 - a^2$, a, b, c 分别代表波的波数、频率和振幅. 此时, 与 $q^{[0]}$ 对应的 Lax 对 (27) 式的解为

$$f_{1,1} = k_1 ce^{i[\frac{\rho}{2} + \kappa(x,t)]} + ik_2 \left(\frac{a}{2} + h + \lambda_1 \right) e^{i[\frac{\rho}{2} - \kappa(x,t)]}, \quad (31a)$$

$$f_{1,2} = k_2 ce^{-i[\frac{\rho}{2} + \kappa(x,t)]} + ik_1 \left(\frac{a}{2} + h + \lambda_1 \right) e^{-i[\frac{\rho}{2} - \kappa(x,t)]}, \quad (31b)$$

其中

$$\kappa = h(x + dt),$$

$$k_1 = e^{ih(s_1\varepsilon + s_2\varepsilon^2)},$$

$$k_2 = e^{-ih(s_1\varepsilon + s_2\varepsilon^2)},$$

$$h = \sqrt{c^2 + \left(\lambda_1 + \frac{a}{2} \right)^2} \equiv h_R + ih_I,$$

$$d = 2\lambda_1 - a + \varepsilon^2[a(a^2 - 6c^2) - 8\lambda_1^3 + 4a\lambda_1^2 + (4c^2 - 2a^2)\lambda_1] \equiv d_R + id_I.$$

将平面波解 (30) 式及特征函数 (31a) 式和 (31b) 式代入变换 (29) 式中, 得到方程 (26) 的一阶呼吸子解为 [30]:

$$q^{[1]} = ce^{i\rho} + \frac{2\eta\{\omega_1 \cos(2G) - \omega_2 \cosh(2F) - i[(\omega_1 - 2c^2) \sin(2G) - \omega_3 \sinh(2F)]\}e^{i\rho}}{\omega_1 \cosh(2F) - \omega_2 \cos(2G)}, \quad (32)$$

其中

$$\omega_1 = c^2 + (h_I + \eta)^2 + \left(\xi + h_R + \frac{a}{s} \right)^2,$$

$$\omega_2 = 2c(h_I + \eta),$$

$$\omega_3 = 2c\left(\xi + h_R + \frac{a}{2}\right),$$

$$F = h_I x + (d_R h_I + d_I h_R) t \equiv k_1 x + w_1 t,$$

$$G = h_R x + (d_R h_R - d_I h_I) t \equiv k_2 x + w_2 t,$$

$$\lambda_1 = \xi + i\eta,$$

这里下标 R 和 I 分别代表相关参数的实部和虚部.

图 3 展示了由呼吸子解 (32) 式描述的单个呼吸子的动力学演化, 其在演化过程中呈现出随时间的周期性震荡现象.

接下来, 将基于呼吸子解的精确表达式 (32) 来分析呼吸子的速度跳跃现象. 根据非线性波速度的相关理论 [38,39], 从表达式 (32) 中可以看出, 呼吸子沿时间和空间轴方向发生周期性震荡, 其震荡性体现在三角函数部分 $\cos(2G)$ 或 $\sin(2G)$, 且 G 中的 k_2 和 w_2 分别代表震荡的空间和时间频率,

震荡速度对应于呼吸子相速度 V_p . 另外, 呼吸子可以在 (x, t) 平面上沿直线传播, 其传播轨迹由 $F = 0$ 决定, 传播速度对应于呼吸子的群速度 V_g . 因此, 得到呼吸子解 (32) 式的群速度 V_g 和相速度 V_p 的表达式如下:

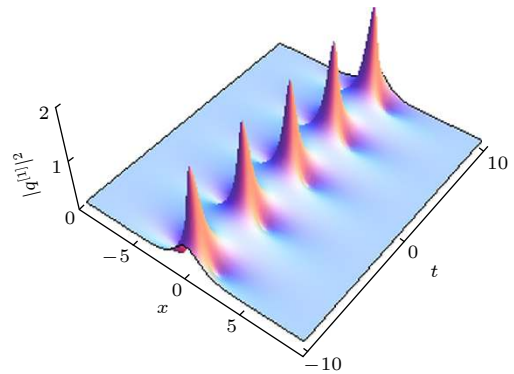


图 3 解 (32) 式描述的一阶呼吸子的动力学演化, 其中参数选取为 $\xi = 0$, $\eta = 1/2$, $c = 2/5$ 和 $a = 0$

Fig. 3. The propagation of one breather via Solution (32) with the parameters chosen as $\xi = 0$, $\eta = 1/2$, $c = 2/5$ and $a = 0$.

$$V_g = -\frac{w_1}{k_1} = -\frac{d_R h_I + d_I h_R}{h_I} = \frac{-8\eta^2(a + 2\xi)(1 - a^2 + 2c^2 + 4\eta^2 + 4a\xi - 12\xi^2)}{a^2 + 4c^2 - 4\eta^2 + 4a\xi + 4\xi^2 + \sqrt{D_1}} + \frac{[a^3 - 2a^2\xi - a(1 + 6c^2 + 4\eta^2 - 4\xi^2) + 2\xi(1 + 2c^2 + 12\eta^2 - 4\xi^2)](a^2 + 4c^2 - 4\eta^2 + 4a\xi + 4\xi^2 + \sqrt{D_1})}{a^2 + 4c^2 - 4\eta^2 + 4a\xi + 4\xi^2 + \sqrt{D_1}}, \quad (33)$$

$$V_p = -\frac{w_2}{k_2} = -\frac{d_R h_R - d_I h_I}{h_R} = 4\xi(c^2 + 6\eta^2 - 2\xi^2) - [a^3 + 2\xi - 2a^2\xi - a(1 + 6c^2 + 4\eta^2 - 4\xi^2)] + \frac{(-1 + a^2 - 2c^2 - 4\eta^2 - 4a\xi + 12\xi^2)(4c^2 - 4\eta^2 + (a + 2\xi)^2) + \sqrt{D_2}}{a + 2\xi}, \quad (34)$$

其中

$$D_1 = 16\eta^2(a + 2\xi)^2 + [a^2 + 4a\xi + 4(c^2 - \eta^2 + \xi^2)]^2, \\ D_2 = (4(c - \eta)^2 + (a + 2\xi)^2)(4(c + \eta)^2 + (a + 2\xi)^2).$$

当 $\eta \rightarrow \pm c$ 时, 群速度 V_g 和相速度 V_p 化简如下:

$$V_g = \frac{-8\eta^2(a + 2\xi)(1 - a^2 + 6c^2 + 4a\xi - 12\xi^2)}{a^2 + 4a\xi + 4\xi^2 + \sqrt{(a + 2\xi)^2(a^2 + 16c^2 + 4a\xi + 4\xi^2)}} + [a^3 - 2a^2\xi - a(1 + 10c^2 - 4\xi^2) + 2\xi(1 + 14c^2 - 4\xi^2)], \quad (35)$$

$$V_p = 4\xi(7c^2 - 2\xi^2) - [a^3 + 2\xi - 2a^2\xi - a(1 + 10c^2 - 4\xi^2)] + \frac{(-1 + a^2 - 6c^2 - 4a\xi + 12\xi^2)((a + 2\xi)^2 + \sqrt{(a + 2\xi)^2[16c^2 + (a + 2\xi)^2]})}{a + 2\xi}. \quad (36)$$

从表达式 (35) 式和 (36) 式中可以看出, 当 ξ 沿不同方向趋于 $-a/2$ 时, $\sqrt{(a + 2\xi)^2}$ 的符号是不同的, 从而导致群速度 V_g 和相速度 V_p 趋于不同的值, 即产生跳跃现象. 为了图形演示速度关于参数 a 的跳跃现象, 我们在条件 $\eta \rightarrow \pm c$ 下, 保留参数 a 且将其他参数取定, 即 $\varepsilon^2 = 1$, $\eta = c$, $c = 1$ 和 $\xi = 1$, 得到,

$$V_g = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad V_p = \frac{\delta_3}{\delta_4}, \quad (37)$$

其中

$$\delta_1 = 2a^4 + a^5 + 2a^2[\sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)} - 15] - a^3[3 + \sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)}] - a \left\{ 48 + 3[4 + \sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)}] - 2[48 + 5\sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)}] \right\} - 2 \left\{ 48 - 3[\sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)} - 4] + 2[7\sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)} - 72] \right\}, \quad (38)$$

$$\delta_2 = \sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)} - 4 - 4a - a^2, \quad (39)$$

$$\delta_3 = a^4 - 80 - 7\sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)} + a^2[\sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)} - 15] + 4[37 + 3\sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)}] - 4a[\sqrt{(2 + a)^2(20 + 4a + a^2)} - 3], \quad (40)$$

$$\delta_4 = -2(a + 2). \quad (41)$$

图 4 给出了群速度 V_g 和相速度 V_p 随参数 a 的变化关系. 以 V_g 为例, 由图 4 可清晰地看到群速度在 $a = -2$ 处出现突然的跳跃. 为了更加说明该跳跃点, 我们计算了群速度在该点的左右极限, 发现 $\lim_{a \rightarrow -2^-} V_g = -54 \neq \lim_{a \rightarrow -2^+} V_g = 14$, 从而表明群速度在 $a = -2$ 处不连续. 类似地, 相速度 V_p 在 $a = -2$

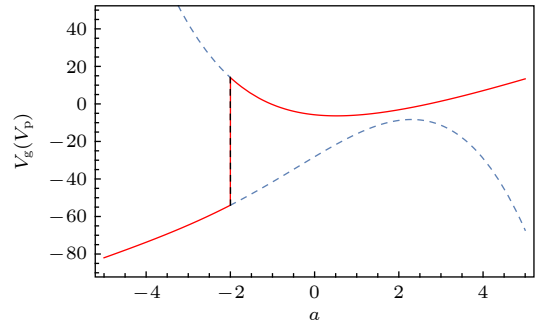


图 4 呼吸子的群速度 V_g (红实线) 和相速度 V_p (蓝虚线) 随参数 a 的变化关系

Fig. 4. Group velocity V_g (red-solid line) and phase velocity V_p (blue-dot line) of the breather.

处的左右极限分别为 14 和 -54, 也是不连续的, 即 $a = -2$ 为跳跃点. 通过对表达式 (37) 的分析, 速度跳跃点的出现是由于分母中包含 $\sqrt{(2+a)^2}$, 从而导致 V_g 和 V_p 在 $a = -2$ 点处不连续. 根据文献 [24] 中关于临界频率的定义, 由于速度在波数 $a = -2$ 处表现出了速度的不连续性, 因此该不连续点可以定义为方程 (26) 的临界波数.

已有研究表明呼吸子在速度跳跃点会转变为怪波 [24,25]. 为了验证方程 (26) 中怪波的形成与速度跳跃的关系, 我们将呼吸子解 (32) 式在 $\xi \rightarrow -a/2$ 和 $\eta \rightarrow c$ 条件下取极限, 即 $\lambda_1 = \xi + i\eta \rightarrow \lambda_0 = -a/2 + ic$, 得到方程 (26) 的一阶怪波解如下:

$$q_{\text{rw}} = \left[c - \frac{4c\theta_1(\lambda_0 - \lambda_0^*)(\theta_4 + \alpha_1^*t)}{4c^2\theta_3\theta_4 + \theta_1\theta_2 + 4c^2[\theta_4\alpha_1 + \alpha_1^*(\theta_3 + \alpha_1t)]t} \right] e^{i\rho(x,t)}, \quad (42)$$

其中

$$\begin{aligned} \rho &= ax + bt, b = (a^4 - 12a^2c^2 + 6c^4)\varepsilon^2 + 2c^2 - a^2, \\ \theta_1 &= \frac{4c^2\alpha_1t}{a + 2\lambda_0} + \frac{(ax + 2\lambda_0x + 2i)\alpha_1 + \alpha_2[a^4\varepsilon^2 - a^2(1 + 6c^2\varepsilon^2) - 8ac^2\varepsilon^2\lambda_0 + 4\lambda_0^2(1 + 2c^2\varepsilon^2 - 4\varepsilon^2\lambda_0^2)]}{a - a^3\varepsilon^2 + 6ac^2\varepsilon^2 - 2\lambda_0 + 2a^2\varepsilon^2\lambda_0 - 4c^2\varepsilon^2\lambda_0 - 4a\varepsilon^2\lambda_0^2 + 8\varepsilon^2\lambda_0^3}, \\ \theta_2 &= \frac{4c^2\alpha_1^*t}{a + 2\lambda_0^*} + \frac{\alpha_1^*(ax + 2x\lambda_0^* - 2i) + \alpha_2^*[a^2(a^2\varepsilon^2 - 6c^2\varepsilon^2 - 1) - 8ac^2\varepsilon^2\lambda_0^* + \lambda_0^{*2}(4 + 8c^2\varepsilon^2) - 16\varepsilon^2\lambda_0^{*4}]}{a - a^3\varepsilon^2 + 6ac^2\varepsilon^2 + 2\lambda_0^*(a^2\varepsilon^2 - 2c^2\varepsilon^2 - 1) - 4a\varepsilon^2\lambda_0^{*2} + 8\varepsilon^2\lambda_0^{*3}}, \\ \theta_3 &= \frac{\alpha_1x + \alpha_2[a^3\varepsilon^2 - 2a^2\varepsilon^2\lambda_0 + a(4\varepsilon^2\lambda_0^2 - 1 - 6c^2\varepsilon^2) + 2(\lambda_0 + 2c^2\varepsilon^2\lambda_0 - 4\varepsilon^2\lambda_0^3)]}{a^3\varepsilon^2 - 2a^2\varepsilon^2\lambda_0 + a(4\varepsilon^2\lambda_0^2 - 1 - 6c^2\varepsilon^2) + 2(\lambda_0 + 2c^2\varepsilon^2\lambda_0 - 4\varepsilon^2\lambda_0^3)}, \\ \theta_4 &= \frac{\alpha_1^*x + \alpha_2^*[a(a^2\varepsilon^2 - 6c^2\varepsilon^2 - 1) + \lambda_0^*(2 - 2a^2\varepsilon^2 + 4c^2\varepsilon^2) + 4a\varepsilon^2\lambda_0^{*2} - 8\varepsilon^2\lambda_0^{*3}]}{a(a^2\varepsilon^2 - 6c^2\varepsilon^2 - 1) + \lambda_0^*(2 - 2a^2\varepsilon^2 + 4c^2\varepsilon^2) + 4a\varepsilon^2\lambda_0^{*2} - 8\varepsilon^2\lambda_0^{*3}}. \end{aligned} \quad (43)$$

这里 α_1 和 α_2 是两个非零的实参数. 图 5 给出了由解 (42) 式描绘的一阶怪波的动力学演化, 其中参数选取为 $c = 1$, $\eta = 1$, $\varepsilon^2 = 1$ 和 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. 通过极限计算, 当 $x \rightarrow \infty$ 或 $t \rightarrow \infty$ 时, 一阶怪波 $|q_{\text{rw}}|^2$ 在无穷远处高度为 1, 从而说明了怪波的空间和时间局域性. 进一步, 借助数值近似计算可以验证 $|q_{\text{rw}}|^2$ 分别在点 $(0.3660257, -1)$ 和 $(-1.3660251, -1)$ 附近取得最小值 5.32932×10^{-13} 和 5.3456×10^{-13} ,

在点 $(-0.4999952, -1)$ 附近取得最大值 9, 该值即为一阶怪波的振幅. 因此, 解 (42) 式符合一阶怪波解具有一个极大值点和两个极小值点的特点, 且最高点振幅为背景波三倍以上. 以上分析表明方程 (26) 的呼吸子解 (42) 式在速度跳跃条件 $\xi \rightarrow -a/2$ 和 $\eta \rightarrow c$ 下转化成了怪波, 进而证明速度的不连续性可以产生怪波. 值得注意的是, 该速度跳跃条件与达布变换方法求怪波解 [24] 时的谱参数取值相一致, 而该谱参数条件对应方程的调制不稳定区域 [40], 因此调制不稳定性与速度跳跃从不同角度揭示了怪波产生的条件.

4 结 论

本文研究了一个在光纤光学和磁力学提出的四阶色散非线性薛定谔方程 (1), 分别从动力学分析和速度不连续性两方面探讨了孤立波和怪波的产生条件.

首先, 利用行波解约化将该四阶色散非线性薛定谔方程变为常微分方程, 然后通过分离常微分方程的实虚部得到二维平面自治系统, 即系统

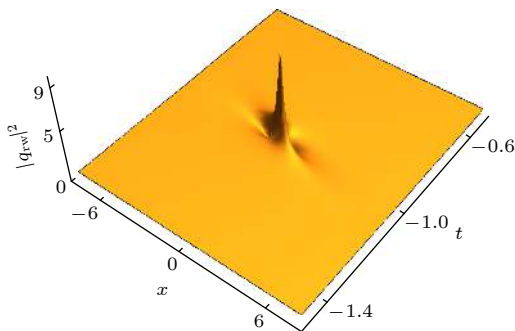


图 5 解 (42) 式描述的一阶怪波的动力学演化, 其中参数选取为 $\xi = 1$, $\eta = 1$, $c = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ 和 $a = -2$

Fig. 5. The propagation of first-order rogue wave via Solution (42) with the parameters chosen as $\xi = 1$, $\eta = 1$, $c = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ and $a = -2$.

(15a) 和 (15b). 进而, 借助相平面分析方法讨论了系统 (15a) 和 (15b) 的平衡点类型及解的稳定性, 同时根据平衡点类型与相轨道的关系发现二维平面自治系统具有同宿轨道和异宿轨道, 并在相应条件下求解得到了方程 (1) 的明孤立波解和暗孤立波解, 从而验证了同异宿轨道分别对应非线性方程的明暗孤立波解.

其次, 为了从速度不连续性角度研究怪波的产生条件, 我们基于非零背景平面之上的精确一阶呼吸子解, 推导出了呼吸子的群速度和相速度的显式表达式. 通过对速度表达式的理论分析发现, 当 $\xi \rightarrow -a/2$ 和 $\eta \rightarrow \pm c$ 时, 群速度和相速度均关于波数存在不连续点, 即跳跃点或临界波数 (见图 3 所示). 同时, 从数学上指出了该跳跃点的出现是由于速度表达式中含有因子 $\sqrt{(a+2\xi)^2}$. 为了验证呼吸子在速度跳跃点可以转化成怪波, 对一阶呼吸子解在速度不连续点处取极限获得了方程 (26) 的一阶怪波解, 从而表明怪波的形成与呼吸子速度的不连续性有关. 另外, 如果取定速度表达式 (35) 式和 (36) 式中其他参数而只保留振幅参数 c , 则群速度和相速度均不会出现不连续点, 如图 6 所示. 在

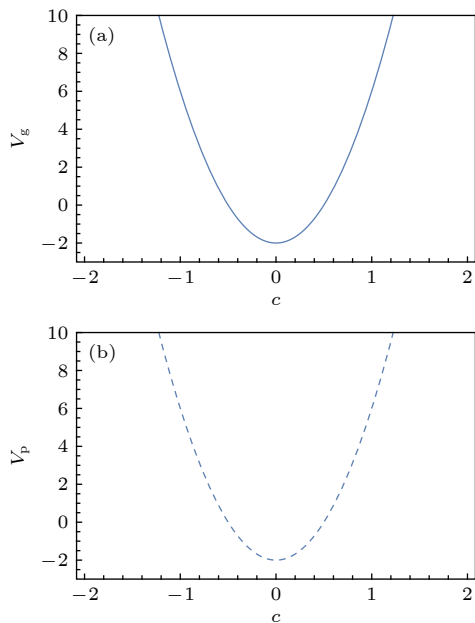


图 6 (a) 群速度 V_g 随振幅参数 c 的变化 (红实线) 和 (b) 相速度 V_p 随振幅参数 c 的变化 (蓝点线), 其中参数选取为 $\xi = 1/2(\sqrt{-4c^2} - a)$, $\eta = 0$ 和 $a = 1$

Fig. 6. Variation of the group velocity V_g (red-solid line) and phase velocity V_p (blue-dot line) about the amplitude parameter c with the parameters chosen as $\xi = 1/2(\sqrt{-4c^2} - a)$, $\eta = 0$ and $a = 1$.

图 6 中, 参数选取为 $\xi = 1/2(-a + \sqrt{-4c^2})$, $\eta = 0$ 和 $a = 1$, 此时群速度和相速度都是关于振幅参数 c 的连续函数.

感谢深圳大学高等研究院的贺劲松教授在中国石油大学 (北京) 所作关于怪波形成机制的学术报告.

参考文献

- [1] He J S, Xu S W, Porsezian 2012 *Phys. Rev. E* **86** 066603
- [2] Bludov Y V, Konotop V V, Akhmediev N 2009 *Phys. Rev. A* **80** 033610
- [3] Stenflo L, Marklund M 2010 *J. Plasma Phys.* **76** 293
- [4] Li M, Shui J J, Xu T 2018 *Appl. Math. Lett.* **83** 110
- [5] Li M, Shui J J, Huang Y H, Wang L, Li H J 2018 *Phys. Scr.* **93** 115203
- [6] Li M, Xu T, Meng D X 2016 *J. Phys. Soc. Jpn.* **85** 124001
- [7] Xu T, Lan S, Li M, Li L L, Zhang G W 2019 *Physica D* **390** 47
- [8] Xu T, Pelinovsky D E 2019 *Phys. Lett. A* **383** 125948; Xu T, Chen Y, Li M, Meng D X 2019 *Chaos* **29** 123124
- [9] Agrawal G P 2012 *Nonlinear Fiber Optics* (5th ed.) (San Diego: Academic Press) pp120–150
- [10] Ma Y C 1979 *Stud. Appl. Math.* **60** 43
- [11] Akhmediev N N, Korneev V I 1986 *Theor. Math. Phys.* **69** 1089
- [12] Calini A, Schober C M 2002 *Phys. Lett. A* **298** 335
- [13] Wang L, Zhang J H, Wang Z Q, Liu C, Li M, Qi F H, Guo R 2016 *Phys. Rev. E* **93** 012214
- [14] Akhmediev N N, Soto-Crespo J M, Ankiewicz A 2009 *Phys. Lett. A* **373** 2137
- [15] Zuo D W, Gao Y T, Xue L, Feng Y J 2014 *Chaos, Solitons Fractals* **69** 217227
- [16] Solli D R, Ropers C, Koonath P, Jalali B 2007 *Nature* **450** 1054
- [17] Chabchoub A, Hoffmann N P, Akhmediev N 2011 *Phys. Rev. E* **106** 204502
- [18] Peregrine D H 1983 *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **25** 16
- [19] Akhmediev N N, Soto-Crespo J M, Ankiewicz A 2009 *Phys. Rev. A* **80** 043818
- [20] Benjamin T B, Feir J E 1967 *J. Fluid. Mech.* **27** 417
- [21] Toffoli T, Fernandez L, Monbaliu J, Benoit M, Gagnaire-Renou E, Lefèvre J M, Cavaleri L, Proment D, Pakozdi C, Stansberg C T, Waseda T, Onorato M 2013 *Phys. Fluids* **25** 091701
- [22] Mussot A, Kudlinski A, Kolobov M, Louvergneaux E, Douay M, Taki M 2009 *Opt. Express* **17** 17010
- [23] Genty G, de Sterke C M, Bang O, Dias F, Akhmediev N, Dudley J M 2010 *Phys. Lett. A* **374** 989
- [24] He J S, Xu S W, Porsezian K, Cheng Y, Dinda P T 2016 *Phys. Rev. E* **93** 062201
- [25] He J S, Xu S W, Porsezian K, Dinda P T, Mihalache D, Malomed B A, Ding E 2017 *Rom. J. Phys.* **62** 203
- [26] Liu S D, Liu S K 1994 *Soliton Wave and Turbulence* (Chinese version) (1st ed.) (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Press) pp90–97
- [27] Infeld E, Rowlands G 2000 *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos* (2th ed.) (Cambridge: Cambridge University Press) pp144–156

- [28] Choudhuri A, Porsezian K 2013 *Phys. Rev. A* **88** 033808
- [29] Porsezian K, Daniel M, Lakshmanan M 1992 *J. Math. Phys.* **33** 1807
- [30] Wang L H, Porsezian K, He J S 2013 *Phys. Rev. E* **87** 053202
- [31] Azzouzi F, Triki H, Mezghiche K, Akrimi A E 2009 *Chaos, Solitons Fractals* **39** 1304
- [32] Daniel M, Latha M M 2001 *Physica A* **298** 351
- [33] Zhang H Q, Tian B, Meng X H, Lü X, Liu W J 2009 *Eur. Phys. J. B* **72** 233
- [34] Liu R X, Tian B, Liu L C, Qin B, Lü X 2013 *Physica B* **413** 120
- [35] Peregrine D H 1983 *The ANZIAM Journal* **25** 16
- [36] Chen S H, Mihalache D 2015 *J. Phys.A: Math. Theor.* **48** 215202
- [37] Liu B Y, Fokas A S, Mihalache D, He J S 2016 *Rom. Rep. Phys.* **68** 1425
- [38] Zakharov V E, Gelash A A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 054101
- [39] Whitham G B 1999 *Linear and Nonlinear Waves* (2nd ed.) (New York: A Wiley-Interscience Publication) pp363-374
- [40] Ruban V, Kodama Y, Ruderman M, et al. 2010 *Eur. Phys. J. Special Topics* **185** 5

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Study on the generation mechanism of bright and dark solitary waves and rogue wave for a fourth-order dispersive nonlinear Schrödinger equation^{*}

Li Min ^{1)†} Wang Bo-Ting ¹⁾ Xu Tao ^{2)‡} Shui Juan-Juan ¹⁾

1) (Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

2) (College of Science, China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

(Received 12 September 2019; revised manuscript received 4 November 2019)

Abstract

In this paper, we study the generation mechanism of bright and dark solitary waves and rogue wave for the fourth-order dispersive nonlinear Schrödinger (FODNLS) equation, which can not only model the nonlinear propagation and interaction of ultrashort pulses in the high-speed optical fiber transmission system, but also govern the nonlinear spin excitations in the onedimensional isotropic biquadratic Heisenberg ferromagnetic spin with the octupole-dipole interaction. Firstly, via the phase plane analysis, we obtain both the homoclinic and heteroclinic orbits for the two-dimensional plane autonomous system reduced from the FODNLS equation. Further, we derive the bright and dark solitary wave solutions under the corresponding conditions, which reveals the relationship between the homoclinic (heteroclinic) orbit and solitary wave. Secondly, based on the exact first-order breather solution of the FODNLS equation over a nonvanishing background, we give the explicit expressions of group and phase velocities, and reveal that there exists a jump in both the velocities. Finally, in order to verify that the breather becomes a rogue wave at the jumping point, we obtain the first-order rogue wave solution by taking the limit of the breather solution at such point, which confirms the relationship of the generation of rogue wave with the velocity discontinuity.

Keywords: homoclinic and heteroclinic orbits, solitary waves, rogue wave, velocity discontinuity

PACS: 05.45.Yv, 02.30.Ik

DOI: 10.7498/aps.69.20191384

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11705284, 61505054) and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. 2017MS051).

[†] Corresponding author. E-mail: ml85@ncepu.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: xutao@cup.edu.cn

可积系统多孤子解的全反演对称表达式

楼森岳

Full reversal symmetric multiple soliton solutions for integrable systems

Lou Sen-Yue

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010503 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191172

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191172>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

时间反演对称性破缺系统中的拓扑零能模

Topological zero-energy modes in time-reversal-symmetry-broken systems

物理学报. 2017, 66(22): 220201 <https://doi.org/10.7498/aps.66.220201>

缀饰格子中时间反演对称破缺的量子自旋霍尔效应

Time-reversal-symmetry broken quantum spin Hall in Lieb lattice

物理学报. 2017, 66(12): 127303 <https://doi.org/10.7498/aps.66.127303>

领导-跟随多智能体系统的部分分量一致性

Partial component consensus of leader-following multi-agent systems

物理学报. 2017, 66(6): 060201 <https://doi.org/10.7498/aps.66.060201>

强迫Lorenz系统的可预报性研究

Predictability of forced Lorenz system

物理学报. 2017, 66(6): 060503 <https://doi.org/10.7498/aps.66.060503>

无线多径信道中基于时间反演的物理层安全传输机制

Secure transmission mechanism based on time reversal over wireless multipath channels

物理学报. 2018, 67(5): 050201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172134>

改进的单次散射相函数解析表达式

Modified analytic expression for the single-scattering phase function

物理学报. 2017, 66(18): 180201 <https://doi.org/10.7498/aps.66.180201>

专题：非线性物理

可积系统多孤子解的全反演对称表达式*

楼森岳†

(宁波大学物理科学与技术学院, 宁波 315211)

(2019 年 7 月 31 日收到; 2019 年 9 月 26 日收到修改稿)

多孤子解是非线性数学物理系统的基本激发模式. 文献中存在各种类型的表达式, 如广田 (Hirota) 形式, 朗斯基 (Wronskian) 或双朗斯基形式和法夫 (Phaffian) 形式. 最近在多地系统的研究中, 我们发现使用一种全新但等价的形式具有极为简洁和方便的优点. 本文主要综述多种类型可积非线性系统的多孤子解的新型表达式, 同时对 SK 方程、非对称 NNV 系统、修正 KdV 型、sG 型、AKNS 模型和全离散 H_1 系统也给出一些文献中还没出现过的新的更为简便的表达式. 新的孤子表达式通常具有显然的时空全反演 (包括时间反演、空间反演、孤子初始位置反演及电荷共轭反演 (正反粒子反演)) 对称性. 这种具有显式全反演对称性的表达式在研究多地非局域系统和局域和非局域可积系统的各种共振结构时具有很大的优越性.

关键词: 可积系统, 多孤子解, 全反演对称性, 多地系统

PACS: 05.45.Yv, 02.30.Ik, 11.30.Er, 11.10.Lm

DOI: 10.7498/aps.69.20191172

1 引言

自从孤立波的发现^[1]、孤立子 (孤子) 概念的提出^[2]和反散射方法的建立^[3]以来, 孤子在物理学的各个分支如流体物理^[4]、等离子体物理^[5]、光纤物理^[6]、光学^[7–10]、复杂系统和复杂网络^[11]、量子场论和粒子物理^[12]、引力理论^[13]、玻色爱因斯坦凝聚^[14]、大气和海洋物理^[15]等等起着非常重要的作用.

求解可积系统的多孤子解有很多方法, 如广田 (Hirota) 法^[16]、达布 (Darboux) 变换法^[17]、反散射方法^[3]、对称性方法^[18]等等. 通常使用不同的方法得到的多孤子解表面上可以是很不一样的. 如 Hirota 方法得到的指数函数形式的组合求和解和 Phaffian 解及达布变换方法得到的朗斯基或双朗斯基解等等. 而要证明这些看起来不同的表达式的等价性也往往不是显然的, 也因此经常误导一些作

者声称得到了“新”的孤子解. 对于众所周知的可积系统, 要声称得到新解必须非常慎重. 对于单孤子解, 各种非线性模型的单孤子解绝大多数的文献都采用紧致简洁的双曲函数形式, 因此很多著名专家如 Hirota 和 Toda 及我国的陈登远^[19]等都期望能用双曲函数来简洁地表达多孤子解, 但是这一期望直到我们的工作^[15,20]发表前一直没有被实现.

自然界隐含着各种各样的对称性, 如时空平移不变性、标度不变性、空间转动不变性、宇称反演 (空间反演) 不变性等等. 因此, 描述物理基本规律的方程都自然地包含了这些反映自然规律的不变性质. 然而, 作为非线性可积系统的最基本的非线性激发, 现有的多孤子解却往往没有把它们具有的对对称性反映出来. 最近, 在文献^[20]中我们把多孤子解的全反演 (包括时空反演、所有孤子的初始位置反演、电荷共轭反演、位相反演和场反演等) 对称性明显地体现在了新的表达式中.

本文第 2 节我们首先综述给出 Korteweg de Vries (KdV) 型方程的多孤子解的 Hirota 形式并将

* 国家自然科学基金 (批准号: 11975131, 11435005).

† 通信作者. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn

它改写成具有明显的全反演对称表达式. 在相应的子节中我们给出 KdV 方程、Toda 方程、Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程 (包括 KdV 方程和 Boussinesq 方程)、(1 + 1 维和 2 + 1 维) Sawada-Kotera (SK) 方程、非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov (NNV) 等对应方程的具有明显的全反演对称性的多孤子解. 在第 3 节我们综述给出修正 KdV (MKdV) 和 sine-Gordon (sG) 型方程的多孤子解的 Hirota 形式以及具有明显的全反演对称表达式. 特别给出 MKdV 方程和 sG 方程的一个新的具有明显全反演对称性的多孤子解. 第 4 节中, 我们给出散焦型非线性薛定谔 (NLS) 方程多孤子解的具有明显全反演对称 (包括电荷共轭对称) 的表达式. 对于聚焦型 NLS 方程, 具有显式的时空反演对称性和电荷共轭对称性的表达式比 Hirota 形式更为复杂. 因此, 本文不作直接讨论. 在第 5 节中, 我们直接给出 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) 系统多孤子解的一种新表达式: 范德蒙-朗斯基行列式形式. 同时指出该新形式包含的全反演对称性. 本文第 6 节, 我们在重新定义全离散的双曲函数后, 写下全离散势 KdV 系统 (H_1) 的具有明显的全反演对称多孤子解. 最后一节是总结和讨论.

2 KdV-KP-Toda 型多孤子解的新型表达式

KdV-KP-Toda 型方程文献中简单地称之为 KdV 型方程 [21]. 其一般的多孤子解 (N-孤子解) 的 Hirota 形式可以统一地写为

$$u = 2 (\ln F)_{xx}, \quad (1)$$

$$F = \sum_{\mu=0,1} \exp \left(\sum_{j=1}^N \mu_j \xi_j + \sum_{1 \leq j < l}^N \mu_j \mu_l \theta_{jl} \right), \quad (2)$$

其中关于 μ 的求和是关于 $\mu_i = 0, 1, i = 1, 2, \dots, N$ 的各种可能组合的求和, ξ_j 为

$$\begin{aligned} \xi_j &= \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0j}), \\ \mathbf{k}_j &= \{k_{j1}, k_{j2}, \dots, k_{jd}\}, \\ \mathbf{x} &= \{x_1, x_2, \dots, x_d\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$x_i, i = 1, 2, \dots, d$, 可以是连续的或离散的空间和时间变量. $\mathbf{x}_{0j}$ 代表第 j 个孤子的任意初始位置向

量. 对于给定的模型 $\mathbf{k}_{ji}$ 要满足相应的色散关系, $\exp(\theta_{jl})$ 要满足三孤子存在条件. (1) 中的 F 满足所谓的 Hirota 双线性方程

$$P(D_x)F \cdot F = 0. \quad (4)$$

(4) 式中 Hirota 双线性算子 D_x 定义为

$$D_x^n F \cdot G = (\partial_x - \partial_y)^n F(\mathbf{x})G(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}. \quad (5)$$

文献 [21] 对各种可能存在三孤子的 $P(D_x)$ 作了完整的分类.

从 (1) 和 (2), 我们可以看到时空平移不变性 (任意初始位置向量) 外, 我们并不能看到其它对称性. 为了找到明显的全反演不变的多孤子解表达式, 我们可以利用 (1) 和 (2) 的下述的显然的对称性,

$$F \rightarrow \beta \exp(Kx + \Omega t + X_0)F, \quad (6)$$

其中 β, K, Ω 和 X_0 为任意常数. 利用对称性 (6), 重新定义任意的孤子初始位置向量, 将 ξ_j 重写为

$$\xi_j = \eta_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} \theta_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i=j+1}^N \theta_{ji}, \quad (7)$$

$$\eta_j = \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0j}), \quad (8)$$

则 (1) 和 (2) 可以重新改写为

$$u = 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx}, \quad (9)$$

其中关于 $\nu = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\}$ 的求和必须对所有 $\nu_i = 1, -1, i = 1, 2, \dots, N$ 的非对偶组合求和. 由于 (9) 中的双曲函数是偶函数, 所以 ν 和 $-\nu$ 产生的是一样的贡献, 所以我们称 ν 和 $-\nu$ 是互为对偶的. 在 (9) 中的与组合 ν 相关的常数 K_{ν} 与模型的多孤子存在条件相关. 下面各子节我们列出具体的 KdV-KP-Toda 型多孤子解的具有全反演对称性的具体表达式.

2.1 KdV 方程的多孤子解

对于 KdV 方程

$$KdV \equiv u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0, \quad (10)$$

多孤子解为

$$\begin{aligned} u &= 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx}, \\ \eta_j &= k_j(x - x_{0j}) - k_j^3(t - t_{0j}), \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$K_\nu = \prod_{i>j} (k_i - \nu_i \nu_j k_j). \quad (12)$$

从 (11) 可以看出, KdV 方程的多孤子解 (11) 具有显然的全反演 (时空反演 $\{x, t\} \rightarrow \{-x, -t\}$ 和孤子初始位置反演 $\{x_{0j}, t_{0j}\} \rightarrow \{-x_{0j}, -t_{0j}\}$) 变换下的不变性. 换句话说 KdV 方程的多孤子解 (11) 是在全反演变换

$$\eta_j \rightarrow -\eta_j \quad (13)$$

下不变的.

两地非局域 KdV 系统 (也称作是 Alice-Bob KdV(ABKdV) 系统)

$$\Delta(A, B) = 0, B = A(-x, -t) \quad (14)$$

具有如下性质

$$\Delta(A, A) = KdV, \quad (15)$$

其中 KdV 由 (10) 定义. 许多具体的 $\Delta(A, B)$ 可在文献 (如 [20]) 中找到. 由于 (11) 的全反演变换不变性, 因此

$$A = 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx}, \quad (16)$$

$$\eta_j = k_j x - k_j^3 t,$$

是任意 ABKdV 系统 (14) 的 PT(P 宇称, T 时间反演) 不变解.

2.2 KP 方程的多孤子解

对于 KP 方程 (包括 KdV 方程 $u_y = 0$ 和 Boussinesq 方程 $u_t = 0$)

$$KP \equiv (u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3\sigma^2 u_{yy} = 0, \quad \sigma^2 = \pm 1, \quad (17)$$

多孤子解为

$$u = 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx}, \quad (18)$$

$$\eta_j = k_j(x - x_{0j}) + k_j l_j(y - y_{0j}) - k_j(3\sigma^2 l_j^2 + k_j^2)(t - t_{0j}),$$

其中

$$K_{\nu}^2 = \prod_{i>j} [(k_i - \nu_i \nu_j k_j)^2 - \sigma^2(l_i - l_j)^2]. \quad (19)$$

从 (18) 可知, KP 方程的多孤子解 (18) 是在全反演变换 (13) 下不变的.

两地非局域 KP 系统 (Alice-Bob KP(ABKP)

系统)

$$\Delta(A, B) = 0, B = A(-x, -y, -t) \quad (20)$$

是具有如下性质

$$\Delta(A, A) = KP, \quad (21)$$

的非局域系统, 其中 KP 由 (17) 定义. 一些具体的 $\Delta(A, B)$ 可在文献 (如 [20]) 中找到. 由于 (18) 的全反演变换不变性, 因此

$$A = 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx}, \quad (22)$$

$$\eta_j = k_j x + k_j l_j y - k_j(3\sigma^2 l_j^2 + k_j^2)t,$$

是任意 ABKP 系统 (20) 的 PT (P 宇称, T 时间反演) 不变解.

2.3 Toda 方程的多孤子解

为了将多孤子解写成统一的形式, 对于 Toda 系统我们采用下述等价形式

$$Toda \equiv (u_n + 2)u_{n,xx} - u_{n,x}^2 + \frac{1}{2}(u_n + 2)^2 E^2 u_{n-1} = 0, \quad (23)$$

其中差分算子 E 定义为

$$Eu_n = u_{n+1} - u_n. \quad (24)$$

Toda 方程 (23) 的全反演对称多孤子解为

$$u = 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx}, \quad (25)$$

$$\eta_j = k_j(n - n_{0j}) + 2 \sinh \frac{k_j}{2}(x - x_{0j}),$$

其中

$$K_{\nu} = \prod_{i>j} \sinh \frac{1}{4}(k_i - \nu_i \nu_j k_j). \quad (26)$$

从 (25) 可知, Toda 方程的多孤子解 (25) 是在全反演变换 (13) 下不变的.

两地非局域 Toda 系统 (Alice-Bob Toda(ABT) 系统)

$$\Delta(A, B) = 0, B = A(-x, -n) \quad (27)$$

是具有如下性质

$$\Delta(A, A) = Toda, \quad (28)$$

的非局域系统, 其中 $Toda$ 由 (23) 定义. 具体的 $\Delta(A, B)$ 的例子可在文献 (如文献 [20]) 中找到. 由于 (25) 的全反演变换不变性, 因此

$$A = 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx},$$

$$\eta_j = k_j n + 2 \sinh \frac{k_j}{2} x, \quad (29)$$

是任意 ABToda 系统 (27) 的 PP_n (P 宇称, P_n 离散变量 n 的反演) 不变解。

2.4 SK 方程的多孤子解

关于 $(2+1)$ -维的 SK 方程

$$SK \equiv u_t - 5v_y + (u_{xxxx} + 15u^3 + 15uu_{xx} + 15uv + 5v_{xx})_x = 0,$$

$$u_y = v_x \quad (30)$$

的全反演对称多孤子解为

$$u = 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx},$$

$$\eta_j = k_j [(x - x_{0j}) + l_j (y - y_{0j}) - (k_j^4 + 5k_j^2 l_j - 5l_j^2)(t - t_{0j})], \quad (31)$$

其中 $(k_{ij} \equiv k_i - \nu_i \nu_j k_j)$

$$K_{\nu}^2 = \prod_{i>j} [k_{ij}^2 (k_{ij}^2 + \nu_i \nu_j k_i k_j + 2l_i + 2l_j) - k_{ij} (k_i l_j - \nu_i \nu_j k_j l_i) + (l_i - l_j)^2]. \quad (32)$$

从 (31) 可知, SK 方程的多孤子解 (31) 是在全反演变换 (13) 下不变的。

$(1+1)$ -维的 SK 系统的多孤子解可以简单地在 $(2+1)$ -维的结果中取 $l_j = 0$ 使得 $u_y = 0$, $v = 0$ 即可。

两地非局域 SK 系统 (Alice-Bob SK (ABSK) 系统)

$$\Delta(A, B) = 0, B = A(-x, -y, -t) \quad (33)$$

是具有如下性质

$$\Delta(A, A) = SK, \quad (34)$$

的非局域系统, 其中 SK 由 (30) 定义. 由于 (31) 的全反演变换不变性, 因此

$$A = 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx},$$

$$\eta_j = k_j [x + l_j y - (k_j^4 + 5k_j^2 l_j - 5l_j^2)t], \quad (35)$$

是任意 ABSK 系统 (33) 的 PT 不变解。

2.5 非对称 NNV 方程的多孤子解

非对称的 NNV 方程

$$ANNV \equiv u_t + (u_{xx} + 3uv + av)_x = 0, \quad u_x = v_y \quad (36)$$

的全反演对称多孤子解为

$$u = 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx},$$

$$\eta_j = k_j [(x - x_{0j}) + l_j (y - y_{0j}) - (al_j^{-1} + k_j^2)(t - t_{0j})], \quad (37)$$

其中

$$K_{\nu}^2 = \prod_{i>j} [a(l_i - l_j)^2 - 3l_i l_j (k_i - \nu_i \nu_j k_j)(k_i l_i - \nu_i \nu_j k_j l_j)]. \quad (38)$$

从 (37) 可知, 非对称 NNV 方程的多孤子解 (37) 是在全反演变换 (13) 下不变的。

两地非局域非对称 NNV 系统 (Alice-Bob ANNV (ABANNV) 系统)

$$\Delta(A, B) = 0, B = A(-x, -y, -t) \quad (39)$$

是具有如下性质

$$\Delta(A, A) = ANNV, \quad (40)$$

的非局域系统, 其中 $ANNV$ 由 (36) 定义. 由于 (37) 的全反演变换不变性, 因此

$$A = 2 \left[\ln \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right) \right]_{xx},$$

$$\eta_j = k_j [x + l_j t - (ak_j l_j^{-1} + k_j^2)t], \quad (41)$$

是任意 ABANNV 系统 (39) 的 PT 不变解。

3 MKdV-sG 型多孤子解的新型表达式

MKdV-sG 型方程在传统文献中通常分为 MKdV 型和 sG 型两种类型的方程 [21]. 其实从多孤子解的表达式可知, 这两种类型可以归结为同一种类型. 实际上人们都知道, MKdV 方程的势形式和 sG 方程是属于同一个可积梯队的. MKdV-sG 型方程的多孤子解的 Hirota 形式可以统一地写为 [19] ($i \equiv \sqrt{-1}$)

$$u^{MKdV} = \frac{1}{2} u_x^{sG} = i \left(\ln \frac{F_-}{F_+} \right)_x, \quad (42)$$

$$F_{\pm} = \sum_{\mu=0,1} \exp \left(\sum_{j=1}^N \mu_j \left(\xi_j \pm i \frac{\pi}{2} \right) + \sum_{1 \leq j < l} \mu_j \mu_l \theta_{jl} \right), \quad (43)$$

其中关于 μ 的求和是关于 $\mu_i = 0, 1, i = 1, 2, \dots, N$ 的各种可能组合的求和, ξ_j 为

$$\begin{aligned} \xi_j &= \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0j}), \\ \mathbf{k}_j &= \{k_{j1}, k_{j2}, \dots, k_{jd}\}, \\ \mathbf{x} &= \{x_1, x_2, \dots, x_d\}, \end{aligned} \quad (44)$$

$x_i, i = 1, 2, \dots, d$, 可以是连续的或离散的空间和时间变量. $\mathbf{x}_{0j}$ 代表第 j 个孤子的任意初始位置向量. 对于给定的模型 $\mathbf{k}_{ji}$ 要满足相应的色散关系, $\exp(\theta_{jl})$ 要满足三孤子存在条件. (42) 式中的 $F_{\pm}$ 满足所谓的 Hirota 双线性方程 [21]

$$P(D_{\mathbf{x}})F_+ \cdot F_- = 0, \quad (45)$$

$$Q(D_{\mathbf{x}})(F_+ \cdot F_+ + aF_- \cdot F_-) = 0, \quad (46)$$

其中 Q 是偶函数, P 可以是偶函数(sG)也可以是奇函数(MKdV). 如果 P 是奇函数, (45)和(46)式通过转动变换可以等价地写为

$$P(D_{\bar{\mathbf{x}}})F_+ \cdot F_- = 0, \quad (47)$$

$$Q(D_{\bar{\mathbf{x}}})F_+ \cdot F_- = 0. \quad (48)$$

在文献 [21] 中, Hietarinta 对各种可能的三孤子存在条件对 P 和 Q 作了完整的分类.

为了找到 MKdV-sG 系统的明显的全反演不变的多孤子解表达式, 可以利用 (42) 和 (43) 式的下述显然的对称性,

$$F_{\pm} \rightarrow \beta \exp \left(Kx + \Omega t + X_0 \pm i \frac{M\pi}{2} \right) F_{\pm}, \quad (49)$$

其中 β, K, Ω 和 X_0 为任意常数, M 为任意整数. 利用对称性 (49), 类似于 KdV 型的情况, 重新定义任意的孤子初始位置向量, 解 (42) 和 (43) 可以等价地改写为

$$u^{\text{MKdV}} = \frac{1}{2} u_x^{\text{sG}} = i \ln \frac{\sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j^- \right)}{\sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j^+ \right)}, \quad (50)$$

$$\eta_j^{\pm} = \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0j}) \pm i \frac{\pi}{2} \equiv \eta_j \pm i \frac{\pi}{2}, \quad (50)$$

其中关于 $\nu = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\}$ 的求和必须对所有 $\nu_i = 1, -1, i = 1, 2, \dots, N$ 的非对偶组合求和. 在 (50) 中的与组合 ν 相关的常数 K_{ν} 与模型的多孤子

存在条件相关. 在表达式 (50) 中显然的全反演对称变换包含了时空反演 $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, 孤子初始位置反演 $\mathbf{x}_{0j} \rightarrow -\mathbf{x}_{0j}$, 电荷共轭反演 $i \rightarrow -i$ 以及场反演 $u \rightarrow -u$. 实际上, 波向量 $\mathbf{k}_j$ 为实的话, 解 (50) 也是实的. 所以对于实的 $\mathbf{k}_j$, 解 (50) 可以进一步改写成实形式,

$$\begin{aligned} u^{\text{MKdV}} &= \frac{1}{2} u_x^{\text{sG}} \\ &= \pm 2 \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1} \frac{\sum_{\nu_e} K_{\nu} \sinh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right)}{\sum_{\nu_o} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right)}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\eta_j = \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0j}), \quad (51)$$

其中关于 ν_o 和 ν_e 的求和分别是关于 ν 的非对偶的奇排列和偶排列求和. 奇(偶)排列定义为排列 $\nu_i = 1, -1, i = 1, 2, \dots, N$ 中具有奇(偶)数个 $\nu_i = 1$.

下面各子节我们列出一些具体的 MKdV-sG 型多孤子解的具有全反演对称性的具体表达式.

3.1 MKdV 方程多孤子解

对于修正 KdV 方程

$$MKdV \equiv u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (52)$$

的多孤子解由 (50) 或 (51) 给出, 其中第 j 个孤子的行波变量 η_j 和分布系数(相互作用常数) K_{ν} 为

$$\eta_j = k_j(x - x_{0j}) - k_j^3(t - t_{0j}), \quad (53)$$

$$K_{\nu} \equiv \prod_{i>j} (k_i - \nu_i \nu_j k_j). \quad (54)$$

任意的具有性质 $\Delta(A, A) = MKdV$ 的两地 MKdV 系统

$$\Delta(A, B) = 0, B = A(-x, -t)$$

的 PT 群不变多孤子解具有与 (50) 或 (51) 相同的形式, 但 (53) 中的 x_{0j} 和 t_{0j} 都必须为零.

3.2 sG 方程的多孤子解

对于 sG 方程

$$sG \equiv u_{xt} = \sin(u) \quad (55)$$

的多孤子解由 (50) 或 (51) 给出, 其中第 j 个孤子的行波变量 η_j 和分布系数(相互作用常数) K_{ν} 为

$$\eta_j = k_j(x - x_{0j}) + k_j^{-1}(t - t_{0j}), \quad (56)$$

$$K_\nu \equiv \prod_{i>j} (k_i - \nu_i \nu_j k_j). \quad (57)$$

任意的具有性质 $\Delta(A, A) = sG$ 的两地 sG 系统

$$\Delta(A, B) = 0, B = A(-x, -t)$$

的 PT 群不变多孤子解具有与 (50) 或 (51) 相同的形式, 但 (56) 中的 x_{0j} 和 t_{0j} 都应取为零.

4 NLS 方程多孤子解的新型表达式

对应于非线性薛定谔 (NLS) 方程

$$NLS \equiv iu_t + u_{xx} + 2\sigma|u|^2u = 0, \quad \sigma = \pm 1, \quad (58)$$

存在散焦 ($\sigma = -1$) 和聚焦 ($\sigma = 1$) 两种完全不同的情况, 需要区别对待. 由于聚焦 NLS 方程的双曲函数表达式过于复杂, 我们不在本文讨论这种形式, 而仅仅处理散焦 NLS 方程的新型孤子解.

散焦 ($\sigma = -1$) NLS 系统 (58) 的多孤子解的 Hirota 形式为 [19]

$$u = \sqrt{2\alpha} \exp(-i\alpha^2 t + i\phi_0) \times \frac{\sum_{\mu} \exp \left(\sum_{j=1}^N \mu_j (\xi_j + 2i\theta_j) + \sum_{j<l} \mu_j \mu_l \theta_{jl} \right)}{\sum_{\mu} \exp \left[\sum_{j=1}^N \mu_j \xi_j + \sum_{j<l} \mu_j \mu_l \theta_{jl} \right]}, \quad (59)$$

其中孤子行波变量为

$$\xi_j = \sqrt{2\alpha} \sin(\theta_j) (x + \sqrt{2\alpha} \cos(\theta_j)t) + \xi_{0j}, \quad (60)$$

相互作用常数为

$$\exp(\theta_{jl}) = \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\theta_j - \theta_l)}{\sin \frac{1}{2}(\theta_j + \theta_l)} \right)^2, \quad (61)$$

而 $\alpha, \xi_{0j}, \theta_j, j = 1, 2, \dots, N$ 和 ϕ_0 为任意常数. (59) 中的关于 μ 的求和是对所有可能组合 $\mu_j = 0, 1, j = 1, 2, \dots, N$ 的求和.

类似于 KdV-KP-Toda 型方程的情况, 多孤子解 (59) 可以重新改写成全反演对称形式,

$$u = \sqrt{2\alpha} \exp[-i\alpha^2 t + i\phi_0'] \times \frac{\sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j (\eta_j + 2i\theta_j) \right]}{\sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \eta_j \right)}, \quad (62)$$

其中关于 ν 的求和是对所有可能的非对偶组合 $\nu_j = 1, -1, j = 1, 2, \dots, N$ 求和. 表达式 (62) 中的孤子行波变量 η_j 及相互作用常数 K_{ν} 为

$$\eta_j = \sqrt{2\alpha} \sin(\theta_j) [x - x_{0j} + \sqrt{2\alpha} \cos(\theta_j) (t - t_{0j})], \quad (63)$$

$$K_{\nu} = \prod_{l<j} \sin \frac{\theta_j - \nu_j \nu_l \theta_l}{2}, \quad (64)$$

$\theta_j, x_{0j}, t_{0j}, \alpha$ and ϕ_0' 为任意实常数.

由于解 (62) 的全反演 (时空反演, 孤子初始位置和初始位相反演, 电荷共轭反演) 不变性, 任意的具有性质 $\Delta(A, A) = NLS(\sigma = -1)$ 的两地 NLS 系统

$$\Delta(A, B) = 0, B = A^*(-x, -t)$$

的 PTC (C 为电荷共轭, 即复共轭) 群不变多孤子解具有与 (62) 相同的形式, 但 (63) 中的 x_{0j}, t_{0j} 和初始位相 ϕ_0' 都应取为零.

聚焦 NLS 系统多孤子解的 Hirota 形式虽然没有显式的简单的全反演对称形式, 但是这一对称性还是隐含着的 [15].

5 AKNS 系统多孤子解的新型表达式

AKNS 系统

$$AKNS \equiv \begin{cases} iu_t + u_{xx} + 2\sigma u^2 v = 0, \\ -iv_t + v_{xx} + 2\sigma v^2 u = 0, \end{cases} \quad \sigma = \pm 1, \quad (65)$$

是最重要的数学物理模型之一, 除了著名的局域的 NLS 方程是其最基本的约化 ($v = u^*$) 外, 很多非局域 NLS 方程也是其对称性约化 [15,22,23]. AKNS 的严格解已经为很多研究者用很多方法研究过 [24,22]. 其多孤子解可以用双朗斯基行列式表示 [22]. 为了较为明显地显示多孤子解的全反演对称性, 我们可以将 AKNS 系统 (65) 的双朗斯基行列式解等价地改写成下述范德蒙-朗斯基行列式形式 ($\{u, v\} \rightarrow \{u_{M,N}, v_{M,N}\}$):

$$\begin{aligned} u_{M,N} &= a \frac{\Delta_{M,N+1}}{\Delta_{M,N}}, \\ v_{M,N} &= \frac{-\sigma \Delta_{M,N-1}}{a \Delta_{M,N}}, \\ \Delta_{m,n} &= \det(\Gamma_{m,n}), \\ 1 &\leq N \leq M-1, \\ M &\leq 1, \end{aligned} \quad (66)$$

其中 $e_j = (-1)^j \exp[k_j(x - x_{0j}) - ik_j^2(t - t_{0j})]$,

$$\Gamma_{m,n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_{m-1} & k_m \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_{m-1}^2 & k_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_{m-1}^{n-1} & k_m^{n-1} \\ e_1 & e_2 & \dots & e_{m-1} & e_m \\ k_1 e_1 & k_2 e_2 & \dots & k_{m-1} e_{m-1} & k_m e_m \\ k_1^2 e_1 & k_2^2 e_2 & \dots & k_{m-1}^2 e_{m-1} & k_m^2 e_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1^{m-n-1} e_1 & k_2^{m-n-1} e_2 & \dots & k_{m-1}^{m-n-1} e_{m-1} & k_m^{m-n-1} e_m \end{pmatrix}. \quad (67)$$

矩阵 (67) 的前 n 行是范德蒙矩阵形式, 后 m 行是朗斯基矩阵形式, 因此我们称解为范德蒙-朗斯基行列式解.

可以证明 AKNS 的范德蒙-朗斯基行列式解 (66) 具有下述全反演变换下的不变性:

时空反演: $\{x, t\} \rightarrow \{-x, -t\}$,

孤子初始位置反演: $\{x_{0j}, t_{0j}\} \rightarrow \{-x_{0j}, -t_{0j}\}$,

场交换: $u_{M,N} \rightarrow (-1)^M a^2 \sigma v_{M,M-N}$. (68)

为了明显看出不变性 (68), 这里我们列出一些小的 M, N 解的具体形式

$$k_{ij} \equiv k_i - k_j,$$

$$E_i \equiv \exp[k_j(x - x_{0j}) - ik_j^2(t - t_{0j})],$$

$$E_{ij} \equiv E_i E_j,$$

$$K_{ijp} = k_{ij} k_{ip} k_{jp},$$

$$K_{ijpq} = k_{ij} k_{ip} k_{iq} k_{jp} k_{iq} k_{pq}$$

$$u_{2,1} = \frac{ak_{12}}{E_1 + E_2},$$

$$v_{2,1} = \frac{\sigma a^{-1} k_{12}}{E_1^{-1} + E_2^{-1}}, \quad (69)$$

$$u_{3,2} = \frac{aK_{123}}{k_{23}E_1 + k_{13}E_2 + k_{12}E_3},$$

$$v_{3,2} = \frac{k_{12}E_{12} + k_{13}E_{13} + k_{23}E_{23}}{a\sigma(k_{23}E_1 + k_{13}E_2 + k_{12}E_3)}, \quad (70)$$

$$v_{3,1} = \frac{-\sigma a^{-1} K_{123}}{k_{23}E_1^{-1} + k_{13}E_2^{-1} + k_{12}E_3^{-1}},$$

$$u_{3,1} = -\frac{a(k_{12}E_{12}^{-1} + k_{13}E_{13}^{-1} + k_{23}E_{23}^{-1})}{k_{23}E_1^{-1} + k_{13}E_2^{-1} + k_{12}E_3^{-1}}, \quad (71)$$

$$u_{4,3} = \frac{aK_{1234}}{K_{234}E_1 + K_{134}E_2 + K_{124}E_3 + K_{123}E_4},$$

$$v_{4,3} = \frac{k_{12}k_{34}(E_{12} + E_{34}) + k_{13}k_{24}(E_{13} + E_{24}) + k_{23}k_{14}(E_{23} + E_{14})}{a\sigma(K_{234}E_1 + K_{134}E_2 + K_{124}E_3 + K_{123}E_4)}, \quad (72)$$

$$v_{4,1} = \frac{\sigma a^{-1} K_{1234}}{K_{234}E_1^{-1} + K_{134}E_2^{-1} + K_{124}E_3^{-1} + K_{123}E_4^{-1}},$$

$$u_{4,1} = \frac{k_{12}k_{34}(E_{12}^{-1} + E_{34}^{-1}) + k_{13}k_{24}(E_{13}^{-1} + E_{24}^{-1}) + k_{23}k_{14}(E_{23}^{-1} + E_{14}^{-1})}{a^{-1}(K_{234}E_1^{-1} + K_{134}E_2^{-1} + K_{124}E_3^{-1} + K_{123}E_4^{-1})}, \quad (73)$$

$$u_{4,2} = \frac{-a(K_{234}E_1 + K_{134}E_2 + K_{124}E_3 + K_{123}E_4)}{k_{34}k_{12}(E_{12} + E_{34}) + k_{24}k_{13}(E_{13} + E_{24}) + k_{23}k_{14}(E_{14} + E_{23})},$$

$$v_{4,2} = \frac{-a^{-1}\sigma(K_{234}E_1^{-1} + K_{134}E_2^{-1} + K_{124}E_3^{-1} + K_{123}E_4^{-1})}{k_{34}k_{12}(E_{12}^{-1} + E_{34}^{-1}) + k_{24}k_{13}(E_{13}^{-1} + E_{24}^{-1}) + k_{23}k_{14}(E_{14}^{-1} + E_{23}^{-1})}, \quad (74)$$

解 (69)–(74) 在全反演变换 (68) 下的不变性是显然的.

6 全离散系统多孤子解的新型表达式

前面几节讨论的全反演对称形式的结果也可以在全离散形式下实现. 本文我们仅仅讨论全离散势 KdV 系统 (H_1) 的

$$H_1 \equiv (u - \hat{u})(\tilde{u} - \hat{u}) + q - p = 0 \quad (75)$$

全反演对称形式. H_1 方程 (75) 中,

$$\begin{aligned} u &= u(m, n), \\ \tilde{u} &= T_1 u = u(m+1, n), \\ \hat{u} &= T_2 u = u(m, n+1), \\ \hat{\tilde{u}} &= T_2 T_1 u = u(m+1, n+1) \end{aligned}$$

p, q 为任意常数.

H_1 方程的多孤子解可以用 Pfaffian 来表示 [25]

$$A = an + bm + \gamma - \frac{h}{g} \quad (76)$$

其中 $a = \sqrt{p}$, $b = \sqrt{q}$,

$$\begin{cases} g = |\psi, T_3 \psi, T_3^2 \psi, \dots, T_3^{N-1} \psi|, \\ h = |\psi, T_3 \psi, \dots, T_3^{N-2} \psi, T_3^N \psi|, \\ \psi = \psi(n, m, l) = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T, \\ T_3 \psi = \psi(n, m, l+1), \\ \psi_i = \psi_i(n, m, l) = \rho_i^+ (a + k_i)^n (b + k_i)^m k_i^l \\ \quad + \rho_i^- (a - k_i)^n (b - k_i)^m (-k_i)^l, \end{cases} \quad (77)$$

$\rho_i^\pm$ 和 k_i 任意常数.

为了看出明显的全反演变换不变性, 我们引入全离散双曲函数,

$$\sinh(\xi_i) = \left(\frac{a + k_i}{a - k_i} \right)^{n-n_{0i}} \left(\frac{b + k_i}{b - k_i} \right)^{m-m_{0i}} - \left(\frac{a + k_i}{a - k_i} \right)^{n_{0i}-n} \left(\frac{b + k_i}{b - k_i} \right)^{m_{0i}-m}, \quad (78)$$

$$\cosh(\xi_i) = \left(\frac{a + k_i}{a - k_i} \right)^{n-n_{0i}} \left(\frac{b + k_i}{b - k_i} \right)^{m-m_{0i}} + \left(\frac{a + k_i}{a - k_i} \right)^{n_{0i}-n} \left(\frac{b + k_i}{b - k_i} \right)^{m_{0i}-m}. \quad (79)$$

这样定义的双曲函数满足连续双曲函数的加法公式:

$$\begin{aligned} \sinh(\xi_1 + \xi_2) &= \sinh(\xi_1) \cosh(\xi_2) + \sinh(\xi_2) \cosh(\xi_1), \\ \cosh(\xi_1 + \xi_2) &= \cosh(\xi_1) \cosh(\xi_2) + \sinh(\xi_2) \sinh(\xi_1). \end{aligned} \quad (80)$$

可以证明在上述双曲函数定义下, H_1 方程 (75) 的多孤子解可以重写为

$$u = an + bm + \gamma - \frac{\sum_{\nu} K_{\nu} \sum_{j=1}^N \nu_j k_j \sinh \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \nu_i \xi_i \right)}{\sum_{\nu} K_{\nu} \cosh \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \nu_i \xi_i \right)}, \quad (81)$$

其中

$$K_{\nu} = \prod_{i < j} (\nu_i k_i - \nu_j k_j).$$

显然 (81) 是全反演变换

$$\begin{aligned} \{m, n, m_{0j}, n_{0j}, \gamma, u\} \\ \rightarrow \{-m, -n, -m_{0j}, -n_{0j}, -\gamma, -u\} \end{aligned}$$

下不变的. 这一不变性很容易用来求解非局域 H_1 系统的多孤子解.

7 结论和讨论

本文既综述了最近我们在研究非局域系统的 P-T-C 群不变的多孤子解时新发现的很多局域可积系统 (KdV、KP、Toda、MKdV、sG、Boussinesq 和 NLS 系统等等) 的具有全反演对称性的多孤子表达式, 也给出了一些公开发表的文献中尚未出现过的局域可积系统新的全反演对称性的表达式. 如, (2+1) 维和 (1+1) 维 SK 方程的解 (31), 非对称 NNV 方程的解 (37), 修正 KdV 和 sG 方程多孤子解 (50), AKNS 的范德蒙-朗斯基解 (66), 全离散势 KdV 系统 (H_1 系统) 的多孤子解 (81) 都是文献中尚未出现过的新结果.

当前在非线性系统求解方向有一些重要的热门课题, 如各种共振解 (呼吸子、怪波 (瞬子)、团块解 (lump)、帐篷解 (Dromion)、网格解和孤子分子等等) 的寻求和分类及多地非局域系统的求解等等. 多孤子解的不同形式在寻求各种共振孤子时可以体现出不同的优点 [28], 初步的研究表明本文提出的新的形式会提供极大的方便甚至给出新的共振激发模式. 在多地非局域系统的求解研究中, 对很多非局域系统, 全反演对称形式的多孤子解会自然地得到这些系统群不变多孤子解, 对于对称性破

缺解的求解也非常有用并可揭示非局域系统的很多新的物理, 如经典禁戒、非线性激发结构改变和相变等等^[26,27]. 与本文相关的还有很多没有得到解决的问题, 有的仅仅只是一个开始, 值得在以后的研究中进一步深入和扩展.

感谢李玉奇老师的各种有益讨论, 特别是在 AKNS 系统的范德蒙-朗斯基解表达式中的建设性意见.

参考文献

- [1] Russell J S 1837 *Rep. Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci.* **7th** 417
- [2] Zabusky N J, Kruskal M D 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 240
- [3] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1976 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095
- [4] Kivshar Y S, Malomed B A 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 763
- [5] Kottig F, Tani T, Travers J C, Russell P St J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 263902
- [6] Wright L G, Christodoulides D N, Wise F W 2017 *Science* **358** 94
- [7] Dudley J M, Dias F, Erkintalo M, Genty G 2014 *Nat. Photonics* **8** 755
- [8] Stratmann M, Pagel T, Mitschke F 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 143902
- [9] Herink G, Kurtz F, Jalali B, Solli D R, Ropers C 2017 *Science*, **356** 50
- [10] Liu X M, Yao X K, Cui Y D 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 023905
- [11] Strogatz S 2001 *Nature (London)* **410** 268
- [12] Forte S 1992 *Rev. Mod. Phys.* **64** 193
- [13] Hertog T, Horowitz G T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 221301
- [14] Drummond P D, Kheruntsyan K V, He H 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3055
- [15] Lou S Y, Huang F 2017 *Sci. Rep.* **7** 869
- [16] Hirota R 2004 *The Direct Method in Soliton Theory*, Edited and translated by Nagai A, Nimmo J, Gilson C, Cambridge Tracts in Mathematics No. 155 (Cambridge: Cambridge University Press) pp1–61
- [17] Gu C H, Hu H S, Zhou Z X 2005 *Darboux Transformations in Integrable Systems: Theory and their Applications to Geometry* (Dordrecht, Netherland: Springer) pp1–64
- [18] Li Y Q, Chen J C, Chen Y, Lou S Y 2014 *Chin. Phys. Lett.* **31** 010201
- [19] Chen D Y 2006 *Introduction on Solitons* (Beijing: China Science Publishing and Media Ltd) pp14–42 (in Chinese) [陈登远 2006 孤子引论 (北京: 科学出版社) pp14–42]
- [20] Lou S Y 2018 *J. Math. Phys.* **59** 083507
- [21] Hietarinta J 1987 *J. Math. Phys.* **28** 1732; 2094; 2586
- [22] Chen K, Deng X, Lou S Y, Zhang D J 2018 *Stud. Appl. Math.* **141** 113
- [23] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2016 *Nonlinearity* **29** 915
- [24] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, Segur H 1974 **53** 249
- [25] Hietarinta J, Zhang D J 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 404006
- [26] Lou S Y 2019 *Stud. Appl. Math.* **143** 123; 2018 arXiv: 1806.07559[nlin.SI]
- [27] Li C C, Lou S Y, Jia M 2018 *Nonl. Dynamics*, **93** 1799
- [28] Xu D H, Lou S Y 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 014208 (in Chinese) [徐丹红, 楼森岳 2020 物理学报 **69** 014208]

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Full reversal symmetric multiple soliton solutions for integrable systems^{*}

Lou Sen-Yue[†]*(School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)*

(Received 31 July 2019; revised manuscript received 26 September 2019)

Abstract

Multiple soliton solutions are fundamental excitations. There are many kinds of equivalent representations for multiple soliton solutions such as the Hirota forms, Wronskian and/or double Wronskian expressions and Phaffian representations. Recently, in the studies of multi-place nonlocal systems, we find that there are a type of novel but equivalent simple and elegant forms to describe multiple soliton solutions for various integrable systems. In this paper, we mainly review novel types of expressions of multiple soliton solutions for some kinds of nonlinear integrable systems. Meanwhile, some completely new expressions for the Sawada-Kortera equations, the asymmetric Nizhnik-Novikov-Veselov system, the modified KdV equation, the sine-Gordon equation, the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur system and the completely discrete H_1 equation are firstly given in this paper. New expressions usually possess explicit full reversal symmetries including parity, time reversal, soliton initial position reversal and charge conjugate reversal. These kinds of explicitly symmetric forms are very useful and convenient in the studies on the nonlinear physical problems such as the multi-place nonlocal systems and the resonant structures.

Keywords: Integrable systems, multiple soliton solutions, full reversal symmetries, multi-place systems**PACS:** 05.45.Yv, 02.30.Ik, 11.30.Er, 11.10.Lm**DOI:** [10.7498/aps.69.20191172](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191172)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11975131, 11435005).

[†] Corresponding author. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn

可积谐振系统中的极端波事件研究进展

潘昌昌 Baronio Fabio 陈世华

Recent developments of extreme wave events in integrable resonant systems

Pan Chang-Chang Baronio Fabio Chen Shi-Hua

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010504 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191240

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191240>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

柱面非线性麦克斯韦方程组的行波解

Traveling wave solutions of the cylindrical nonlinear Maxwell's equations

物理学报. 2017, 66(13): 130302 <https://doi.org/10.7498/aps.66.130302>

用光晶格模拟狄拉克、外尔和麦克斯韦方程

Simulating Dirac, Weyl and Maxwell equations with cold atoms in optical lattices

物理学报. 2019, 68(4): 046701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181929>

具有早期后除极化现象的可激发系统中螺旋波破碎方式研究

Spiral wave breakup manner in the excitable system with early afterdepolarizations

物理学报. 2018, 67(9): 090501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172505>

螺旋线行波管三维返波相互作用理论与数值模拟

Study of three-dimensional nonlinear backward-wave interaction model and numerical simulation for helical traveling wave tube

物理学报. 2017, 66(2): 028401 <https://doi.org/10.7498/aps.66.028401>

光子与相对论麦克斯韦分布电子散射的能谱角度谱研究

Photon spectrum and angle distribution for photon scattering with relativistic Maxwellian electrons

物理学报. 2019, 68(1): 015201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181796>

腔自旋波混合系统的研究进展

Research progress of hybrid cavity-magnon systems

物理学报. 2019, 68(23): 230305 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191608>

专题：非线性物理

可积谐振系统中的极端波事件研究进展*

潘昌昌¹⁾ Baronio Fabio²⁾ 陈世华^{1)†}¹⁾ (东南大学物理学院, 南京 211189)²⁾ (Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Brescia, Via Branze 38, 25123 Brescia, Italy)

(2019 年 8 月 19 日收到; 2019 年 10 月 28 日收到修改稿)

从微观角度上讲, 单个极端异常波事件可视为可积模型方程的时空局域有理函数解. 本文主要讨论了三类典型的可积谐振相互作用模型 (即长波短波谐振方程, 三波谐振相互作用方程, 非线性薛定谔和麦克斯韦-布洛赫方程) 的基阶 Peregrine 异常波解及其相关研究进展; 明确指出了这些基阶异常波解形式具有普适性, 可推广应用到多分量或更高阶的可积模型中; 借助数值模拟, 还展示了共存异常波、互补异常波、以及自感应透明 Peregrine 孤子等新颖动力学.

关键词: 异常波, 长波短波谐振, 三波谐振相互作用, 麦克斯韦-布洛赫方程

PACS: 05.45.Yv, 02.30.Ik, 47.20.Ky, 47.54.-r

DOI: 10.7498/aps.69.20191240

1 引言

疯狗浪 (rogue wave, RW), 又称畸波 (freak wave)、怪波 (monster wave)、极端波 (extreme wave)、异常波 (abnormal wave)、杀人波 (killer wave)、水墙 (walls of water) 等, 最初专指海洋上发生的一类稀有的且破坏力极大的暂态巨浪事件^[1-3]. 它不期而至出现在某个地方, 掀起滔天巨浪, 然后消失得无影无踪, 因此获得了“深海怪兽”的绰号 (the real monsters of the deep)^[4]. 二三十年前, 这种神秘的疯狗浪事件还只是老水手之间的传说. 现在, 实时的卫星观测, 辅以先进的理论和实验研究, 已经确切证实了这种怪浪真的存在, 而且经常发生. 最为典型的例子是 1995 年元旦在北海德劳普纳 (Draupner) 海上平台检测到的时称“万年一遇”巨浪, 后来称之为“新年浪”, 其掀起的水墙就有 26 m 之高^[1].

学术界对疯狗浪的研究是落后的, 到今天, 连各方都能接受的严格定义都还没有^[3,5-7], 即使在

称呼上, 也是五花八门. 鉴于此类极端波事件研究已扩展至多个学科, 如非线性光学^[8]、流体动力学^[9]、等离子体物理^[10,11]、声学^[12]、玻色-爱因斯坦凝聚^[13-16]、甚至金融学^[17], 再沿用“疯狗浪”的称呼将变得不合时宜. 因此, 本文将采用更中性的术语“异常波”(RW) 来统称这类极端波事件.

在自然界, 哪些事件可以称之为异常波呢? 经过半个世纪特别是近十年的研究, 科学家们概括出了异常波所普遍具有的基本特征^[5], 其中包括: 1) 具有巨大的峰振幅, 通常是有效波高的 2 倍以上 (在海洋学里面, 有效波高是指某片海域内最高的三分之一海浪的平均高度)^[9,18]; 2) 不可预测性, 从某种意义讲, 异常波似乎来无影去无踪^[19]; 3) 具有 L 型的波振幅统计规律, 即异常波的出现概率比常规高斯或瑞利统计所预测的要更频繁^[20,21]. 上述三个基本特征目前已广泛用于异常波现象的学术定义、分析和讨论. 这也决定了异常波的科学研究存在“微观”和“宏观”两种方式.

从微观角度来看, 异常波可视为可积非线性偏

* 国家自然科学基金 (批准号: 11474051, 11974075) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: cshua@seu.edu.cn

微分方程的确定有理函数解, 其形式上表现为一类时间和空间双局域的波包, 以反映其不可预测特性^[9,22,23]. 特别地, 一个偏微分方程的解具有如下特征时可以视为基阶(或一阶)异常波^[23,24]: 1) 该解的模可用有理函数来表示, 且在时间和空间上都是局域的; 2) 该解在时空上通常表现为一个3倍背景振幅的波峰, 并伴有二个侧洞形成. 典型的例子就是 Peregrine 孤子, 其由 Peregrine 教授^[25]于1983年首次提出, 当时作为标准非线性薛定谔(nonlinear Schrödinger, NLS)方程的基阶有理函数解. 由于该概念能很好地解释实验上观测到的单个极端波事件, 因此 Peregrine 孤子被普遍认为是简单的异常波原型^[26], 并相继在非线性光纤^[27]、水波池^[18]、等离子体^[28]以及不规则的海洋波浪^[29]中观测到. 但另一方面, 在很多情形下, 各种色散波会相互作用, 产生极端复杂的湍流行为, 继而产生异常波^[30,31]. 很自然, 由于湍流背景涉及大量的自由度, 这时人们需要用统计(即宏观)的方法来研究其中的异常波行为^[32]. 在探索极端波事件本质特征上, 这两种研究方式相辅相成, 相得益彰^[8,9].

本文将关注前者, 从可积模型视角上审视异常波事件的产生和演化动力学. 事实上, 在非线性科学中, 现实的实验设置和传播介质的多样性需要形式更广的可积模型^[23], 而不仅仅是简单的 NLS 方程. 下面列举几个光学方面的理由. 首先, 在很多光学晶体中, 主导非线性效应的是二次非线性系数, 而不是三次(或 Kerr)非线性项^[33,34]. 其次, 对于飞秒激光脉冲, 基本方程模型还必须考虑进高阶色散和高阶非线性项, 以便能更准确地描述其传播动力学^[35]. 对于色散管理或非线性管理光学系统(如色散渐减光纤), 人们还需要考虑变系数非线性模型^[36,37]. 此外, 相互作用光场的矢量特性与传播介质的多维度特性也要求我们考虑一些耦合的或者高维的数学模型, 例如, 当考虑双折射光纤的脉冲传播^[38,39]或者光学晶体的光波相互作用^[40]时. 最后, 对于一些耗散系统如锁模光纤激光器^[41,42], 还需要额外考虑进耗散项(如增益^[43]), 尽管此时该模型方程(通常为复数 Ginzburg-Landau 方程^[44,45])将不再可积. 所有这些现实要求造就了众多的可积(或近可积)数学模型, 并持续推动理论工作者从事此类模型的求解工作^[46–49].

据我们所知, 绝大多数可积模型都允许有理数

式的异常波解存在, 除了少数实场的波方程(例如经典 Korteweg-de Vries (KdV) 方程^[23], Kadomtsev-Petviashvili II 方程^[50]等)外. 这其中比较著名的可积模型包含有 NLS 方程^[51]、Hirota 方程^[52]、Sasa-Satsuma 方程^[53,54]、Chen-Lee-Liu 方程^[55,56]、Fokas-Lenells 方程^[57–59]、复数 modified KdV 方程^[60–62]、广义 NLS 方程^[63–66]等, 它们的基阶和高阶异常波解均已获得. 相应地, 耦合或矢量可积模型也得到了广泛的关注, 如 Manakov 系统^[67–69]及其推广^[70–72]、Davey-Stewartson 方程^[73,74]等. 数学上, 对于可积模型而言, 这些异常波解可以借助逆散射变换^[75]、达布 (Darboux) 变换^[76]、Hirota 双线性方法^[77]、Riemann-Hilbert 方法^[78,79]、或同宿波尝试法 (homoclinic test method)^[80]来求解得到. 至于非可积模型, 人们可以用微扰论^[81,82]或者变分法^[83]来近似求解.

异常波是一个快速发展的领域, 其话题的多样性可参看最新的综述论文^[84,85]. 特别是最近几年, 各种异常波新现象、新特性被预测或观测到. 例如, 继 2016 年观测到光学暗异常波后^[86], Baronio 等^[87]又成功在通信光纤上观测到了暗三姊妹异常波, 其演化动力学与 Chen 等^[38]在 2014 年所做的解析预测完全一致. 2017 年, Peregrine 孤子的普适性得到了实验验证^[88], 次年, 周期背景 Peregrine 孤子^[89]以及反常 Peregrine 孤子^[90]等概念又相继提出. 此外, 在异常波机制阐释上, 调制不稳定性 (modulation instability, MI) 和可积湍流是两个长期存在的话题, 得到了持续的关注^[8,91]. 值得一提的是, 2016 年 Soto-Crespo 等^[32]揭示了孤子湍流在异常波产生上扮演了一个常被忽视的重要角色. 所有这些新发现均加深了人们对异常波本质的理解.

本文将综述几类典型的可积谐振相互作用模型的异常波求解及相关研究进展. 它们分别是长波短波 (long-wave short-wave, LWSW) 谐振方程^[92]、三波谐振相互作用 (three-wave resonant interaction, TWRI) 方程^[40,93]、和非线性薛定谔和麦克斯韦-布洛赫 (NLS and Maxwell-Bloch, NLS-MB) 方程^[94,95]. 前两个可积模型可描述光波之间的谐振相互作用, 后一个模型则描述光波与谐振介质之间的相互作用. 对于每一个可积谐振系统, 文中将给出其 Lax 对、达布变换、基阶 Peregrine RW 解, 以及数值模拟验证, 并展示其新颖的异常波动

力学. 当然, 还有其他可积谐振方程, 如 AB 模型^[96]、MTM(massive Thirring model) 方程^[97,98]等, 它们也存在异常波解, 但由于篇幅关系, 这里不一一叙述.

本文的结构组织如下. 第 1 节为引言部分, 给出了异常波的背景知识和最新研究动态. 第 2 节讨论了 LWSW 方程的基阶异常波解, 数值展示了共存异常波概念. 第 3 节讨论了 TWRI 方程的基阶异常波解, 分析了互补型异常波的动力学. 第 4 节讨论了 NLS-MB 方程的基阶异常波解, 演示了自感应透明的光学 Peregrine 孤子和时空互补的物质波异常波动力学. 第 5 节为全文总结.

2 长波短波谐振系统

在耦合波动力学中, 长波短波 (LWSW) 谐振是一个典型的参量谐振过程, 通常发生于高频短波的群速度与低频长波的相速度匹配之时. 早在 1972 年, Zakharov^[99] 在研究等离子体物理中的非线性朗缪尔波坍缩时就引入了 LWSW 谐振机制, 五年后, Benney^[100] 给出了 LWSW 相互作用方程. 作为一个重要的物理机制, LWSW 谐振现象迅速在物理的各个分支得到了广泛的研究, 如流体动力学中重力波与毛细波之间的相互作用^[101], 负折射率光学介质中的简并基频波与差频波的三波混频过程^[102]等. 特别地, 2010 年, Shats 等^[103] 在实验上直接观测到了毛细波异常波事件, 这一事实推动了人们对 LWSW 谐振介质中各类异常波事件的研究^[104,105].

LWSW 谐振方程是一个基本的可积模型, 其归一化形式可写为^[102]

$$\begin{aligned} iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} + \phi u &= 0, \\ \phi_z - (|u|^2)_t &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $u(z, t)$ 和 $\phi(z, t)$ 分别表示短波和长波分量, z 和 t 为空间和时间变量, 下标则表示偏导数. 该可积方程可等价转变为一个 3×3 线性本征值问题:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= (\lambda \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1) \mathbf{R}, \\ \mathbf{R}_z &= (\lambda^2 \mathbf{V}_0 + \lambda \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 λ 为任意谱参数, $\mathbf{U}_0 = \text{diag}(2i, 0, -2i)$, $\mathbf{V}_0 = \text{diag}(-2i/3, 4i/3, -2i/3)$,

$$\mathbf{R}(\lambda) = \begin{bmatrix} r(\lambda) \\ s(\lambda) \\ w(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 0 & u & -i\phi \\ 0 & 0 & -u^* \\ -2i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & -u^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{iu_t}{2} & -\frac{i|u|^2}{2} \\ -u^* & 0 & \frac{iu_t^*}{2} \\ 0 & u & 0 \end{bmatrix}.$$

为简洁起见, 这里所有函数的 (z, t) 变量已省略掉. 据此可以构造出正确的达布变换式^[106]:

$$u = u_0 + \frac{2i(\lambda - \lambda^*)\lambda(\alpha - \beta^*)}{\Delta} s^* w, \quad (3)$$

$$\phi = \phi_0 + \frac{8(\lambda - \lambda^*)}{\Delta} [\alpha|\lambda|^2|w|^2 + i\lambda(\alpha - \beta^*)\text{Im}(r^* w)], \quad (4)$$

式中 (u_0, ϕ_0) 和 (u, ϕ) 分别表示方程 (1) 的种子解和新解, Im 表示取虚部,

$$\alpha = -\frac{\lambda - \lambda^*}{\lambda + \lambda^*} \mathbf{R}(\lambda)^\dagger \sigma_1 \mathbf{R}(\lambda) = -\alpha^*,$$

$$\beta = -\mathbf{R}(\lambda)^\dagger \sigma_1 \mathbf{R}(-\lambda),$$

$$\gamma = -\frac{\lambda - \lambda^*}{\lambda + \lambda^*} \mathbf{R}(-\lambda)^\dagger \sigma_1 \mathbf{R}(-\lambda) = -\gamma^*,$$

$$\Delta = \alpha\gamma - |\beta|^2.$$

在上述公式中, λ 为某个给定的谱参数值, σ_1 为第一个泡利算符的 3×3 版形式, 星号*表示复共轭, 剑号 $\dagger$ 表示复共轭转置. 这里已经假设 $s(-\lambda) = s(\lambda)$ 和 $w(-\lambda) = w(\lambda)$, 但 $r(-\lambda) = r(\lambda) + 2\lambda w(\lambda)$. 因此, 容易发现, α, β 和 γ 满足 $\alpha + \beta = \gamma + \beta^*$ 和 $\lambda(\alpha - \beta^*) + \lambda^*(\alpha + \beta) = 0$ ^[106].

利用 Lax 对 (2) 式以及达布变换 (3) 式和 (4) 式, 人们可以求出 LWSW 方程 (1) 的各类 RW 解. 具体推导过程可参看文献^[92,106,107]. 这里仅提供其基阶 RW 解, 如下:

$$u = u_0 \left\{ 1 - \frac{2in^2z + 2i(m - \omega)(t - mz) + 1}{[n^2 + (m - \omega)^2] \left[(t - mz)^2 + n^2z^2 + \frac{1}{4n^2} \right]} \right\}, \quad (5)$$

$$\phi = b + 2 \frac{n^2z^2 - (t - mz)^2 + \frac{1}{4n^2}}{\left[(t - mz)^2 + n^2z^2 + \frac{1}{4n^2} \right]^2}, \quad (6)$$

式中 $u_0(z, t) = a \exp(i\omega t - ikz)$ 为初始的平面波解,

$k = \omega^2/2 - b$ 为其色散关系式, 实数 b 为长波分量的背景高度 (通常可设其值为 0). 这里实数 m 和 n 由下面两个代数方程确定:

$$m + \frac{a^2[n^2 - (m - \omega)^2]}{[n^2 + (m - \omega)^2]^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2(m - \omega)}{[n^2 + (m - \omega)^2]^2} = 0. \quad (8)$$

异常波解 (5) 式和 (6) 式展示了丰富的异常波动力学, 如黑异常波^[92,107] (注: 所谓“黑异常波”是指振幅中心下陷至零的一类有限背景双局域波包结构). 特别地, 在文献^[92]中, 作者借助解析预测和数值模拟, 分析了 LWSW 模型背景场的调制不稳定性 (MI), 指出了上述基阶 RW 波的参数存在区间, 即 $\omega \leq 3\omega_n/2 = 3(2a^2)^{1/3}/2$, 其恰好位于 MI 图的基带 (baseband) 区, 参看文献^[92]图 5. 此后, Baronio 等^[68,108]明确提出了 MI 的基带理论, 即异常波只能存在于 MI 的基带区, 而不是通频带 (passband) 区. 现在已证明, 这一理论可用于解析确定可积甚至非可积非线性系统的异常波解参数存在区间^[23].

值得注意的是, 基阶 RW 解 (5) 式和 (6) 式是可以推广到多分量 LWSW 方程中去的. 例如, 对于两短波分量 LWSW 方程^[109]:

$$\begin{aligned} iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} + u\phi &= 0, \\ iv_z + \frac{1}{2}v_{tt} + v\phi &= 0, \\ \phi_z - (|u|^2 + |v|^2)_t &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其基阶 RW 解中的 u 和 ϕ 分量依然用 (5) 式和 (6) 式来表示, v 短波分量可类似表示为

$$v = v_0 \left\{ 1 - \frac{2in^2z + 2i(m - \Omega)(t - mz) + 1}{[n^2 + (m - \Omega)^2] \left[(t - mz)^2 + n^2z^2 + \frac{1}{4n^2} \right]} \right\}, \quad (10)$$

式中 $v_0(z, t) = A \exp(i\Omega t - iKz)$ 表示 v 分量的初始平面波解 (相应色散关系为 $K = \Omega^2/2 - b$). 同时, 确定实数 m 和 n 的两个代数方程变为:

$$m + \frac{a^2[n^2 - (m - \omega)^2]}{[n^2 + (m - \omega)^2]^2} + \frac{A^2[n^2 - (m - \Omega)^2]}{[n^2 + (m - \Omega)^2]^2} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2(m - \omega)}{[n^2 + (m - \omega)^2]^2} + \frac{A^2(m - \Omega)}{[n^2 + (m - \Omega)^2]^2} = 0. \quad (12)$$

很显然, 当 v 场消失时 (即 $A = 0$), 两短波分量 LWSW 方程 (9) 约化为基本 LWSW 方程 (1). 相应地, 其基阶解将变回 (5) 式和 (6) 式的形式, 同时代数方程 (11) 和 (12) 也变回方程 (7) 和 (8) 的形式.

相比简单的 LWSW 谐振系统, 多分量 LWSW 可积系统将存在有趣的共存异常波现象. 所谓共存异常波指的是在相同的背景场中同时发生两类不同结构的确定性异常波事件, 且它们均是可积模型的有理函数解. 例如, 对于给定的 $a = A = 1$, $\omega = 0$, 和 $\Omega = -1.2469$ 时, 方程 (11) 和 (12) 将给出两组有效值 $(m, n) = (-1.3514, 0.7803)$ 和 $(-0.4287, 0.6442)$. 很显然, 把每组 (m, n) 值代入 (5) 式, (6) 式和 (10) 式中将得到基于相同背景参数的两种基阶 RW 解. 图 1 左列和中列给出了这两类 RW 解在初始白噪声微扰情况下的数值模拟结果. 很显然, 在足够的距离里, 它们各自均能完美展开, 尽管这时候 MI 已然发挥作用.

另一方面, 人们也许会问, 这两类 RW 解能否在现实条件下共存呢? 为此, Chen 等^[109]做了广泛的数值激发实验. 具体上, 选取 $z = 0$ 的平面波解作为 u 和 v 的初始条件, 并令 $\phi = 0.4 \cos(2\pi t/40) \times \text{sech}[(t - 2)/8]$, 然后利用分步傅里叶算法数值积分模型方程 (9), 计算结果如图 1 右列所示 (图中已去掉前五个单位距离的波演化轮廓图, 因为初始阶段 MI 引起的波结构不是很明显). 可以清晰地看到, 在 $z = 10$ 附近, 同一背景中同时出现了两种明显不同的异常波结构, 它们均和方程 (9) 的解析解完全一致. 随后, 由于 MI 不断增强, 背景场中将出现多异常波动力学, 但所有这些动力学都是上述两种异常波类型的组合.

3 三波谐振相互作用系统

众所周知, 三波谐振相互作用 (TWRI) 在非线形科学中扮演着重要的角色^[110]. 例如, 在非线形光学中, TWRI 可描述不同的光学过程, 如参量放大^[111]、频率转换^[112]、受激拉曼散射^[113]、受激布里渊散射^[114]等. 此外, TWRI 还可用来实现光脉冲的群速度控制^[115]、超短脉冲列产生^[116]、参量三波孤子产生^[117]以及激光-等离子体相互作用^[118]

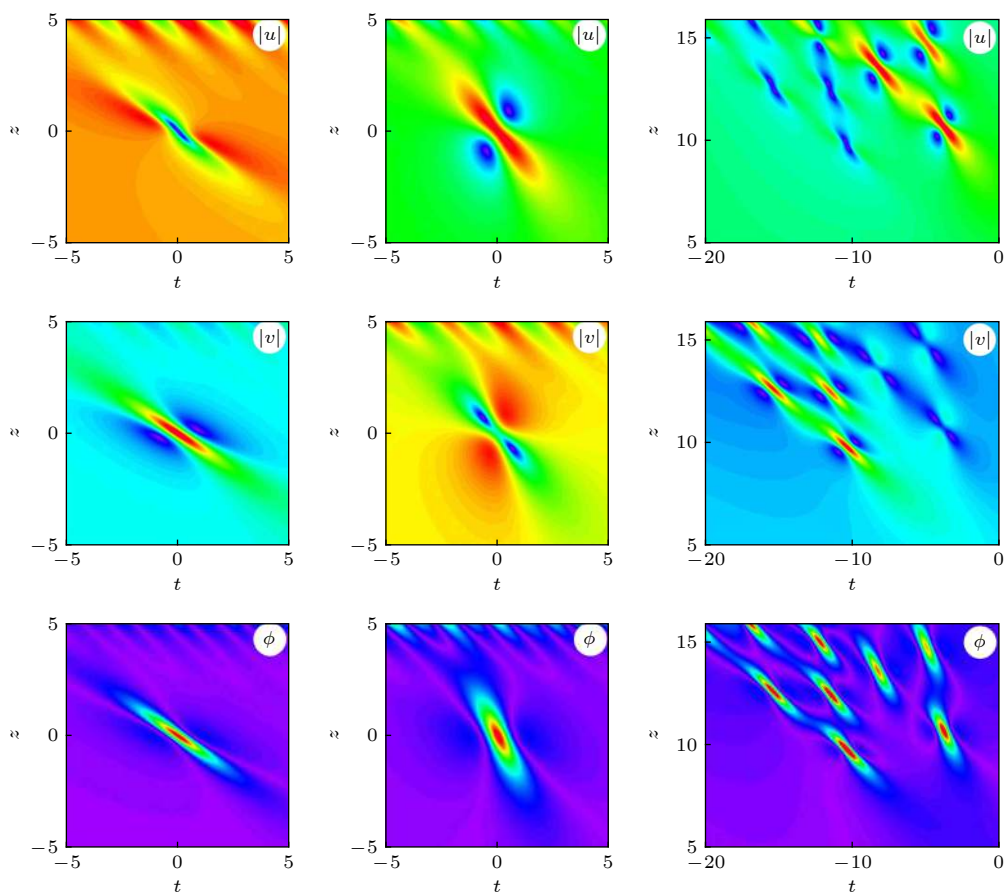


图1 数值模拟验证初始白噪声微扰下的基阶RW解(5)式、(6)式和(10)式的稳定性,左列图对应 $(m, n) = (-1.3514, 0.7803)$,中列图对应 $(m, n) = (-0.4287, 0.6442)$.右列图显示这两类RW结构在同一背景场中的数值激发.图改编自文献[109]

Fig. 1. Simulations confirm the stability of the fundamental RW solutions (5), (6), and (10) against initial white noise perturbations. Left column: $(m, n) = (-1.3514, 0.7803)$; Middle column: $(m, n) = (-0.4287, 0.6442)$. The right column shows the numerical excitation of such two rogue wave families from the same background field. Figure adapted from Ref. [109].

等.早在20世纪70年代,人们就建立了TWRI控制方程的可积性,并给出了其孤子解^[110].不同于大家所熟悉的二次孤子情形^[119],此类相干孤子主要产生于由非线性效应引起的能量交换与由群速度不匹配所引起的对流之间的平衡^[40].它们最终能以一个共同的(锁定的)速度传播,尽管其三个波分量在相互捕获之前的群速度可以互不相同^[120].这种特性使得这类TWRI孤子在应用中相当诱人,这是因为由群速度不匹配而引起的走散效应(walk-off)此时能被非线性耦合抵消掉.

在弱色散近似下,TWRI方程的基本形式可表示为^[110]:

$$\begin{aligned} u_{1t} + V_1 u_{1z} &= u_2^* u_3^*, \\ u_{2t} + V_2 u_{2z} &= -u_1^* u_3^*, \\ u_{3t} + V_3 u_{3z} &= u_1^* u_2^*, \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $u_{1,2,3}(z, t)$ 是三个光场的慢变复包络函数,

$V_{1,2,3}$ 为其相应的群速度常数.下面不妨假定 $V_3 = 0$,此即意味着模型(13)是建立在随 u_3 场运动的参照系上.一般地,当 $V_1 > V_2$ 时,该TWRI模型将允许孤子交换(soliton exchange)动力学(在非线性光学语境中,又称为参量三波混频过程)得以存在,但当 $V_1 < V_2$ 时,其将展示有趣的受激背散射(stimulated backscattering)动力学^[110].

该方程具备完全可积性^[110],因此具有下面的Lax对形式:

$$\mathbf{R}_t = (\lambda \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1) \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}_z = (-3i\lambda \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1) \mathbf{R}, \quad (14)$$

式中 λ 为任意谱参数, $\mathbf{U}_0 = \text{diag}(-2i, i, i)$, $\mathbf{V}_0 = \text{diag}(0, 1/V_1, 1/V_2)$,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V_1 u_1^*}{V_2 - V_1} & \frac{V_2 u_2}{V_2 - V_1} \\ u_1 & 0 & 0 \\ u_2^* & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{u_1^*}{V_1 - V_2} & \frac{u_2}{V_1 - V_2} \\ -\frac{u_1}{V_1} & 0 & \frac{u_3^*}{V_1} \\ -\frac{u_2^*}{V_2} & -\frac{u_3}{V_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

相应地, 其达布变换式可以表示为^[121]:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} + \frac{3i(\lambda - \lambda^*)r^*s}{R^\dagger \sigma_3 R}, \\ u_2 &= u_{20} + \frac{3i(\lambda - \lambda^*)rw^*}{R^\dagger \sigma_3 R}, \\ u_3 &= u_{30} + \frac{3i(\lambda - \lambda^*)s^*w}{R^\dagger \sigma_3 R}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 u_{n0} 和 u_n ($n = 1, 2, 3$) 分别表示方程 (13) 的种子解和新解, λ 为某个任意给定的谱参数值, $\sigma_3 = \text{diag}(1, \Gamma_1, \Gamma_2)$, $\Gamma_j = V_j/(V_1 - V_2)$ ($j = 1, 2$).

考虑到三波谐振相互作用条件 (即动量和能量守恒), 初始的平面波种子解可以表示为:

$$\begin{aligned} u_{10}(z, t) &= a_1 \exp[-i(k_1 z - \omega_1 t)], \\ u_{20}(z, t) &= a_2 \exp[i(k_2 z - \omega_2 t)], \\ u_{30}(z, t) &= ia_3 \exp[i(k_1 - k_2)z - i(\omega_1 - \omega_2)t], \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $k_1 = \frac{\omega_1}{V_1} + \frac{a_2^2}{\delta V_1}$, $k_2 = \frac{\omega_2}{V_2} + \frac{a_1^2}{\delta V_2}$, $a_3 = \frac{a_1 a_2}{\delta}$. 这里 $a_{1,2,3}$ 表示三波各自的背景高度, $\delta = \omega_1 - \omega_2$ (不失一般性, 下面假设 $\delta > 0$).

利用上面的 Lax 对 (14) 式和达布变换 (15) 式, 很容易得到 TWRI 方程的基阶 RW 解^[93] (借助达布变换求解基阶或高阶异常波解的详细过程可参看我们近期发表的论文^[64,67,72]):

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} \left[1 + \frac{3(\lambda_0 - \lambda_0^*)\xi\theta_1^*/\alpha_1^*}{|\xi|^2 + \Gamma_1 a_1^2 |\theta_1/\alpha_1|^2 + \Gamma_2 a_2^2 |\theta_2/\alpha_2|^2} \right], \\ u_2 &= u_{20} \left[1 - \frac{3(\lambda_0 - \lambda_0^*)\xi^*\theta_2/\alpha_2}{|\xi|^2 + \Gamma_1 a_1^2 |\theta_1/\alpha_1|^2 + \Gamma_2 a_2^2 |\theta_2/\alpha_2|^2} \right], \\ u_3 &= u_{30} \left[1 + \frac{3(\lambda_0 - \lambda_0^*)\delta\theta_1\theta_2^*/(\alpha_1\alpha_2^*)}{|\xi|^2 + \Gamma_1 a_1^2 |\theta_1/\alpha_1|^2 + \Gamma_2 a_2^2 |\theta_2/\alpha_2|^2} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\xi = t + \frac{z}{V_1 - V_2} \left(\frac{a_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{a_2^2}{\alpha_2^2} \right)$, $\alpha_j = \mu_0 + \lambda_0 - (-1)^j \delta/2$, $\theta_j = \xi - i/\alpha_j$ ($j = 1, 2$). 这里, μ_0 是立方代数方程 $\mu^3 - 3\sigma\mu + 2\rho = 0$ 的一个等根 (可实可复), λ_0 是等根判别式 $\Delta = \sigma^3 - \rho^2 = 0$ 的一个复根 (虚部不为 0), 式中 $\sigma = \lambda_0^2 + \delta^2/12 + \frac{1}{3}(\Gamma_1 a_1^2 + \Gamma_2 a_2^2)$, $\rho = \frac{1}{4}[\delta^2 - 2(\Gamma_1 a_1^2 + \Gamma_2 a_2^2)]\lambda_0 - \lambda_0^3 + \frac{1}{4}\delta(\Gamma_1 a_1^2 - \Gamma_2 a_2^2)$ 可以证明, 不管是三波混频 ($V_1 > V_2$) 还是受激背

散射 ($V_1 < V_2$) 过程, 在特定参数条件下, 解 (17) 式均能展示出标准的 Peregrine 孤子形式^[93].

毫无疑问, 人们会问, TWRI 方程的简并情形 (此时 $V_1 = V_2 = V$) 是否存在 RW 解呢? 这似乎很难从上面的达布变换式寻求答案, 因为在这种情形下, Lax 对 (14) 式将变得无意义. 但显然, 简并 TWRI 方程依然是可积的, 因此其 RW 解是可能存在的. 最近, 文献^[122] 采用另一个策略来回答这个问题, 也就是, 对广义解 (17) 式取如下极限: $V_2 \rightarrow V_1 = V$, 成功得到了简并 TWRI 方程的基阶 RW 解:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} \left[1 + \frac{2i\delta V(\theta - 2a_2^2 z) - \delta^2 AV^2/a_1^2}{\theta^2 + 4\delta^2 a_3^2 z^2 + A^2 V^2/(4a_3^2)} \right], \\ u_2 &= u_{20} \left[1 + \frac{2i\delta V(\theta + 2a_1^2 z) - \delta^2 AV^2/a_2^2}{\theta^2 + 4\delta^2 a_3^2 z^2 + A^2 V^2/(4a_3^2)} \right], \\ u_3 &= u_{30} \left[1 - \frac{4i\delta^3 V(Vt - z) + A^2 V^2/a_3^2}{\theta^2 + 4\delta^2 a_3^2 z^2 + A^2 V^2/(4a_3^2)} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $A = a_1^2 + a_2^2$, $\theta = \delta^2(Vt - z) - (a_1^2 - a_2^2)z$. 容易证明:

$$|u_1|^2 + |u_2|^2 = a_1^2 + a_2^2 = A, \quad (19)$$

这意味着 u_1 分量和 u_2 分量的强度和总是不变的, 不管它们各自的时空结构如何变化. 换句话说, 它们是时空互补的, 因此称为互补异常波^[122].

文献^[122] 给出了互补型异常波的数值模拟结果, 见图 2. 具体来说, 作者将三个场分量的实部和虚部分别乘以因子 $[1 + \varepsilon r_i(z)]$ (这里, $i = 1, \dots, 6$, r_i 为均值为 0、方差为 1 的随机分布函数, ε 为噪声强度参数), 然后采用分步 Fourier 算法对 TWRI 模型进行数值积分. 图 2 左列为未添加白噪声 ($\varepsilon = 0$) 的模拟结果, 右列为添加了白噪声 ($\varepsilon = 10^{-8}$) 的模拟结果. 可以看到, 在微小的扰动下, 所有三个异常波分量依然可以在相当长的时间内稳定传播, 直到连续波背景的 MI 显著增长为止.

实验上, 我们预期这类亮-暗型的双色互补型异常波有可能在双模光纤上得以实现. 这是因为, 光波在双模光纤里传播时, 很容易发生前向受激布里渊散射过程^[123]; 在这种情况下, 泵浦光和斯托克斯 (Stokes) 光的群速度几乎相同, 而相比之下, 声波的速度可近似为零, 三者满足简并 TWRI 方程所需要的模间耦合条件, 从而出现上面提到的双色互补型异常波动力学^[122].

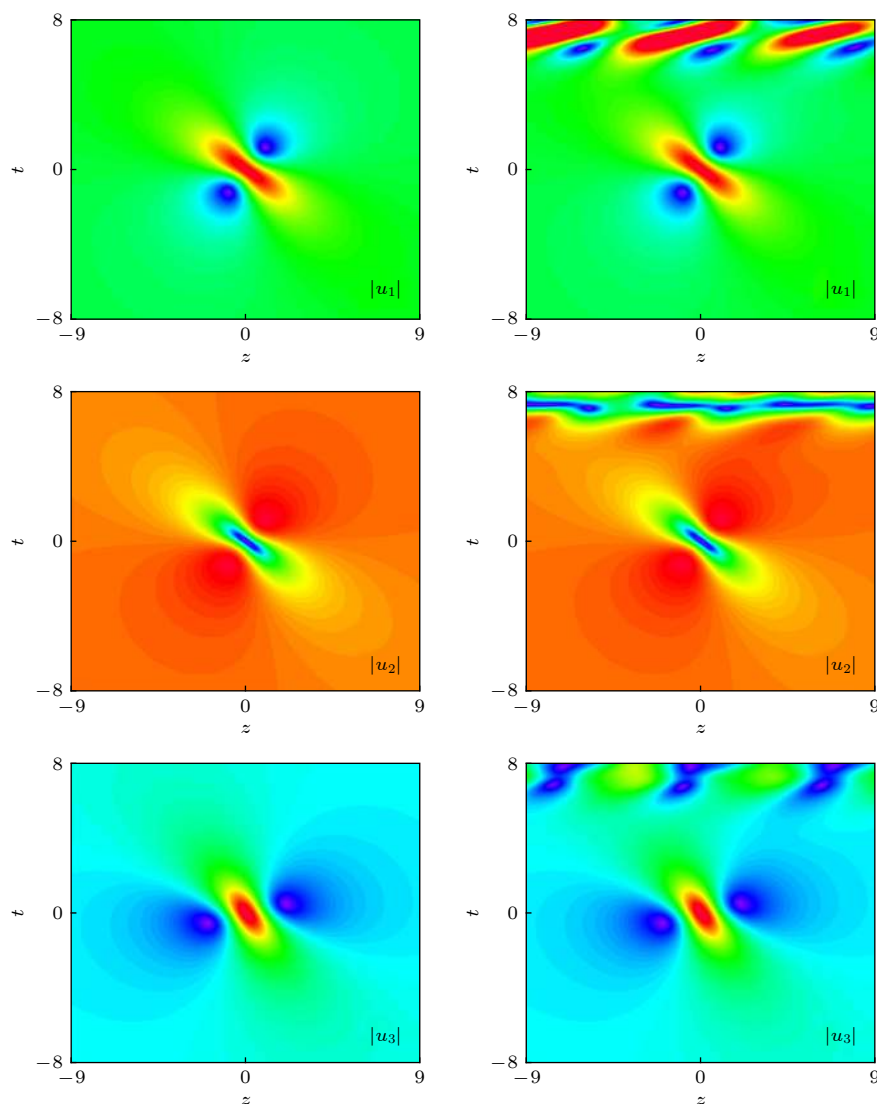


图 2 互补型基阶 RW 解 (18) 式的数值模拟结果. 左列图: 未微扰情形; 右列图: 白噪声微扰情形. 图摘自文献 [122]

Fig. 2. Simulation results of the complementary fundamental rogue wave solutions (18). Left column: unperturbed; Right column: perturbed by initial white noises. Figure adapted from Ref. [122].

4 非线性薛定谔-麦克斯韦布洛赫方程

另一方面, 光波与非线性谐振介质的相互作用也是一个经久不衰的光学研究话题 (注意区分上面讲的 LWSW, TWRI 过程, 其通常发生在非谐振介质的两波或三波谐振相互作用)^[124]. 而这其中最著名的莫过于光脉冲与两能级原子或离子的相互作用, 即所谓的麦克斯韦-布拉赫 (MB) 耦合^[125]. 正是由于这种谐振相互作用, 原本不透明 (或吸收) 的介质在超短激光脉冲照射下将变得完全透明, 此即大家所熟知的自感应透明现象^[126]. 除了自感应透明现象外, MB 方程还可以产生面积为 2π 的

基本 sech 型孤子^[124]. 后来, 一些学者对 MB 系统做了推广, 研究了掺铒光纤中的脉冲传播动力学^[127]. 在慢变包络近似和旋波近似下, 该系统可用非线性薛定谔-麦克斯韦布洛赫 (NLS-MB) 方程来描述. 下面就来讨论这一有趣的可积模型及其基阶 RW 解.

为方便讨论, 把 NLS-MB 方程写成如下无量纲形式^[94,95]:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{i}{2} u_{tt} + i|u|^2 u + M, \\ M_t &= i\phi M - 2uF, \\ F_t &= M^* u + M u^*, \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $u(z, t)$ 表示光波复振幅, M 和 F 表示物质波的

特征函数 (具体讲, M 由谐振介质密度矩阵的离对角元 ρ_{12} 来确定, 为复函数; F 表示上下能级的布居差, 为实函数, 二者满足 $|M|^2 + F^2 = 1$ [95]), ϕ 为去谐频率常数.

同样, 该可积方程可等价转变为一个 2×2 线性本征值问题 (Lax 对):

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{U}\mathbf{R}, \quad \mathbf{R}_z = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (21)$$

式中各矩阵形式表示如下:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} i\lambda & u \\ -u^* & -i\lambda \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -i\lambda^2 + \frac{i|u|^2}{2} + \frac{iF}{2\lambda - \phi} & -\lambda u + \frac{i u_t}{2} + \frac{iM}{2\lambda - \phi} \\ \lambda u^* + \frac{i u_t^*}{2} + \frac{iM^*}{2\lambda - \phi} & i\lambda^2 - \frac{i|u|^2}{2} - \frac{iF}{2\lambda - \phi} \end{bmatrix}.$$

据此, 可以构造正确的达布变换式 [128]:

$$u = u_0 + \frac{2i(\lambda - \lambda^*)rs^*}{|r|^2 + |s|^2},$$

$$M = \frac{\Delta^2 M_0 - 4(\lambda - \lambda^*)^2 (rs^*)^2 M_0^* - 4(\lambda - \lambda^*)rs^* \Delta F_0}{|2\lambda - \phi|^2 (|r|^2 + |s|^2)^2},$$

$$F = \frac{[|\Delta|^2 + 4(\lambda - \lambda^*)^2 |rs|^2] F_0 - 4i(\lambda - \lambda^*) \text{Im}(r^* s \Delta M_0)}{|2\lambda - \phi|^2 (|r|^2 + |s|^2)^2}, \quad (22)$$

式中 $\Delta = (2\lambda - \phi)|r|^2 + (2\lambda^* - \phi)|s|^2$, λ 为某个给定的谱参数值, (u_0, M_0, F_0) 和 (u, M, F) 分别表示 NLS-MB 方程 (20) 的旧解和新解.

利用上面的 Lax 对和达布变换式, 并参照文献 [64, 67, 72] 的做法, 可以很容易推得 NLS-MB 方程 (20) 的基阶 RW 解 [95]:

$$u = u_0 \left(1 - \frac{16i\eta z + 4}{16\eta^2 z^2 + 4a^2\theta^2 + 1} \right),$$

$$M = M_0 \left\{ 1 - \frac{16i\kappa^2 \eta z + 4\kappa^2}{(\kappa^2 + 4a^2)(16\eta^2 z^2 + 4a^2\theta^2 + 1)} - \frac{64i(4a^2\theta^2 - \vartheta^2)a^2\eta z - 32ia^2\kappa\vartheta\theta}{(\kappa^2 + 4a^2)(16\eta^2 z^2 + 4a^2\theta^2 + 1)^2} \right\},$$

$$F = \frac{\kappa b}{2a} - \frac{8ab[(16\eta^2 z^2 - 4a^2\theta^2 + 1)\kappa - 32a^2\eta z\theta]}{(\kappa^2 + 4a^2)(16\eta^2 z^2 + 4a^2\theta^2 + 1)^2}, \quad (23)$$

式中 $\kappa = \omega - \phi$, $\vartheta = 4i\eta z + 1$, $\theta = t - \chi z$, 以及

$$\eta = -\frac{ab}{\kappa^2 + 4a^2} + \frac{a^2}{2}, \quad \chi = \frac{\kappa b}{a(\kappa^2 + 4a^2)} + \omega. \quad (24)$$

这里初始的平面波解 $u_0(z, t)$, $M_0(z, t)$ 和 $F_0(z, t)$ 可

定义为

$$u_0 = a \exp[i(kz + \omega t)], \quad M_0 = \frac{ib}{a} u_0, \quad F_0 = \frac{\kappa b}{2a}, \quad (25)$$

$$k = \frac{b}{a} + a^2 - \frac{\omega^2}{2}. \quad (26)$$

另外, 很容易证明, F 和 M 的时空分布满足 $F(z, t)^2 + |M(z, t)|^2 = \left(\frac{\kappa^2}{4a^2} + 1 \right) b^2$. 这表明物质波组分具有与简并 TWRI 系统相似的互补异常波特性 [122]. 尽管上述 RW 解适用于任意 b 值, 但考虑到概率守恒条件 $F^2 + |M|^2 = 1$, 可令 $b = 2a/\sqrt{\kappa^2 + 4a^2}$, 其值取决于参数 a 和 κ 的取值.

图 3(a) 展示了这些解析解的时空分布图, 其初始参数为 $a = 1.5$, $\phi = 1/2$, $\omega = 0$. 可以看出, 光场分量显示为一个标准的 Peregrine 孤子结构; 比较而言, 物质波分量 M 和 F 展示出更复杂的时空结构, 但二者满足 $F^2 + |M|^2 = 1$, 即时空互补性. 此外, 为了评估异常波动力学及其稳定性, Chen 等 [95] 采用指数时间差分 Crank-Nicolson (ETDCN) 算法对模型方程 (20) 执行了数值模拟, 结果如图 3(b) 所示. 这里使用 $u(z = -1, t)$ 作为光场分量的初始条件, 而让物质波分量 M 和 F 分别取 $M_0(z = -1, t)$ 和 F_0 作为其初始值. 这些初始条件对应于对解析解 (23) 式的强烈扰动. 结果表明, 尽管自发性 MI 的发生呈指数增长, 并且倾向于干扰局域解的尾部部分, 但是异常波结构, 特别是对于光场分量, 均可以在相当长的距离上展开而不失真. 进一步地, 为了验证这类 RW 结构能否在真实条件下产生, 他们把光场的初始条件也换成平面波输入, 考察此类 RW 解的数值激发情况. 图 3(c) 为其数值模拟结果, 清晰显示了这些典型的 RW 结构是可以激发产生的, 见图中黑圈标出部分. 这些数值结果充分预示了实验观测的可行性, 具体实验方案可参看文献 [95].

最后指出, 这里给出的基阶 RW 解 (23) 式具有普适性, 可以推广应用到高阶 NLS-MB 方程中去. 例如, 对于下面的 Hirota-MB 方程 [129]:

$$u_z = ig \left(\frac{1}{2} u_{tt} + |u|^2 u \right) + h \left(\frac{1}{6} u_{ttt} + |u|^2 u_t \right) + M,$$

$$M_t = i\phi M - 2uF,$$

$$F_t = M^* u + M u^*, \quad (27)$$

(23) 式依然可以作为其基阶 RW 解, 只需要把 (24) 式和 (26) 式定义的 k , η , 和 χ 参数换成如下

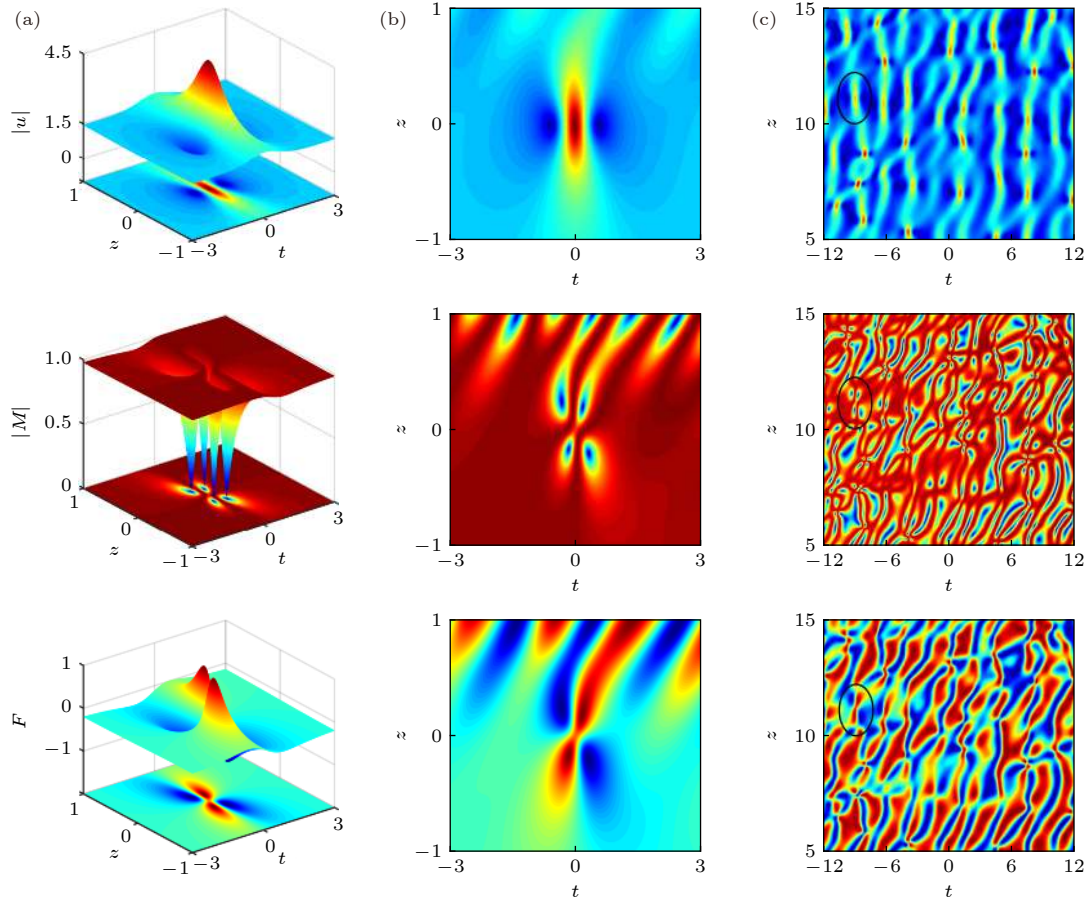


图 3 NLS-MB 方程的基阶 RW 解 (23) 的时空演化, 其中 (a) 列图对应解析解的 3D 曲面和轮廓图; (b) 列图数值模拟结果, 初始条件已文中给出; (c) 列图显示这类异常波结构在背景场中的数值激发产生, 已黑线圈出. 图改编自文献 [95]

Fig. 3. Spatiotemporal evolution of the fundamental rogue wave solutions (23) of the NLS-MB equation. Column (a): Analytical solutions, given by 3D surface and contour plots; Column (b) the numerical results, with initial conditions being specified in the text; The column (c) shows the numerical excitation of the rogue waves, indicated by the black circles, from the background field. Figure adapted from Ref. [95].

形式即可:

$$\begin{aligned} k &= \frac{b}{a} + g \left(a^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) + \frac{h\omega(6a^2 - \omega^2)}{6}, \\ \eta &= -\frac{ab}{\kappa^2 + 4a^2} + \frac{ga^2}{2} + \frac{h\omega a^2}{2}, \\ \chi &= \frac{\kappa b}{a(\kappa^2 + 4a^2)} + g\omega + \frac{h(\omega^2 - 2a^2)}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

这里 g 和 h 为任意实常数. 不难看出, 当 $h = 0$ 和 $g = 1$ 时, 上述 Hirota-MB 方程及其 RW 解就回到了 NLS-MB 情形.

5 结 论

本文系统综述了 LSWW 谐振方程, TWRI 方程和 NLS-MB 方程这三类典型可积谐振模型的新颖异常波动力学及其研究进展. 首先, 对于

LWSW 谐振系统, 提供了其基阶 RW 解的一般形式, 指出长波和短波之间的谐振相互作用能导致黑异常波的产生. 特别地, 该基阶 RW 解推广到多分量 LWSW 系统时, 可以产生有趣的共存异常波现象, 并得到了数值模拟验证. 其次, 在 TWRI 系统中, 给出了该可积模型的基阶 RW 解, 指出该解可以适用三波混频 ($V_1 > V_2$) 和受激背散射 ($V_1 < V_2$) 两种情形. 特别地, 对于简并 TWRI 情形 ($V_1 = V_2 = V$), 也提供了其精确基阶 RW 解, 并数值展示了其互补异常波动力学. 最后, 在 NLS-MB 方程框架内, 讨论了光场与低温光纤中的两能级掺杂离子的谐振相互作用, 给出了光学和物质波的基阶 RW 解一般形式, 数值展示了它们的新颖异常波动力学. 特别地, 指出上述基阶 RW 解可以推广应用到更高阶的 NLS-MB 耦合系统 (如 Hirota-MB 系统), 展示了该解的普适性.

这里附带提一下. 本文讨论的简并 TWRI 模型在一定条件下可以转换成著名的 sine-Gordon 方程^[130], 而后者与其他可积谐振模型如 AB 模型、MTM 方程也有类似的转换关系^[131,132]. 因此可以预测, 本文呈现的基阶 Peregrine RW 解对其他可积谐振系统的异常波动力学研究也将有参考借鉴作用.

感谢 Philippe Grelu 教授、Jose M. Soto-Crespo 教授、Dumitru Mihalache 教授、Stefan Wabnitz 教授、上海理工大学刘一教授富有成效的合作和深入的讨论.

参考文献

- [1] Kharif C, Pelinovsky E, Slunyaev A 2009 *Rogue Waves in the Ocean* (Berlin: Springer)
- [2] Dysthe K, Krogstad H E, Müller P 2008 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40** 287
- [3] Akhmediev N, Pelinovsky E 2010 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **185** 1
- [4] Lawton G 2001 *New Scientist* **170** 28
- [5] Pisarchik A N, Jaimes-Reátegui R, Sevilla-Escoboza R, Huerta-Cuellar G, Taki M 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 274101
- [6] Onorato M, Resitori S, Baronio F (ed) 2016 *Rogue and Shock Waves in Nonlinear Dispersive Media* (Switzerland: Springer) pp179–203
- [7] Wabnitz S (ed) 2017 *Nonlinear Guided Wave Optics: A Testbed for Extreme Waves* (Bristol: IOP Publishing) Chapt. 11
- [8] Dudley J M, Dias F, Erkintalo M, Genty G 2014 *Nat. Photonics* **8** 755
- [9] Onorato M, Residori S, Bortolozzo U, Montina A, Arecchi F T 2013 *Phys. Rep.* **528** 47
- [10] Moslem W M 2011 *Phys. Plasmas* **18** 032301
- [11] Alam M S, Hafez M G, Talukder M R, Ali M Hossain 2017 *Chin. Phys. B* **26** 095203
- [12] Tsai Y Y, Tsai J Y, Lin I 2016 *Nat. Phys.* **12** 573
- [13] Bludov Yu V, Konotop V V, Akhmediev N 2009 *Phys. Rev. A* **80** 033610
- [14] Wen L, Li L, Li Z D, Song S W, Zhang X F, Liu W M 2011 *Eur. Phys. J. D* **64** 473
- [15] Zhang J F, Dai C Q 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 050501 (in Chinese) [张解放, 戴朝卿 2016 物理学报 **65** 050501]
- [16] Liu C, Yang Z Y, Zhao L C, Yang W L, Yue R H 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 040304
- [17] Yan Z Y 2010 *Commun. Theor. Phys.* **54** 947
- [18] Chabchoub A, Hoffmann N P, Akhmediev N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 204502
- [19] Akhmediev N, Ankiewicz A, Taki M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 675
- [20] Solli D R, Ropers C, Koonath P, Jalali B 2007 *Nature* **450** 1054
- [21] Lecaplain C, Grelu Ph, Soto-Crespo J M, Akhmediev N 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 233901
- [22] Baronio F, Degasperis A, Conforti M, Wabnitz S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 044102
- [23] Chen S, Baronio F, Soto-Crespo J M, Grelu Ph, Mihalache D 2017 *J. Phys. A: Math. Theor.* **50** 463001
- [24] Qiu D, He J, Zhang Y, Porsezian K 2015 *Proc. R. Soc. A* **471** 20150236
- [25] Peregrine D H 1983 *J. Aust. Math. Soc. Ser. B: Appl. Math.* **25** 16
- [26] Shrira V I, Geogjaev V V 2010 *J. Eng. Math.* **67** 11
- [27] Kibler B, Fatome J, Finot C, Millot G, Dias F, Genty G, Akhmediev N, Dudley J M 2010 *Nat. Phys.* **6** 790
- [28] Bailung H, Sharma S K, Nakamura Y 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 255005
- [29] Chabchoub A 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 144103
- [30] Walczak P, Randoux S, Suret P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 143903
- [31] Picozzi A, Garnier J, Hansson T, Suret P, Randoux S, Millot G, Christodoulides D N 2014 *Phys. Rep.* **542** 1
- [32] Soto-Crespo J M, Devine N, Akhmediev N 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 103901
- [33] Baronio F 2017 *Opt. Lett.* **42** 1756
- [34] Baronio F, Chen S, Mihalache D 2017 *Opt. Lett.* **42** 3514
- [35] Ankiewicz A, Soto-Crespo J M, Chowdhury M A, Akhmediev N 2013 *J. Opt. Soc. Am. B* **30** 87
- [36] Zhang J F, Jin M Z, He J D, Lou J H, Dai C Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 054208
- [37] Ma Z Y, Ma S H 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030507
- [38] Chen S, Soto-Crespo J M, Grelu Ph 2014 *Opt. Express* **22** 27632
- [39] Guo B L, Ling L M 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 110202
- [40] Baronio F, Conforti M, Degasperis A, Lombardo S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 114101
- [41] Grelu Ph (ed) 2016 *Nonlinear Optical Cavity Dynamics: from Microresonators to Fiber Lasers* (Weinheim: Wiley-VCH) pp231–316
- [42] Grelu Ph, Akhmediev N 2012 *Nat. Photonics* **6** 84
- [43] Chen S, Dudley J M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 233903
- [44] Akhmediev N, Ankiewicz A 1997 *Solitons: Nonlinear Pulses and Beams* (London: Chapman and Hall)
- [45] Chen S, Liu Y, Mysyrowicz A 2010 *Phys. Rev. A* **81** 061806
- [46] Guo B, Ling L, Liu Q P 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026607
- [47] He J S, Zhang H R, Wang L H, Porsezian K, Fokas A S 2013 *Phys. Rev. E* **87** 052914
- [48] Wang D S, Zhang D J, Yang J 2010 *J. Math. Phys.* **51** 023510
- [49] Wang D S, Wang X 2018 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **41** 334
- [50] Chen S, Zhou Y, Baronio F, Mihalache D 2018 *Rom. Rep. Phys.* **70** 102
- [51] Akhmediev N, Ankiewicz A, Soto-Crespo J M 2009 *Phys. Rev. E* **80** 026601
- [52] Ankiewicz A, Soto-Crespo J M, Akhmediev N 2010 *Phys. Rev. E* **81** 046602
- [53] Chen S 2013 *Phys. Rev. E* **88** 023202
- [54] Soto-Crespo J M, Devine N, Hoffmann N P, Akhmediev N 2014 *Phys. Rev. E* **90** 032902
- [55] Chan H N, Chow K W, Kedziora D J, Grimshaw R H J, Ding E 2014 *Phys. Rev. E* **89** 032914
- [56] Zhang Y, Guo L, He J, Zhou Z 2015 *Lett. Math. Phys.* **105** 853
- [57] He J, Xu S, Porsezian K 2012 *J. Phys. Soc. Jpn.* **81** 124007
- [58] Chen S, Song L Y 2014 *Phys. Lett. A* **378** 1228
- [59] Xu S, He J, Cheng Y, Porsezian K 2015 *Math. Method Appl. Sci.* **38** 1106
- [60] He J, Wang L, Li L, Porsezian K, Erdélyi R 2014 *Phys. Rev. E* **89** 062917

- [61] Chen S, Soto-Crespo J M, Baronio F, Grelu Ph, Mihalache D 2016 *Opt. Express* **24** 15251
- [62] Zha Q 2013 *Phys. Scr.* **87** 065401
- [63] Chen S, Baronio F, Soto-Crespo J M, Liu Y, Grelu Ph 2016 *Phys. Rev. E* **93** 062202
- [64] Chen S, Zhou Y, Bu L, Baronio F, Soto-Crespo J M, Mihalache D 2019 *Opt. Express* **27** 11370
- [65] Ankiewicz A, Kedziora D J, Chowdury A, Bandelow U, Akhmediev N 2016 *Phys. Rev. E* **93** 012206
- [66] Zhang Y, Guo L, Chabchoub A, He J 2017 *Rom. J. Phys.* **62** 102
- [67] Chen S, Mihalache D 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 215202
- [68] Baronio F, Conforti M, Degasperis A, Lombardo S, Onorato M, Wabnitz S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 034101
- [69] Li L, Malomed B A, Mihalache D, Liu W M 2006 *Phys. Rev. E* **73** 066610
- [70] Chen S, Song L Y 2013 *Phys. Rev. E* **87** 032910
- [71] Li Z D, Huo C Z, Li Q Y, He P B, Xu T F 2018 *Chin. Phys. B* **27** 040505
- [72] Ye Y, Zhou Y, Chen S, Baronio F, Grelu Ph 2019 *Proc. R. Soc. A* **475** 20180806
- [73] Ohta Y, Yang J 2012 *Phys. Rev. E* **86** 036604
- [74] Ohta Y, Yang J 2013 *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 105202
- [75] Randoux S, Suret P, El G 2016 *Sci. Rep.* **6** 29238
- [76] Matveev V B, Salle M A 1991 *Darboux Transformation and Solitons* (Berlin: Springer)
- [77] Hirota R 1973 *J. Math. Phys.* **14** 805
- [78] Zhang N, Xia T C, Hu B B 2017 *Commun. Theor. Phys.* **68** 580
- [79] Kang Z Z, Xia T C, Ma W X 2019 *Adv. Differ. Equ. NY* **2019** 188
- [80] Kang Z Z, Xia T C, Ma W X 2019 *Proc. Rom. Acad. A* **20** 115
- [81] Baronio F, Wabnitz S, Kodama Y 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 173901
- [82] Baronio F, Chen S, Onorato M, Trillo S, Wabnitz S, Kodama Y 2016 *Opt. Lett.* **41** 5571
- [83] Bokaecyan M, Ankiewicz A, Akhmediev N 2019 *Phys. Scr.* **94** 035203
- [84] Mihalache D 2017 *Rom. Rep. Phys.* **69** 403
- [85] Malomed B A, Mihalache D 2019 *Rom. J. Phys.* **64** 106
- [86] Frisquet B, Kibler B, Morin Ph, Baronio F, Conforti M, Millot G, Wabnitz S 2016 *Sci. Rep.* **6** 20785
- [87] Baronio F, Frisquet B, Chen S, Millot G, Wabnitz S, Kibler B 2018 *Phys. Rev. A* **97** 013852
- [88] Tikan A, Billet C, El G, Tovbis A, Bertola M, Sylvestre T, Gustave F, Randoux S, Genty G, Suret P, Dudley J M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 033901
- [89] Liu W, Zhang Y, He J 2018 *Rom. Rep. Phys.* **70** 106
- [90] Chen S, Ye Y, Soto-Crespo J M, Grelu Ph, Baronio F 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 104101
- [91] Kibler B, Chabchoub A, Gelash A, Akhmediev N, Zakharov V E 2015 *Phys. Rev. X* **5** 041026
- [92] Chen S, Grelu Ph, Soto-Crespo J M 2014 *Phys. Rev. E* **89** 011201
- [93] Chen S, Baronio F, Soto-Crespo J M, Grelu Ph, Conforti M, Wabnitz S 2015 *Phys. Rev. A* **92** 033847
- [94] He J, Xu S, Porsezian K 2012 *Phys. Rev. E* **86** 066603
- [95] Chen S, Ye Y, Baronio F, Liu Y, Cai, X M, Grelu Ph 2017 *Opt. Express* **25** 29687
- [96] Wang X, Li Y, Huang F, Chen Y 2015 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **20** 434
- [97] Degasperis A, Wabnitz S, Aceves A B 2015 *Phys. Lett. A* **379** 1067
- [98] Guo L, Wang L, Cheng Y, He J 2017 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **52** 11
- [99] Zakharov V E 1972 *Sov. Phys. JETP* **35** 908
- [100] Benney D J 1977 *Stud. Appl. Math.* **56** 81
- [101] Djordjevic V D, Redekopp L G 1977 *J. Fluid Mech.* **79** 703
- [102] Chowdhury A, Tataronis J A 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 153905
- [103] Shats M, Punzmann H, Xia H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 104503
- [104] Chow K W, Chan H N, Kedziora D J, Grimshaw R H J 2013 *J. Phys. Soc. Jpn.* **82** 074001
- [105] Chan H N, Grimshaw R H J, Chow K W 2018 *Phys. Rev. Fluids* **3** 124801
- [106] Wright III O C 2006 *Stud. Appl. Math.* **117** 71
- [107] Chen S 2014 *Phys. Lett. A* **378** 1095
- [108] Baronio F, Chen S, Grelu Ph, Wabnitz S, Conforti M 2015 *Phys. Rev. A* **91** 033804
- [109] Chen S, Soto-Crespo J M, Grelu Ph 2014 *Phys. Rev. E* **90** 033203
- [110] Kaup D J, Reiman A, Bers A 1979 *Rev. Mod. Phys.* **51** 275
- [111] Ibragimov E, Struthers A 1996 *Opt. Lett.* **21** 1582
- [112] Conforti M, Baronio F, Degasperis A, Wabnitz S 2007 *Opt. Express* **15** 12246
- [113] Abdolvand A, Nazarkin A, Chugreev A V, Kaminski C F, Russell P St J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 183902
- [114] Picholle E, Montes C, Leycuras C, Legrand O, Botineau J 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 1454
- [115] Taranenko Y N, Kazovsky L G 1992 *IEEE Photonics Technol. Lett.* **4** 494
- [116] Baronio F, Conforti M, Degasperis A, Wabnitz S 2008 *IEEE J. Quantum Electron.* **44** 542
- [117] Picozzi A, Haelterman M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2010
- [118] Malkin V M, Shvets G, Fisch N J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4448
- [119] Buryak A V, Di Trapani P, Skryabin D V, Trillo S 2002 *Phys. Rep.* **370** 63
- [120] Baronio F, Conforti M, De Angelis C, Degasperis A, Andreana M, Couderc V, Barthélémy A 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 113902
- [121] Degasperis A, Lombardo S 2006 *Physica D* **214** 157
- [122] Chen S, Cai X M, Grelu Ph, Soto-Crespo J M, Wabnitz S, Baronio F 2016 *Opt. Express* **24** 5886
- [123] Russell P St J, Culverhouse D, Farahi F 1991 *IEEE J. Quantum Electron.* **27** 836
- [124] Allen L, Eberly J H 1975 *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (New York: Wiley)
- [125] Haus H A 1979 *Rev. Mod. Phys.* **51** 331
- [126] McCall S L, Hahn E L 1967 *Phys. Rev. Lett.* **18** 908
- [127] Nakazawa M, Yamada E, Kubota H 1991 *Phys. Rev. A* **44** 5973
- [128] He J S, Cheng Y, Li Y S 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 493
- [129] Li C, He J, Porsezian K 2013 *Phys. Rev. E* **87** 012913
- [130] Conforti M, Baronio F 2011 *Eur. Phys. J. D* **64** 115
- [131] Wu C F, Grimshaw R H J, Chow K W, Chan H N 2015 *Chaos* **25** 103113
- [132] Tsuchida T 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 7827

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Recent developments of extreme wave events in integrable resonant systems^{*}Pan Chang-Chang¹⁾ Baronio Fabio²⁾ Chen Shi-Hua^{1)†}¹⁾ (*School of Physics, Southeast University, Nanjing 211189, China*)²⁾ (*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Brescia, Via Branze 38, 25123 Brescia, Italy*)

(Received 19 August 2019; revised manuscript received 28 October 2019)

Abstract

From a microscopic perspective, the single extreme rogue wave event can be thought of as the spatiotemporally localized rational solutions of the underlying integrable model. A typical example is the fundamental Peregrine rogue wave, who in general entails a three-fold peak amplitude, while making its peak position arbitrary on a finite continuous-wave background. This kind of bizarre wave structure agrees well with the fleeting nature of realistic rogue waves and has been confirmed experimentally, first in nonlinear fibers, then in water wave tanks and plasmas, and recently in an irregular oceanic sea state. In this review, with a brief overview of the current state of the art of the concepts, methods, and research trends related to rogue wave events, we mainly discuss the fundamental Peregrine rogue wave solutions as well as their recent progress, intended for three typical integrable models, namely, the long-wave short-wave resonant equation, the three-wave resonant interaction equation, and the nonlinear Schrödinger and Maxwell–Bloch equation. Basically, while the first two models can describe the resonant interaction among optical waves, the latter governs the interaction between the optical waves and the resonant medium. For each integrable model, we present explicitly its Lax pair, Darboux transformation formulas, and fundamental Peregrine rogue wave solutions, in a self-consistent way. We confirm by convincing examples that these fundamental rogue wave solutions exhibit universality and can be applied to the multi-component or the higher-order versions of the current integrable models. By means of numerical simulations, we demonstrate as well several novel rogue wave dynamics such as coexisting rogue waves, complementary rogue waves, and Peregrine solitons of self-induced transparency.

Keywords: rogue wave, long-wave short-wave resonance, three-wave resonant interaction, Maxwell–Bloch equation

PACS: 05.45.Yv, 02.30.Ik, 47.20.Ky, 47.54.–r

DOI: 10.7498/aps.69.20191240

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11474051, 11974075).

[†] Corresponding author. E-mail: cshua@seu.edu.cn

非线性光学中的暗孤子分子

徐丹红 楼森岳

Dark soliton molecules in nonlinear optics

Xu Dan-Hong Lou Sen-Yue

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 014208 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191347

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191347>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非局域高次非线性介质中的多极暗孤子

Multi-pole dark solitons in nonlocal and cubic–quintic nonlinear medium

物理学报. 2018, 67(21): 214207 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180786>

纵波光学声子耦合对级联型电磁感应透明半导体量子阱中暗–亮光孤子类型的调控

Controlling of dark or bright soliton type in a cascade-type electromagnetically induced transparency semiconductor quantum well by the coupling longitudinal optical phonons

物理学报. 2017, 66(3): 034202 <https://doi.org/10.7498/aps.66.034202>

缺陷致非线性电路孤子非对称传输

Defect induced asymmetric soliton transmission in the nonlinear circuit

物理学报. 2017, 66(10): 100502 <https://doi.org/10.7498/aps.66.100502>

竞争非局域三次五次非线性介质中孤子的传输特性

Propagating properties of spatial solitons in the competing nonlocal cubic–quintic nonlinear media

物理学报. 2017, 66(5): 054208 <https://doi.org/10.7498/aps.66.054208>

非线性光学超构表面

Nonlinear photonic metasurfaces

物理学报. 2017, 66(14): 147803 <https://doi.org/10.7498/aps.66.147803>

电磁诱导透明暗孤子的耗散变分束缚分析

Dissipative variational analysis for bounded dark solitons of electromagnetically induced transparency

物理学报. 2018, 67(6): 064207 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172567>

专题：非线性物理

非线性光学中的暗孤子分子^{*}徐丹红 楼森岳[†]

(宁波大学物理科学与技术学院, 宁波 315211)

(2019 年 9 月 6 日收到; 2019 年 10 月 25 日收到修改稿)

孤子分子是当前非线性光学中的重要课题. 本文首先研究具有高阶色散和高阶非线性效应非线性光学模型中各种周期波(孤子晶格)的严格解, 及各种可能的单孤子解. 然后在一个可积的情况下, 利用推广的双线性形式, 给出多孤子解, 并从多孤子解的速度共振条件给出暗孤子分子的严格解析表达式. 对于本文给出模型的多暗孤子分子之间, 以及孤子分子和通常孤子之间的相互作用都是弹性的. 值得指出的是, 在不可积的情况下孤子分子也是可以存在的.

关键词: 暗孤子分子, 高阶非线性效应, 弹性相互作用, 可积系统

PACS: 42.65.Tg, 05.45.Yv, 02.30.Ik, 47.20.Ky

DOI: 10.7498/aps.69.20191347

1 引言

孤立波、孤立子、呼吸子、怪波等非线性局域激发模式在物理学的各个分支如流体物理^[1]、等离子体物理^[2]、复杂系统和复杂网络^[3]、量子场论和粒子物理^[4]、引力理论^[5]、玻色爱因斯坦凝聚^[6]、大气和海洋物理^[7]、特别是光物理^[8–10]中起着非常重要的作用. 最近, 孤子分子在非线性光学实验上的成功发现^[11–13]成为非线性物理的一个新的热门课题. 在理论上, 非线性耦合系统的孤子分子已经被一些非线性物理工作者所研究^[14,15]. 除了在光学中的孤子分子外, 在其他领域也应该能找到孤子分子. 在文献^[16]中, 本文作者之一(楼)在单分量的流体模型中给出了多种类型的孤子分子解.

非线性系统孤子解的求解有很多行之有效的方法, 如广田(Hirota)直接法^[17]、达布(Darboux)变换方法^[18]、反散射变换方法^[19]、对称性方法^[20]等等. 通常使用不同的方法得到的多孤子解表面上看可以是很不一样的, 但本质上都是等价的. 不同

的表达式在应用中各有优点. 绝大多数文献中, 各种非线性模型的单孤子解都采用紧致简洁方便的双曲函数形式, 因此很多著名专家如 Hirota 和 Toda 及我国的陈登远^[21]等都期望能用双曲函数来简洁地表达多孤子解. 最近, 我们成功实现这一愿望^[7,22]. 这些新的简洁表达式不仅研究非局域非线性系统的孤子解非常方便, 而且本文将进一步用这种表达式来寻求各种类型的共振孤子, 包括孤子分子.

本文第二节首先给出具有高阶色散和高阶非线性修正的非线性光学系统. 然后研究该系统可能具有的周期波解和孤立波解. 本文第三节中研究一个可积的情况——散焦型 Hirota 模型, 将 Hirota 模型变换成一个新的 Hirota 双线性方程后, 成功给出用双曲余弦描述的多暗孤子表达式. 然后从多孤子解出发研究一种新的共振孤子激发模式——速度共振. 从而导致孤子束缚态——暗孤子分子的形成. 暗孤子分子之间及暗孤子分子和通常暗孤子的相互作用性质也在第三节做了简单的讨论. 最后一节是总结和讨论.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 11975131, 11435005)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn

2 高阶非线性薛定谔方程及其周期波和孤立波

在众多的实际非线性光学问题中高阶的色散和各种非线性效应是不可忽略的. 其中最常见的高阶非线性薛定谔方程可具有下述形式 ($i = \sqrt{-1}$)

$$iq_t + d_2 q_{xx} + \sigma r_2 |q|^2 q + i\epsilon [(d_3 q_{xxx} + 6\sigma r_3 |q|^2 q_x + \beta \sigma r_3 (|q|^2)_x q)] = 0. \quad (1)$$

方程 (1) 包含了很多物理和数学领域中重要的特殊情况 (包括时空变量 t 和 x 的交换). $\epsilon = 0$ 对应的正是著名的聚焦 ($\sigma = 1$) 和散焦 ($\sigma = -1$) 非线性薛定谔方程. 当 $d_2 = r_2 = 0$, $\beta = 0, 3$ 时, 方程 (1) 是另一个非常重要的物理和数学中的重要模型: 复修正 Korteweg de-Vries (KdV) 方程 [23]. 当 $\beta = 0$ 时, 方程 (1) 是可积的 Hirota 方程 [24]. 当 $\beta = 3$ 时, 方程 (1) 也是可积系统: Sasa-Satsuma 方程 [23]. 当 $r_2 = d_3 = 0$ 时, 方程 (1) 也包含了三种可积的导数非线性薛定谔方程 [25].

在研究高阶非线性薛定谔方程的多孤子解和孤子分子解之前, 我们先研究一般高阶非线性薛定谔系统 (1) 式下述形式的一般行波解

$$q = Q(\xi) e^{i(k_0 x + \omega_0 t + \phi_0)}, \quad \xi = kx + \omega t + \xi_0, \quad (2)$$

其中 k_0 , ω_0 , ϕ_0 , k , ω 及 ξ_0 为待定实常数.

将 (2) 式代入 (1) 式可得关于 $Q(\xi)$ 应满足的两个常微分方程,

$$k^3 \epsilon d_3 Q_{\xi\xi\xi} + [\omega + 2d_2 k k_0 - 3d_3 \epsilon k k_0^2 + 2\sigma \epsilon r_3 k (\beta + 3) Q^2] = 0, \quad (3)$$

$$k^2 (d_2 - 3k_0 d_3 \epsilon) Q_{\xi\xi} - 2\sigma (3\epsilon k_0 r_3 - r_2) Q^3 + (d_3 \epsilon k_0^3 - d_2 k_0^2 - \omega_0) Q = 0. \quad (4)$$

为了给出 (3) 式和 (4) 式的相容显式解我们分两种情况:

情况 1 一般情况. 在对模型参数无任何限制的情况下, 可取载波参数 k_0 和 ω_0 由其他参数决定为

$$k_0 = \frac{d_2}{3d_3 \epsilon} + \frac{\Delta}{d_3 \epsilon r_3 \beta}, \quad \Delta \equiv d_2 r_3 - d_3 r_2, \quad (5)$$

$$\omega_0 = \frac{\Delta(2d_2^2 k + 9d_3 \epsilon \omega)}{3r_3 d_3^2 \epsilon^2 k \beta} - \frac{8\Delta^3}{d_3^2 \epsilon^2 r_3^3 \beta^3} - \frac{2d_2^3}{27d_3^2 \epsilon^2}. \quad (6)$$

在参数条件 (5) 式和 (6) 式下, 方程 (3) 和 (4) 退化成单个标准的 Jacobi 椭圆函数满足的方程

$$Q_{\xi\xi} = \frac{1}{\epsilon^2 k^2 d_3^2} \left(\frac{3\Delta^2}{\beta^2 r_3^2} - \frac{d_2^2}{3} - \frac{\epsilon d_3 \omega}{k} \right) Q - \frac{2\sigma r_3 (3 + \beta)}{3d_3 k^2} Q^3. \quad (7)$$

方程 (7) 有三种标准的周期波解:

周期波解 1

$$Q = \pm km \sqrt{\frac{-3\sigma d_3}{r_3(3+\beta)}} \operatorname{sn}(kx + \omega t + \xi_0, m),$$

$$\omega = \epsilon(1 + m^2) d_3 k^3 - \frac{d_2^2 k}{3d_3 \epsilon} + \frac{3k\Delta^2}{\epsilon d_3 r_3^2 \beta^2}. \quad (8)$$

周期波解 2

$$Q = \pm km \sqrt{\frac{3\sigma d_3}{r_3(3+\beta)}} \operatorname{cn}(kx + \omega t + \xi_0, m),$$

$$\omega = \epsilon(1 - 2m^2) d_3 k^3 - \frac{(d_2^2 r_3^2 \beta^2 - 9\Delta^2)k}{3d_3 \epsilon r_3^2 \beta^2}. \quad (9)$$

周期波解 3

$$Q = \pm k \sqrt{\frac{3\sigma d_3}{r_3(3+\beta)}} \operatorname{dn}(kx + \omega t + \xi_0, m),$$

$$\omega = \epsilon(m^2 - 2) d_3 k^3 - \frac{(d_2^2 r_3^2 \beta^2 - 9\Delta^2)k}{3d_3 \epsilon r_3^2 \beta^2}. \quad (10)$$

当 Jacobi 椭圆函数的模趋向于 1 时, 上述三类周期波解退化成两种类型的孤立子解.

孤子解 1, 暗孤子解

$$Q = \pm k \sqrt{\frac{-3\sigma d_3}{r_3(3+\beta)}} \tanh(kx + \omega t + \xi_0),$$

$$\omega = \epsilon 2d_3 k^3 - \frac{d_2^2 k}{3d_3 \epsilon} + \frac{3k\Delta^2}{\epsilon d_3 r_3^2 \beta^2}. \quad (11)$$

孤子解 2, 亮孤子解

$$Q = \pm k \sqrt{\frac{3\sigma d_3}{r_3(3+\beta)}} \operatorname{sech}(kx + \omega t + \xi_0),$$

$$\omega = -\epsilon d_3 k^3 - \frac{(d_2^2 r_3^2 \beta^2 - 9\Delta^2)k}{3d_3 \epsilon r_3^2 \beta^2}. \quad (12)$$

从解的表达式很容易看出, 暗孤子晶格解 (8) 式和暗孤子解 (11) 式的存在条件是 $\frac{\sigma d_3}{r_3(3+\beta)} < 0$. 亮孤子晶格 (9) 式, (10) 式和亮孤子 (12) 式存在条件是 $\frac{\sigma d_3}{r_3(3+\beta)} > 0$.

情况 2 特殊情况 $\Delta = 0$. 在这一特殊参数条件下光孤子系统 (1) 具有更一般的孤子晶格和孤子解. 当 $\Delta = 0$ 时, 可简单取

$$k_0 = \frac{d_2}{3d_3\epsilon}, \quad \omega_0 = -\frac{2d_2^3}{27d_3^2\epsilon^2}, \quad \Delta = 0. \quad (13)$$

在参数条件 (13) 式下, 方程 (3) 和 (4) 退化成单个三阶方程

$$Q_{\xi\xi\xi} + \left[\frac{2r_2\sigma(\beta+3)}{d_2k^2} Q^2 + \frac{d_2^2k + 3d_3\epsilon\omega}{3d_3^2\epsilon^2k^3} \right] Q_{\xi} = 0. \quad (14)$$

类似地, 方程 (14) 有三种标准的周期波 (孤子晶格) 解:

周期波解 4

$$\begin{aligned} Q &= \frac{b[a + \text{sn}(\xi, m)]}{\alpha_1 + \beta_1 \text{sn}(\xi, m)}, \\ a &= \frac{\beta_1(\alpha_1^2 m^2 + \alpha_1^2 - 2\beta_1^2)}{\alpha_1(2\alpha_1^2 m^2 - \beta_1^2 m^2 - \beta_1^2)}, \\ b^2 &= \frac{3\sigma\alpha_1^2 d_2 k^2 (2\alpha_1^2 m^2 - \beta_1^2 m^2 - \beta_1^2)^2}{4r_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\beta_1^2 - \alpha_1^2 m^2)(\beta + 3)}, \\ \xi &= kx + \omega t, \\ \omega &= \frac{\epsilon k^3 d_3 [2(m^2 + 1)(\alpha_1^4 m^2 + \beta_1^4) + \beta_1^2(m^4 - 10m^2 + 1)\alpha_1^2]}{2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_1^2 m^2 - \beta_1^2)} \\ &\quad - \frac{d_2^2 k}{3d_3 \epsilon}. \end{aligned} \quad (15)$$

对于小的 m , Jacobi 椭圆函数 sn 接近于三角函数 $\sin$. 而随着模 m 越来越接近于 1, sn 越来越接近于双曲 $\tanh$ 函数, 而相应的周期解看起来像是孤立子的周期性排列. 因此对于接近于 $m = 1$ 的周期解, 也可以称之为孤子晶格解. 图 1 展示了用 (15) 式描述的周期波解、亮孤子晶格解. 其相应的参数为 (本节所有的图中的模型参数固定为 $\beta = d_2 = d_3 = r_2 = 10\epsilon = 1$)

$$\begin{aligned} k &= \beta_1 = \sigma = 1, \quad m = 0.99, \\ \alpha_1 &= \frac{199}{198}, \quad \xi_0 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

图 2 展示了用同一表达式 (15) 式描述的暗孤

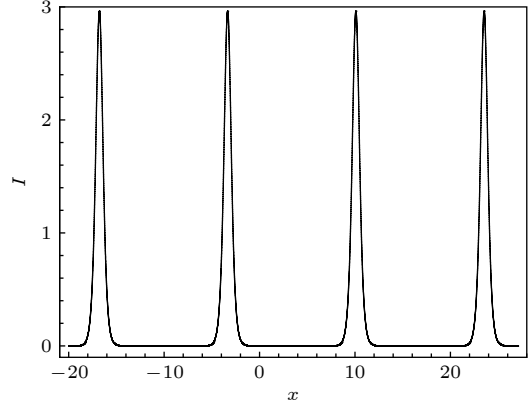


图 1 由 (15) 式描述的亮孤子晶格, 其中参数由 (16) 式给定
Fig. 1. Bright soliton lattice described by Eq. (15) with the parameter selected from Eq. (16).

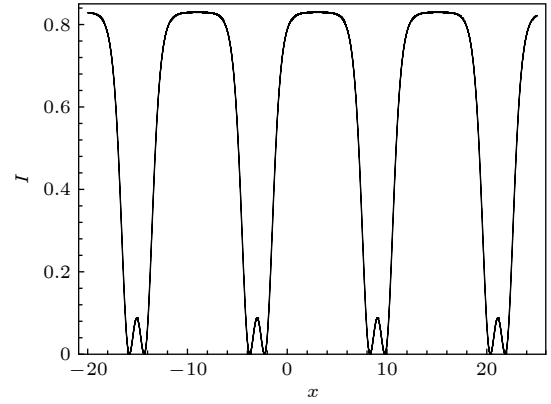


图 2 由 (15) 式描述的暗孤子晶格, 其中参数由 (17) 式给定
Fig. 2. Dark soliton lattice described by Eq. (15) with the parameter selected from Eq. (17).

子晶格解. 其相应的参数为

$$\begin{aligned} k &= \beta_1 = -\sigma = 1, \quad m = 0.98, \\ \alpha_1 &= \frac{50}{49}, \quad \xi_0 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

这类暗孤子晶格中的暗孤子中间有一非暗的灰色区.

周期波解 5

$$\begin{aligned} Q &= \frac{b[a + \text{cn}(\xi, m)]}{\alpha_1 + \beta_1 \text{cn}(\xi, m)}, \\ \xi &= kx + \omega t + \xi_0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta_1[2m^2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \alpha_1^2 + 2\beta_1^2]}{\alpha_1(2\alpha_1^2 m^2 - 2\beta_1^2 m^2 + \beta_1^2)}, \quad b^2 = \frac{3\sigma\alpha_1^2 d_2 k^2 (2\alpha_1^2 m^2 - 2\beta_1^2 m^2 + \beta_1^2)^2}{4r_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_1^2 m^2 - \beta_1^2 m^2 + \beta_1^2)(\beta + 3)}, \\ \omega &= \frac{\epsilon d_3 k^3 [2(1 - 2m^2)(\alpha_1^4 m^2 + \beta_1^4 m^2 - \beta_1^4) + \alpha_1^2 \beta_1^2 (8m^4 - 8m^2 - 1)]}{2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_1^2 m^2 - \beta_1^2 m^2 + \beta_1^2)} - \frac{d_2^2 k}{3d_3 \epsilon}. \end{aligned} \quad (19)$$

图3展示了第二种类型的亮孤子晶格结构. 这类亮孤子晶格由表达式 (18) 式描述. 与图3对应的参数为

$$k = \beta_1 = \sigma = 1, m = 0.9, \alpha_1 = \frac{41}{40}, \xi_0 = 0. \quad (20)$$

第一类的亮孤子晶格的背景是暗的, 第二类亮

孤子晶格的背景是灰的, 而灰色背景和亮孤子间又有暗区相间.

周期波解 6

$$Q = \frac{b[a + \operatorname{dn}(\xi, m)]}{\alpha_1 + \beta_1 \operatorname{dn}(\xi, m)}, \quad \xi = kx + \omega t + \xi_0, \quad (21)$$

$$a = \frac{\beta_1(\alpha_1^2 m^2 - 2\beta_1^2 m^2 - 2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2)}{\alpha_1(2\beta_1^2 - \beta_1^2 m^2 - 2\alpha_1^2)}, \quad b^2 = \frac{3\sigma\alpha_1^2 d_2 k^2 (\beta_1^2 m^2 + 2\alpha_1^2 - 2\beta_1^2)^2}{4r_2(\beta_1^2 m^2 + \alpha_1^2 - \beta_1^2)(\beta + 3)(\alpha_1^2 - \beta_1^2)},$$

$$\omega = \frac{d_3 k^3 \epsilon [2(m^2 - 2)(\beta_1^4 - m^2 \beta_1^4 + \alpha_1^4) - \alpha_1^2(m^4 + 8m^2 - 8)\beta_1^2]}{2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\beta_1^2 m^2 + \alpha_1^2 - \beta_1^2)} - \frac{d_2^2 k}{3d_3 \epsilon}. \quad (22)$$

由于 Jacobi 椭圆函数 dn 的恒正性, 这类函数描述的孤子晶格既可以是亮孤子晶格, 也可以是暗孤子

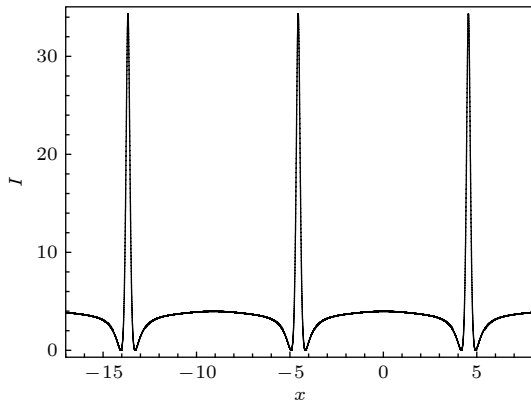


图3 由 (18) 式描述 第二类亮孤子晶格, 其中参数由 (20) 式给定

Fig. 3. Second type of bright soliton lattice described by Eq. (18) with the parameter selected from Eq. (20).

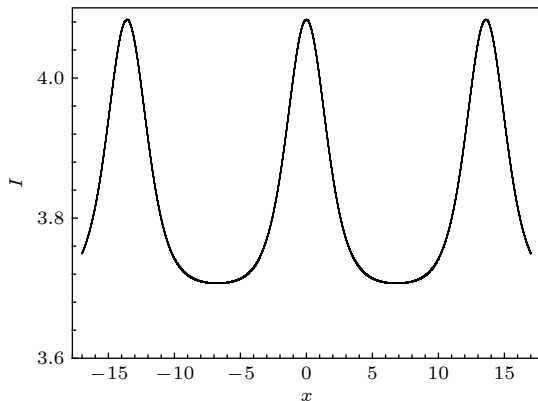


图4 第三类亮孤子晶格. 由 (21) 式描述, 其中参数由 (23) 式给定

Fig. 4. Third type of bright soliton lattice described by Eq. (21) with the parameter selected from Eq. (23).

晶格.

图4展示了第三种类型的亮孤子晶格结构. 这类亮孤子晶格由表达式 (21) 式描述. 与图4对应的参数为

$$k = \beta_1 = \sigma = 1, m = 0.99999, \quad \alpha_1 = 41/40, \xi_0 = 0. \quad (23)$$

这一类亮孤子也具有灰色背景, 但不同于第二类亮孤子晶格, 灰背景和亮孤子之间没有暗区隔离.

图5展示了第二类暗孤子晶格结构. 这类暗孤子晶格由表达式 (21) 式描述. 与图5对应的参数为

$$k = \beta_1 = -\sigma = 1, m = 0.99999, \quad \alpha_1 = 1/2, \xi_0 = 0. \quad (24)$$

当 Jacobi 椭圆函数的模 $m \rightarrow 1$ 时, 周期波解 (15) 退化为下述孤子解:

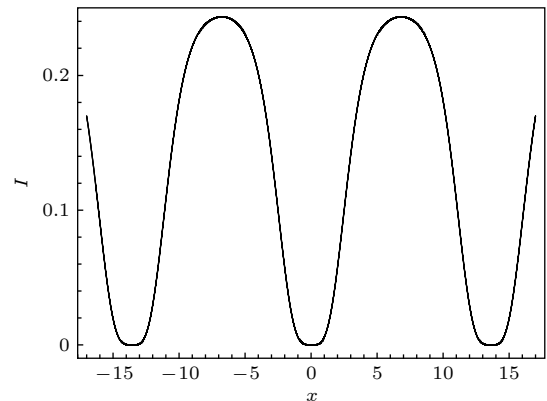


图5 第二类暗孤子晶格由 (21) 式描述, 其中参数由 (24) 式给定

Fig. 5. Second type of dark soliton lattice described by Eq. (21) with the parameter selected from Eq. (24).

孤子解 3

$$Q = \frac{b[a + \tanh(\xi)]}{\alpha_1 + \beta_1 \tanh(\xi)}, \quad a = \frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

$$b^2 = -\frac{3\sigma\alpha_1^2 d_2 k^2}{r_2(\beta + 3)}, \quad \xi = kx + \omega t,$$

$$\omega = 2\epsilon k^3 d_3 - \frac{d_2^2 k}{3d_3 \epsilon}. \quad (25)$$

暗孤子解 (25) 式的实条件和非奇异条件为

$$\delta \equiv \frac{\sigma d_2}{r_2(3 + \beta)} < 0, \quad \alpha_1^2 > \beta_1^2.$$

图 6 正是与 (25) 式对应的暗孤子解, 相应的参数为

$$\alpha_1 = \frac{51}{49}, \beta_1 = k = m = -\sigma = 1, \xi_0 = 0. \quad (26)$$

周期波解 (18) 式和 (21) 式退化成同一种孤子解:

孤子解 4:

$$Q = \frac{b[a + \operatorname{sech}(\xi)]}{\alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sech}(\xi)}, \quad \xi = kx + \omega t + \xi_0, \quad (27)$$

$$a = \frac{\beta_1 \alpha_1}{2\alpha_1^2 - \beta_1^2},$$

$$b^2 = \frac{3\sigma d_2 k^2 (2\alpha_1^2 - \beta_1^2)^2}{4r_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\beta + 3)},$$

$$\omega = -\frac{\epsilon d_3 k^3 [2\alpha_1^2 + \beta_1^2]}{2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)} - \frac{d_2^2 k}{3d_3 \epsilon}. \quad (28)$$

当参数满足下述条件

$$\{\delta > 0, \beta_1^2 < \alpha_1^2\}, \text{ or } \{\delta < 0, \beta_1^2 > \alpha_1^2\}$$

时, 孤子解 (27) 式是一个具有灰背景的亮孤子.

图 7 展示的正是由 (27) 式表示的具有灰背景

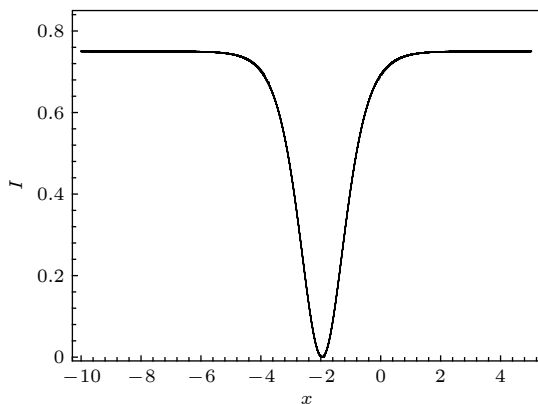


图 6 由 (25) 式描述的暗孤子, 其中参数由 (26) 式给定
Fig. 6. Dark soliton described by Eq. (25) with the parameter selected from Eq. (26).

的亮孤子, 其中的参数为

$$\alpha_1 = \frac{41}{40}, \beta_1 = k = m = \sigma = 1, \xi_0 = 0. \quad (29)$$

当下述条件

$$\{\delta < 0, \beta_1 < \alpha_1 < 0\}, \text{ or } \{\delta < 0, 0 < \alpha_1 < \beta_1\}$$

满足时, 孤子解 (27) 式是一个灰孤子解. 当 $\beta_1 = 2\alpha_1$ 时, 孤子解 (27) 式是一个暗孤子.

图 8 展示了由 (27) 式表示的暗孤子, 其中的参数取为

$$2\alpha_1 = \beta_1 = k = m = -\sigma = 1. \quad (30)$$

如图 8 所示的暗孤子具有一特殊的性质, 即在暗孤子中心 $x = 0$ 前三阶变化率均为零: $I(x = 0) = I_x(x = 0) = I_{xx}(x = 0) = I_{xxx}(x = 0) = 0$.

特别有意义的是表达式 (27) 式具有共振孤子相同的形式, 因此对于某些参数区间可知 (27) 式也具有暗孤子分子的形式. 图 9 显示了由 (27) 式

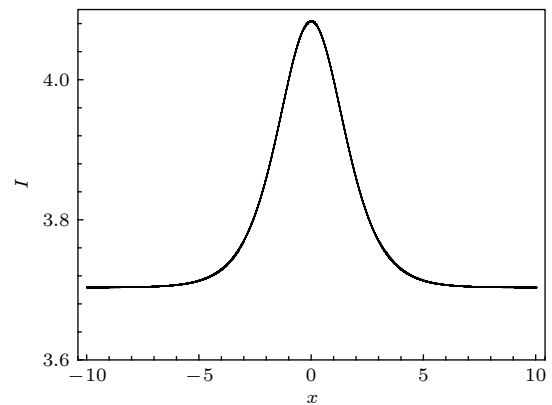


图 7 由 (27) 式描述的具有灰背景的亮孤子, 其中参数由 (29) 式给定

Fig. 7. Bright soliton (with gray background) described by Eq. (27) with the parameter selected from Eq. (29).

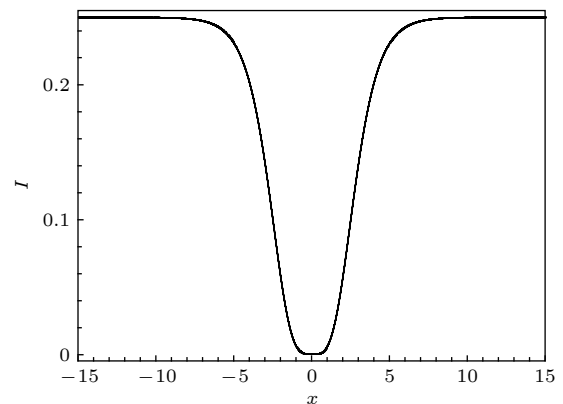


图 8 由 (27) 式描述的暗孤子, 其中参数由 (30) 式给定
Fig. 8. Dark soliton described by Eq. (27) with the parameter selected from Eq. (30).

描述的孤子分子的性质, 其中的参数选择为

$$\begin{aligned} m = 1 = -\sigma = \beta_1 = k = 1, \\ \alpha_1 = 0.001, \xi_0 = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

由于 $\beta \neq 0, 3$ 时, (1) 式不是可积系统, 所以孤子分子可以在不可积系统中存在.

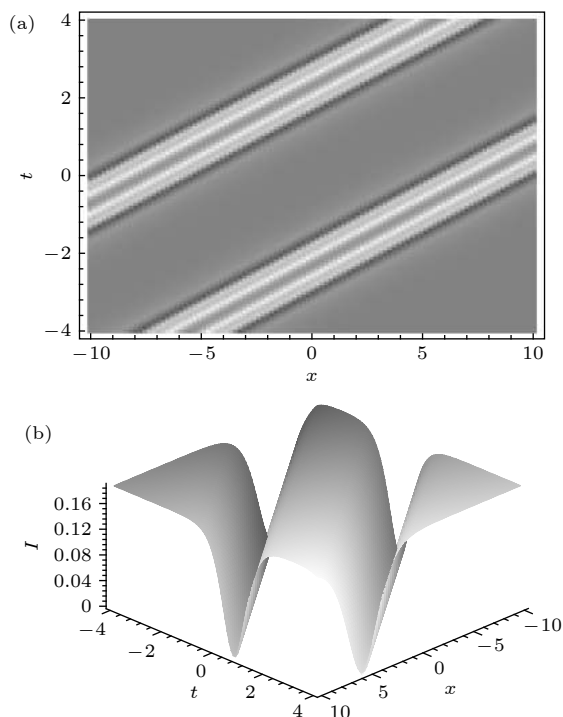


图 9 (a) 由 (27) 式描述的暗孤子分子的密度图; (b) 与 (a) 对应的立体图, 图中参数由 (31) 式给定

Fig. 9. (a) Density plot of the dark soliton molecule described by Eq. (27) with the parameter selected from Eq. (31); (b) three dimensional plot related to Fig.(a).

3 散焦 Hirota 系统的多孤子解及其孤子分子解

为了研究孤子分子的性质, 本节只限于一个特殊的可积系统, Hirota 系统, 其对应的参数限制为

$$\beta = 0, \Delta = 0, \quad (32)$$

并引入新标记 $\epsilon_1 \equiv \epsilon d_3 d_2^{-1}$. 在参数条件 (32) 式下, 模型方程 (1) 变为

$$iq_t + d_2 q_{xx} + \sigma r_2 |q|^2 q + i\epsilon_1 (d_2 q_{xxx} + 6\sigma r_2 |q|^2 q_x) = 0. \quad (33)$$

对于可积系统, 可以用很多方法得到其多孤子解, 如 Hirota 方法、反散射方法、黎曼-希尔伯特方法、达布变换方法等等. 所有各种方法中, Hirota 方法是最简单明了的方法.

很容易验证, Hirota 系统在变换

$$q = g/f \quad (34)$$

下可以变为其双线性形式

$$\begin{aligned} (2iD_t - 2d_2 D_x^2 + i\epsilon_1 d_2 D_x^3 \\ - 3\kappa^2 d_2 i\epsilon_1 D_x + \kappa^2 d_2) f \cdot g = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$(2d_2 D_x^2 - \kappa^2 d_2) f \cdot f - 4\sigma r_2 g \cdot g^* = 0. \quad (36)$$

在传统的非线性薛定谔模型 ($\epsilon_1 = 0$) 和 Hirota 系统 ($\epsilon_1 \neq 0$) 的双线性形式中, (35) 式和 (36) 式中常数 κ 被固定为零. 当 κ 取零时双线性方程组 (35) 式和 (36) 式的多孤子解由传统的 Hirota 形式描述. 当 $\kappa \neq 0$ 且 $\sigma d_2/r_2 < 0$ (对应于散焦系统) 时, 双线性系统 (35) 式和 (36) 式的多孤子解可以表示为 [26]

$$\begin{aligned} f = \sum_{\{\nu\}} K_{\{\nu\}} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \nu_i \xi_i \right), \\ \xi_i = k_i x + \omega_i t + \xi_{i0}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} g = g_0 \sum_{\{\nu\}} K_{\{\nu\}} \cosh \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \nu_i \eta_i \right), \\ \eta_i = \xi_i + 2i\phi_i, \\ g_0 = \frac{1}{2} \kappa \sqrt{\frac{-\sigma d_2}{r_2}} e^{i(k_0 x + \omega_0 t + \phi_0)}, \end{aligned} \quad (38)$$

其中关于 $\{\nu\} \equiv \{\nu_1, \dots, \nu_N\}$ 的求和是关于所有可能的非对偶分布 $\nu_i = \pm 1, i = 1, \dots, N$ 求和. 如果 $\{\nu'\} = -\{\nu\}$, 则分布 $\{\nu'\}$ 和 $\{\nu\}$ 被称作是对偶的. 由于 $\cosh$ 函数是偶函数, 所以对偶的分布给出相同的表达式, 所以求和只需要对非对偶分布求. 在 (37) 式和 (38) 式中的 $K_{\{\nu\}}$ 为

$$K_{\{\nu\}} = \prod_{i < j} \sin \left(\frac{\phi_i - \nu_i \nu_j \phi_j}{2} \right), \quad (39)$$

而 k_i, ω_0 和 ω_i 为

$$\begin{aligned} k_i = \kappa \sin(\phi_i), \\ \omega_0 = \frac{1}{2} d_2 (2k_0^3 \epsilon_1 + 3k_0 \kappa^2 \epsilon_1 - 2k_0^2 - \kappa^2), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \omega_i = \frac{1}{2} k_i d_2 [\epsilon_1 (6k_0^2 + 3\kappa^2 - 2k_i^2) - 4k_0 \\ + 2\kappa(1 - 3k_0 \epsilon_1) \cos(\phi_i)], \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (41)$$

k_0, ξ_{i0}, ϕ_i 和 ϕ_0 为任意常数.

为了寻求孤子分子解, 我们先显式写下双孤子解,

$$q = g_2/f_2,$$

$$f_2 = \sin\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{2}\right), \quad (42)$$

$$g_2 = g_0 \left[\sin\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}\right) \right]. \quad (43)$$

在一般情况下双孤子解 (42) 式和 (43) 式是具有弹

性相互作用的双孤子态. 图 10 展示了这样一个典型的双孤子作用图像, 其中采用的参数为 (本节中统一采用的模型参数是 $d_2 = r_2 = -\sigma = 10\epsilon_1 = 1$)

$$\kappa = -15, k_0 = 0, \phi_1 = 2\pi/3, \phi_2 = \pi/3, \xi_{20} = -\xi_{10} = 20. \quad (44)$$

只有当二孤子的波速达到一种特殊共振状态, 使得孤子的吸引和排斥作用正好达到平衡时, 才能形成束缚态——孤子分子.

从表达式 (41) 式可知两孤子形成孤子分子的速度共振条件为

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k_1[\epsilon_1(6k_0^2 + 3\kappa^2 - 2k_1^2) - 4k_0 + 2\kappa(1 - 3k_0\epsilon_1)\cos(\phi_1)]}{k_2[\epsilon_1(6k_0^2 + 3\kappa^2 - 2k_2^2) - 4k_0 + 2\kappa(1 - 3k_0\epsilon_1)\cos(\phi_2)]}, \quad (45)$$

即

$$\cos(\phi_2) = -\cos(\phi_1) + \frac{3k_0}{\kappa} - \frac{1}{\kappa\epsilon_1}. \quad (46)$$

图 11 展示了孤子分子对应的光强的密度图 (图 11(a)) 和立体图 (图 11(b)), 与图对应的参数为

$$\kappa = -15, k_0 = 0, \phi_1 = \arccos(1/6), \phi_2 = \pi/3, \xi_{20} = -\xi_{10} = 20. \quad (47)$$

由于可积系统的多孤子之间的相互作用是弹性的, 孤子分子的存在只对应于一些特殊的多孤子, 自然孤子分子和通常的孤子的相互作用及孤子分子之间的相互作用也是弹性的.

(33) 式的多暗孤子分子和多暗孤子的混合解由 (34) 式, (37) 式和 (38) 式统一表达, 其中若有 n 对孤子的速度达到共振条件

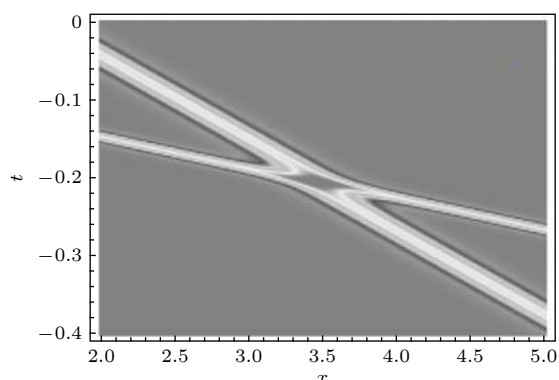


图 10 由 (42)—(43) 式描述的二暗孤子相互作用的密度图, 图中参数由 (44) 式给定

Fig. 10. Density plot of the interaction between two dark solitons described by Eq. (42) and Eq. (43) with the parameter selected from Eq. (44).

$$\cos(\phi_j) = -\cos(\phi_i) + \frac{3k_0}{\kappa} - \frac{1}{\kappa\epsilon_1}, \quad (48)$$

则解 (34) 式, (37) 式和 (38) 式表示了 n 暗孤子分子和 $N - 2n$ 暗孤子的混合相互作用解.

图 12 展示的是一个暗孤子分子和一个暗孤子的相互作用. 图中对应的参数为

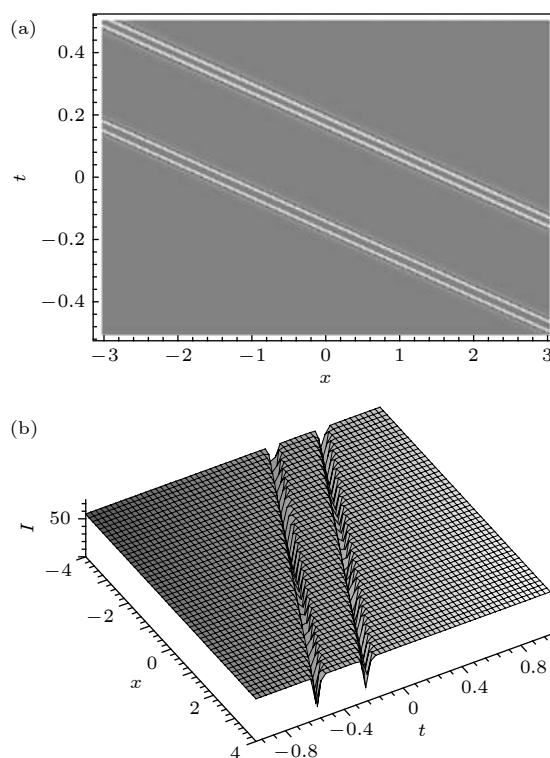


图 11 (a) 由 (42) 式和 (43) 式描述的暗孤子分子密度图, 图中参数由 (47) 式给定; (b) 与图 (a) 对应的三维立体图

Fig. 11. (a) Density plot of the dark soliton molecule described by Eq. (42) and Eq. (43) with the parameter selected from Eq. (47); (b) three dimensional plot related to Fig. 11(a).

$$\begin{aligned}\kappa &= -15, k_0 = 0, \phi_1 = \arccos(1/6), \\ \phi_2 &= \pi/3, \phi_3 = \pi/4, \\ \xi_{20} &= -\xi_{10} = 10, \xi_{30} = 0.\end{aligned}\quad (49)$$

图 13 展示了二暗孤子分子的相互作用. 图中对应的参数为

$$\begin{aligned}\kappa &= -15, k_0 = 0, \\ \phi_1 &= \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right), \\ \phi_2 &= \arccos(1/6), \phi_3 = \pi/3, \phi_4 = \pi/4, \\ \xi_{20} &= -\xi_{10} = 10, \xi_{30} = \xi_{40} = 0.\end{aligned}\quad (50)$$

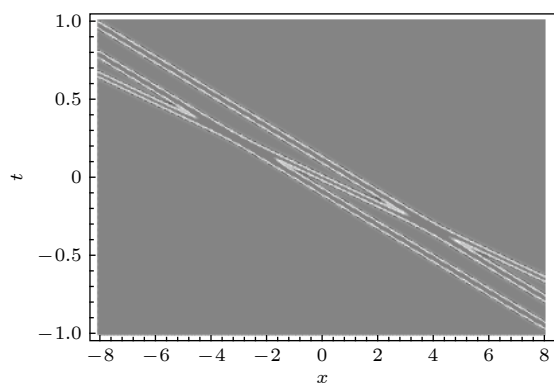


图 12 由 (34) 式, (37) 式和 (38) 式描述的暗孤子分子和暗孤子的弹性相互作用的密度图, 图中参数由 (49) 式给定
Fig. 12. Density plot of the interaction between a dark soliton molecule and a dark soliton described by Eq. (34), Eq. (37) and Eq. (38) with the parameter selected from Eq. (49).

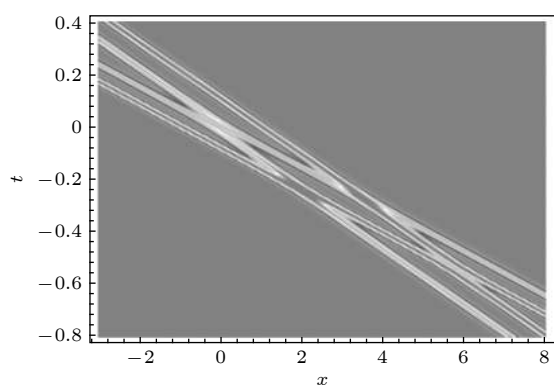


图 13 由 (34) 式, (37) 式和 (38) 式描述的二暗孤子分子的弹性相互作用的密度图, 图中参数由 (50) 式给定
Fig. 13. Density plot of the interaction between two dark soliton molecules described by Eq. (34), Eq. (37) and Eq. (38) with the parameter selected from Eq. (50).

4 结论和讨论

本文首先系统研究了一个非线性光学中包含

三阶色散、自陡峭效应和自激 Raman 散射等阶非线性色散效应的一般非线性薛定谔方程的包络行波解. 结果发现高阶非线性薛定谔系统具有非常丰富的周期波模式, 包括了多种亮孤子晶格 (暗背景和灰背景的亮孤子晶格) 和暗孤子晶格 (双谷暗孤子晶格和单谷暗孤子晶格). 孤子晶格的多样性导致了孤立子 (孤子晶格周期解趋于无穷时的解) 的多样性: (暗背景) 亮孤子, 具有灰背景的亮孤子, 暗孤子, 灰孤子, 超平暗孤子 (谷底一、二、三阶变化率为零, 因此也可称之为扭结-反扭结分子), 双暗孤子分子等等.

对于一个可积的非线性光学系统——散焦型 Hirota 模型, 得到了一个新的双线性形式, 利用这一新的双线性形式, 给出了一个多孤子解的用双曲余弦描述的紧致形式. 从这一多孤子解出发, 引入速度共振条件即可得到多暗孤子分子和多暗孤子的混合解. 暗孤子分子之间的相互作用以及暗孤子分子和暗孤子之间的相互作用是弹性相互作用.

孤子分子是当前非线性科学中的重要课题之一, 它象通常的孤子一样也可以在物理学的各个领域中得到应用. 在非线性系统中还存在各种各样的局域激发模式, 如呼吸子、拱形 (dromion) 解、团块 (lump) 解、尖峰子 (peakon) 解和紧子 (compacton) 解等等. 因此自然可以期待得到各种各样的其他类型的分子解, 如呼吸子分子、呼吸子-孤子分子、dromion 分子、lump 分子、dromion-lump 分子、尖峰子分子、紧子分子等等. 所有有关这些新类型的非线性局域激发的分子解及其可能的物理应用将在以后进行深入的研究.

参考文献

- [1] Kivshar Y S, Malomed B A 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 763
- [2] Kötting F, Tani T, Travers J C, Russell P St J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 263902
- [3] Strogatz S 2001 *Nature (London)* **410** 268
- [4] Forte S 1992 *Rev. Mod. Phys.* **64** 193
- [5] Hertog T, Horowitz G T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 221301
- [6] Drummond P D, Kheruntsyan K V, He H 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3055
- [7] Lou S Y, Huang F 2017 *Sci. Rep.* **7** 869
- [8] Wright L G, Christodoulides D N, Wise F W 2017 *Science* **358** 94
- [9] Dudley J M, Dias F, Erkintalo M, Genty G 2014 *Nat. Photonics* **8** 755
- [10] Stratmann M, Pagel T, Mitschke F 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 143902
- [11] Herink G, Kurtz F, Jalali B, Solli D R, Ropers C 2017

Science **356** 50

- [12] Liu X M, Yao X K, Cui Y D 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 023905
- [13] Xu Z W, Zhang Z X, 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 104210 (in Chinese) [徐中巍, 张祖兴 2013 物理学报 **62** 104210]
- [14] Sheppard A P, Kivshar Y S 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4773
- [15] Lakomy K, Nath R, Santos L 2012 *Phys. Rev. A* **86** 013610
- [16] Lou S Y 2019 arxiv: 1909.03399 v1[nlin.SI]
- [17] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.*, **27** 1192
- [18] Liu S J, Tang X Y, Lou S Y 2018 *Chin. Phys. B* **27** 060201
- [19] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [20] Li Y Q, Chen J C, Chen Y, Lou S Y 2014 *Chin. Phys. Lett.* **31** 010201
- [21] Chen D Y 2006 *Introduction on Solitons* (Beijing: China Science Publishing and Media Ltd) pp14–42 (in Chinese) [陈登远 2006 孤子引论 (北京: 科学出版社) 第14—42页]
- [22] Lou S Y 2018 *J. Math. Phys.* **59** 083507
- [23] Sasa N, Satsuma J 1991 *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** 409
- [24] Hirota R 1973 *J. Math. Phys.* **14** 805
- [25] Kaup D J, Newell A C 1978 *J. Math. Phys.* **19** 798
- [26] Lou S Y 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 010503 (in Chinese) [楼森岳 2020 物理学报 **69** 010503]

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Dark soliton molecules in nonlinear optics^{*}Xu Dan-Hong Lou Sen-Yue[†]

(School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

(Received 6 September 2019; revised manuscript received 25 October 2019)

Abstract

The study on soliton molecules is one of the important topics in nonlinear science especially in nonlinear optics. The bright soliton molecules have been experimentally observed in optics, however, the dark soliton molecules have not yet been experimentally observed. Theoretically, the soliton molecules have been found for some coupled nonlinear systems. Nevertheless, the soliton molecules have not been obtained for non-coupled single component nonlinear models. In this paper, we first study the exact periodic waves (soliton lattices) and solitary waves for a nonlinear nonintegrable optical model with second and third order dispersions and high order nonlinear effects including self-steepening, Raman scattering and nonlinear dispersion. Two types of dark soliton lattice and three types of soliton lattice are explicitly exhibited for general nonintegrable system. Five types of bright (with and without gray background), dark and gray solitons can be obtained from the limit cases of the modules of the soliton lattices. For an integrable case, using a novel generalized bilinear form of a single component nonlinear system, the multi-soliton solutions are obtained and expressed by a completely new form which are invariant under the full reversal transformations such as the parity, the time reversal, the charge conjugate and the field reversal. To find soliton molecules, a novel mechanism, the velocity resonant, is proposed. Starting from the multi-soliton solutions and using the velocity resonance mechanism, the analytical expression of the dark soliton molecules can be readily obtained. For the model given in this paper, the integrable higher order nonlinear Schrodinger equation, one can prove that the interactions among the dark soliton molecules and the usually solitons are elastic. It is worth pointing out that soliton molecules can also exist in the case of nonintegrable systems.

Keywords: dark soliton molecules, higher order nonlinear effects, elastic interactions, integrable systems**PACS:** 42.65.Tg, 05.45.Yv, 02.30.Ik, 47.20.Ky**DOI:** 10.7498/aps.69.20191347^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11975131, 11435005).[†] Corresponding author. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn

弹性管中的怪波

陈智敏 段文山

Rouge waves in fluid-filled elastic tube

Chen Zhi-Min Duan Wen-Shan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 014701 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191308

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191308>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非线性薛定谔方程的高阶分裂改进光滑粒子动力学算法

Numerical study of nonlinear Schrödinger equation with high-order split-step corrected smoothed particle hydrodynamics method

物理学报. 2019, 68(9): 090203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190169>

含少量气泡流体饱和孔隙介质中的弹性波

Propagation of elastic waves in saturated porous medium containing a small amount of bubbly fluid

物理学报. 2018, 67(11): 114301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180209>

暗声学超材料型充液管道的低频消声特性

Characteristics of low-frequency noise elimination in a fluid-filled pipe of dark acoustic metamaterial type

物理学报. 2019, 68(14): 144301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190311>

声子系统中弹性波与热输运的拓扑与非互易现象

Topological and non-reciprocal phenomena in elastic waves and heat transport of phononic systems

物理学报. 2019, 68(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191463>

黏性流体中超细长弹性杆的动力学不稳定性

Dynamic instability of super-long elastic rod in viscous fluid

物理学报. 2017, 66(9): 094501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.094501>

变声速弹性沉积层下压缩波与剪切波的耦合影响

Compressional-shear wave coupling induced by velocity gradient in elastic medium

物理学报. 2018, 67(23): 234304 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181600>

专题：非线性物理

弹性管中的怪波*

陈智敏 段文山†

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2019 年 8 月 30 日收到; 2019 年 9 月 23 日收到修改稿)

利用约化摄动法, 推导了流体在弹性管中的非线性薛定谔方程 (NLSE). 由非线性薛定谔方程的解来近似地描述出真实的怪波, 继而研究怪波解中各个参数对怪波系统振幅、波速的影响. 最后将这一模型应用到人体血管中, 研究怪波在人体动脉血管中传播对人体健康的影响.

关键词: 约化摄动法, 非线性薛定谔方程, 怪波解, 动脉血管

PACS: 47.10.A-, 47.27.ed, 47.27.nf

DOI: 10.7498/aps.69.20191308

1 引言

近年来人们对怪波做了大量的研究^[1-6]. 怪波首先是在海洋上被发现的, 当时在海洋上人们发现一阵突如其来的奇高无比的水墙, 却又在一瞬间消失得无影无踪^[7-9], 似乎是“来无影, 去无踪”, 人们就将此现象称为怪波. 由此可知, 在海洋上由怪波产生的浪涛并不像由台风和地震所造成的浪涛那样, 可以提前几个小时或几天预测. 所以怪波对海上船只、军舰等会造成极大的损害^[8]. 因此, 科学家们对这个现象进行了大量的观测和研究. 1964 年, 英国科学家 Draper 给出了怪波的定义^[10]. 然而, 怪波的各种奇特的性质还未被人们所熟知^[11,12], 所以直至现在, 对于怪波的研究也都没有中断过. 后来, 人们发现怪波不仅存在于海洋上, 在许多其他领域中也相继发现了怪波, 例如: 在等离子体物理学^[13, 14]、气象学^[15]、流体力学^[16]、玻色-爱因斯坦凝聚^[17]、毛细波^[18]等领域. 不过由于观测环境的困难和危险, 无法充分理解怪波现象, 人们只好寻求其他方法. 例如: 通过非线性薛定谔方程的一种

解: Peregrine rogue wave^[19], 可以近似地描述怪波. 这一解的形式最早由 Peregrine^[19] 提出. 可以借助对 Peregrine rogue wave 解的研究来了解怪波特性, 从而防止怪波产生高能振幅等危害. 深水下怪波现象对海上的船只威胁最大^[9], 由于观测深水下怪波现象具有很大的困难, 人们就试图通过各种方法来描述出在深水下的怪波情况, 但目前还未成功.

流体在弹性管内的流动问题^[20, 21]一直被人们所关注, 故对于充满流体的弹性管中各种波的传播研究一直是个热门课题. 在充满流体的弹性管波的相关研究有许多^[22-25], 但是在此系统中是否会出现怪波还没有任何研究. 本文首次对充满流体的弹性管中的怪波进行了研究. 大家知道, 血液在人体或者动物血管中的流动可以用充满流体的弹性管来近似研究. 因此研究充满流体的弹性管中的怪波问题有很重要的实际意义. 找到能描述血液在血管中流动情况的解, 就可以探究人体血管中哪些参量对血液流动有着重要的影响, 再对其加以控制就可以更深入地了解血液在血管中的流动特性. 这一研究可能对医学有一定的参考意义.

* 国家自然科学基金 (批准号: 11965019) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: duanws@126.com

2 怪波的理论模型与怪波解

本文研究限制在无限长圆柱管内的不可压缩的流体, 圆柱管的壁是由一根均匀弹性管组成的. 控制流体运动的动力学方程是质量守恒和动量守恒方程^[26]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Au)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

其中 A 是圆柱体的横截面面积, u 是流体的速度, p 是流体压强, ρ_0 是流体的密度. 第三个方程为管道横截面面积与压力的方程^[27–30]:

$$\frac{2\pi a}{\rho_w} p = \frac{E}{\rho_w a^2} (A - A_0) + \frac{\partial^2 (A - A_0)}{\partial t^2}, \quad (3)$$

其中 ρ_w 是弹性管壁的密度, h 和 E 是弹性管的厚度和杨氏模量, a 是弹性管中液体平衡时管的半径, $A_0 = \pi a^2$, $\left(\frac{E}{\rho_w a^2}\right)^{1/2}$ 是弹性管道径向振动的固有频率. 定义 $A = \pi a^2 A'$, $p = p_0 p'$, $t = T t'$, $x = L x'$, $u = \left(\frac{T}{t}\right) u'$, 其中 $p_0 = \frac{Eh}{2a}$, $T^2 = \frac{\rho_w a^2}{E}$, $L^2 = \frac{\rho_w a h}{2\rho_0}$. 代入 (1) 式—(3) 式中, 得到无量纲方程:

$$\frac{\partial A'}{\partial t'} + \frac{\partial(A' u')}{\partial x'} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'}, \quad (5)$$

$$p' = A' - 1 + \frac{\partial^2 A'}{\partial t'^2}, \quad (6)$$

上述复杂的非线性方程组可以通过约化摄动法化为比较简单的且可精确求解的非线性演化方程. 本文由上述方程组推导出了非线性薛定谔方程^[26]. 假设: $\xi = \varepsilon(x' - Vt')$, $\tau = \varepsilon^2 t'$, 其中 ε 是个小量, V 为波的群速度. 将 A' , u' 和 p' 作摄动展开:

$$A' = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-1}^n A^{(n,l)}(\xi, \tau) e^{il(kx' - \omega t')},$$

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-1}^n u^{(n,l)}(\xi, \tau) e^{il(kx' - \omega t')},$$

$$p' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-1}^n p^{(n,l)}(\xi, \tau) e^{il(kx' - \omega t')},$$

将展开式代入 (4) 式—(6) 式中, 并化简得:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \quad V = \frac{k}{\omega} \left(\frac{1}{(1+k^2)^2} \right) \text{ 以及非线性薛定谔方程:}$$

$$iA_{\tau}^{(1,1)} + PA_{\xi\xi}^{(1,1)} + QA'^{(1,1)}|A'^{(1,1)}|^2 = 0, \quad (7)$$

其中

$$P = \frac{3\omega}{2(1+k^2)^2},$$

$$Q = \frac{\omega}{2(1+k^2)} \left[-\frac{3}{2k^2} + 2 - \frac{1}{V^2 - 1} \left(4 + \frac{1}{1+k^2} + \frac{4}{(1+k^2)^2} \right) \right],$$

$$A'^{(1,1)} = \frac{A' - 1}{\varepsilon e^{i(k\frac{x}{L} - \omega\frac{t}{T})}}.$$

我们知道非线性薛定谔方程有很多解, 其中有一种是怪波解^[31], 其解的形式如下:

$$A'^{(1,1)} = \varepsilon \sqrt{\frac{2P}{Q}} \left[1 - \frac{4(1 + 4iP\varepsilon^2 t')}{1 + 4\varepsilon^2(x' - Vt')^2 + 8P\varepsilon^4 t'^2} \right] e^{2iP\varepsilon^2 t'}, \quad (8)$$

代入由上面摄动方法展开的式子可得到管的横截面 A' 的解, 其解的形式如下:

$$A' = 1 + \varepsilon \sqrt{\frac{2P}{Q}} \left[1 - \frac{4(1 + 4iP\varepsilon^2 t')}{1 + 4\varepsilon^2(x' - Vt')^2 + 8P\varepsilon^4 t'^2} \right] \times e^{i(kx' - \omega t')} e^{2iP\varepsilon^2 t'}, \quad (9)$$

$$\text{其中 } A' = \frac{A}{\pi a^2}, \quad t' = \frac{t}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho_w}}, \quad x' = x \sqrt{\frac{2\rho_0}{\rho_w a h}},$$

$$\sqrt{\frac{2P}{Q}} = \frac{12k^2(3 + 3k^2 + k^4)}{(1+k^2)(9 + 39k^2 + 35k^4 + 12k^6)}.$$

3 弹性管模型系统及人体血管参数对怪波的影响

我们知道怪波具有一些奇特的性质, 例如: 它的包络振幅可以在短时间内达到最大值, 并可在短时间内也会达到零, 这就是怪波似乎“来无影, 去无踪”的原因. 图 1 为实验室坐标下的怪波在不同时间点上所在的各个位置的等高图, 它表明怪波从某一位置突然出现然后又突然消失. 从图中怪波出现的时间和位置可以推测即将出现怪波的时间和位置, 这对预防由怪波引起的危害有一定的帮助.

下面分析动物血管中怪波传播的性质. 将文献 [32,33] 中兔胸主动脉实验得到的兔胸主动脉的半径、血管壁厚度、血管壁的杨氏模量等参数值代入怪波解中画图. 兔胸主动脉血管的半径 $a = 2.58$ mm, 血管壁厚度 $h = 0.25$ mm, 血管壁的杨氏模量 $E =$

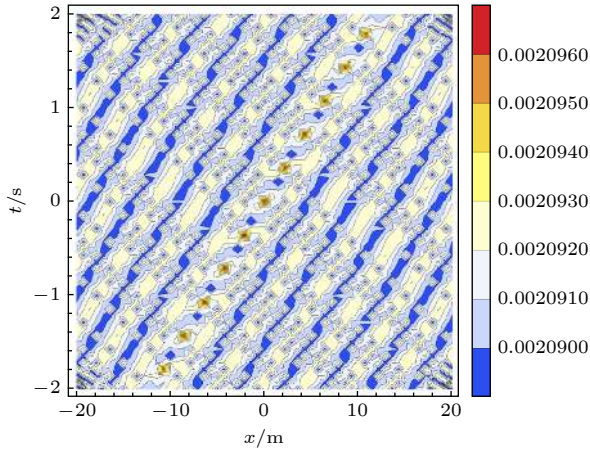


图 1 怪波振幅的密度图

Fig. 1. The contour graph of a rogue wave solution image.

936.5 kPa. 图 2 为不同时刻的怪波在血管中纵向传播的图形, 图中表明在血管中的不同位置, 怪波振幅是不同的, 并且怪波在兔子的主动脉血管中的传播速度大约为 5.8 m/s.

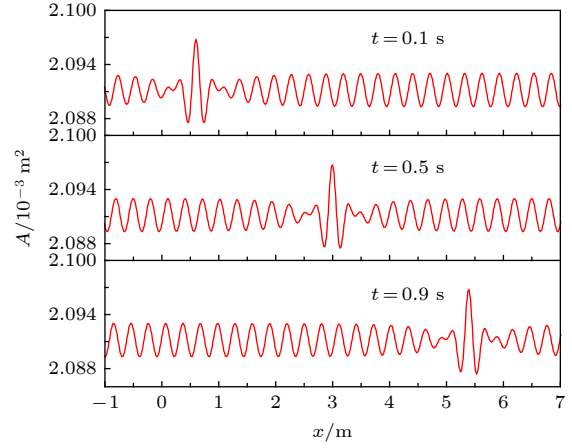


图 2 不同时刻的怪波图像

Fig. 2. The above picture shows the rogue wave for $t = 0.1$ s, $t = 0.5$ s and $t = 0.9$ s.

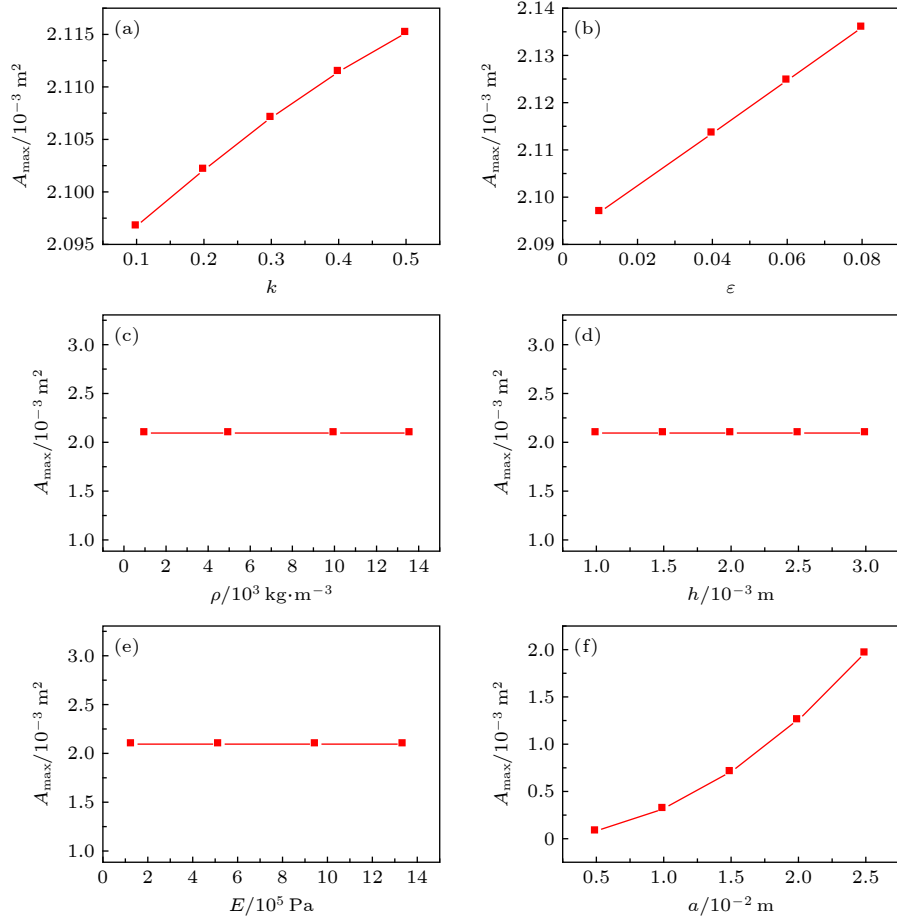


图 3 人体血管参数对怪波振幅的影响 (a) 波数 k ; (b) 小参数 ϵ ; (c) 厚度 h ; (d) 液体密度 ρ ; (e) 杨氏模量 E ; (f) 半径 a .

Fig. 3. The effect of human vascular parameters on the amplitude of rogue waves: (a) k ; (b) ϵ ; (c) h ; (d) ρ ; (e) E ; (f) a .

怪波振幅越大,产生的能量就越高,就越容易产生危害.接下来研究人体血管中血管壁厚度、杨氏模量、血管半径等各个参数对怪波振幅的影响.主要研究人体主动脉血管的怪波性质,在 H. Otel 所著的《普朗特流体力学基础》一书中生物流体力学给出了人体中各个部位血管脉的性质,其中主动脉血管的厚度与半径为最大,其厚度 $h = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$,半径 $a = 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}$.图 3(a) 是波数 k 与怪波振幅的关系图,图中表明怪波振幅随着 k 的增大而增大,即怪波的波长越小,怪波的振幅就越大.我们知道人在紧张或受到惊吓的时候,血管会出现膨胀现象,我们猜测是在人紧张或受到惊吓的时候,血管中的怪波的波长会突然变小而引起的.在图 3(b) 中表明了小参数 ε 对怪波振幅的影响,可以看出,怪波的振幅随着 ε 的增大而增大.图 3(c) 中取人体不同位置血管壁的厚度的变化对

怪波振幅的影响,得出结果是管壁厚度对怪波振幅没有影响.图 3(d) 中参考水、血液、酒精、海水、水银等液体的密度对怪波振幅的影响,结果得出液体密度的改变对怪波振幅没有影响.图 3(e) 中表明管壁的杨氏模量改变,怪波的振幅依然还是不变的.图 3(f) 研究血管道半径 a 与怪波振幅的关系,结果表明血管道半径增大,怪波振幅也随之增大.

结果表明,如果人体血液流动中出现怪波现象,当怪波为短波时怪波的振幅越大,对血管的危害就会越重.并且血管壁半径也对怪波的影响较大,血管越粗的部位,产生的怪波振幅越大,即在血管较粗的部位更应该注意防范由怪波产生的危害.这一发现为医学上人体血液流动问题提供了一定的参考.

图 4 给出了血管壁的管壁厚度、杨氏模量、血管半径等各个参数与怪波波速的关系.图 4(a) 为

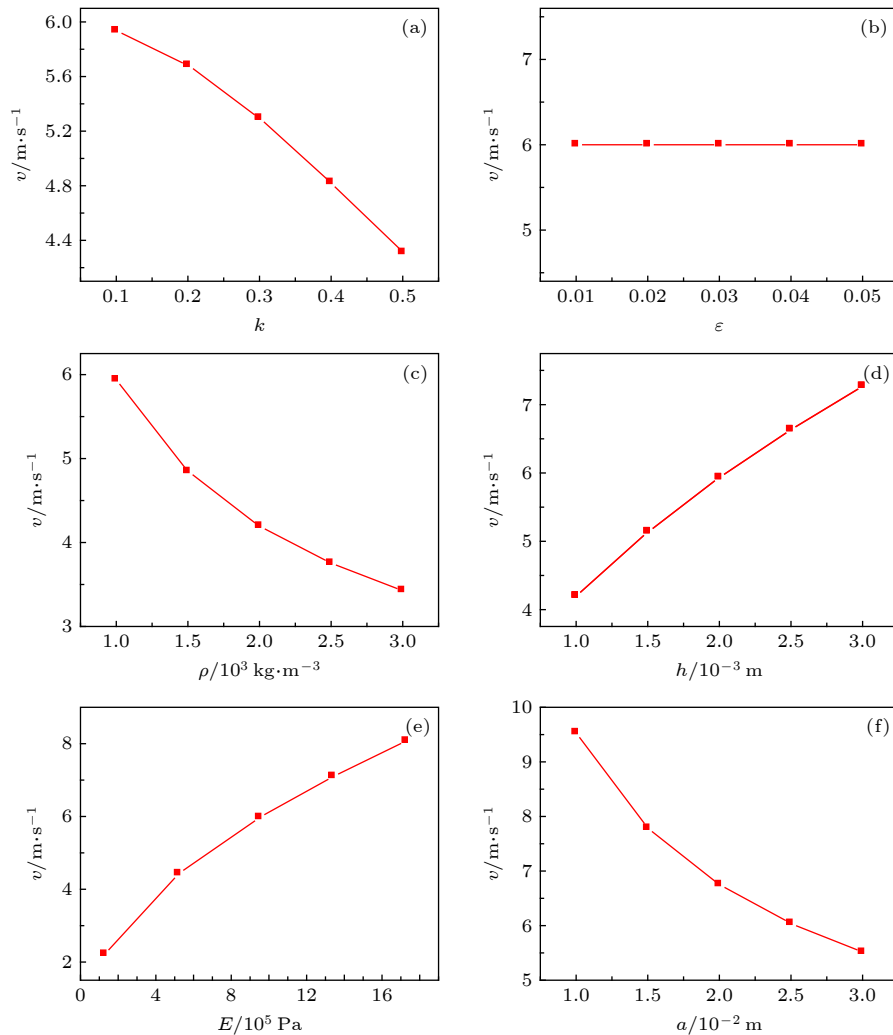


图 4 人体血管参数对怪波波速的影响 (a) 波数 k ; (b) 小参数 ε ; (c) 厚度 h ; (d) 液体密度 ρ ; (e) 杨氏模量 E ; (f) 半径 a 值

Fig. 4. The effect of elastic tube parameters on the velocity of rouge waves: (a) k ; (b) ε ; (c) h ; (d) ρ ; (e) E ; (f) a .

波数 k 与怪波波速的关系, 表明怪波波速随着 k 的增大而减小. 即怪波的波长越短, 怪波的传播速度越慢. 图 4(b) 给出了 ε 与怪波波速的关系, 可以看出 ε 对怪波波速没有显著影响. 图 4(c) 为液体的密度 ρ 与怪波波速的关系, 可以看出随着液体密度 ρ 的增大, 怪波的波速在减小. 这表明密度大的液体中的怪波传播速度慢. 图 4(d) 是管壁厚度 h 与怪波波速的关系图, 随着管壁厚度 h 的增大, 怪波的波速也增大. 这表明在人体中血管壁越厚的部位, 怪波的传播速度越快. 图 4(e) 给出了杨氏模量与怪波波速的关系, 随着管壁的杨氏模量的增大, 怪波波速也随之增大. 表明在人体血管中刚性较强的部位的怪波波速较快. 图 4(f) 是管的半径与怪波波速的关系, 怪波波速随着血管半径的增大而减小. 可以看出, 在人体血管越粗的部位, 怪波的波速也就越小.

我们知道, 人体心脏附近位置的血管半径较大且血管壁较厚, 这样容易导致心脏附近出现的怪波可能有较大的振幅和较大的传播速度. 这一结论对医学研究可能会有一定的参考意义.

4 结 论

利用约化摄动法, 依据不可压缩液体在弹性管中流动的非线性薛定谔方程, 我们用非线性薛定谔方程的解描述出真实的怪波解. 通过怪波解的理论结果, 分析了怪波的许多特性, 这对怪波的研究是一个重要的补充. 将这一理论模型应用到人体和动物中血管中的血液流动问题, 给出了怪波在动脉血管中的传播特性, 给出了怪波对血液在动脉血管中各个位置的影响, 这也对现代医学上提供了一些帮助. 但这一方法仅适用于当管道的横截面面积改变量远远小于管道的横截面面积, 放在人体血管中也是如此, 如果不满足这一条件, 对于计算和模拟的结果就会有所偏差.

参考文献

- [1] Zhen P F, Jia M 2018 *Chin. Phys. B* **27** 120201
- [2] Zhang X, Yong C 2018 *Nonlinear Dyn.* **93** 1
- [3] Li S Q, Yang G Y, Li I 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 10 (in Chinese) [李淑青, 杨光晔, 李禄 2014 物理学报 **63** 10]
- [4] Xin W, Chong L, Lei W 2017 *J. Math. Anal. Appl.* **449** 1534
- [5] Dewey J F, Ryan P D 2017 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **114** E10639
- [6] Onorato M, Residori S, Bortolozzo U, Montina A, Arecchi F T 2013 *Phys. Rep.* **528** 47
- [7] Yeom D I, Eggleton, Benjamin J 2007 *Nature* **450** 53
- [8] Akhmediev N, Ankiewicz A, Taki M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 675
- [9] Garrett C, Gemmrich J, Baschek B 2009 *Phys. Today* **15** 3210
- [10] Draper L 1967 *Mar. Geol.* **5** 133
- [11] Akhmediev N, Soto-Crespo J, Ankiewicz A 2009 *Phys. Rev. A* **80** 82
- [12] Kibler B, Chabchoub A, Gelash A, Akhmediev N, Zakharov V 2015 *Phys. Rev. A* **5** 041026
- [13] Bailung H, Sharma S K, Nakamura Y 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 255005
- [14] Moslem W M, Sabry R, El-Labany S K, Shukla P K 2011 *Phys. Rev. E* **84** 066402
- [15] Stenflo L, Marklund M 2009 *J. Plasma Phys.* **76** 293
- [16] Efimov V B, Ganshin A N, Kolmakov G V, McClintock P V E, Mezhev-Deglin L P 2010 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **185** 181
- [17] Bludov Y V, Konotop V V, Akhmediev N 2010 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **185** 169
- [18] Schneider T M, Gibson J F, Burke J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 104501
- [19] Peregrine D H 1983 *Anziam J.* **25** 16
- [20] Mohany A, Sadek O, Hassan M 2018 *J. Fluid Struct.* **79** 171
- [21] Shen H J, Wen J H, Yu D L, Wen X S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8357 (in Chinese) [沈惠杰, 温激鸿, 郁殿龙, 温熙森 2009 物理学报 **58** 8357]
- [22] Demiray H 1996 *B Math. Biol.* **58** 939
- [23] Demiray H 2002 *Appl. Math. Comput.* **133** 29
- [24] Demiray H 2008 *Int. J. Nonlinear Mech.* **43** 241
- [25] Antar N 2002 *Int. J. Eng. Sci.* **40** 1179
- [26] Duan W S, Wang B R, Wei R J 1997 *Phys. Lett. A* **224** 154
- [27] Lamb G L 1981 *Adv. Math.* **32** 215
- [28] Sigeo Y 1987 *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** 506
- [29] Paquerot J F, Remoissenet M 1994 *Phys. Lett. A* **194** 77
- [30] Duan W S, Wang B R, Wei R J 1996 *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 945
- [31] Hammani K, Kibler B, Finot C, Akhmediev N, Dudley J M 2011 *Opt. Lett.* **36** 112
- [32] Liu Z R, Xu G, Chen Y, Teng Z Z, Qin K R 2003 *Adv. Appl. Math. Mech.* **24** 205 (in Chinese) [柳兆荣, 徐刚, 陈泳, 滕忠照, 覃开蓉 2003 应用数学和力学 **24** 205]
- [33] Chuong C J, Fung Y C 1986 *J. Biomech. Eng.* **108** 189

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Rogue waves in fluid-filled elastic tube^{*}

Chen Zhi-Min Duan Wen-Shan[†]

(*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

(Received 30 August 2019; revised manuscript received 23 September 2019)

Abstract

By the reductive perturbation method, we investigate the Rogue waves in a fluid-filled elastic tube. Based on a nonlinear Schrodinger equation obtained from a fluid-filled elastic tube, the rouge wave solution in the fluid-filled elastic tube is discussed. The characteristics of a single rouge wave are studied for this system. Then, the effects of the system parameters, such as the wave number k , the parameters ϵ , the density of the fluid, the thickness of the elastic tube, the Yang's modulus of the elastic tube, and the radius of the elastic tube on the rouge wave are also investigated. Finally, the model is applied to the blood vessels of both animal and the human to ascertain the effects of the rouge wave in different arteries and vessels. The results of the present study may have potential applications in medical science.

Keywords: reductive perturbation method, nonlinear Schrodinger equation, rouge wave, blood vessel

PACS: 47.10.A-, 47.27.ed, 47.27.nf

DOI: [10.7498/aps.69.20191308](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191308)

^{*} Project Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11965019).

[†] Corresponding author. E-mail: duanws@126.com

铁磁纳米线中磁化强度的磁怪波

李再东 郭奇奇

Rogue wave solution in ferromagnetic nanowires

Li Zai-Dong Guo Qi-Qi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 017501 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191352

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191352>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

正三角型三芯光纤中等腰对称平面波的调制不稳定性分析

Modulation instabilities in equilateral three-core optical fibers for isosceles-triangle symmetric continuous waves

物理学报. 2018, 67(5): 054203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171650>

不同磁场构型下Richtmyer–Meshkov不稳定性的数值研究及动态模态分解

Numerical investigations of Richtmyer–Meshkov instability in different magnetic field configurations and the corresponding dynamic mode decomposition

物理学报. 2019, 68(16): 165201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190410>

黏性流体中超细长弹性杆的动力学不稳定性

Dynamic instability of super-long elastic rod in viscous fluid

物理学报. 2017, 66(9): 094501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.094501>

外场作用下铁电/铁磁双层膜的极化磁化性质

Polarization and magnetization properties of ferroelectric/ferromagnetic layer films under external field

物理学报. 2019, 68(3): 037501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181879>

基于表面磁感应强度的铁磁构件应力恒磁表征方法

A method of characterizing axial stress in ferromagnetic members using superficial magnetic flux density obtained from static magnetization by permanent magnet

物理学报. 2018, 67(17): 178103 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180560>

基于Jiles–Atherton理论的铁磁材料塑性变形磁化模型修正

Modeling plastic deformation effect on the hysteresis loops of ferromagnetic materials based on modified Jiles–Atherton model

物理学报. 2017, 66(10): 107501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.107501>

专题：非线性物理

铁磁纳米线中磁化强度的磁怪波*

李再东^{1)2)†} 郭奇奇¹⁾

1) (河北工业大学理学院, 天津 300401)

2) (天津理工大学理学院, 天津 300384)

(2019 年 9 月 6 日收到; 2019 年 12 月 2 日收到修改稿)

本文介绍了铁磁纳米线中磁化强度的一些新激发态, 包括各向同性铁磁的 Akhmediev 呼吸子、Kuznetsov-Ma 孤子和怪波、自旋极化电流驱动下各向异性铁磁纳米线中的怪波动力学. 在各向同性情况下, 展示了形如四片花瓣的磁孤子的空间周期过程和自旋波背景的局域化过程; 在极限情况下, 得到了磁怪波解并阐明了其形成机制. 在各向异性情况下, 发现怪波的产生主要源于中心的能量积累和快速弥散; 此外, 怪波还具有不稳定性, 它和自旋波背景间的能量与磁振子的交换可以通过自旋极化电流来调控.

关键词: 呼吸子, 磁怪波, 自旋转移矩, 调制不稳定性

PACS: 75.75.-c, 75.70.Kw, 85.75.-d

DOI: 10.7498/aps.69.20191352

1 引言

在过去几十年中, 磁性纳米结构的磁化动力学研究取得了重大进展. 在这些研究中, Self-organization^[1] 是自然界中最有趣的物理现象之一. 在磁学领域中, 这一现象已经在条状畴、磁泡、磁孤子、磁涡旋等磁畴的形成方面进行了深入细致的研究. 此外, 在二维薄膜磁性系统的研究中, 一些有趣的磁性 Self-organization 模式进一步被揭示, 如自旋波^[2] 和斯格明子^[3–5], 其中斯格明子可以在薄膜中作为亚稳态成核. 基于斯格明子在纳米轨道上的运动为设计磁性信息存储器提供了新的路径.

畴壁的动力学引起诸多研究兴趣, 主要原因在于其潜在的技术应用价值在未来信息存储和读取方面具有广阔前景和重要意义^[6–11]. 例如, 在铁磁体中, 磁化强度形成的空间局域结构-磁畴壁, 其实可以看作是一个势垒, 将简并的两个磁状态分开^[12,13], 而这两个组态正好可以作为二进制信息存储的基本单元. 目前, 畴壁运动有多种驱动手段, 例如外

磁场、自旋转移矩和磁振子等, 但畴壁的传播还受到自旋霍尔效应^[14]、Rashba 效应^[15] 和 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用^[16–19] 的影响. 近些年来, Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用引起了人们对低维磁学的极大兴趣^[16–23], 这些研究不仅受到基本物理问题的启发, 还受到自旋电子存储器和逻辑纳米器件潜在应用的启发. Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用可以看作是一种各向异性超交换作用, 不仅对畴壁运动具有重要影响, 而且对孤子的激发和传播也存在重要影响. 研究表明 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用可以影响孤子能量, 从而改变了动态孤子的振幅及内部结构畸变, 形成不同结构类型的孤子^[17]. 另外, Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用还存在于反铁磁和弱铁磁中, 同样对其孤子激发有着重要影响^[24–26].

此外, 层状材料中与自旋极化电流有关的磁化动力学问题也得到了广泛的关注^[27,28]. 自旋极化电流可以在磁性多层结构中引起许多独特的现象^[29,30], 如自旋波激发^[31,32]、磁化开关^[27] 和反转^[33–35] 及吉尔伯特阻尼增强^[36,37] 等. 目前, 自旋极化电流通常

* 国家自然科学基金 (批准号: 61774001) 和河北省自然科学基金 (批准号: F2019202141) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: lizd@hebut.edu.cn

用来创建、操纵和控制纳米尺度的磁激发,例如畴壁[38–41]和涡旋[42–44].众所周知,非线性激发[12,13]是磁性有序材料中的一般现象.在铁磁体中,磁振子由于相互吸引作用而趋于自局域化.在某种意义上,磁振子的吸引力对于一维铁磁体是至关重要的,因为它产生准粒子(磁振子)的束缚态,即自局域化.自旋波可以被看作是宏观上连续的磁振子簇,当磁化强度偏离基态时就会引起自旋波的激发,它们的相互作用和不稳定性导致了磁畴壁和磁孤子的存在.

然而,非线性激发的研究还有待于进一步深化.近年来,小局部扰动是非线性物理研究的热点之一.研究表明,呼吸子或怪波可以由高阶效应、非自治和耦合效应在一定条件下转化为各种非线性波[45–49],从而导致呼吸子和孤子之间实现状态转换.基于线性稳定性分析调制不稳定性,从而分析该状态跃迁的机制已经得到大量研究[45–47],但是当扰动增长与背景相当大时,线性分析不再有效.因此,在2013年,Zakharov和Gelash[50,51]提出了一种由小的局部扰动发展而来的超正则呼吸子解,可以用来描述调制不稳定的非线性阶段.并且近年来,在一些具有高阶效应的光纤系统,例如Hirota and Maxwell-Bloch等系统中,这种超正则呼吸子动力学和它们的状态转换也得到了详细研究[48,49].众所周知,调制不稳定性存在于光纤、玻色-爱因斯坦凝聚等众多非线性系统中,这些结果不仅丰富了调制不稳定性的内涵,也为其他各种系统的非线性研究提供了方法.

本文研究在磁学系统中,当自旋波通过磁孤子时,自旋角动量从传播的磁振子传递给孤子的现象,这被称为全磁的自旋转移力矩[52].这种全磁的自旋转移力矩可以影响磁化动力学,使磁状态发生改变.本文研究了自旋波背景下铁磁纳米线中磁化强度的呼吸子和怪波解,讨论了各向同性情况下由全磁的自旋转移力矩引起的亮(暗)怪波的精确解,以及自旋极化电流驱动下的单轴各向异性的怪波动力学,这些研究成果预期对玻色子和费米子铁磁体的非线性激发的探测具有一定的意义.

2 Landau-Lifshitz-Gilbert 方程

铁磁中磁化强度的动力学可以用著名的Landau-Lifshitz-Gilbert方程很好地描述.本文采

用无量纲形式[53]

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} + \alpha \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + A_J \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x}, \quad (1)$$

其中, α 为吉尔伯特阻尼系数; A_J 表示绝热自旋矩参数; $\mathbf{h}_{\text{eff}}$ 表示有效场,包括交换场、各向异性场和外加磁场.对于垂直各向异性的铁磁纳米线样品材料,即 $\mathbf{h}_{\text{eff}} = \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{H_k}{M_s} - 4\pi \right) m_z + h_{\text{ext}} \right] \mathbf{e}_z$,其中 M_s 为饱和磁化强度, H_k 为各向异性常数, h_{ext} 为所施加的外磁场.

3 各向同性的精确呼吸子解和怪波解

首先,本文考虑简单的各向同性模型,即方程(1)可重新写为

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\mathbf{m} \times \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2}. \quad (2)$$

众所周知,该方程存在自旋波解和孤子解.需要指出的是,方程(1)是完全可积的,可以利用达布变换构造方程(2)的精确呼吸子解和怪波解,这种方法的关键思想是首先从方程的一个种子解出发,然后通过Lax方程的规范变换构造无穷多的新解析解.本文以自旋波作为初始的“种子”解 $\mathbf{m}_0$,即 $\mathbf{m}_0 \equiv (m_{01}, m_{02}, m_{03}) = (A_s \cos \delta, A_s \sin \delta, \sqrt{1 - A_s^2})$,其中 $\delta = k_s x - \omega_s t$.将这个解带入到方程(2),得到色散关系为 $\omega = -k_s^2 m_{03}$.通过规范的达布变换,可得到方程(2)的精确解形式为[54]

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} (\mathbf{m}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{K}^{-1}, \quad (3)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利矩阵,矩阵 $\mathbf{K}$ 为

$$\mathbf{K} = \frac{1}{|\xi|^2 (P + Q)} \begin{pmatrix} \xi^* P + \xi Q & -\mu R^* e^{-i\delta} \\ \mu R e^{i\delta} & \xi P + \xi^* Q \end{pmatrix},$$

其中,

$$\xi = i\mu/2 + \nu/2, \quad N = \sqrt{(k_s - 2\xi m_{03})^2 + 4\xi^2 A_s^2},$$

$$\beta = -i2\xi - im_{03}k_s,$$

$$P = h_{11}h_{11}^*, \quad Q = h_{12}h_{12}^*, \quad R = -ie^{-i\delta}h_{11}^*h_{12},$$

$$h_{11} = i(C_1 e^B - C_2 e^{-B}) e^{-i\delta/2},$$

$$h_{12} = (C_1 e^{-B} - C_2 e^B) e^{i\delta/2},$$

$$C_1 = \sqrt{(\mu m_{03} + i(A_s^2 k_s - N))/2},$$

$$C_2 = \sqrt{(\mu m_{03} + i(A_s^2 k_s + N))/2},$$

$$B = -iN(x + i\beta t)/2.$$

方程 (3) 表示嵌入到自旋波背景的磁孤子解. 随着 μ 的增加, 自旋波背景逐渐趋于局域化, 并且由于孤子和自旋波背景之间的相互作用形成呼吸子. 仔细分析方程 (3) 的解, 可以得到 Akhmediev 呼吸子、Kuznetsov-Ma 孤子及磁怪波. 结果发现不同的磁状态取决于一个临界值 $|\mu| = A_s k_s$, 它也是调制不稳定过程 ($|\mu| < A_s k_s$) 和周期化过程 ($|\mu| > A_s k_s$) 及在极限 $|\mu| \rightarrow A_s k_s$ 时的磁状态的分界线.

调制不稳定性在非线性物理学中被广泛研究 [54–56], 其特征是小扰动和连续波背景之间的周期性能量交换. 它可以用于在非线性光纤中产生高重复率脉冲, 可以精确地描述非线性薛定谔方程的 Akhmediev 呼吸子. 在光纤中, Akhmediev 呼吸子具有时间周期性, 在传播方向上表现出单一生长-返回循环的特性, 即著名的 Fermi-Pasta-Ulam 循环 [57]. 近年来, 调制不稳定性已被发现在各种非线性物理系统中, 对高度局域化怪波的产生起着重要作用.

方程 (3) 可以在 $|\mu| < A_s k_s$ 和 $\nu = k_s m_{03}$ 的条件下简化, 并得到 Akhmediev 呼吸子解, 主要参数化简为如下形式:

$$\begin{aligned} P &= A_s (k_s \cosh \theta - N \sinh \theta) - \mu \cos \phi - N m_{03} \sin \phi, \\ Q &= A_s (k_s \cosh \theta + N \sinh \theta) - \mu \cos \phi + N m_{03} \sin \phi, \\ R &= \mu \cosh \theta + i N m_{03} \sinh \theta - A_s (k_s \cos \phi + i N \sin \phi), \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\theta = \mu N t$, $\phi = -N(x + 2k_s m_{03} t)$, $N = \sqrt{A_s^2 k_s^2 - \mu^2}$. 上述结果表明, 方程 (4) 的解在空间上是以 $2\pi/N$ 为周期的, 在时间上是非周期性的. 这一过程也可以看作是磁化强度动力学实现的 Fermi-Pasta-Ulam 循环的空间表现. 为了研究磁化调制不稳定性的渐近形式, 需考虑 $t \rightarrow \pm\infty$ 的情况. 当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, m_3 的值近似为 $m_{03} (1 - 4\mu^2/k_s^2)$. 当 $A_s = 1$ 或 $1/2 \leq A_s < 1$, $|\mu| = k_s/2$ 时, 磁化矢量位于 $m_1 - m_2$ 平面中, m_3 的值为零. 此条件下的磁振子密度分布 $|m_+(x, t)|^2$ 取得最大值 1, 这里 $m_+ \equiv m_1 + i m_2$. (4) 式的解还可以认为是调制不稳定的过程, 这种不稳定性过程也可以通过线性化相应解的初始值来表示:

$$\begin{aligned} m_+(0, t) &\approx \left(-1 \pm i \epsilon \frac{4\mu N}{k_s^2} \sin \phi\right) e^{i k_s x}, \\ m_3 &\approx \pm \epsilon \frac{4N^2}{k_s^2} \sin \phi, \end{aligned} \quad (5)$$

这里 $A_s = 1$, 由于 $x_0 > 0$, $\epsilon = \exp(-x_0)$ 是一个

小量.

通过参数方程 (4) 式表达的 Akhmediev 呼吸子解, 实际上表示自旋波背景的不稳定过程, 即在自旋波背景下的小扰动, 这些小扰动随着时间的推移可呈现指数形式放大的非线性过程. 在这个过程中, 磁孤子和自旋波背景之间发生周期性磁振子交换. 应当注意的是, 在基态背景上激发的磁孤子没有这种特性. 由此说明, 正是自旋波和磁孤子之间的相互作用导致了这一非常有趣的现象.

另外, 在 $|\mu| > A_s k_s$ 和 $\nu = k_s m_{03}$ 的条件下, 可以得到方程 (2) 另外一种形式的磁激发态, 它类似于非线性光纤中光脉冲传播的 Kuznetsov-Ma 孤子解, 也可以看作是怪波流体力学的原型. 经过化简后, 该解的主要特征参数如下:

$$\begin{aligned} P &= \mu \cosh \theta + \zeta m_{03} \sinh \theta - A_s (k_s \cos \phi + \zeta \sin \phi), \\ Q &= \mu \cosh \theta + \zeta m_{03} \sinh \theta - A_s (k_s \cos \phi - \zeta \sin \phi), \\ R &= A_s (k_s \cosh \theta + i \zeta \sinh \theta) - \mu \cos \phi + i \zeta m_{03} \sin \phi, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\zeta = \sqrt{\mu^2 - A_s^2 k_s^2}$, $\theta = \zeta(x + 2m_{03} k_s t)$, $\phi = \mu \zeta t$.

由 (6) 式可知, 磁性 Kuznetsov-Ma 孤子的主要特性表现为具有时间周期性而空间具有非周期性, 且孤子的传播速度为 $-2k_s m_{03}$, 宽度为 $1/\zeta$. 当 $A_s = 1$ 时, 参数 θ 仅取决于 x , 这意味着包络速度变为零, 孤子被自旋波囚禁在空间中, 这是极为有趣的现象, 等待进一步深化研究. 为了研究 Kuznetsov-Ma 孤子的渐近形式, 考虑极限情况 $x \rightarrow \pm\infty$. 根据方程 (3) 和 (6), m_3 近似为 $m_{03} (1 - 4A_s^2)$, 而横向分量表示为 m_+ , 近似为 $m_{0+} (4A_s^2 - 3) (N \mp i k_s) / (N \pm i k_s)$, 这里 $m_{0+} \equiv m_{01} + i m_{02}$. 当自旋波通过磁孤子时, 这一结果表明自旋波相位改变了 $2 \arctan [2N k_s / (N^2 - k_s^2)]$. 自旋波的这种相位改变会影响磁孤子的传播速度, 表示自旋角动量从自旋波背景转移到动态孤子, 也就是前面说到的全磁自旋转移力矩效应. 另外, 要想实现 m_3 的零背景情形, 可以通过两种情况来实现, 即 $A_s = 1$ 或 $1/2 \leq A_s < 1$, $|\mu| = k_s/2$, 而在 $x \rightarrow \pm\infty$ 时磁振子密度分布达到最大值 1. 因此, m_3 的最大和最小的演化与孤子的传播方向相同, 这一特性说明了孤子在铁磁体磁化周期解的背景下传播时的呼吸特性.

方程 (3) 的磁性 Kuznetsov-Ma 孤子解不同于磁性 Akhmediev 呼吸子解, 方程 (6) 的局部周期性磁振子交换表现为时间周期性演化. 因此, 高磁

振子密度沿着孤子的传播方向呈时间周期性变化. 上述的讨论表明, $|\mu| = A_s k_s$ 是一个临界点条件, 划分了调制不稳定性过程 ($|\mu| < A_s k_s$) 和周期化过程 ($|\mu| > A_s k_s$). 它会导致不同物理行为的呼吸特征, 在很大程度上取决于调制参数 μ , 如图 1 所示, 在 $\nu = k_s m_{03}$ 的条件下, 在极限 $|\mu| \rightarrow (A_s k_s)^-$ 和 $(A_s k_s)^+$ 过程中, 绘制了两种不同的渐近行为. 前一种情况演示出了形成近乎四片瓣的空间周期过程. 随着调制参数 $|\mu|$ 接近 $A_s k_s$, 相邻磁性瓣的空间间隔迅速增大, 而一个谷分裂为两个, 且谷的振幅逐渐增大. 另一种情况显示了自旋波背景的局部化过程, 当调制参数 $|\mu|$ 接近 $(A_s k_s)^+$ 时, 相邻磁性花瓣的时间间隔迅速增大.

非常有趣的是, 在 $|\mu|$ 趋于 $(A_s k_s)$ 的极限情况下, 可以得到方程 (3) 的一种全新的磁化强度激发态, 它是一个有理解的形式, 称之为磁怪波, 其中主要参数由下式给出:

$$\begin{aligned} P &= (2tA_s k_s^2 + A_s k_s m_{03} x \pm 1)^2 \\ &\quad + A_s^3 k_s^2 (A_s x^2 - 3A_s k_s^2 t^2 \mp 6t), \\ Q &= (2tA_s k_s^2 + A_s k_s m_{03} x \mp 1)^2 \\ &\quad + A_s^3 k_s^2 (A_s x^2 - 3A_s k_s^2 t^2 \pm 6t), \\ R &= i2A_s^2 k_s (x + 3tk_s m_{03}) + (P + Q)/2 - 2, \end{aligned} \quad (7)$$

这里符号 $\pm$ 表示 $|\mu| \rightarrow \pm A_s k_s$ 的极限情况. 为了研

究方程 (7) 磁怪波的渐近形式, 考虑 $x \rightarrow \pm\infty$ ($t \rightarrow \pm\infty$) 和 $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) 的情况. 对于 + 的情况, 当 $x \rightarrow \pm\infty$ ($t \rightarrow \pm\infty$) 时 m_3 近似为 $(1 - 4A_s^2) m_{03}$, 当 $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) 时分量 m_3 近似为 m_{03} ; 而对于 - 的情况, 当 $x \rightarrow \pm\infty$ ($t \rightarrow \pm\infty$) 时 m_3 近似为 m_{03} , 当 $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) 时分量 m_3 近似为 $(1 - 4A_s^2) m_{03}$. 对于横向分量 m_+ , 在 + 的情况, 当 $x \rightarrow \pm\infty$ ($t \rightarrow \pm\infty$) 时近似为 $m_{0+} (3 - 4A_s^2)$, 当 $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) 时分量 m_+ 近似为 $-m_{0+}$; 在 - 的情况, 当 $x \rightarrow \pm\infty$ ($t \rightarrow \pm\infty$) 时分量 m_+ 近似为 $-m_{0+}$, 当 $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) 时近似为 $m_{0+} (3 - 4A_s^2)$. 上述分析表明情况 + 表示亮怪波, 而情况 - 对应于暗怪波. 亮和暗怪波的图形表示如图 2 所示.

特别的, 当 $A_s = 1$ 时, 可以得到磁怪波如下:

$$\begin{aligned} m_+ &= -e^{ik_s x} [1 - (8x^2 k_s^2 - i4x k_s (F_1 - 2)) / F_1^2], \\ m_3 &= \pm 8tx k_s^3 / F_1^2, \end{aligned} \quad (8)$$

这里 $F_1 = 1 + t^2 k_s^4 + x^2 k_s^2$. 如图 3 所示, 分量 m_3 的特征是由两个峰一个谷分裂为两个峰和两个谷的反对称分布, 呈现出四片花瓣的结构状.

上述结果表明, 磁怪波的形成存在两种过程: 一个是自旋波背景的局部化过程, 另一种是亮孤子的周期化的还原过程. 磁怪波是由磁振子交换和高密度的强时间和空间局域化表现出来的. 而且, 磁怪波可以通过自旋波背景的小局部扰动激发.

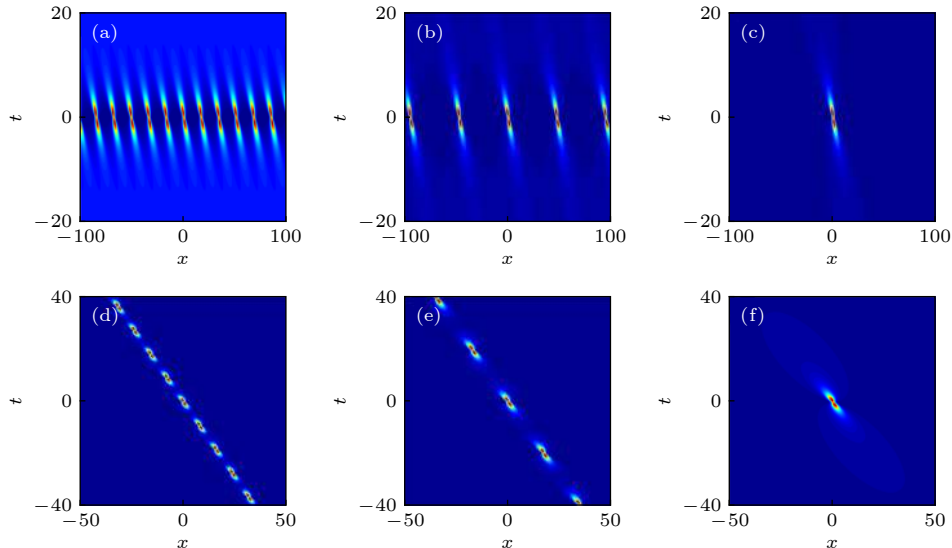


图 1 方程 (3) 在 $\mu \rightarrow A_s k_s$, $\nu = k_s \sqrt{1 - A_s^2}$ 的极限条件下, 磁化分量 m_3 的渐近过程, 参数如下: $A_s = 0.9$, $k_s = 1$ (a) $\mu = 0.82$; (b) $\mu = 0.89$; (c) $\mu = 0.89999$; (d) $\mu = 1.1$; (e) $\mu = 0.96$; (f) $\mu = 0.90001$

Fig. 1. The asymptotic processes of the magnetic component m_3 in the limit processes $\mu \rightarrow A_s k_s$ and $\nu = k_s \sqrt{1 - A_s^2}$ in Eq. (3), where the parameters are as follows: $A_s = 0.9$, $k_s = 1$: (a) $\mu = 0.82$; (b) $\mu = 0.89$; (c) $\mu = 0.89999$; (d) $\mu = 1.1$; (e) $\mu = 0.96$; (f) $\mu = 0.90001$, respectively.

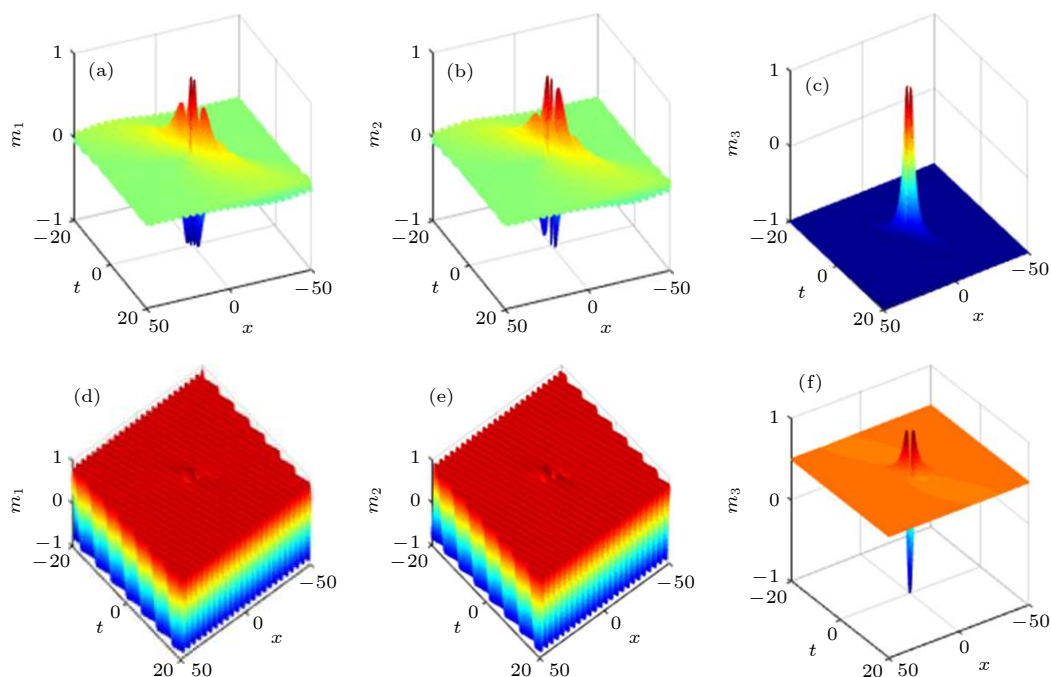


图 2 方程 (3) 和 (7) 中磁化强度 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ 的怪波演化图, 即 (a)–(c) 为亮怪波, (d)–(f) 为暗怪波. 参数: $A_s = \sqrt{3}/2, k_s = 1.5, \nu = k_s \sqrt{1 - A_s^2}, \mu = \pm 0.75\sqrt{3}$, $\pm$ 分别表示亮怪波和暗怪波^[54]

Fig. 2. The graphical evolution of rogue waves for the magnetization $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ in Eq. (3) and (7), i.e., bright rogue waves (a)–(c) and dark rogue waves (d)–(f). The parameters are as follows: $A_s = \sqrt{3}/2, k_s = 1.5, \nu = k_s \sqrt{1 - A_s^2}$, and $\mu = \pm 0.75\sqrt{3}$ with the sign $\pm$ corresponding to the bright and dark rogue waves, respectively^[54].

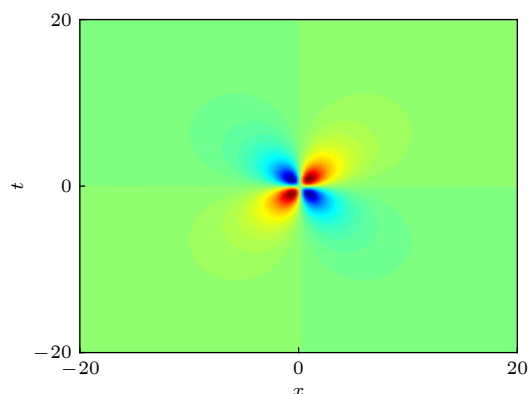


图 3 方程 (3) 在 $A_s = 1, \mu \rightarrow A_s k_s, \nu = k_s \sqrt{1 - A_s^2}$ 的条件下, 磁化分量 m_3 四片花瓣结构的演化图. 参数如下: $A_s = 1, k_s = 0.9, \mu = 0.8999$

Fig. 3. The formation of magnetic petal in the component m_3 of Eq.(3) under the special condition of $A_s = 1, \mu \rightarrow A_s k_s, \nu = k_s \sqrt{1 - A_s^2}$. The parameters are as follows: $A_s = 1, k_s = 0.9, \mu = 0.8999$.

4 单轴各向异性系统中的精确怪波解

在这个部分, 本文考虑自旋极化电流驱动下各向异性铁磁纳米线中的磁怪波动力学, 这种情况下方程 (1) 是不可积的, 为了达到这个目的, 需要对方程 (1) 做一些近似处理和变换. 方程 (1) 有两种

基本激发态, 即自旋波和动力学孤子, 这两种激发态都源于磁矩对基态的微小偏移. 因此, 在各向异性情况可以引入一个合理的函数 q 替换磁化强度的分量, 即 $q \equiv m_x + im_y$ 和 $m_z^2 = 1 - |q|^2$. 在考虑无阻尼和长波近似的条件下, 方程 (1) 可以转变成可积的非线性薛定谔方程的形式:

$$i \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{1}{2} q |q|^2 + i A_J \frac{\partial q}{\partial x} - \omega_0 q, \quad (9)$$

其中 $\omega_0 = 1 + h_{\text{ext}} / (H_k / M_s - 4\pi)$. 根据前面谈到的达布变换的思想, 方程 (9) 的解析解很容易构造出来^[58–62]. 这里, 选择单轴各向异性情况下的自旋波解作为初始种子解 $q = A_c e^{-i(k_c x - \omega_c t)}$, 其中 ω_c 和 k_c 分别为无量纲的频率和波数. 经过复杂的计算, 可以得到具有呼吸特性的孤子解^[53].

与各向同性讨论的类似, 在临界点 $\mu_1 = A_c$ 且 $\nu_1 = -k_c$ 的条件下, 可得到调制不稳定过程 ($\mu_1 < A_c$) 和周期性过程 ($\mu_1 > A_c$), 这就导致了依靠调制呼吸行为而实现不同特征. 在 $\nu_1 = -k_c$ 条件下, 取极限 $\mu_1 = A_c^-$ (和 A_c^+) 导致了两种不同的渐进行为. 当取极限条件 $\mu_1 \rightarrow A_c$ 时, 出现奇异的磁怪波, 即

$$Q_1 = A_c e^{i\varphi} \left[\frac{4(1 - itA_c^2)}{t^2 A_c^2 \eta + 2txA_c^2 \zeta + \varepsilon} \right], \quad (10)$$

其中, $\varphi = \omega_c t - k_c x$, $\eta = A_J^2 + A_c^2 + 4k_c^2 - 4A_J k_c$, $\zeta = A_J - 2k_c$, $\varepsilon = 1 + x^2 A_c^2$. 方程 (10) 呈现出怪波的典型特征. 磁振子从自旋波背景向中间积聚形成临界振幅为 $A_Q = 3A_c$. 这也表示在 $x = 0$ 和 $t = 0$ 时, 局域波完全被捕获. 如图 4 所示, 表明了方程 (10) 的磁怪波的实现, 当 μ_1 靠近 A_c^- 时, 磁振子逐渐积聚增多, 以及当 μ_1 靠近 A_c^+ 时, 磁振子逐渐分散降低. 图 4 的插图表达了在 $\mu_1 \rightarrow A_c$ 时, 临界峰将要出现, 此时磁怪波将要被激发, 它的磁振子密度峰值为 $|q|^2 = 9A_c^2$. 为了更深入地探索铁磁纳米线中磁怪波的性质, 分析磁振子密度的分布, 以及与背景之间的交换, 这里需要引入新函数 $\rho_q(x, t) = |q_1(x, t)|^2 - |q_1(x = \pm\infty, t)|^2$.

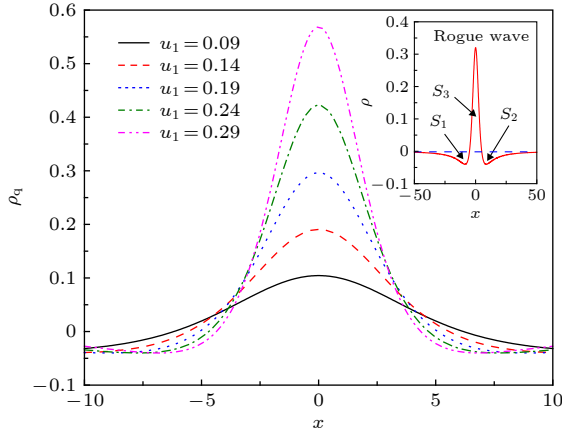


图 4 不同的参数 μ_1 下的磁振子密度分布图^[53], 范围从 0.09 到 0.29 间隔 0.05. 插图为怪波形成时的磁振子密度. 其余参数为 $A_c = 0.2$, $A_J = k_c = 0.1$

Fig. 4. The magnon density distribution against the background for the different parameter μ_1 , which ranges from 0.09 to 0.29 in 0.05 steps^[53]. The inset figure is the magnon density distribution against the background for the excited formation of magnetic rogue wave. Other parameters are $A_c = 0.2$, $A_J = k_c = 0.1$.

根据方程 (10) 和 $\rho = |Q_1(x, t)|^2 - |Q_1(x = \pm\infty, t)|^2$, 可以获得磁怪波的磁振子密度分布关系:

$$\rho = 8A_c^2 \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}, \quad (11)$$

其中 $\Gamma_1 = 1 + t^2 A_c^4$, $\Gamma_2 = A_c^2 [x + t(A_J - 2k_c)]^2$, 且对于任意时间满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = 0$. 根据条件 $\rho_Q(\pm 1/A_c, 0) = 0$, 定义怪波中波峰的空间宽度为 $2/A_c$. 经过仔细的计算发现, 某一固定的时刻, 背

景中丢失的磁振子完全转移到波峰中, 即对应面积关系 $S_1 + S_2 = S_3$. 这个结果清楚地表明了带有强呼吸特点的磁怪波的产生机制, 即主要是由于能量和磁振子从背景向中间积聚, 从背景中丢失的磁振子完全转移到了磁怪波的波峰中.

为了进一步阐释磁怪波的产生机制, 还需要关心的是怪波如何使磁振子和能量从背景向中心积聚, 这时需要再引入新的函数, 即积聚和耗散率来进行说明:

$$\delta_1(x, t) \equiv \lim_{l_Q \rightarrow \pm\infty} |Q_1(x, t) - Q_1(x = l_Q, t)|^2,$$

通过复杂的计算可以得到

$$\delta_1(x, t) = 16A_c^2 \frac{\Gamma_1}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}. \quad (12)$$

这说明了在不同的自旋极化电流下怪波和背景之间的交换 (图 5). 根据方程 (12), 可知自旋极化电流能够调控磁孤子积聚和耗散率, 并且临界电流为 $A_{Jc} = 2k_c$. 在临界电流以下, 磁振子的交换随着电流的增加而降低; 在临界电流以上, 磁振子的交换随着电流的增加而增加 (图 5(f)). 从图 5(a) 到图 5(e) 可以看出, 自旋极化电流使怪波和背景的磁振子交换不同导致了磁怪波对于 (x, t) 空间方向的不同. 当 $A_{Jc} = 2k_c$ 时, 磁振子的空间积聚 (或者耗散) 达到最大 (图 5(f)). 通过计算

$$\xi_1(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(x, t) dx = 8\pi A_c / (1 + t^2 A_c^4)^{1/2}$$

发现: 当 $t < 0$ 时, 背景中的磁振子向中间积聚; 当 $t = 0$, 怪波的临界峰值出现; 同理, 当 $t > 0$, 波峰中的磁振子开始向背景转移, 波峰逐渐衰减. 最后磁怪波完全消失, 这也就证明了磁怪波仅仅是一个在时间和空间上的震荡, 充分体现了一个不稳定动力学过程的特性.

最后, 如何在实验中探测到这种呼吸子和怪波是非常有趣的. 囚禁在光格子中的玻色-爱因斯坦凝聚体可以具有铁磁性, 即玻色铁磁^[63–65], 这种情况下 m_3 分量的平均值可以从直接测量自旋磁量子数为 +1 和 -1 的塞曼子能级的粒子数之差来实现. 这意味着对于磁呼吸子解, 存在时间或空间周期性的粒子数, 而对于怪波则粒子群为不均匀的. 对于费米子铁磁体, 电流通过铁磁体时, 其电阻受磁矩取向的强烈影响. 因此, 磁呼吸子解会使磁性层中的电阻发生周期性变化, 而怪波情况下, 应该会出现瞬时电阻的急剧变化.

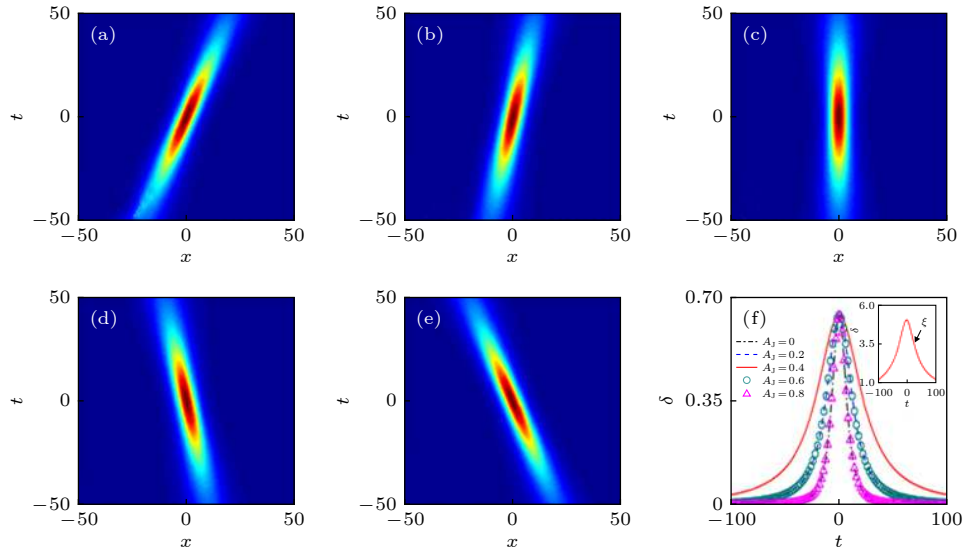


图 5 (a)–(e) 不同电流值激发怪波在区域 (x, t) 的分布图^[53], 电流从 0 到 0.8, 间隔为 0.2; (f) 不同电流怪波形成时的图形, 插图 为磁振子积聚的最大时情况. 临界电流 $A_J = 2k_c$, 其它参数 $A_c = k_c = 0.2$

Fig. 5. (a)–(e) The formation region in space (x, t) for magnetic rogue wave with different current^[53]. The parameter A_J ranges from 0 to 0.8 in 0.2 steps; (f) The nonuniform exchange of magnons between rogue wave and background for the different spin current. The inset figure in (f) denotes the maximal accumulation (or dissipation) process for the critical current value $A_J = 2k_c$. Other parameters are $A_c = k_c = 0.2$.

5 结 论

综上所述, 本文研究了自旋转移力矩激发下的各向同性和单轴各向异性的铁磁体的磁化动力学过程. 首先在各向同性系统中得到了 Akhmediev 呼吸子、Kuznetsov-Ma 孤子和怪波的精确的表达式. 根据临界条件分别分析了调制不稳定过程、周期化过程和磁怪波. 这些结果对探测玻色子和费米子铁磁体的非线性激发有一定的指导意义. 然后对单轴各向异性的磁怪波进行分析发现, 能量和磁振子向中心位置的积聚对带有强呼吸子特点的怪波的产生起主要作用, 且怪波具有暂时性和局域性. 它和背景间的能量与磁振子的交换可以通过自旋极化电流调控, 并且在临界值以上和临界值以下自旋矩的作用完全不同. 这为铁磁系统中的调制不稳定性对非线性激发的可控性研究也提供了重要意义.

参考文献

- [1] Bu K M, Kwon H Y, Kang S P, Kim H J, Won C 2013 *J. Magn. Magn. Mater.* **343** 32
- [2] Moon J H, Seo S M, Lee K J, Kim K W, Ryu J, Lee H W, McMichael R D, Stiles M D 2013 *Phys. Rev. B* **88** 184404
- [3] Yu X Z, Kanazawa N, Onose Y, Kimoto K, Zhang W Z,

- Ishiwata S, Matsui Y, Tokura Y 2011 *Nat. Mater.* **10** 106
- [4] Rohart S, Thiaville A 2013 *Phys. Rev. B* **88** 184422
- [5] Robler U K, Bogdanov A N, Pfleiderer C 2006 *Nature* **442** 797
- [6] Allwood D A, Xiong G, Faulkner C C, Atkinson D, Petit D, Cowburn R P 2005 *Science* **309** 1688
- [7] Parkin S S P, Hayashi M, Thomas L 2008 *Science* **320** 190
- [8] Li Z D, Hu Y C, He P B, Sun L L 2018 *Chin. Phys. B* **27** 077505
- [9] He P B, Xie X C, Liu W M 2005 *Phys. Rev. B* **72** 172411
- [10] Tretiakov O A, Liu Y, Abanov Ar 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 247201
- [11] Li Q Y, Zhao F, He P B, Li Z D 2015 *Chin. Phys. B* **24** 037508
- [12] Kosevich A M, Ivanov B A, Kovalev A S 1990 *Phys. Rep.* **194** 117
- [13] Mikeska H J, Steiner M 1991 *Adv. Phys.* **40** 191
- [14] Haazen P P J, Mure E, Franken J H, Lavrijsen R, H. Swagten J M, Koopmans B 2013 *Nat. Mater.* **12** 299
- [15] Miron I M, Gaudin G, Auffret S, Rodmacq B, Schuhl A, Pizzini S, Vogel J, Gambardella P 2010 *Nat. Mater.* **9** 230
- [16] Di K, Zhang V L, Lim H S, Ng S C, Kuok M H, Yu J, Yoon J, Qiu X, Yang H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 047201
- [17] Wang W W, Albert M, Beg M, Bisotti M A, Chernyshenko D 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 087203
- [18] Li Z D, Cui H, Li Q Y, He P B 2018 *Ann. Phys.* **388** 390
- [19] Ches S, Coish W A 2015 *Phys. Rev. B* **91** 245306
- [20] Li Z D, Liu F, Li Q Y, He P B 2015 *J. Appl. Phys.* **117** 173906
- [21] Pfleiderer C, Julian S R, Lonzarich G G 2001 *Nature* **414** 427
- [22] Uchida M, Onose Y, Matsui Y, Tokura Y 2006 *Science* **311** 359
- [23] Meckler S, Mikuszeit N, Preßler A, Vedmedenko E Y, Pietzsch O, Wiesendanger R 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 157201
- [24] Moriya T 1960 *Phys. Rev.* **120** 91

- [25] Zakharov D V, Deisenhofer J 2006 *Phys. Rev. B* **73** 094452
- [26] Gangadharaiah S, Sun J M, Starykh O A 2008 *Phys. Rev. B* **78** 054436
- [27] Albert F J, Emley N C, Myers E B, Ralph D C, Buhrman R A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 226802
- [28] Mucciolo E R, Chamon C, Marcus C M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 146802
- [29] Beach G S D, Knutson C, Nistor C, Tsoi M, Erskine J L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 057203
- [30] Bertotti G, Serpico C, Mayergoyz I D, Magni A, Aquino M, Bonin R 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 127206
- [31] Garcia-Sanchez F, Borys P, Soucaille R, Adam J P, Stamps R L, Kim J V 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 247206
- [32] Katine J A, Albert F J, Buhrman R A, Myers E B, Ralph D C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 3149
- [33] Tsoi M, Jansen A G M, Bass J, Chiang W C, Seck M, Tsoi V, Wyder P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 4281
- [34] He P B, Liu W M 2005 *Phys. Rev. B* **72** 064410
- [35] Li Z D, He P B, Liu W M 2014 *Chin. Phys. B* **23** 117502
- [36] Tsoi M, Tsoi V, Bass J, Jansen A G M, Wyder P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 246803
- [37] Tserkovnyak Y, Brataas A, Bauer G E W 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 117601
- [38] Li Z D, Li Q Y, He P B, Liang J Q, Liu W M, Fu G S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 015602
- [39] Freimuth F, Blugel S, Mokrousov Y 2014 *Phys. Rev. B* **90** 174423
- [40] Santos T S, Lee J S, Migdal P, Lekshmi I C, Satpati B, Moodera J S 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 016601
- [41] Li Z, Zhang S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 207203
- [42] Kasai S, Nakatani Y, Kobayashi K, Kohno H, Ono T 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 107204
- [43] Kasai S, Fischer P, Im M Y, Yamada K, Nakatani Y, Kobayashi K, Kohno H, Ono T 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 237203; Sugimoto S, Fukuma Y, Otani Y C 2011 *IEEE T. Magn.* **47** 2951
- [44] Yamada K, Kasai S, Nakatani Y, Kobayashi K, Kohno H, Thiaville A, Ono T 2007 *Nat. Mater.* **6** 270; Moriya R, Thomas L, Hayashi M, Bazaliy Y B, Rettner C, Parkin S S P 2008 *Nat. Phys.* **4** 368
- [45] Zhao L C, Ling L 2016 *J. Opt. Soc. Am. B* **33** 850
- [46] Liu C, Yang Z Y, Zhao L C, Yang W L 2015 *Phys. Rev. E* **91** 022904
- [47] Duan L, Zhao L C, Xu W H 2017 *Phys. Rev. E* **95** 042212
- [48] Wang L, X Wuan, Zhang H Y 2018 *Phys. Lett. A* **382** 2650
- [49] Wang L, Liu C, Wu X, Wang X, Sun W R 2018 *Nonlinear Dyn.* **94** 977
- [50] Zakharov V E, Gelash A A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 054101
- [51] Gelash A A, Zakharov V E 2014 *Nonlinearity*. **27** R1
- [52] Yan P, Wang X S, Wang X R 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 177207
- [53] Zhao F, Li Z D, Li Q Y, Wen L, Fu G S, Liu W M 2012 *Ann. Phys.* **327** 2085
- [54] Li Z D, Li Q Y, Xu T F, He P B 2016 *Phys. Rev. E* **94** 042220
- [55] Li Q Y, Li Z D, He P B, Song W W, Fu G S 2010 *Can. J. Phys.* **88** 9
- [56] Hasegawa A 1984 *Opt. Lett.* **9** 288; Tai K, Tomita A, Jewell J L, Hasegawa A 1986 *Appl. Phys. Lett.* **49** 236
- [57] Akhmediev N N 2001 *Nature*. **413** 267; Van Simaey G, Emplit P, Haelterman M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 033902; Mussot A, Kudlinski A, Droques M, Szriftgiser P, Akhmediev N 2014 *Phys. Rev. X* **4** 011054
- [58] Zhang H Q, Tian B, Xing L, Meng X H 2010 *Physica A* **389** 367
- [59] Matveev V B, Salli M A 1991 *Darboux Transformations and Solitons*, Vol. 5 (Berlin: Springer) pp7–15
- [60] Gu C H, Hu H S, Zhou Z X 2005 *Darboux Transformation in Soliton Theory and Its Geometric Applications* (Shanghai: Scientific and Technical Publishers) pp18–24 (in Chinese). (in Chinese) [谷超豪, 胡和生, 周子翔 2005 孤立子理论中的达布变换及其几何应用(第二版)(上海: 上海科学技术出版社)第18—24页]
- [61] Li Z D, Wu X, Li Q Y, He P B 2016 *Chin. Phys. B* **25** 010507
- [62] Li Z D, Huo C Z, Li Q Y, He P B, Xu T F 2018 *Chin. Phys. B* **27** 040505
- [63] Ho T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 742; Law C K, Ohmi T, Machida K, 1998 *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** 1822; Law C K, Pu H, Bigelow N P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5257
- [64] Pu H, Zhang W P, Meystre P 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 140405
- [65] Li Z D, He P B, Li L, Liang J Q, Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **71** 053611

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Rogue wave solution in ferromagnetic nanowires^{*}

Li Zai-Dong^{1)2)†} Guo Qi-Qi¹⁾

¹⁾ (*Department of Applied Physics, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China*)

²⁾ (*School of Science, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China*)

(Received 6 September 2019; revised manuscript received 2 December 2019)

Abstract

In this paper, we introduce some new excited states of magnetization in ferromagnetic nanowires, including Akhmediev breathers, Kuznetsov-Ma soliton and rogue wave in isotropic ferromagnetic nanowires, and rogue wave in anisotropic ferromagnetic nanowires driven by spin-polarized current. The isotropic case demonstrates a spatial periodic process of a magnetic soliton forming the petal with four pieces and a localized process of the spin-wave background. In a limit case, we get rogue waves and clarify its formation mechanism. In the case of anisotropy, it is found that the generation of rogue waves mainly comes from the accumulation of energy and rapid dispersion in the center. In addition, rogue waves are unstable, the spin-polarized current can control the exchange rate of magnons between the envelope soliton and the background. These results can be useful for the exploration of nonlinear excitation in Bosonic and fermionic ferromagnet.

Keywords: breathers, magnetic rogue wave, spin-transfer torque, modulation instability

PACS: 75.75.-c, 75.70.Kw, 85.75.-d

DOI: 10.7498/aps.69.20191352

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61774001) and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. F2019202141).

[†] Corresponding author. E-mail: lizd@hebut.edu.cn