

量子计算与量子模拟中离子阱结构研究进展

王晨旭 贺冉 李睿睿 陈炎 房鼎 崔金明 黄运锋 李传锋 郭光灿

Advances in the study of ion trap structures in quantum computation and simulation

Wang Chen-Xu He Ran Li Rui-Rui Chen Yan Fang Ding Cui Jin-Ming Huang Yun-Feng Li Chuan-Feng Guo Guang-Can

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 133701 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220224

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220224>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

量子计算与量子模拟

Quantum computation and quantum simulation

物理学报. 2018, 67(12): 120301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180710>

新型超导量子比特及量子物理问题的研究

Novel superconducting qubits and quantum physics

物理学报. 2018, 67(22): 228501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180845>

核磁共振量子信息处理研究的新进展

New research progress of nuclear magnetic resonance quantum information processing

物理学报. 2018, 67(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180754>

基于测量的量子计算研究进展

Research progress of measurement-based quantum computation

物理学报. 2021, 70(21): 210301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210923>

利用超导量子电路模拟拓扑量子材料

Topological quantum material simulated with superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181857>

基于冗余图态的多人协作量子计算

Collaborative quantum computation with redundant graph state

物理学报. 2019, 68(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190142>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

量子计算与量子模拟中离子阱结构研究进展*

王晨旭¹⁾²⁾ 贺冉^{1)2)3)†} 李睿睿¹⁾²⁾ 陈炎¹⁾²⁾ 房鼎¹⁾²⁾崔金明^{1)2)‡} 黄运锋¹⁾²⁾ 李传锋¹⁾²⁾ 郭光灿¹⁾²⁾

1) (中国科学技术大学, 中国科学院量子信息重点实验室, 合肥 230026)

2) (中国科学技术大学, 量子信息与量子科技前沿协同创新中心, 合肥 230026)

3) (合肥师范学院物理与材料工程学院, 合肥 230601)

(2022 年 1 月 31 日收到; 2022 年 3 月 2 日收到修改稿)

离子阱系统是实现量子计算和量子模拟的主要体系之一. 世界范围内的各个离子阱研究小组共同推动着离子阱结构的丰富化发展, 开发出一系列高性能的三维离子阱、二维离子芯片、以及具有集成器件的离子阱系统. 离子阱的结构逐渐向小型化、高通光性和集成化方向发展, 并表现出卓越的量子操控能力——对多离子的囚禁能力和精确控制能力越来越高. 本综述将总结过去的十几年里离子阱在结构上的演化历程, 以及离子阱在量子计算与量子模拟实验研究中的最新进展. 通过分析具有代表性的离子阱结构, 总结离子阱系统在加工工艺、鲁棒性和多功能性等方面取得的进步, 并对基于离子阱系统的可扩展量子计算与模拟作出展望.

关键词: 离子阱系统, 量子计算, 量子模拟, 量子硬件**PACS:** 37.10.Ty, 03.67.Lx, 07.05.Bx**DOI:** 10.7498/aps.71.20220224

1 引言

过去一百多年, 量子力学在描述光子、原子、电子、离子等微观粒子的基本性质和运动规律上取得了巨大成功, 已逐渐成为人们理解世界规律和推动科技发展的重要工具, 带来了人类社会的巨大变革. 当今, 量子力学引导的科技革命方兴未艾, 人们正试图实现大规模的可控量子系统, 实现计算能力的巨大飞跃. 这源自二十世纪 80 年代 Feynman^[1] 提出的量子模拟的构想: 想要使用经典计算机模拟量子世界, 需要指数级增加的经典算力资源, 而如果使用量子系统模拟量子力学, 则可以大大减少资源消耗. 二十世纪 90 年代, Shor^[2] 提出了著名的 Shor 算法, 具备破解公开密钥加密方法 (RSA 加

密算法) 的潜力, 被认为是量子计算机优越性的代表算法.

随着技术的进步, 构建一台有望超越经典计算机的量子计算机逐渐成为可能. 能够实现量子计算的量子系统必须满足 DiVincenzo 判据, 即: 1) 具有良好表征的量子比特; 2) 初态制备; 3) 可实施量子纠错的长相干时间; 4) 可实现一组通用量子门; 5) 结果可以被高效读出; 6) 具有可扩展能力^[3]. 多种物理系统都被证明可以满足前 5 个条件, 如超导量子系统、离子阱系统、冷原子系统、碳化硅系统、氮空位色心、光子体系、核磁共振系统、以及拓扑量子比特等. 而可扩展能力是当前所有系统都面临的重大困难.

离子阱系统是最早用于囚禁单个带电粒子的装置, 被认为是实现量子计算最有潜力的量子硬件

* 国家自然科学基金 (批准号: 11734015, 11774335, 11821404) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: heran@ustc.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: jmcui@ustc.edu.cn

之一. Paul^[4]于1953年发明了一种使用射频电场和静电场束缚离子的装置, 被称为 Paul 阱. Dehmelt^[5]使用一种静磁场和电场相结合的结构, 成功实现了对电子的囚禁, 并将其命名为 Penning 型离子阱. Paul 和 Dehmelt 二人也因此共同获得了1989年的诺贝尔物理学奖. 两种离子阱的原理不同, 但都能够将单个或多个离子束缚在真空环境中, 如质谱^[6, 7]、原子钟^[8–13]、腔量子电动力学^[14–17]、基本物理常数测量^[18]、量子模拟^[19–24]、以及量子计算^[25–31]等. 本文重点论述 Paul 阱, 关于 Penning 阱的相关内容, 可以参考文献^[32, 33].

二十世纪80年代, 美国国家技术标准局(NIST)的 Wineland 等在 Paul 阱中实现了单离子的激光冷却^[34], 并且首次将离子冷却到运动基态^[35], 这为激光操作离子的内部量子态提供了基础^[36]. Wineland 也因此获得了2012年的诺贝尔物理学奖. 1995年, Cirac 和 Zoller^[25]正式提出离子阱系统可被用于量子计算, 其中单个离子的内部能级被认为是一个量子比特, 离子间由于库仑力而共享的运动模式可以作为相互作用的桥梁, 使用激光可以实现单量子比特操作和双比特操作. 离子阱在满足 DiVincenzo 前五条判据上取得了一系列重要突破. 近几年, 离子阱中的单比特门保真度已达99.9999%^[37], 基于激光的两比特门的保真度达到0.9989(7), 0.9992(4) 和 0.9994(3)^[38–40], 基于微波的两比特门保真度高达 $1 \pm_{0.0017}^0$ ^[41]. 单离子的相干时间可达5500 s^[42], 远远超过量子门所需要的时间. 离子阱的可操作比特数目日益增长, 奥地利初创公司 Alpine Quantum Technologies (AQT) 的商业化离子阱可实现24个离子的 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态制备^[43], 美国公司 IonQ 则实现了上百个离子的囚禁、79个离子的单比特门和11个离子的全连通量子算法^[44]. 离子阱中的保真度指标已经超越了容错量子计算的阈值^[45–47], 人们已经可以实现单个逻辑比特的容错编码和纠错^[48, 49]. 除了量子计算, 离子阱也成为重要的量子模拟平台^[50–52], 例如使用原子离子混合系统(hybrid system)^[53–55]研究冷分子的合成过程及性质^[54, 56–59].

当前, 电子计算机的计算能力面临着瓶颈, 进一步减小晶体管的体积越来越困难. 当芯片的加工尺寸达到1 nm左右, 线路中的量子效应将占据主导, 电子的状态将不再稳定, 无法实现准确的计算.

量子计算机则从根本上利用粒子的量子特性实现计算, 有望大幅提升计算能力, 解决目前面临的诸多问题. 量子计算机使用处于叠加状态的量子比特 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$, 取代经典计算机中只能处于0或1的经典比特. 量子计算机可以自然地实现量子系统的演化, 对于求解和模拟量子系统有着天然的优势. 对于 n 个量子比特, 其描述的参数空间需要使用 2^n 个经典比特才能够实现. 通用的大规模量子计算是量子计算机发展的最终目标, 要求量子系统能够实现规模上的可扩展(上万个量子比特)和纠正计算中的错误. 虽然当前的离子阱系统距离通用量子计算还有一定距离, 但离子阱系统有望率先实现有噪音的中小规模量子体系, 将在生物制药、交通规划和飞行器设计等复杂问题领域提供应用价值.

实现规模较大的量子计算要求量子比特数目的扩展以及操作能力的提高. 对于离子阱系统而言, 这不仅要求增加离子数目, 还要求激光独立操控能力的提升. 一方面, 一个线性离子阱中离子的数量是有限的, 由于离子之间存在库仑相互作用力, 其间距在几微米左右, 而随着离子数量的增加, 离子链将变得越来越长. 这不仅会使得离子的间距减小, 轴向运动频率降低, 还会使得离子的运动模式越来越复杂, 实现离子间的相互作用越来越困难. 另一方面, 实现离子操作的激光也需要相应的扩展, 而光学的可扩展性也受到激光功率、光电器件的性能、系统的通光性能、相邻离子串扰等因素的限制. 因此, 优化离子阱的结构, 实现离子数目和激光控制的可扩展性是当前离子阱发展的重要问题.

实际上, 离子阱的结构一直在不断改进, 离子阱逐渐从原来的体积大、通光性差且电极简单向着小型化、高通光性和集成化方向发展, 对多离子的囚禁能力和精确控制能力越来越高. 人们陆续发明了线性四极杆阱^[60]、分段式的四极杆阱、线性刀片阱^[61]、分段式线性刀片阱^[62]等具有三维结构的线性离子阱, 由于他们的尺寸都在厘米量级, 因此也被称为宏观离子阱(Macroscopic trap). 微纳加工技术的发展为离子阱的小型化和批量生产提供了可能, 人们发明了一种具有不同结构的离子阱——微观离子阱(Microscopic trap)^[63–65], 但通常需要放置在低温环境^[66, 67]. 除了使用线性离子阱, 还有人使用二维 Paul 离子阱^[68–72]或 Penning 阱^[73–76]来扩展单个离子阱中的离子数量. 为了解决离子阱

的可扩展问题, Kielpinski 等^[77]提出了量子电荷耦合设备 (quantum charge-coupled device, QCCD) 的路线图——构造一个具有多个囚禁区域的离子阱结构, 移动离子在不同功能区域间穿梭, 实现不同的操作. 这需要使用具有结连接电极 (Junction) 结构的三维芯片阱^[78,79]和表面阱芯片^[80]. 尤其是与集成电路、集成光学相结合的表面阱有望为离子阱结构的小型化和可扩展开辟新的道路^[64,81-84]. 第二种扩展路线图是 Monroe 等^[31]提出的——模块化的离子阱可扩展结构 (modular universal scalable ion trap quantum-computer (MUSIQC))——离子阱可以分布在不同的地方, 通过光子飞行比特连接起来, 则可以实现更大规模的量子系统. Monroe 等^[31]使用大数值孔径的物镜收集光子, 并实现了不同离子之间概率性的纠缠^[85-87]. 为了提升收集效率和纠缠速率, 可以使用与原子能级共振的法布里-珀罗 (Fabry-Pérot, FP) 腔^[88-90], 并实现高效率的离子-光子纠缠^[89,91]以及远距离的光子传输^[92,93]. 但是这仍然面临着光学腔表面杂散电场对囚禁离子稳定性的影响^[94].

综上所述, 离子阱作为一个优秀的量子系统, 为人们使用离子量子比特实现量子信息的处理提供了丰富的操作手段. 但最终实现大规模的量子计算, 离子阱的结构还需要不断地创新. 这些创新来源于全世界不同实验室的共同努力和尝试, 也来源于加工技术的进步和发展. 本文将从实现可扩展量子信息处理为出发点, 论述离子阱设计时需要考虑的主要原则和参数选择, 以一些典型的离子阱为例, 详细论述不同结构的射频离子阱在加工方法、通光性能、可扩展能力、以及量子态操作能力等方面的特点, 以促进未来新型结构的发展和量子硬件的进步.

2 离子阱基本原理

本节介绍 Paul 阱的基本原理和主要参数. 如图 1 所示, 双曲面离子阱结构对称, 射频 (radio frequency, RF) 电压被施加到射频电极上, 静电电压 (static electric voltage, DC) 被施加到直流电极上, 离子被囚禁在阱的中间. 在 Paul 阱的双曲面电极上施加电压, 在空间中形成的电势可以写为

$$\Phi_{\text{DC}} = \frac{U_{\text{DC}}}{2}(\alpha_{\text{DC}}x^2 + \beta_{\text{DC}}y^2 + \gamma_{\text{DC}}z^2), \quad (1)$$

其中, U_{DC} 为施加的电压, x 和 y 方向为径向, z 方向为轴向. 根据 Maxwell 方程, $\nabla^2 U = 0$ 要求

$$\alpha_{\text{DC}} + \beta_{\text{DC}} + \gamma_{\text{DC}} = 0. \quad (2)$$

因此单纯使用静电场, 至少有一个方向无法束缚离子. 如果施加射频场 (radio frequency field, RF field), 其产生的含时电势为

$$\Phi_{\text{RF}} = \frac{U_{\text{RF}}}{2}(\alpha_{\text{RF}}x^2 + \beta_{\text{RF}}y^2 + \gamma_{\text{RF}}z^2)\cos(\Omega_{\text{RF}}t), \quad (3)$$

其中 U_{RF} 为 RF 电压, Ω_{RF} 为射频角频率. 同样地^[25],

$$\alpha_{\text{RF}} + \beta_{\text{RF}} + \gamma_{\text{RF}} = 0. \quad (4)$$

对于一维线性离子阱, 取 $\gamma_{\text{RF}} = 0$, $\alpha_{\text{RF}} = -\beta_{\text{RF}}$, 且 $\alpha_{\text{RF}} \propto 1/r_0^2$, 其中 r_0 为离子到电极的距离. 由于射频电场的时变性, x 和 y 方向交替地改变对离子的作用力方向. 在轴向, 通过施加 DC 则可以实现束缚作用. 因此, 在合适的参数下, 离子将在电场中作往复运动, 被囚禁在势阱中心. 只考虑 x 一个方向上的电势

$$\Phi_x = \frac{1}{2}[U_{\text{DC}}\alpha_{\text{DC}} + U_{\text{RF}}\alpha_{\text{RF}}\cos(\Omega_{\text{RF}}t)]x^2, \quad (5)$$

根据牛顿运动方程 $F = ma$, 对于处于该电场的正电荷 q , 有

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= qE/m \\ &= -\frac{Z|e|}{m}[U_{\text{DC}}\alpha_{\text{DC}} + U_{\text{RF}}\alpha_{\text{RF}}\cos(\Omega_{\text{RF}}t)]x, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, Z 为离子所带电荷数, m 为离子质量, e 为单位正电荷 $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$. 这与 Mathieu 方程

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + [a_x - 2q_x \cos(2\xi)]x = 0$$

形式一致, 只需要做如下替换:

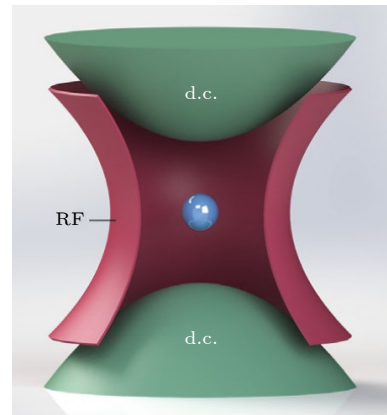


图 1 双曲面离子阱示意图^[95]

Fig. 1. Schematic of a Paul trap with hyperbolic shaped electrodes^[95].

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\Omega_{\text{RF}} t}{2}, \quad a_x = \frac{4ZeU_{\text{DC}}\alpha_{\text{DC}}}{m\Omega_{\text{RF}}^2}, \\ q_x &= \frac{2ZeU_{\text{RF}}\alpha_{\text{RF}}}{m\Omega_{\text{RF}}^2},\end{aligned}\quad (7)$$

上述方程在一定条件下具有通用的稳定解^[36, 78]. 在 $|a_x|, q_x^2 \ll 1$ 时, 可得到离子运动的一阶近似解

$$x(t) \approx 2A_x \cos\left(\beta_x \frac{\Omega_{\text{RF}}}{2} t\right) \left[1 - \frac{q_x}{2} \cos(\Omega_{\text{RF}} t)\right], \quad (8)$$

其中, $\beta_x \approx \sqrt{a_x + q_x^2/2}$, A_x 为常数, 依赖于初始的边界条件^[36]. 上述结果表明, 离子的运动可以分为两部分, 频率为

$$\omega_{\text{secular}} = \beta_x \frac{\Omega_{\text{RF}}}{2} \ll \Omega_{\text{RF}}, \quad (9)$$

幅度为 $2A_x$ 的久期运动 (secular motion) 和频率为 Ω_{RF} , 幅度为 $q_x A_x$ 的微运动 (micromotion). 当 $a_x \ll q_x^2$ 时, 离子的运动频率为

$$\omega_{\text{secular}} = q_x \Omega_{\text{RF}} / 2\sqrt{2} = \frac{Z|e|U_{\text{RF}}\alpha_{\text{RF}}}{\sqrt{2}m\Omega_{\text{RF}}}. \quad (10)$$

轴线方向的情况比较简单, 可以直接由

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{ZeU_{\text{DC}}\gamma_{\text{DC}}}{m} z = 0 \quad (11)$$

得到轴线运动频率^[25]

$$\omega_z = \sqrt{\frac{Z|e|U_{\text{DC}}\gamma_{\text{DC}}}{m}} \quad (12)$$

和运动函数

$$z(t) = A_z \cos(\omega_z t), \quad (13)$$

其中, A_z 为运动幅度.

当离子的微运动幅度远小于久期运动幅度时, 离子在径向所感受到的平均势阱近似于一个简谐势:

$$\Phi_{\text{pseudo}}(\mathbf{r}) = \frac{Z|e|U_{\text{RF}}^2}{4m\Omega_{\text{RF}}^2} (\alpha_{\text{RF}}^2 x^2 + \beta_{\text{RF}}^2 y^2), \quad (14)$$

称之为赝势 (pseudo-potential). 离子的运动可以看作在这个赝势中的简谐振动, 当离子处于赝势的中心附近时, 可以使用量子化的语言描述离子的运动状态, 称之为声子. 声子作为离子的外态, 与离子的内部电子能级所形成的内态共同组成了离子的量子态. 如当离子处于内态的 $|0\rangle$ 态而运动处于基态 $|0\rangle$ 时, 可以表示为直积态 $|00\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle$. 通过激光可以将二者耦合起来, 实现自旋与声子的耦合. 对于多个离子, 由于库仑相互作用, 离子将在束缚强度较弱的轴向 (一般为 z 轴) 排成一排, 形成

一维离子晶体. 离子的间距由所有离子所受电场力与库仑力平衡位置决定, 一般为几微米, 为使用激光来独立地操作各个离子提供了便利. 此时, 离子的运动模式被所有离子共享, 形成离子间相互作用的纽带. 如对于质心模式而言, 所有离子都同时向同一方向运动, 频率相同. 更多关于多离子运动模式请参考文献^[96].

3 离子阱基本参数

在设计和加工离子阱时, 首先需要确定一些基本参数. 在确保离子稳定囚禁的前提下, 离子的径向声子频率越大越好. 这有几方面的原因, 第一, 原子的能级是有一定线宽的, 而操作离子能级的激光也是存在一定线宽的, 只有当声子频率大于上述的线宽时, 激光才能够分辨不同的运动频率. 第二, 当声子频率较大时, 离子的运动模式更不容易被外界杂散电场激发, 因此具有更低的加热率. 第三, 在一维离子晶体中, 更大的径向声子频率意味着能够容纳更多的离子^[96]. 第四, 大的声子频率还有利于在多普勒冷却时得到更低的初始声子数.

由 (10) 式可知, 对于特定的离子, 想要增加径向声子频率, 可以通过增加射频电场电压 U_{RF} , 增加离子阱的结构因子 $\alpha_{\text{RF}} \propto 1/r_0^2$, 即减小离子到电极的距离 r_0 , 或减小射频场驱动频率 Ω_{RF} 来实现.

1) 增加 U_{RF} . 离子阱中, 常常使用螺旋谐振腔提供 RF 所需要的高压射频电场^[97,98]. 螺旋谐振腔可以实现射频电场的电压增益以及阻抗匹配, 同时可以实现对共振频率之外的噪音的滤波. 其输入端的射频功率为 P , 谐振腔的品质因子为 Q , 则其输出的电压幅度为 $U_{\text{RF}} \propto \sqrt{2PQ}$. 常温下, 连接到离子阱上的螺旋谐振腔的 Q 值可以达到数百^[97,98], 而在低温下可以达到 1000 以上^[67]. 进一步提升 U_{RF} 的方法只能通过增加射频功率 P 来实现, 但提升 n 倍的功率却只能带来 $\sqrt{n}$ 的电压增益, 这不仅受限于电极材料的最大耐压性质, 还受限于离子阱结构的热稳定性^[99].

2) 减小离子到电极的距离 r_0 . 虽然减小 r_0 对于增加声子频率效果明显, 但是这会导致离子加热率 $\dot{n} \propto r_0^{-4}$ 的急速增加^[100-104], 因此必须选择一个合适的间距.

3) 减小射频场驱动频率 Ω_{RF} . 根据 (9) 式, 减小 Ω_{RF} 会导致 q_x 的增加, 不可能一直减小. 在端帽

电极电压为 0 时, Mathieu 方程的稳定解要求 q_x 应小于 0.908. 但实际上, 大多数的离子阱都会工作在 $q_x < 0.5$ 的区域 [36]. 因此减小 Ω_{RF} 会使得稳定囚禁离子的射频电压 U_{RF} 相应的降低, 与 1) 冲突.

因此, 需要综合考虑所有因素, 并根据实际目的, 选择一个全局最优的参数. 设计离子阱结构时, 还需要考虑如下因素:

1) 电极所构成的囚禁区域的尺寸、比例、通光角度等几何参数, 这些参数也决定了离子运动频率的大小和主轴方向;

2) 电极的材料可以选择金属, 如不锈钢 [61]、钨 [68]、钛 [105,106] 等, 也可以选择镀金的绝缘材料, 如陶瓷 [107]、宝石 [108]、熔融石英 [109] 等, 材料的选择需要考虑到真空放气率、是否超低温兼容、可加工性、表面粗糙度、电阻率、射频损耗、硬度和热膨胀系数等;

3) 良好的电极的连接和固定方法确保结构的牢固性;

4) 分段电极的数量、尺寸和加工方法;

5) 在具有结连接电极的离子阱中, 结连接的形状和尺寸需要精细的设计, 以减小离子在移动过结点时的加热 [78];

6) 固定机械与真空腔体必须有足够的通光性, 确保操作激光的照射, 以及高数值孔径 (numerical aperture, NA) 物镜用于离子荧光收集;

7) 超高真空环境对离子阱至关重要, 能够隔绝空气分子对离子的碰撞 [67], 防止离子从势阱中逃出或形成分子, 因此需要真空腔、真空窗口、真空泵以及真空馈通连接来提供超高真空环境 (约 10^{-11} Torr ($1\text{Torr} \approx 133.322\text{Pa}$));

8) 使用低温系统有利于获得更好的真空环境, 以及降低加热率, 但也增加了系统的成本、体积和复杂度.

4 三维离子阱

4.1 四极杆阱

四极杆阱是一种常用的线性离子阱, 能够囚禁一维离子晶体. 相比于 Paul 发明的双曲面结构, 四极杆阱的电极更容易制作且具备更高的通光性, 至今仍是离子阱质谱仪领域使用最为广泛的结构. 它由四根主要的圆柱形电极构成, 其中两根作为 RF 电极, 两根作为 DC 电极. DC 电极不仅作为

RF 电场的地, 还能够提供偏置电压控制离子位置. 如图 2 所示, 四极杆阱根据 DC 电极是否分段可以分为两种结构. 其中不分段的四极杆阱需要使用端帽电极提供轴向束缚, 在陶瓷绝缘支架上, 四根直径 0.3 mm 的钨棒的中心围成了边长 0.6 mm 的正方形, 两侧各有一根直径 0.2 mm 的钨棒作为端帽电极, 相距 1.3 mm. 离子距离四个电极距离为 0.27 mm, 距离端帽电极 0.65 mm. 在其下方还有两根电极, 一个用于补偿微运动, 另一根用于通过射频电流, 驱动离子的磁偶极矩跃迁. 除了使用轴向电极, 还可以使用环形电极等, 防止轴向通光孔径被遮挡 [111]. 而分段的离子阱则将 DC 电极分段, 可以在轴向开口, 具备轴向通光能力. 在图 2(b) 的四极杆阱中, 四根长 5 cm 直径 0.79 mm 的不锈钢棒围成边长 1.25 mm 的正方形区域, 其中两根作为 RF 电极, 两根作为 DC 电极形成径向的束缚电场, 离子距离电极中心距离为 $R = 0.5$ mm, 距离电极表面 $r_0 = 0.105$ mm. 在两根 DC 电极上共设置四根 5 mm 长的不锈钢管, 相距 $2Z_0 = 6$ mm, 使用 25 μm 厚的聚酰亚胺作为绝缘材料隔离 [112]. 轴向通光能力有利于使用一束激光照射整个离子链并实施全局操作, 也有利于在轴向设置光学腔等装置 [113]. 然而, 四极杆阱仍然存在一些不足, 如圆柱电极结构仍然限制了径向和轴向的通光孔径, 分段电极的数量难以增加.

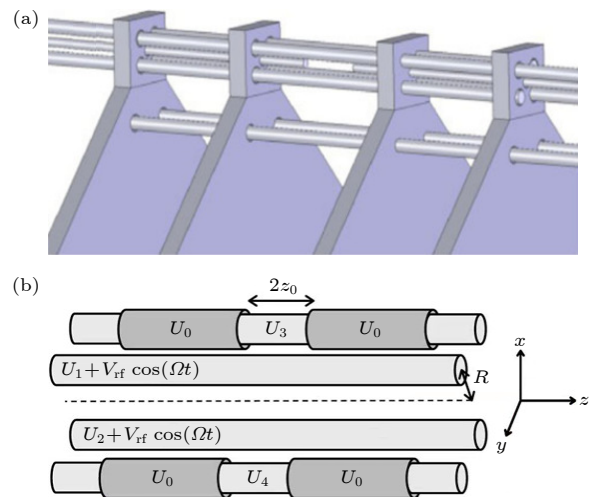


图 2 四极杆离子阱 (a) 不分段的四极杆阱需要端帽电极提供轴向束缚 [110]; (b) 分段的四极杆阱使用分段电极提供轴向束缚 [112]

Fig. 2. Four-rod trap: (a) Unsegmented four-rod trap requires end cap electrodes to provide axial confinement [110]; (b) segmented four-rod trap uses the segmented electrodes to provide axial confinement [112].

4.2 刀片阱

2003 年, Innsbruck 大学的 Rainer Blatt 组设计了一种刀片形状的离子阱, 称为刀片阱^[61]. 如图 3 所示, 四个不锈钢刀片固定在 Macor 陶瓷支架上, 构成一个刀片阱, 图中的尺寸单位为 mm. 轴向一对钼金属制作的端帽电极提供轴向电压 (约 2000 V), 端帽上突出的圆形结构可以覆盖正对轴线的陶瓷支架的表面, 以减小杂散电场对离子的干扰. 三根不锈钢棒作为补偿电极, 其中一根用于竖直方向, 另外相连的两根用于水平方向. 离子与刀刃间距 0.8 mm, U_{RF} 为 1000 V 左右, 工作频率 23.5 MHz. 这类阱具有很多优点. 如势阱深度达到数个电子伏, 径向声子频率可达 2—4 MHz, 能够囚禁数十个离子; 刀片结构使得阱具有更高的通光性能; 具备数个控制电极, 能够补偿离子的微运动; 加热率 < 10 个声子每秒. 这种离子阱由于具有优良的性质获得了巨大的成功, 被称为 Innsbruck 式的刀片阱. 为了提高系统的通光性和囚禁深度, Rainer Blatt 组在 2011 年做了如下改进: 将离子

与刀刃间距缩短至 565 μm , 以获得更高的径向声子频率; 在端帽电极中间设置直径 0.5 mm 的通光孔径, 以便在轴向照射激光, 并将端帽电极间距从 5 mm 减小为 4.5 mm; 使用桥接导线将两个 RF 电极以串联方式连接^[114], 但桥接导线会产生交流磁场, 影响离子能级. 他们后来又通过改变导线的布线几何结构解决了该问题^[114]. 为了提升该阱的热稳定性和通光性^[99], 在 2017 年 Rainer Blatt 组在原有的设计基础上, 又做了如下改进: 使用蓝宝石作为支架, 替换原来的 Macor 材料; 为匹配宝石的热膨胀系数, 使用钛金属刀片替换原来的不锈钢刀片; 刀片表面电镀 10 μm 金层, 有利于减小刀片发热产生的黑体辐射^[106], 还有利于降低由于紫外光产生的光电效应 (金的逸出功为 5.1 eV, 而不锈钢为 4.4 eV, 分别对应 243 nm 和 282 nm 的光子能量)^[106]. 该类阱在轴向的加热率为 1.32(2) 至 37(2) 个声子每秒. 经过这一系列的改进, Innsbruck 式的刀片阱成为一种结构紧凑、性能优良、质量稳定的离子阱结构. 初创公司 AQT 所提供的商业化离子阱量子计算原型机使用的正是这种设计, 并将所需的激光、射频、光路、控制系统全部集成到两个 19 英寸机柜中^[43,115].

Maryland 大学的 Christopher Monroe 组在 2013 年设计了一种分段式的刀片阱, 如图 4 所示. 他们不使用沿着轴向的端帽电极, 而是将 DC 刀片分割成五段, 其中最外面的 DC 电极可以实现轴向束缚. 四个刀片为 500 μm 厚的陶瓷片, 使用激光切割出四个宽 50 μm 的缝, 在刀刃处构成 250 μm 的五段. 电极表面镀金, 先蒸镀 10 nm 的钛层和 1 μm 的金层, 也可以采取电镀金产生更厚的金层. 其中 RF 刀片整体镀金, 五段电极相互连接, 而 DC 电极只镀一部分, 形成五个独立的电极. 组装时, 四个刀片固定在陶瓷支架上, 每段 DC 电极都有一个 820 pF 的陶瓷电容与地相连, 以减小 DC 刀片上感应的射频信号. 刀片围成的囚禁区域为 1215 $\mu\text{m} \times 539 \mu\text{m}$, 离子电极间距约为 660 μm . 这种刀片阱具有在多个方向的通光性, 有利于实现不同要求的光路配置. 在后来的设计中, 最外侧的 DC 电极长度从 250 μm 增加至 10 mm, 有利于使得 RF 电场在轴向更均匀, 减小 RF 的轴向电场分量引起的微运动^[116,117]. 在这个离子阱上, Debnath 等^[30] 演示了一个全连通的五比特可编程量子计算机.

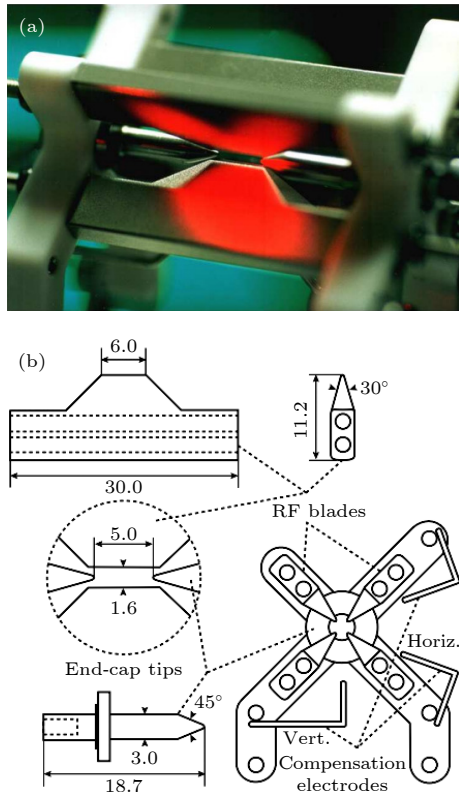


图 3 Innsbruck 式的刀片阱^[61] (a) 组装后的离子阱实物图; (b) 离子阱尺寸和结构图

Fig. 3. Innsbruck style blade ion trap: (a) Photograph of an assembled blade trap; (b) dimensions and structure of the trap.

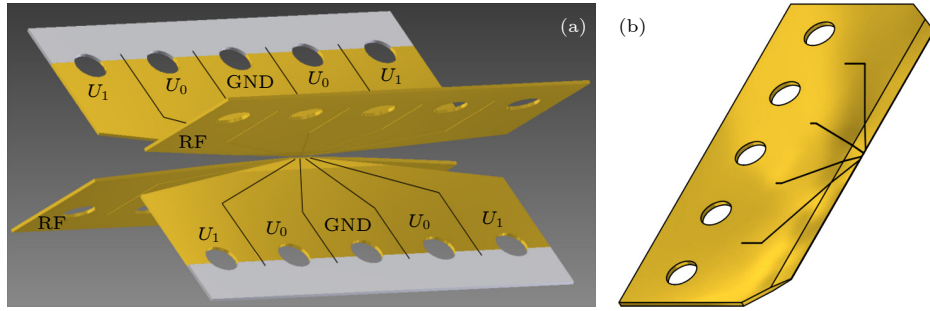


图 4 Maryland 型刀片阱^[62] (a) 分段刀片阱结构图. 分段刀片结构不仅可以提供轴向束缚, 还能够实现非简谐电势, 实现更均匀的离子间距. (b) 在另一个刀片阱中, 将 DC 最外侧电极的长度从 250 μm 增加至 10 mm, 减小 RF 在轴向的电场分量^[116,117]

Fig. 4. Maryland style blade ion trap^[62]: (a) Structure of segmented blade ion trap. The segmented blade not only can provide axial confinement, but also generate non-quadratic axial potential to achieve uniform ion distance; (b) in another blade ion trap, the out-most segment is increased to 10 mm from 250 μm in order to reduce the residual RF electric field along the axial direction^[116,117].

刀片阱能够在多个方向提供较大的数值孔径, 这对于离子阱来说至关重要. 一方面需要使用大数值孔径的物镜收集离子的荧光, 实现高效的探测和成像. 越大的数值孔径所实现的收集效率越高, 通常使用 $\text{NA} > 0.3$ 的物镜, 工作距离在 10—40 mm^[117]. 另一方面, 对单个离子的独立寻址需要使用高数值孔径的物镜将激光聚焦到小于离子间距. 高数值孔径物镜的工作距离要求离子应尽可能地靠近窗口, 而常用的金属真空腔的系统只能够在两个或者两个方向上具有较短的距离. 为此, 人们尝试将物镜放置在真空腔内部^[118]、使用集成的反射镜^[119–121]和衍射器件^[122,123]等措施以增加数值孔径. 但这大大增加了系统的复杂度, 而且置于真空内的器件难以调整和更换. 实验上, 金属真空腔由于易加工、超高真空兼容常用于给离子阱系统提供超高真空环境和机械支撑. 但金属真空腔需要使用光学窗口才可以通光, 因此体积难以进一步缩小. 相比之下, 在冷原子体系中常用的玻璃真空腔同样能够提供超高真空环境^[124,125]. 在玻璃真空腔中制备冷原子系综, 使用光晶格或者光镊束缚单个冷原子阵列都已经是很成熟的技术^[126,127]. 在中国科学技术大学的刀片阱中, 就实现了刀片阱和玻璃真空腔的结合. 如图 5 所示, 所使用的玻璃真空腔尺寸为 30 mm $\times$ 30 mm $\times$ 100 mm, 厚度 4 mm, 内部尺寸为 22 mm $\times$ 22 mm $\times$ 92 mm, 离子距离真空腔外界只有 15 mm. 所使用的刀片为熔融石英基底, 表面电镀 8 μm 金层. DC 电极使用激光切割表面金层实现五段电极, 中间三段宽度为 250 μm , 每段间隔 20 μm . 两个刀片相邻表面夹角为 82.6° 和 37.4°, 对应数值孔径分别为 $\text{NA} = 0.66$ 和 $\text{NA} = 0.32$ ^[109].

该系统的两个侧面可以用于受激拉曼跃迁操作, 一个方向用于荧光收集, 另一个方向可以实现可寻址的光镊^[128–130]. 该玻璃腔内还保留足够的空间用于实现冷原子系综的制备, 为未来的冷原子实验提供了足够的光学操作空间^[54,56–59].

该离子阱的高通光性结构允许人们更高效地使用光镊, 使得光镊与离子阱更好地结合^[109]. 光镊是一种强会聚的光偶极阱^[128–131], 在冷原子系统中, 光镊可以实现原子的一维到三维排列^[126,128,129,132–134], 而将光镊用于离子阱, 能够实现单个离子的纯光囚禁^[69,135,136], 避免由于微运动造成的加热问题^[137,138].

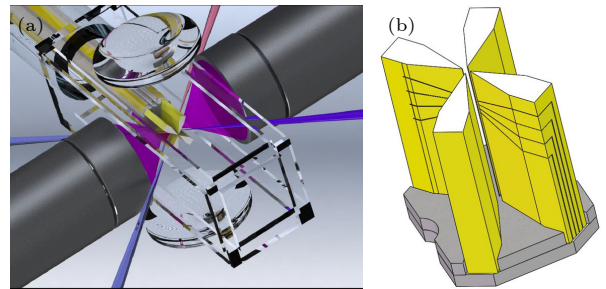


图 5 中国科学技术大学的刀片阱^[109] (a) 放置于玻璃真空腔中的刀片阱, 在其四周允许同时使用两个 NA 最大为 0.32 的物镜和两个 NA 为 0.66 的物镜; (b) 刀片阱的结构. 该刀片材料为熔融石英, 表面具有 8 μm 金层, DC 电极表面使用激光加工成为五段

Fig. 5. The blade ion trap used in University of Science and Technology of China^[109]: (a) A blade ion trap is placed in a glass vacuum cell. Two objectives with a maximum NA of 0.32 and another two objectives with a maximum NA of 0.66 are allowed to be used simultaneously. (b) The structure of the blade ion trap. The blades are made from fused silica and coated with a 8 μm gold layer. The surface gold of the DC electrodes is segmented into five using laser cutting.

最为重要的是, 光镊不仅可以用于增加长离子链的稳定性, 还能够实现同一离子链中不同操作的并行性^[139–142], 有利于增加离子阱的可扩展性.

三维离子阱还给离子阱与光纤腔的结合提供了足够的空间^[15,91,145–149]. 将离子阱与光学 FP 腔结合不仅有助于提升离子荧光的收集效率^[93], 还能够实现离子与腔模的强耦合^[144,150], 用于腔量子电动力学研究^[147,151]. 然而, 将光纤腔集成在离子阱中仍然十分困难. 虽然大腔镜具有较长的腔长, 可以更方便地放置于真空腔中, 对于离子的扰动较小, 但是较长腔长导致较大的模式体积和较小的耦合系数, 而使用光纤制作的 FP 腔能够拥有非常小的模式体积, 因此可以实现强耦合. 但是光纤腔的腔长通常只有几百微米, 暴露的介电材料也会对离子的运动产生很大的影响^[94]. 表 1 中列出了一些离子阱与光学腔结合的案例及相关参数. 图 6 展示了几种集成光纤腔的离子阱结构. 图 6(a) 中, Innsbruck 大学使用光学腔收集离子发出的 854 nm 光子, 通过波导将之转换为 1550 nm 的光子, 在光纤中传播了 50 km^[93]. 得益于光学腔的使用, 该系统实现了 50% 的荧光收集效率和 25% 的波导转换效率. Sussex 大学首次实现了单个离子与光学腔的强耦合^[150], 图 6(b) 为 Sussex 大学的离子阱使用了光纤腔, 光纤被一根细金属管包裹着放置于 RF 电极内部, 内部的金属管可以传递光纤上的电荷, 其上施加的电压可以调节离子的位置. 外圈的 RF 电极产生的势阱可以天然地将离子囚禁在光纤腔

中心附近. 径向的四根电极可以同时施加 DC 电压和 RF 电场, 其中 RF 电场可以将离子精确地移动到腔模中, 以较小的微运动实现离子和腔模的强耦合^[150,152]. 2020 年, Aarhus 大学的研究团队实现了离子晶体与光学腔的强耦合, 如图 6(c)–(e) 所示. 他们使用腔长为 11.8 mm 的光学腔, 腔模可以覆盖三维离子晶体中的一部分, 并通过腔内激光的开关控制与离子的相互作用.

4.3 三维芯片阱

刀片阱具备数个控制电极, 只能够实现离子的稳定囚禁, 无法实现离子的频繁移动、分离以及合并. 为了扩展刀片阱控制电极的数量, 丰富电极的结构, 人们设计并搭建了三维芯片阱^[78,79]. 三维芯片阱的尺寸介于宏观 (macroscopic) 离子阱和微观 (microscopic) 离子阱中间, 可以被认为是介观 (mesoscopic) 离子阱. 在绝缘片状材料表面镀金, 使用激光对其进行切割可以制备出分段电极, 将多层分段电极堆叠组装即可形成三维芯片阱, 它具有数十个控制电极以及更精密的电极结构, 能够很好地实现离子链的分离、转移和合并^[160,161]. 但这种离子阱的制作流程较为复杂, 需要手工加工和组装, 因此难以批量制作.

苏黎世联邦理工大学的三维芯片阱如图 7 所示. 该阱由 11 片芯片堆叠而成, 分别为: 顶部屏蔽层, 绝缘层 1, 上补偿电极层, 绝缘层 2, 上控制电极层, 绝缘层 3, 下控制电极层, 绝缘层 4, 下补偿

表 1 部分光学腔实验的参数, 来自文献^[105]
Table 1. Structural parameters of capillary of different kind of fluid.

参考文献	课题组	腔长/ μm	凹面半径/ μm	模式波长 /nm	束腰/ μm	精细度
[153]	Walther	6000	10000	Ca-397	24	3000
[149]	Blatt	21000	25000	Ca-729	54	35000
[146, 147]	Walther	8000	10000	Ca-866	37	49000
[16, 154]	Blatt	19980	10000	Ca-866	13	70000
[148]	Chuang	50000	50000	Sr-422	57.9	25600
[145]	Vuletic	22000	25000	Yb-369	38	12500
[155]	Monroe	2126	25000	Yb-369	25	3790 $\rightarrow$ 1490
[93]	Blatt	19900	9980	Ca-866	12.3	54000
[156]	Kurtsiefer	11000	5500	Rb-780	2.4	603
[157]	Köhl	230	390	Yb-935	7	1000
[158]	Köhl	150	300	Yb-935	6.1	20000
[159]	Köhl	150	200	Yb-935	3.1	1140 $\rightarrow$ 207
[143]	Keller	367	560	Ca-866	8.5	48000

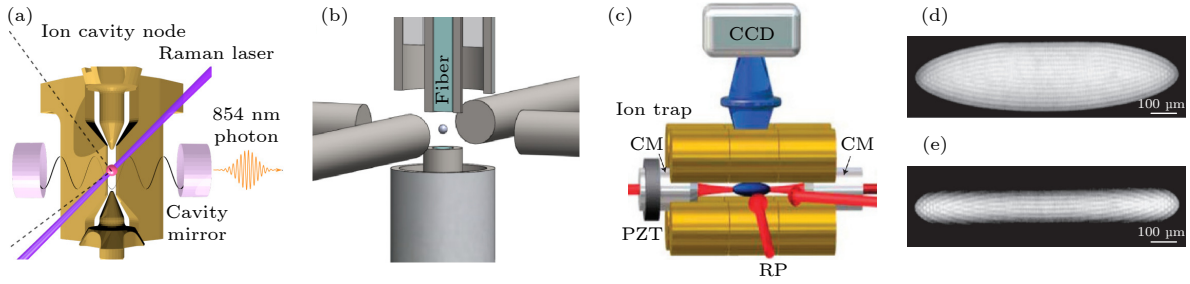


图 6 光学腔阱 (a) Innsbruck 大学的光学腔阱^[93]. 离子发出的 854 nm 光子有 50% 的概率被光学腔收集, 并被波导转换为通信波长 1550 nm 的光子. (b) Sussex 大学的光学腔阱. 该装置首次实现了离子与腔模的强耦合^[143]. (c) Aarhus 大学的离子阱. 一束径向泵浦光 (RP) 用于 Doppler 冷却循环, 发光的离子可以在 CCD 上成像, 光学腔镜 (CM) 沿轴向放置, 压电平台 (PZT) 将腔镜 (CM) 锁定到与轴向 RP 光共振. (d) 当使用径向 RP 光时, 整个离子阱中的大约 $6,400 \pm 200$ 个离子全部发亮. (e) 关闭径向的 RP 光, 只有光学腔中通过 RP 光时, 处于腔内的 536 ± 18 个离子可以正常发光, 而在腔外的离子进入暗态^[144]

Fig. 6. Ion traps with integrated optical cavities: (a) Integrated optical cavity trap in University of Innsbruck^[93]. 50% of the 854-nm photons emitted from the ion can be collected by the cavity, and are converted to a communication wavelength of 1550 nm. (b) Integrated optical cavity trap in Sussex University. This trap demonstrated the first strong coupling between the ions and the cavity mode. (c) Ion trap in Aarhus University. The cavity mirror (CM) is along the axial direction, A pumping beam in the radial direction is used to pump the ions back into the Doppler cooling cycle. These ions can be imaged on the CCD. A Piezo-electric Transducer (PZT) is used to actively lock the optical cavity in resonance with the RP laser. (d) When the radial RP laser is on, the entire crystal of approximately $6,400 \pm 200$ ions are all bright. (e) When the radial RP is off, only the 536 ± 18 ions in the cavity are bright. The ions outside the cavity are in dark state^[144].

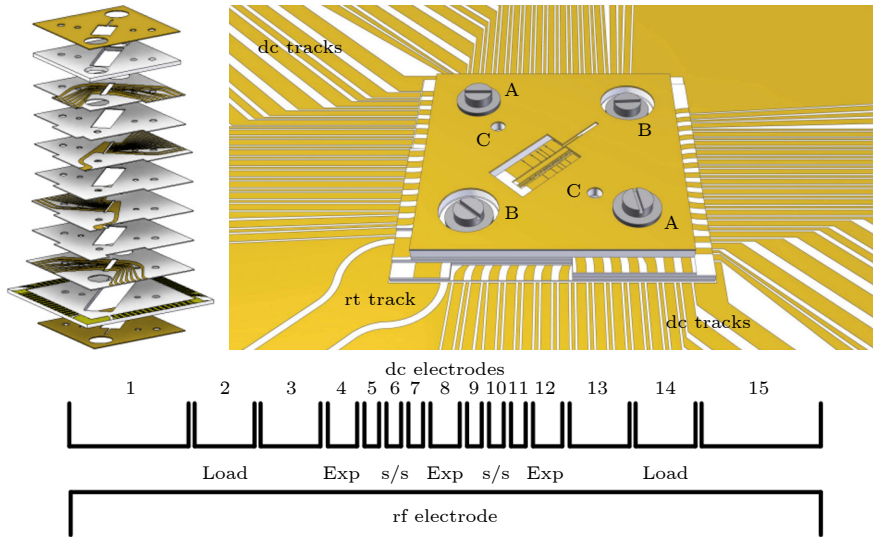


图 7 苏黎世联邦理工大学的三维芯片阱^[164]

Fig. 7. Three dimensional (3D) microfabricated ion Trap chip in ETH Zurich^[164].

电极层, 绝缘层 5, 底部屏蔽层. 每一层为厚度为 $127 \mu\text{m}$ 的陶瓷片, 顶部屏蔽层整体镀金且接地, 用于电磁屏蔽和减少原子炉喷出的原子对电极的污染; 绝缘层不做处理, 用于电气隔离, 而其他层都覆盖有平均 $8 \mu\text{m}$ 厚的金层. 上下补偿电极层分别设置有 7 个电极, 用于微运动补偿; 上下控制电极层分别设置一个 RF 电极和 15 个 DC 电极, 用于囚禁和移动离子, 电极宽度依次为 1, $1000 \mu\text{m}$; 2 和 3, $500 \mu\text{m}$; 4, $300 \mu\text{m}$; 5 至 7, $155 \mu\text{m}$; 8, $300 \mu\text{m}$; 9 至 11, $155 \mu\text{m}$; 12, $300 \mu\text{m}$; 13 和 14, $500 \mu\text{m}$;

15, $1000 \mu\text{m}$; 电极间距均为 $20 \mu\text{m}$. 整个三位芯片阱放置于一个陶瓷滤波板上, 并使用电容和电阻为每一条 DC 电极滤波. 该阱可以同时囚禁 $^9\text{Be}^+$ 离子和 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子. 相对于三维刀片阱, 这种阱具备更加丰富的电极结构, 因此能够实现更加复杂的功能. 该阱共有七个功能区, 两个装载区用于将原子炉喷出的原子电离并捕获; 三个实验区用于激光与离子相互作用; 两个移动区电极较窄用于实现离子的分离、合并等操作. 该阱一共有 44 个 DC 电极, 其中 7 对电极用于补偿七个功能区的微运动, 而剩

余的 15 对控制电极用于移动离子. 可以看出, 这种结构的离子阱正满足 Kielpinski 等 [77] 提出的 QCCD 路线图的需要. 该阱具有十分优良的性能, 能够实现单离子声子态的丰富控制和不同离子的联合操作, 如利用声子实现量子编码 [162]、量子关联的重复读取 [163] 等.

在一维离子阱中, 离子距离的增加会导致离子之间的相互作用减弱, 离子数目的增加又会使实现其中任意两个离子间的相互作用越来越困难. 在一维线性阱中, 可以通过交换离子的位置来解决上述问题 [65], 但随着离子间距的增加, 这种交换速率会变得越来越慢. 由两个线性离子阱相交产生的结电极结构能够有效解决这个问题. 离子从一个线性区域被移动到结电极中心, 随后进入另一个线性区域. 离子可以在这个区域与其他离子相互作用, 也可以重新回到原来的离子链中并实现离子链的重排. 结电极结构突破了一维离子链的空间限制, 对于实现 QCCD 结构有着至关重要的作用. 常见的结电极具有 T 型 [165]、X 型 [78,80]、Y 型 [63] 等. 在结电极交汇处, 原有的一维线性结构被破坏, 轴线上的射频电场分量不再为零, 离子在通过结电极时会受到严重的微运动, 对离子造成加热. 因此在设计结电极时, 必须要优化电极的结构, 以减小这种加热效应.

三维芯片阱中可以实现结电极结构, 但需要精心设计. NIST 的三维芯片阱能够以小于一个声子的加热率实现离子穿过结电极 [78,80]. 在该离子阱中, 激光切割的镀金陶瓷片构成电极, 两侧的 RF 电极通过桥型结构直接相连形成结电极结构. 而在苏黎世联邦理工大学的三维离子阱中, 所具有的 X 型结电极具有“断桥”结构 [166], 如图 8 所示. 该离子阱利用飞秒激光和化学刻蚀加工熔融石英, 可以实现 $1\text{ }\mu\text{m}$ 的三维结构加工精度 [167]. 该加工工艺可以实现光滑平整的表面, 用于精确地组装, 两个控制电极层 (浅灰色) 的直角边缘被放置在绝缘层的斜角边缘面上以此实现固定, 组装误差小于 $2\text{ }\mu\text{m}$, 有利于获得更准确更对称的势阱. 该离子阱具有五层芯片, 同样具备控制电极层、绝缘层和补偿电极层, 具有两个 X 型结, 共 142 个 DC 电极. 该阱具有复杂的三维电极结构, 尤其是在结电极处可以实现精确的断桥结构, 这对优化势阱参数, 降低离子通过结点处的加热十分重要.

5 二维芯片阱

微纳加工技术的发展为离子阱的小型化和批量生产提供了丰富的技术手段, 也为未来离子阱的规模扩展和功能集成开辟了道路. 基于光刻的微纳

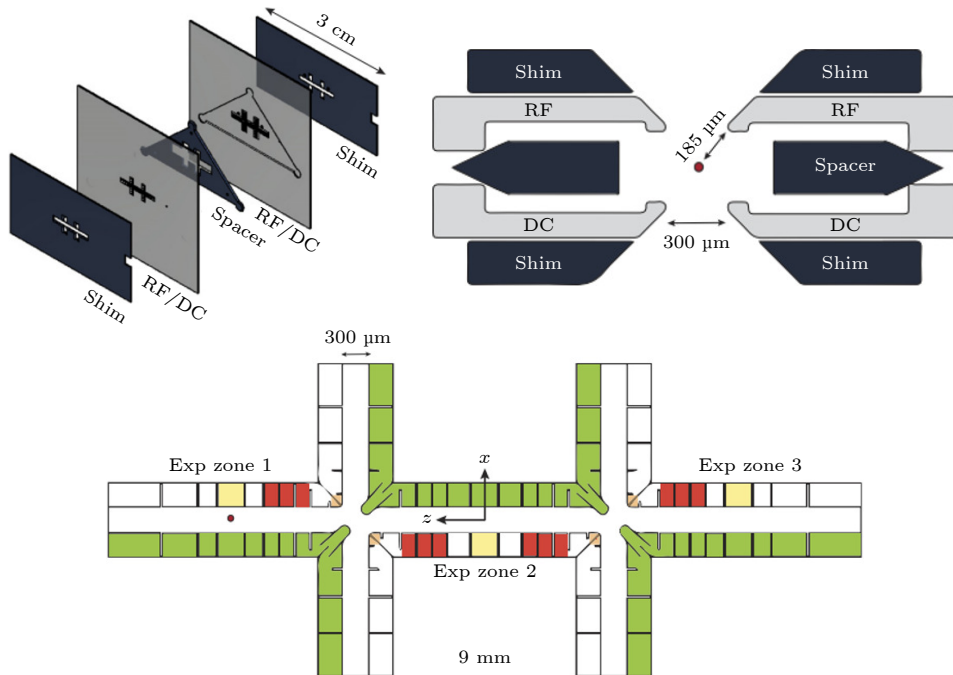


图 8 苏黎世联邦理工大学的三维结电极芯片阱 [166]. 该离子阱由五层芯片堆叠而成, 具备两个 X 型结电极结构

Fig. 8. Three-dimensional junction trap in ETH Zurich [166]. The ion trap consists of five wafers and has two X-shaped junctions.

加工工艺,可在绝缘基底上加工出表面金属电极,实现微米级别的电极结构.如使用微电子机械系统 (micro-electromechanical system, MEMS) 制造的离子阱可具备数十个到上百个控制电极,电极的形状可以灵活设计^[168,169],离子阱的尺寸因此可以被缩减到毫米量级,从而可以在同一加工过程中批量化生产芯片,这对于离子阱的快速迭代升级和降低制造成本具有重要意义. MEMS 工艺也可以生产三维芯片阱^[170,171],但更常用于制作二维表面阱.二维表面阱的电极结构与三维离子阱不同,所有电极处于同一平面,并不具备三维离子阱的对称性,因此所产生的势阱深度较浅.离子被囚禁在距离电极表面几十到几百微米的位置,相比三维离子阱,表面阱通常面临着严重的加热问题^[100],或者具有更短的囚禁时间,因此常常被放置于 10 K 以下的低温腔中,可有效降低加热率并延长囚禁时间^[66].综述文献^[95, 169]详细介绍了二维芯片阱的设计理念、加工方法,并回顾了近年来的发展.本文在此以几个具有代表性的例子,介绍二维芯片阱的结

构和发展方向.

在二维表面阱中,离子处于表面正上方,激光平行于表面传播.对于汇聚的激光光束,在远离束腰的位置光斑半径逐渐增加,最终被芯片遮挡.这限制了光斑半径的进一步降低,加大了独立寻址和提高激光功率密度的困难.2016 年, IonQ 公司发布了 HOA2.0 (High Optical Trap 2.0) 离子阱,具有优异的性能^[63],如图 9 所示.为了增加表面阱的通光性, HOA2.0 将芯片的线性区域设计成具有狭长的轴向区域、沿着轴线的通孔,并且放置在另一层芯片上方,在结构上解决了遮挡的问题.该芯片中,离子正下方设计了长通孔,能够使用垂直于芯片表面的强聚焦激光.该离子阱还具备两个 Y 型结电极结构,但其性能仍需进一步地提升.在表面阱中实现结电极结构具有很多优势,例如得益于表面电极加工技术,电极可以被设计为各种二维形状,通过数值模拟和优化,可以优化电极结构使得轴向的射频分量最小,离子经过结电极结构时的加热最低^[173,174].然而,目前表面阱中结电极的性能还没

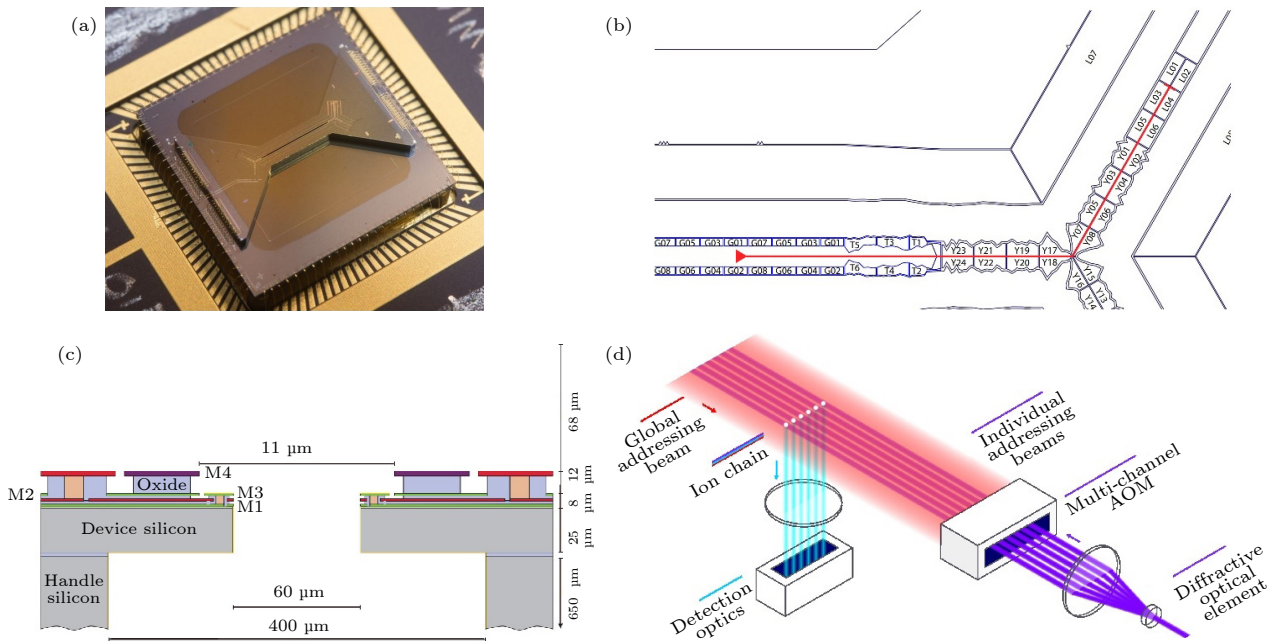


图 9 IonQ 公司的离子阱芯片 HOA^[63,172] (a) HOA 离子阱芯片的照片; (b) 该表面阱的 Y 型结电极,电极的形状已经被优化,使得沿着轴线的射频电场分量最小,红线表示离子在不同区域间穿梭的路径; (c) 离子阱的内部结构,该离子阱具有四个金属层,顶部电极层 (M4), 较低的金属布线层 (M1, M2 和 M3); (d) 多离子操控的光路图

Fig. 9. High-Optical-Access trap from IonQ Inc^[63]: (a) Photo of HOA ion trap. It can be clearly seen that the linear trap is located on a higher platform, and has a long and narrow through hole along the axis, and two Y-junction electrode structures. The trap has 94 control DC electrodes. (b) Y-junction of this surface trap. The shape of the electrodes has been optimized to minimize the RF electric field component along the axis. The red line shows the path the ions transporting between different regions. (c) Inner structure of the ion trap. This ion trap has four metal layers, the top electrode layer (M4), and the lower metal layers (M1, M2 and M3). (d) Optical diagram of the 11-qubit system^[44].

有超越三维芯片阱, 离子通过结电极被加热的声子数最低为 37—150 个声子^[175]. 为了减小暴露的绝缘材料的面积, 在布线层将该区域用金属掩盖并接地. 金属层由铝铜合金 (99.5%/0.5%) 制成, 具有用于垂直互连的通孔. 所有金属层之间都用氧化硅绝缘层进行隔离. 顶部的电极镀了 50 nm 厚的金层, 并使用钛和铂作为附着层. 离子被束缚在距离电极表面 68 μm 的位置. 2019 年, 该离子阱演示了 150 个离子的囚禁, 79 个离子的单比特操作和 11 个离子中任意两个离子的相互作用, 其平均的单比特门保真度为 99.5%, 平均两比特门保真度为 97.5%^[44]. 如图 9 所示, 在冷却、初始化和测量过程中, 369 和 935 nm 的激光照亮了所有的 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子. 每个离子的荧光通过一个 $\text{NA} = 0.6$ 的透镜成像, 其荧光 (蓝色线) 被收集到光电倍增管阵列

上. 两束线偏振、反向传播的 355 nm 光束照射到离子上, 其中红色所示为同时照射到所有离子的全局光束, 紫色所示为通过物镜和多通道声光调制器 (AOM) 分别聚焦到每个离子的独立寻址光束^[44].

Honeywell 公司设计并制作了一种低温线性表面离子阱芯片^[65], 其目标是创建一个基于 QCCD 架构的高保真的、可扩展的量子计算机. 如图 10(a) 所示, 该公司提供了一个可以云访问的架构, 系统的信息流 (从上到下) 依次为: 用户、云端、内部离子分配、机器控制和现场可编程门阵列 (FPGA). 线路由编译器处理, 生成控制信号 (紫色), 发送到离子阱和光电子器件. 成像系统对自发辐射光子进行计数, 再将结果 (绿色) 发送回用户或进行实时决策处理. 用户提交一份量子线路程序到云端, 编译器以最小化传输操作数量为原则将量子比特分

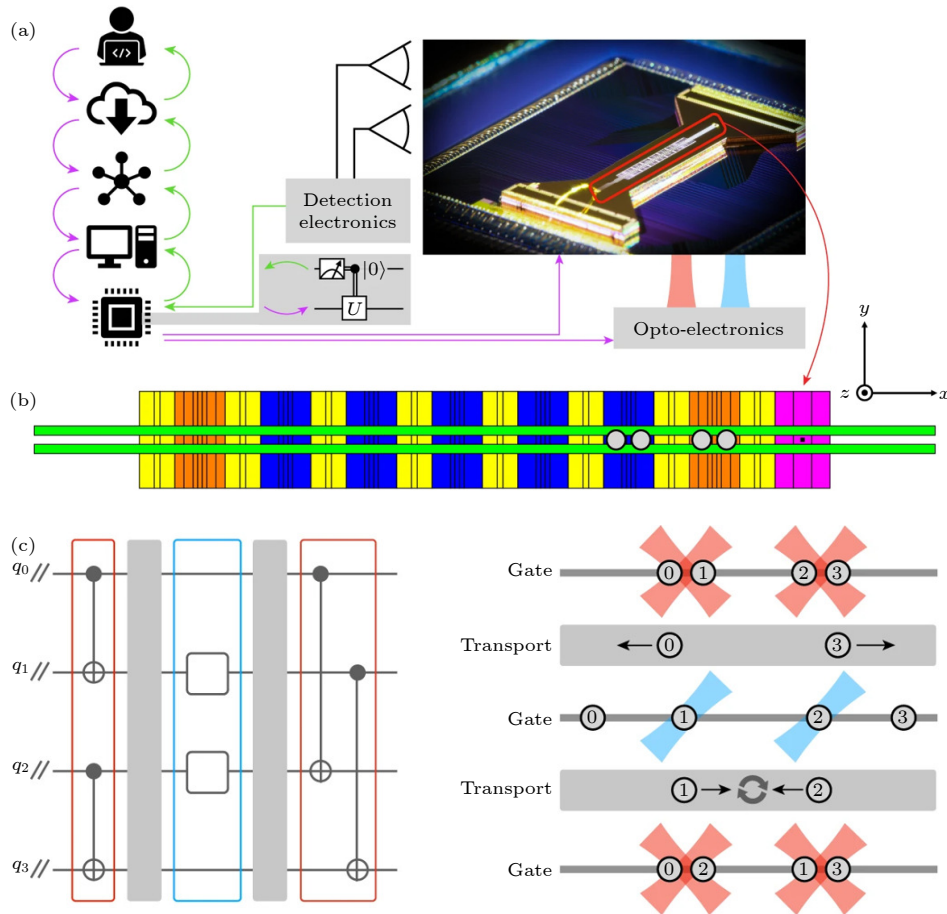


图 10 Honeywell 公司的 Model H1 离子阱^[65] (a) 云操作运行结构; (b) 离子阱的结构, 该离子阱由 16 个不同区域组成, 分别为五个门操作区 (蓝色)、两个专门用于存储离子的扩展门操作区 (橙色)、八个辅助区 (黄色) 和一个装载区 (紫色); (c) 基于移动离子实现两个非邻近离子两比特门操作的量子电路, 以及其在该离子阱系统中对应的操作流程

Fig. 10. Honeywell's Model H1 ion trap^[65]: (a) Structure of cloud operation ionn trap system. (b) The structure of the trap. The trap consists of 16 distinct zones, consisting of five gate zones (blue), two extended gate zones dedicated to ion storage (orange), eight auxiliary zones (yellow), and one loading zone (violet). (c) A quantum circuit for realizing a two-qubit gate operation between two ions that are not adjacent, and its corresponding operation flow in the ion trap system.

配给物理离子, 机器根据程序, 控制 FPGA 产生信号控制离子阱进行一系列传输和逻辑门操作, 并进行测量. 如图 10(b) 所示, 该离子阱具有线性几何结构, 离子被囚禁在阱表面上方 70 μm 处, 整体处于 12.6 K 的低温系统中. 整个离子阱包含 198 个分段 DC 电极和两个 RF 电极, 共分为 5 个用于实现光与离子相互作用操作区, 2 个存储区, 8 个用于实现离子置换操作的存储和排序区, 以及 1 个用于加载离子的装载区, 对离子具有灵活的操作能力. 使用 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子的超精细结构中的两个能级 $|0\rangle \equiv {}^2\text{S}_{1/2} |F=0, m_F=0\rangle$ 和 $|1\rangle \equiv {}^2\text{S}_{1/2} |F=1, m_F=0\rangle$ 作为量子比特, 使用 $^{138}\text{Ba}^+$ 离子作为协同冷却离子, 始终保持一个 $^{171}\text{Yb}^+$ 和一个 $^{138}\text{Ba}^+$ 组成离子对, 共同参与移动和操作. 操作激光与表面平行, 由于激光的发散特性, 芯片中心区域以一定高度放置在基座上, 减小芯片对激光的遮挡损耗. 在目前的配置中, 激光没有实现独立寻址, 因此任意两个离子之间的相互作用都需要通过重新排列离子的位置来实现. 离子在轴向的运动频率为 0.97 MHz, 加热率为每秒 100—500 个声子, 径向加热率约为每秒 500 个声子 [65]. 如图 10(c) 所示, 该系统演示了一个包含 QCCD 要素的操作, 包括: 1) 囚禁多个离子晶体, 需要使用低温系统 [66,67]; 2) 实现离子链的重排列和快速移动, 并尽可能减小加热 [176,177]; 3) 离子在不同功能区的状态具有不均匀性, 需要在时钟上实现同步; 4) 可能需要同时囚禁两种不同的离子, 一种用于量子门操作, 另一种是在输运后将晶体协同冷却到接近基态 [178]; 5) 并行实施离子移动和量子操作. 凭借着良好的性能, Honeywell 公司在该平台上用 10 量子比特实现了利用颜色码的实时容错量子纠错 [49].

表面阱与集成电路、集成光学的结合也给人们实现功能更强大的 QCCD 结构开辟了新的途径, 如片上集成的光电探测器 [84,179] 有助于实现多离子的独立探测, 利用 CMOS 工艺集成 DAC 到离子阱芯片上有助于实现控制电路的扩展, 或者集成光波导与表面阱的结合有助于实现操作光路的可扩展 [64,81,82]. 相比之下, 传统的空间光路不仅体积较大、元件众多、可扩展性差, 而且还容易受到振动、温度等因素的影响. 空间光可以满足当前的几十个离子系统的需求, 但是当系统扩展到上百甚至上千个离子时, 激光的扩展性将变得至关重要, 成为限制操作可扩展性的主要因素. 集成光波导与离子阱

的结合可以实现片上集成光路, 通过微纳光学器件传导激光, 并最终聚焦到离子上. 片上光学还可以实现电光调制器件, 实现激光幅度、相位的调制, 代替空间光的调制器. 因此, 集成光学与离子阱芯片的结合有望解决操作光路的扩展问题.

麻省理工学院 (MIT) 最早实现集成波导离子阱芯片 [81], 苏黎世联邦理工大学 (ETH) 和美国圣地亚 (Sandia) 国家实验室也陆续开展了相关研究 [64,82,83]. 他们所使用的波导由 SiN 的波导芯和 SiO_2 包层组成. SiN 的折射率为 1.95—2.0, 大于 SiO_2 的 1.44. 内外层材料折射率的差别较大使得光波在该波导中具有更小的模式, 可以实现更小的弯曲半径和更小的弯曲损耗, 光波的相位和幅度在传播过程中更不容易受到扰动. 但目前所使用的材料仍然具有较大的损耗, 对于 633 nm 以上的波长, SiN 波导的传输损耗在 0.5 dB/cm 以下, 但在 405 nm 的波长下, 损耗增加到约 10 dB/cm [180]. 图 11 所示为麻省理工大学的集成波导离子阱芯片 [64]. 图 11(a) 给出了集成光波导的结构和光栅耦合器将激光聚焦到离子上的路径. 表面阱电极下的集成波导 (棕色) 采用 100 nm 厚 SiN 内芯和 5 μm 的 SiO_2 包层, 内芯的刻蚀深度为 40 nm; 上方是铌 (Nb) 金属制作的控制电极 (金色), 下方为 Nb 金属地层. 图中标注了各个层的厚度. 最上层具有 20 $\mu\text{m} \times 20 \mu\text{m}$ 大小的通光孔, 镀有一层厚 20 nm 的高导电性的氧化铟锡 (ITO) 薄膜, 来避免绝缘材料的充电问题. 红色箭头表示通过输出光栅耦合器衍射出来的光的传播方向, 蓝色圆点表示离子的位置, 离子被囚禁在距离表面 55 μm 处. 图 11(b) 展示了该芯片最大的特点, 即集成了 $^{88}\text{Sr}^+$ 离子所需要全部 6 个波长的光, 分别为 405, 422, 461, 674, 1033 和 1092 nm. 6 个波长的激光通过边缘耦合的方式耦合到离子阱芯片的 SiN 集成波导中, 并通过不同的光栅同时聚焦到单个离子上. 图 11(c) 展示了光纤通过真空馈通进入真空系统内部, 离子阱芯片位于低温腔冷头上. 这种结构天然对振动和光束方向漂移具有鲁棒性, 可以获得比自由空间光束更长的相干时间. 尤其是对于放置于低温系统的表面阱而言, 波导对于低温系统的振动所带来的激光指向抖动问题有着很大的改善. 图 11(d) 为使用光波导实现单个离子的操作 [64]. 中性 ^{88}Sr 原子被 461 nm 激光激发到 P_1 态, 再通过 405 nm 激光电离得到离子. 量子比特编码在 $^{88}\text{Sr}^+$ 离子的 $\text{S}_{1/2}$ 和 $\text{D}_{5/2}$ 能级, 使

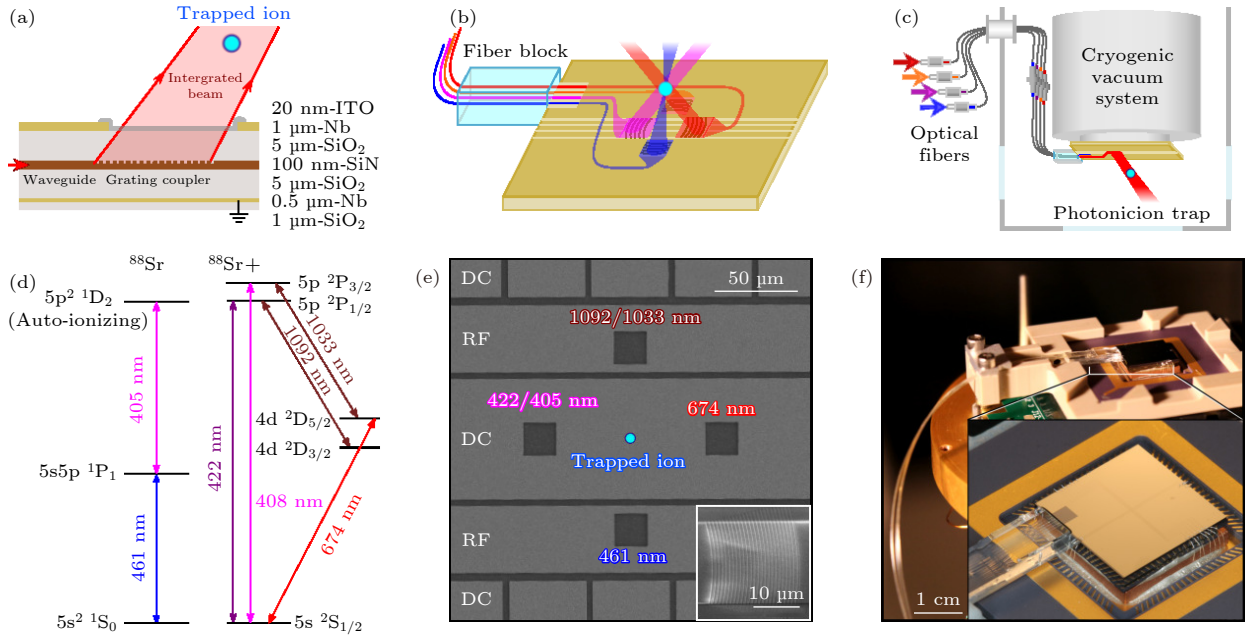


图 11 麻省理工大学 (MIT) 集成波导离子阱结构示意图^[64] (a) 集成在 SiO_2 内的光波导和输出光栅耦合器将激光聚焦到离子上; (b) 激光从光纤通过边缘耦合进入芯片中的波导; (c) 光纤经过光纤真空馈通进入低温真空环境, 芯片放置于 7 K 冷头上; (d) ^{88}Sr 原子和 $^{88}\text{Sr}^+$ 离子的能级图; (e) 离子阱中心区域的扫描电子显微镜 (SEM) 图像, 显示了电极上的方形通光窗口以及周围的 RF 电极和 DC 电极分布, 插图: 扫描电镜显示的光栅耦合器, 可以实现光束横向聚焦; (f) 集成波导离子阱芯片封装, 插图为 1 cm^2 左右的离子阱芯片

Fig. 11. Ion trap integrated with waveguides used by Massachusetts institute of technology (MIT)^[64]: (a) Lasers are propagating in the Optical waveguide and focused to the ion by the grating coupler in SiO_2 substrate. (b) Lasers are coupled from the optical fiber to the on-chip waveguide using the edge coupling method. (c) Optical fibers are fed through the cryostat system using the fiber feedthrough. The ion trap chip is located on the cold head at 7 K. (d) ^{88}Sr and $^{88}\text{Sr}^+$ ion energy level diagram. (e) The scanning electron microscope (SEM) image of the central region of the ion trap shows the square light-passing window on the electrode and the distribution of RF electrode and DC electrode around it. Inset: A scanning electron microscope shows a grating coupler that enables transverse focusing of a beam. (f) Photonic ion-trap chip packaged. Inset is an ion trap chip around 1 cm^2 .

用 674 nm 激光实现比特翻转. 该系统的光损耗问题十分突出, 光纤和光波导的耦合会产生约 10 dB 的损耗, 激光从波导经过光栅传输到离子约有 10 dB 的损耗, 除此之外, 从自由空间激光耦合到光纤、光纤真空馈通、波导传输等损耗也不容忽视. 最终, 该系统中的每种波长都具有 26—35 dB 的总损耗. 除了光损耗, 芯片上激光出射的方向和聚焦是通过具有一定曲率的衍射光栅实现的, 由于加工误差, 离子并不能恰好落在光斑束腰位置, 因此导致的有效激光功率也小于实际出射的功率. 图 11(e) 和图 11(f) 展示了该系统的实物图.

苏黎世联邦理工大学改进了耦合方法, 实现了 729 nm 激光的高效耦合, 总损耗只有 6.4 dB. 该芯片使用片上集成的 729 nm 操作两个 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子, 并实现了保真度 99.3 % 的两比特门^[82]. 圣地亚国家实验室的芯片将 $^{171}\text{Yb}^+$ 离子囚禁在表面上 20 μm 的高度, 并研究了输出耦合器及其形状对离

子加热率的影响^[83]. 未来, 进一步提升激光的耦合效率、降低波导的传输损耗、优化光波导与离子的位置匹配精度是使用集成光波导实现可扩展操作需要解决的问题. 同时, 结合电光调制晶体实现片上激光调制, 有利于进一步完善激光的集成.

离子阱系统中, 激光和微波是最主要的操作工具. 由于光子的动量较大, 容易实现离子间的相互作用, 所以人们一般使用激光来驱动离子的运动. 然而使用激光会面临失谐散射、强度和相位噪声、对振动敏感、难以扩展等问题. 相比之下, 微波的能量要小得多, 无法直接驱动离子的声子状态, 但使用微波可以避免或减小这些因素的影响. 因此需要磁场梯度的辅助. 静磁场梯度可以直接使用静磁铁或者通电线圈产生^[181,182], 而使用近场微波磁场梯度或近场射频磁场梯度^[183,184]有利于实现更强更丰富的磁场梯度. 图 12(a) 所示为 NIST 的表面离子阱^[41], 具有若干可以通过射频或者微波电流的电极, 可以产生近场射频或微波磁场梯度. 当

该电场的频率满足一定条件时,可以使用微波来对离子进行寻址操作以及实现多离子门。

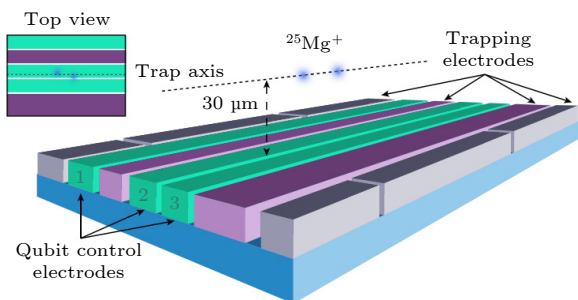


图 12 NIST 的集成载流导线离子阱芯片^[41]. 图中 RF 电极 (紫色) 和 DC 电极 (灰色) 用于囚禁离子两个 $^{25}\text{Mg}^+$ 离子, 距表面 $30\ \mu\text{m}$. 频率达 MHz 的射频电流被加载到绿色 (编号 1 到 3) 的载流电极上, 在离子附近产生垂直于轴的射频磁场和射频磁场梯度. 利用该梯度产生的力, 可以使用微波实现两离子纠缠门. 左上方的小图中, 两个离子偏移轴线而受到不同的射频磁场, 由于 AC Zeeman 移频效应而具有不同的能级, 可以实现离子的独立寻址

Fig. 12. NIST's integrated current-carrying wire (CCW) ion trap chip^[41]. RF electrodes (purple) and DC electrodes (gray) are used to trap two $^{25}\text{Mg}^+$ ions, $30\ \mu\text{m}$ from the surface. RF currents at frequencies up to MHz are loaded onto green (numbered 1 to 3) current-carrying electrodes, generating RF magnetic fields and RF magnetic gradients perpendicular to the axis near the ions. Using the forces generated by this gradient, a two-ion entanglement gate can be realized using microwaves. In the small figure on the upper left, two ions with different RF magnetic fields due to their offset axes have different energy levels due to the AC Zeeman frequency shift effect and can achieve independent ion addressing.

6 总 结

本文综述了离子阱的工作原理和不同的结构. 在过去的几十年里, 离子阱在结构和性能上实现了巨大的发展, 从最初的双曲面型结构, 发展出四极杆阱、刀片阱、光学腔阱、三维芯片阱、二维芯片阱、光学集成的芯片阱等一系列结构. 离子阱能够高水平地完成量子计算所需要的基本要素, 具有明确的可扩展路线图, 是实现大规模量子模拟和量子计算最重要的平台之一. 三维离子阱在势阱深度、加热率、透光性和光学腔集成方面具有许多优秀的性能, 仍然是当前主要使用的离子阱结构之一. 而随着微纳加工技术、低温系统、集成电路和集成光学在离子阱芯片上的成功应用, 二维离子阱芯片也展现出极大的潜力, 使得批量化生产具有高保真度、高集成度和低成本的离子阱产品成为可能. 但

是, 离子数目和操控能力的进一步扩展仍然面临着很多问题, 如何在一个离子阱中实现更多离子的操作、具有纠错能力的量子编码、量子逻辑比特间的操作是一个离子阱系统需要解决的主要问题, 而如何实现多个离子阱系统、离子阱系统与其他系统的连接是最终实现大规模量子计算必须要解决的问题. 这不仅对离子阱本身的结构提出了要求, 还需要生产加工水平的不断提升.

参考文献

- [1] Feynman R P 1982 *Int. J. Theor. Phys.* **21** 467
- [2] Shor P W 1994 *Proceedings of the 35th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science* **124** 134
- [3] Nielsen M A, Chuang I 2002 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press) p19
- [4] Paul W and Steinwedel H 1953 *Z Naturforsch. A.* **8** 448
- [5] Dehmelt H G 1968 *Adv. At. Mol. Phys.* **3** 53
- [6] *Quantum Optics and Spectroscopy group of University of Innsbruck Ion trapping groups worldwide* <https://quantumoptics.at/en/links/ion-trapping-worldwide.html> 2022-01-25
- [7] Schwartz J C, Senko M W, Syka J 2002 *J. Am. Soc. Mass. Spectrom.* **13** 659
- [8] Bollinger J J, Heinzen D J, Itano W M, Gilbert S L, Wineland D J 1990 *Conference on Precision Electromagnetic Measurements* Ottawa, ON, Canada, June 11–14 1990 p264
- [9] Fisk P T H, Sellars M J, Lawn M A, Coles G 1997 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **44** 344
- [10] Rosenband T, Hume D B, Schmidt P O, Chou C W, Brusch A, Lorini L, Oskay W H, Drullinger R E, Fortier T M, Stalnaker J E, Diddams S A, Swann W C, Newbury N R, Itano W M, Wineland D J, Bergquist J C 2008 *Science* **319** 1808
- [11] Huntemann N, Sanner C, Lipphardt B, Tamm C, Peik E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 063001
- [12] Keller J, Burgermeister T, Kalincev D, Kiethe J, Mehlstübler T E 2016 *J. Phys. Conf. Ser.* **723** p012027
- [13] Chou C W, Hume D B, Rosenband T, Wineland D J 2010 *Science* **329** 1630
- [14] Keller M, Lange B, Hayasaka K, Lange W, Walther H 2003 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **36** 613
- [15] Kreuter A, Becher C, Lancaster G P T, Mundt A B, Russo C, Häffner H, Roos C, Eschner J, Schmidt-Kaler F, and Blatt R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 203002
- [16] Barros H G, Stute A, Northup T E, Russo C, Schmidt P O, Blatt R 2009 *New J. Phys.* **11** 103004
- [17] Takahashi H, Wilson A, Riley-Watson A, Oruevi F, Seymour-Smith N, Keller M, Lange W 2013 *New J. Phys.* **15** 053011
- [18] Odom B, Hanneke D, D'Urso B, Gabrielse G 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 030801
- [19] Porras D, Cirac J I 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 207901
- [20] Porras D, Cirac J I 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 250501
- [21] Islam R, Senko C, Campbell W C, Korenblit S, Smith J, Lee A, Edwards E E, Wang C C, Freericks J K, Monroe C 2013 *Science* **340** 583
- [22] Miller M, Schindler P, Nigg D, Monz T, Barreiro J, Martinez

- E, Hennrich M, Diehl S, Zoller P, Blatt R 2013 *Nat. Phys.* **9** 361
- [23] Zhang J, Pagano G, Hess P W, Kyprianidis A, Becker P, Kaplan H, Gorshkov A V, Gong Z X, Monroe C 2017 *Nature* **551** 601
- [24] Neyenhuis B, Zhang J, Hess P W, Smith J, Lee A C, Richerme P, Gong Z X, Gorshkov A V, Monroe C 2017 *Sci. Adv.* **3** e1700672
- [25] Cirac J I, Zoller P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4091
- [26] Milburn G J, Schneider S, James D F V 2000 *Fortschr. Phys.* **48** 801
- [27] Sørensen A, Mølmer K 2000 *Phys. Rev. A* **62** 022311
- [28] Duan L M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 100502
- [29] Wineland D J, Monroe C, Itano W M, Leibfried D, King B E, Meekhof D M 1998 *J. Res. Nat. Inst. Stand. Technol.* **103** 259
- [30] Debnath S, Linke N M, Figgatt C, Landsman K A, Wright K, Monroe C 2016 *Nature* **536** 63
- [31] Monroe C, Raussendorf R, Ruthven A, Brown K R, Maunz P, Duan L M, Kim J 2014 *Phys. Rev. A* **89** 022317
- [32] NIST *Penning Traps* 2022 <https://www.nist.gov/pml/time-and-frequency-division/ion-storage/penning-traps>[2022-1-25]
- [33] Dilling J, Blaum K, Brodeur M, Eliseev S 2018 *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **68** 45
- [34] Wineland D J, Drullinger R E, Walls F L 1978 *Phys. Rev. Lett.* **40** 1639
- [35] Diedrich F, Bergquist J C, Itano W M, Wineland D J 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 403
- [36] Leibfried D, Blatt R, Monroe C, Wineland D 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
- [37] Harty T P, Allcock D, Ballance C J, Guidoni L, Janacek H A, Linke N M, Stacey D N, Lucas D M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 220501
- [38] Ballance C J, Harty T P, Linke N M, Sepiol M A, Lucas D M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 060504
- [39] Gaebler J P, Tan T R, Lin Y, Wan Y, Bowler R, Keith A C, Glancy S, Coakley K, Knill E, Leibfried D, Wineland D J 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 060505
- [40] Clark C R, Tinkey H N, Sawyer B C, Meier A M, Burkhardt K A, Seck C M, Shappert C M, Guise N D, Volin C E, Fallick S D, Hayden H T, Rellergert W G, Brown K R 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 130505
- [41] Srinivas R, Burd S, Knaack H, Sutherland R, Kwiatkowski A, Glancy S, Knill E, Wineland D, Leibfried D, Wilson A, Allcock D, Slichter D 2021 *Nature* **597** 209
- [42] Wang P, Luan C-Y, Qiao M, Um M, Junhua Z, Wang Y, Yuan X, Gu M, Zhang J, Kim K 2021 *Nat. Commun.* **12** 1
- [43] Pogorelov I, Feldker T, Marciniak C D, Postler L, Jacob G, Krieglsteiner O, Podlesnic V, Meth M, Negnevitsky V, Stadler M, Höfer B, Wächter C, Lakhmanskiy K, Blatt R, Schindler P, Monz T 2021 *PRX Quantum* **2** 020343
- [44] Wright K, Beck K, Debnath S, Amini J, Nam Y, Grzesiak N, Chen J-S, Pisenti N, Chmielewski M, Collins C, Hudek K, Mizrahi J, Wong-Campos J, Allen S, Apisdorf J, Solomon P, Williams M, Ducore A, Blinov A, Kim J 2019 *Nat. Commun.* **10** 5464
- [45] Knill E, Laflamme R 1997 *Phys. Rev. A* **55** 900
- [46] Aharonov D, Ben-Or M 2008 *SIAM J. Comput.* **38** 1207
- [47] Bravyi S, Kitaev A 2005 *Phys. Rev. A* **71** 022316
- [48] Egan L, Debroy D, Noel C, Risinger A, Zhu D, Biswas D, Newman M, Li M, Brown K, Cetina M, Monroe C 2021 *Nature* **598** 281
- [49] Ryan-Anderson C, Bohnet J G, Lee K, Gresh D, Hankin A, Gaebler J P, Francois D, Chernoguzov A, Lucchetti D, Brown N C, Gatterman T M, Halit S K, Gilmore K, Gerber J A, Neyenhuis B, Hayes D, Stutz R P 2021 *Phys. Rev. X* **11** 041058
- [50] Georgescu I M, Ashhab S, Nori F 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 153
- [51] Blatt R, Roos C F 2012 *Nat. Phys.* **8** 277
- [52] Lanyon B P, Hempel C, Nigg D, Müller M, Gerritsma R, Zähringer F, Schindler P, Barreiro J T, Rambach M, Kirchmair G, Hennrich M, Zoller P, Blatt R, Roos C F 2011 *Science* **334** 57
- [53] Härter A, Denschlag J H 2014 *Contemp. Phys.* **55** 33
- [54] Puri P, Mills M, Schneider C, Simbotin I, Montgomery J A Jr, Cote R, Suits A G, Hudson E R 2017 *Science* **357** 1370
- [55] Tomza M, Jachymski K, Gerritsma R, Negretti A, Calarco T, Idziaszek Z, Julienne P S 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 035001
- [56] Grier A T, Cetina M, Oruevi F, Vuletić V 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 223201
- [57] Zipkes C, Palzer S, Sias C, Khl M 2010 *Nature* **464** 388
- [58] Schmid S, Hrter A, Denschlag J H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 133202
- [59] Puri P, Mills M, Simbotin I, Montgomery J A, Ct R, Schneider C, Suits A G, Hudson E R 2019 *Nat. Chem.* **11** 615
- [60] Prestage J D, Dick G J, Maleki L 1989 *J. Appl. Phys.* **66** 1013
- [61] Gulde S 2003 *Ph. D. Dissertation* (Innsbruck: Universität Innsbruck)
- [62] Mizrahi J 2013 *Ph. D. Dissertation* (Maryland: University of Maryland)
- [63] Maunz P L W 2016 High Optical Access Trap 2.0
- [64] Niffenegger R J, Stuart J, Sorace-Agaskar C, Kharas D, Bramhavar S, Bruzewicz C D, Loh W, McConnell R, Reens D, West G N, Sage J M, Chiaverini J 2020 *Nature* **586** 538
- [65] Pino J M, Dreiling J M, Figgatt C, Gaebler J P, Neyenhuis B 2021 *Nature* **592** 209
- [66] Labaziewicz J, Ge Y, Antohi P, Leibbrandt D, Brown K R, Chuang I L 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013001
- [67] Pagano G, Hess P W, Kaplan H B, Tan W L, Richerme P, Becker P, Kyprianidis A, Zhang J, Birkelbaw E, Hernandez M R, Wu Y, Monroe C 2018 *Quantum Sci. Technol.* **4** 014004
- [68] Xie Y, Cui J, D'Onofrio M, Rasmusson A J, Howell S W, Richerme P 2021 *Quantum Science and Technology* **6** 044009
- [69] Sterling R C 2014 *Nat. Commun.* **5** 3637
- [70] Wang Y, Qiao M, Cai Z, Zhang K, Jin N, Wang P, Chen W, Luan C, Du B, Wang H, Song Y, Yum D, Kim K 2020 *Adv. Quantum Technol.* **3** 2000068
- [71] D'Onofrio M, Xie Y, Rasmusson A J, Wolanski E, Cui J, Richerme P 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 020503
- [72] Kaufmann H, Ulm S, Jacob G, Poschinger U, Landa H, Retzker A, Plenio M B, Schmidt-Kaler F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 263003
- [73] Britton J, Sawyer B, Keith A, Wang C C, Freericks J, Uys H, Biercuk M, Bollinger J 2012 *Nature* **484** 489
- [74] Grttnr M, Bohnet J, Safavi-Naini A, Wall M, Bollinger J, Rey A 2017 *Nat. Phys.* **13** 781
- [75] Jordan E, Gilmore K A, Shankar A, Safavi-Naini A, Bohnet J G, Holland M J, Bollinger J J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 053603
- [76] Goodwin J F, Stutter G, Thompson R C, Segal D M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 143002

- [77] Kielpinski D, Monroe C R, Wineland D J 2002 *Nature* **417** 709
- [78] Blakestad R B 2010 *Ph. D. Dissertation* (Colorado: University of Colorado)
- [79] Barrett M, Chiaverini J, Schätz T, Britton J, Itano W, Jost J, Knill E, Langer C, Leibfried D, Ozeri R, Wineland D 2004 *Nature* **429** 737
- [80] Blakestad R B, Ospelkaus C, VanDevender A P, Amini J M, Britton J, Leibfried D, Wineland D J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 153002
- [81] Mehta K K 2017 *Ph. D. Dissertation* (Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology)
- [82] Mehta K K, Zhang C, Malinowski M, Nguyen T L, Stadler M, Home J P 2020 *Nature* **586** 533
- [83] Ivory M, Setzer W J, Karl N, McGuinness H, DeRose C, Blain M, Stick D, Gehl M, Parazzoli L P 2021 *Phys. Rev. X* **11** 041033
- [84] Setzer W, Ivory M, Slobodyan O, Wall J, Parazzoli L, Stick D, Gehl M, Blain M, Kay R, McGuinness H 2021 *Appl. Phys. Lett.* **119** 154002
- [85] Maunz P, Moehring D, Madsen M, Jr R, Younge K, Monroe C 2017 *Nat. Phys.* **3** 538
- [86] Blinov B, Moehring D, Duan L, Monroe C 2004 *Nature* **428** 153
- [87] Hucul D, Inlek I, Vittorini G, Crocker C, Debnath S, Clark S, Monroe C 2014 *Nat. Phys.* **11** 37
- [88] Stute A, Casabone B, Schindler P, Monz T, Schmidt P, Brandstätter B, Northup T, Blatt R 2012 *Nature* **485** 482
- [89] Schupp J, Krcmarsky V, Krutyanskiy V, Meraner M, Northup T E, Lanyon B P 2021 *PRX Quantum* **2** 020331
- [90] Sivers J D, Quraishi Q 2017 *Quantum Inf. Process.* **16** 314
- [91] Kobel P, Breyer M, Köhl M 2021 *npj Quantum Inf.* **7** 6
- [92] Walker T, Miyanishi K, Ikuta R, Takahashi H, Vartabi Kashanian S, Tsujimoto Y, Hayasaka K, Yamamoto T, Imoto N, Keller M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 203601
- [93] Krutyanskiy V, Meraner M, Schupp J, Krcmarsky V, Hainzer H, Lanyon B 2019 *npj Quantum Inf.* **5** 72
- [94] Ong F R, Schppert K, Jobez P, Teller M, Ames B, Fioretto D A, Friebe K, Lee M, Colombe Y, Blatt R, Northup T E 2020 *New J. Phys.* **22** 063018
- [95] Romaszko Z D, Hong S, Siegele M, Puddy R K, Lebrun-Gallagher F R, Weidt S, Hensinger W K 2020 *Nat. Rev. Phys.* **2** 285
- [96] James D F V 199 *Technical report, Report number = Quantum Dynamics of Cold Trapped Ions with Application to Quantum Computation*
- [97] Deng K, Sun Y L, Yuan W H, Xu Z T, Zhang J, Lu Z H, Luo J 2014 *Rev. Sci. Instrum.* **85** 104706
- [98] Sivers J D, Simkins L R, Weidt S, and Hensinger W K 2012 *Appl. Phys. B* **107** 921
- [99] Michael C 2009 *Ph. D. Dissertation* (Innsbruck: Universität Innsbruck)
- [100] Brownnutt M, Kumph M, Rabl P, Blatt R 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 1419
- [101] Boldin I A, Kraft A, Wunderlich C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 023201
- [102] Sedlacek J A, Greene A, Stuart J, McConnell R, Bruzewicz C D, Sage J M, Chiaverini J 2018 *Phys. Rev. A* **97** 020302
- [103] Hite D A, Colombe Y, Wilson A C, Brown K R, Warring U, Jördens R, Jost J D, McKay K S, Pappas D P, Leibfried D, Wineland D J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 103001
- [104] Deslauriers L, Olmschenk S, Stick D, Hensinger W K, Sterk J, Monroe C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 103007
- [105] Klemens S 2020 *Ph. D. Dissertation* (Innsbruck: Universität Innsbruck)
- [106] Michael G 2017 *Ph. D. Dissertation* (Innsbruck: Universität Innsbruck)
- [107] Johnson K G, Wong-Campos J D, Restelli A, Landsman K A, Neyenhuis B, Mizrahi J, Monroe C 2016 *Rev. Sci. Instrum.* **87** 053110
- [108] Daniilidis N, Narayanan S, Mller S A, Clark R, Lee T E, Leek P J, Wallraff A, Schulz S, SchmidtKaler F, Hffner H 2011 *New J. Phys.* **13** 013032
- [109] He R, Cui J M, Li R R, Qian Z H, Chen Y, Ai M Z, Huang Y F, Li C F, Guo G C 2021 *Rev. Sci. Instrum.* **92** 073201
- [110] Akerman N, Glickman Y, Kotler S, Keselman A, Ozeri R 2011 *Nature* **473** 61
- [111] Hanns-Christoph N 1998 *Ph. D. Dissertation* (Innsbruck: Universität Innsbruck)
- [112] Berkeland D J 2002 *Rev. Sci. Instrum.* **73** 2856
- [113] Herskind P F, Dantan A, Albert M, Marler J P, Drewsen M 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 154008
- [114] Cornelius H 2014 *Ph. D. Dissertation* (Innsbruck: Universität Innsbruck)
- [115] AQT<https://www.aqt.eu/qc-modules/> 2022-01-25
- [116] David H 2015 *Ph. D. Dissertation* (Maryland: University of Maryland)
- [117] Shantanu D 2016 *Ph. D. Dissertation* (Maryland: University of Maryland)
- [118] Gerber S, Rotter D, Hennrich M, Blatt R, Rohde F, Schuck C, Almendros M, Gehr R, Dubin F, Eschner J 2009 *New J. Phys.* **11** 013032
- [119] Shu G, Dietrich M R, Kurz N, Blinov B B 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 154005
- [120] Maiwald R, Leibfried D, Britton J, Bergquist J C, Leuchs G, Wineland D J 2009 *Nat. Phys.* **5** 551
- [121] Maiwald R, Golla A, Fischer M, Bader M, Heugel S, Chalopin B, Sondermann M, Leuchs G 2012 *Phys. Rev. A* **86** 043431
- [122] Streed E W, Norton B G, Jechow A, Weinhold T J, and Kielpinski D 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 010502
- [123] Ghadimi M, Blms V, Norton B G, Fisher P M, Connell S C, Amini J M, Volin C, Hayden H, Pai C S, Kielpinski D, Lobino M, Streed E W 2017 *npj Quantum Inf.* **3** 1
- [124] Monroe C, Swann W, Robinson H, Wieman C 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1571
- [125] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [126] Endres M, Bernien H, Keesling A, Levine H, Anschuetz E R, Krajenbrink A, Senko C, Vuletic V, Greiner M, Lukin M D 2016 *Science* **354** 1024
- [127] Collopy A L, Ding S, Wu Y, Finneran I A, Anderegg L, Augenbraun B L, Doyle J M, Ye J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 213201
- [128] Muldoon C, Brandt L, Dong J, Stuart D, Brainin E, Himsworth M, Kuhn A 2012 *New J. Phys.* **14** 073051
- [129] Kaufman A M, Lester B J, Regal C A 2012 *Phys. Rev. X* **2** 041014
- [130] Stuart D, Kuhn A 2018 *New J. Phys.* **20** 023013
- [131] Schlosser N, Reymond G, Protsenko I, Grangier P 2001 *Nature* **411** 1024
- [132] Kaufman A M, Lester B J, Reynolds C M, Wall M L, Foss-Feig M, Hazzard K R, Rey A M, Regal C A 2014 *Science* **345** 306
- [133] Bernien H, Schwartz S, Keesling A, Levine H, Omran A, Pichler H, Choi S, Zibrov A S, Endres M, Greiner M,

- Vuletić V, Lukin M D 2017 *Nature* **551** 579
- [134] Pagano G, Scazza F, Foss-Feig M 2019 *Adv. Quantum Technol.* **2** 1800067
- [135] Enderlein M, Huber T, Schneider C, Schaetz T 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 233004
- [136] Lambrecht A, Schmidt J, Weckesser P, Debatin M, Karpa L, Schaetz T 2017 *Nat. Photonics* **11** 704
- [137] Cormick C, Schaetz T, Morigi G 2011 *New J. Phys.* **13** 043019
- [138] Huber T, Lambrecht A, Schmidt J, Karpa L, Schaetz T 2014 *Nat. Commun.* **5** 5587
- [139] Shen Y C, Lin G D 2020 *New J. Phys.* **22** 053032
- [140] Olsacher T, Postler L, Schindler P, Monz T, Zoller P, Sieberer L M 2020 *PRX Quantum* **1** 020316
- [141] Espinoza J D A, Mazzanti M, Fouka K, Schssler R X, Wu Z, Corboz P, Gerritsma R, Naini A S 2021 *Phys. Rev. A* **104** 013302.
- [142] Teoh Y H, Sajjan M, Sun Z, Rajabi F, Islam R 2021 *Phys. Rev. A* **104** 022420.
- [143] Takahashi H, Kassa E, Christoforou C, Keller M 2017 *Phys. Rev. A* **96** 023824
- [144] Dantan A, Herskind P, Marler J, Albert M, Drewsen M 2009 *Nat. Phys.* **5** 494
- [145] Cetina M, Bylinskii A, Karpa L, Gangloff D, Beck K M, Ge Y, Scholz M, Grier A T, Chuang I, Vuletić V 2013 *New J. Phys.* **15** 053001
- [146] Keller M, Lange B, Hayasaka K, Lange W, Walther H 2003 *Appl. Phys. B* **76** 125
- [147] Keller M, Lange B, Hayasaka K, Lange W, Walther H 2004 *Nature* **431** 1075
- [148] Leibbrandt D R, Labaziewicz J, Vuletić V, Chuang I L 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 103001
- [149] Mundt A B, Kreuter A, Becher C, Leibfried D, Eschner J, Schmidt-Kaler F, Blatt R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 103001
- [150] Takahashi H, Kassa E, Christoforou C, Keller M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 013602
- [151] Kato S, Aoki T 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 093603
- [152] Kassa E, Takahashi H, Christoforou C, Keller M 2017 *Phys. Rev. A* **96** 023824
- [153] Guthöhrlein G, Keller M, Hayasaka K, Lange W, Walther H 2001 *Nature* **414** 49
- [154] Russo C, Barros H, Stute A, Dubin F, Phillips E, Monz T, Northup T, Becher C, Salzburger T, Ritsch H, Schmidt P, Blatt R 2009 *Appl. Phys. B* **95** 205
- [155] Sterk J D, Luo L, Manning T A, Maunz P, Monroe C 2012 *Phys. Rev. A* **85** 062308
- [156] Nguyen C H, Utama A N, Lewty N, Kurtsiefer C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 063833
- [157] Steiner M, Meyer H M, Deutsch C, Reichel J, Khl M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 043003
- [158] Steiner M, Meyer H M, Reichel J, Köhl M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 263003
- [159] Ballance T G, Meyer H M, Kobel P, Ott K, Reichel J, Köhl M 2017 *Phys. Rev. A* **95** 033812
- [160] Huber G, Deuschle T, Schnitzler W, Reichle R, Singer K, Schmidt-Kaler F 2008 *New J. Phys.* **10** 013004
- [161] Kaufmann H, Ruster T, Schmiegelow C T, Schmidt-Kaler F, Poschinger U G 2014 *New J. Phys.* **16** 073012
- [162] Flühmann C, Nguyen T L, Marinelli M, Negnevitsky V, Mehta K, Home J P 2019 *Nature* **566** 513
- [163] Negnevitsky V, Marinelli M, Mehta K K, Lo H Y, Flühmann C, Home J P 2018 *Nature* **563** 527
- [164] Daniel K 2015 *Ph. D. Dissertation* (Zurich: ETH Zurich)
- [165] Hensinger W K, Olmschenk S, Stick D, Hucul D, Yeo M, Acton M, Deslauriers L, Monroe C, Rabchuk J 2006 *Appl. Phys. Lett.* **88** 034101
- [166] Decaroli C, Matt R, Oswald R, Axline C, Ernzer M, Flannery J, Ragg S, Home J P 2021 *Quantum Science and Technology* **6** 044001
- [167] Ragg S, Decaroli C, Lutz T, Home J P 2019 *Rev. Sci. Instrum.* **90** 103203
- [168] Seidelin S, Chiaverini J, Reichle R, Bollinger J J, Leibfried D, Britton J, Wesenberg J H, Blakestad R B, Epstein R J, Hume D B, Itano W M, Jost J D, Langer C, Ozeri R, Shiga N, Wineland D J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 253003
- [169] Cho D I, Hong S, Lee M, Kim T 2015 *Micro and Nano Systems Letters* **3** 2
- [170] Britton J, Leibfried D, Beall J, Blakestad R B, Bollinger J J, Chiaverini J, Epstein R J, Jost J D, Kielpinski D, Langer C, Ozeri R, Reichle R, Seidelin S, Shiga N, Wesenberg J H, Wineland D J 2006 arXiv e-prints, quant.
- [171] Wilpers G, See P, Gill P, Sinclair A 2012 *Nat. Nanotechnol.* **7** 572
- [172] Brown K R, Kim J, Monroe C 2016 *npj Quantum Inf.* **2** 16034
- [173] Moehring D L, Highstrete C, Stick D, Fortier K M, Haltli R, Tigges C, Blain M G 2011 *New J. Phys.* **13** 075018
- [174] Amini J M, Uys H, Wesenberg J H, Seidelin S, Britton J, Bollinger J J, Leibfried D, Ospelkaus C, VanDevender A P, Wineland D J 2010 *New J. Phys.* **12** 033031
- [175] Shu G, Vittorini G, Buikema A, Nichols C S, Volin C, Stick D, Brown K R 2014 *Phys. Rev. A* **89** 062308
- [176] Bowler R, Gaebler J, Lin Y, Tan T R, Hanneke D, Jost J D, Home J P, Leibfried D, Wineland D J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 080502
- [177] Kaushal V, Lekitsch B, Stahl A, Hilder J, Pijn D, Schmiegelow C, Bermudez A, Mller M, Schmidt-Kaler F, Poschinger U 2020 *AVS Quantum Sci.* **2** 014101
- [178] Barrett M D, DeMarco B, Schaetz T, Meyer V, Leibfried D, Britton J, Chiaverini J, Itano W M, Jelenkovi B, Jost J D, Langer C, Rosenband T, Wineland D J 2003 *Phys. Rev. A* **68** 042302
- [179] Todaro S L, Verma V B, McCormick K C, Allcock D T C, Mirin R P, Wineland D J, Nam S W, Wilson A C, Leibfried D, Slichter D H 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 010501
- [180] Sorace-Agaskar C, Kharas D, Yegnanarayanan S, Maxson R, West G N, Loh W, Bramhavar S, Ram R J, Chiaverini J, Sage J 2019 *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **25** 1
- [181] Khromova A, Piltz C, Scharfenberger B, Gloger T F, Johanning M, Varón A F, Wunderlich C 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 220502
- [182] Weidt S, Randall J, Webster S C, Lake K, Webb A E, Cohen I, Navickas T, Lekitsch B, Retzker A, Hensinger W K 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 220501
- [183] Harty T P, Sepiol M A, Allcock D T C, Ballance C J, Tarlton J E, Lucas D M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 140501
- [184] Zarantonello G, Hahn H, Morgner J, Schulte M, Bautista-Salvador A, Werner R F, Hammerer K, Ospelkaus C 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 260503

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Advances in the study of ion trap structures in quantum computation and simulation^{*}

Wang Chen-Xu¹⁾²⁾ He Ran^{1)2)3)†} Li Rui-Rui¹⁾²⁾ Chen Yan¹⁾²⁾

Fang Ding¹⁾²⁾ Cui Jin-Ming^{1)2)‡} Huang Yun-Feng¹⁾²⁾

Li Chuan-Feng¹⁾²⁾ Guo Guang-Can¹⁾²⁾

1) (*CAS Key Laboratory of Quantum Information, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

2) (*CAS Center for Excellence in Quantum Information and Quantum Physics,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

3) (*Department of Physics and Materials Engineering, Hefei Normal University, Hefei 230601, China*)

(Received 31 January 2022; revised manuscript received 2 March 2022)

Abstract

Ion trap system is one of the main quantum systems to realize quantum computation and simulation. Various ion trap research groups worldwide jointly drive the continuous enrichment of ion trap structures, and develop a series of high-performance three-dimensional ion trap, two-dimensional ion trap chip, and ion traps with integrated components. The structure of ion trap is gradually developing towards miniaturization, high-optical-access and integration, and is demonstrating its outstanding ability in quantum control. Ion traps are able to trap increasingly more ions and precisely manipulate the quantum state of the system. In this review, we will summarize the evolution history of the ion trap structures in the past few decades, as well as the latest advances of trapped-ion-based quantum computation and simulation. Here we present a selection of representative examples of trap structures. We will summarize the progresses in the processing technology, robustness and versatility of ion traps, and make prospects for the realization of scalable quantum computation and simulation based on ion trap system.

Keywords: ion trap system, quantum computation, quantum simulation, quantum hardware

PACS: 37.10.Ty, 03.67.Lx, 07.05.Bx

DOI: 10.7498/aps.71.20220224

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11734015, 11774335, 11821404).

[†] Corresponding author. E-mail: heran@ustc.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: jmcui@ustc.edu.cn

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

非互易 Aubry-André 模型的经典电路模拟*

成恩宏¹⁾ 郎利君^{1)2)†}

1) (华南师范大学物理与电信工程学院, 广东省量子调控工程与材料重点实验室, 广州 510006)

2) (华南师范大学量子物质研究院, 广东省核物质科学与技术重点实验室, 广州 510006)

(2022 年 1 月 30 日收到; 2022 年 3 月 24 日收到修改稿)

非厄米的引入扩展了传统厄米量子系统中的概念并诱导出许多新奇的物理现象, 比如非厄米系统所独有的非厄米趋肤效应, 这使得对非厄米量子模型的模拟成为大家关注的热点. 相比于量子平台, 经典系统具有成本低廉、技术成熟、室温条件等优势, 而其中的经典电路系统则更加灵活, 原则上可以模拟任意维度、任意格点间跃迁、任意边界条件下的量子紧束缚模型, 已经成为模拟量子物态的有力平台. 本文利用经典电路通过 SPICE 成功模拟了一个重要的非厄米量子模型——非互易 Aubry-André 模型——的稳态性质, 此模型同时具有非互易的格点跃迁和准周期的格点在位势. 以此为例, 详细介绍了如何建立经典电路的拉普拉辛形式与量子紧束缚模型哈密顿矩阵在不同边界条件下的映射, 尤其是如何利用电流型负阻抗变换器构建模型的非互易性. 然后, 根据电路的格林函数, 通过 AC 电流驱动并测量电压响应的方式, 用 SPICE 模拟了周期边界条件下的复能谱和相应的能谱缠绕数, 以及开边界条件下的趋肤与局域模式的竞争. 其中, 为了使电路的响应不发散, 本文还解析地给出辅助元件的设置原则. 结果显示, SPICE 模拟与理论计算很好地符合, 为进一步的实验实现提供了详细的指导. 由于本文电路设计与测量方案的普适性, 原则上可以直接应用于其他非厄米量子模型的电路模拟.

关键词: 非互易 Aubry-André 模型, 非厄米趋肤效应, 非厄米拓扑, 量子模拟**PACS:** 03.65.Vf, 71.23.-k**DOI:** 10.7498/aps.71.20220219

1 引言

近些年, 非厄米物理^[1]引起了物理学各个领域的广泛关注, 它除了传统上可以描述经典系统中增益损耗带来的现象, 还被用来描述量子开放系统的性质^[2]. 不同于封闭系统的厄米哈密顿量, 非厄米的引入扩展了传统量子力学的范式^[3], 如复数能谱、双正交基等, 这诱导出许多新奇现象: 手征-时间反演对称性 (PT 对称性) 的破缺^[4–9]、非厄米简并点^[10,11]、模式转换 (mode switching)^[12] 等. 非厄米性同样扩展了大家对拓扑态的理解. 一个典型的反常是, 在厄米拓扑系统中作为基本原则的体-边对应关系在非厄米系统中不总是适用^[13–26], 而仅在

非厄米系统中存在的非厄米趋肤效应^[16,23]被认为是此原则失效的一个重要原因. 非厄米趋肤效应的发现引发了对传统的厄米量子效应与其竞争关系的广泛研究, 如与安德森局域化的竞争^[27–33] 和与 Hubbard 相互作用的竞争^[34–39] 等.

鉴于非厄米物理的重要性, 在实验上模拟非厄米模型及其独有的新奇现象就显得格外重要. 相比传统的量子平台 (如冷原子系统^[8,9,40]), 经典系统对于模拟非厄米模型有着天然的优势, 除了成本低廉、技术成熟等特点, 它可以非常直接地利用自身的增益和损耗实现非厄米性, 并已成为模拟非厄米系统的有力平台, 如光学系统^[7,41–45] 和机械系统^[46,47] 等. 其中, 经典电路系统因其不受限的网络形式和高度的调控自由度, 原则上可以模拟任意维

* 国家自然科学基金 (批准号: 11904109) 和广东省基础与应用基础研究基金 (批准号: 2019A1515111101) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ljlang@scnu.edu.cn

度、任意格点间跃迁、任意边界条件下的量子紧束缚模型, 成为量子系统模拟的有力竞争者. 目前在电路系统下已经成功实现了很多非厄米的量子模型及其现象, 如 PT 对称性破缺^[48,49]、非互易 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型^[50,51]、二维非互易陈绝缘体^[52,53]、非互易高维模型^[54,55]、非互易狄拉克模型^[56] 及非厄米异常线^[57] 等.

对于非厄米趋肤效应与准无序的竞争关系, 文献^[27] 提出了非互易 (non-reciprocal) Aubry-André (AA) 模型:

$$\hat{H} = \kappa \sum_{n=1}^{N-1} (\mathrm{e}^{\alpha}|n+1\rangle\langle n| + \mathrm{e}^{-\alpha}|n\rangle\langle n+1| + v_n|n\rangle\langle n|) + \kappa(\mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{e}^{-i\Phi}|1\rangle\langle N| + \mathrm{e}^{-\alpha}\mathrm{e}^{i\Phi}|N\rangle\langle 1|), \quad (1)$$

其中, $\kappa\mathrm{e}^{\pm\alpha}$ 描述最近邻格点间的跃迁强度, 如 $\alpha \neq 0$ 表示前后两方向的跃迁强度不相等, 即跃迁具有非互易性; $v_n = 2\lambda \cos(2\pi\beta n)$ 表示在位的准周期/无序势, λ 表示无序强度, β 一般取无理数. 对于有限尺寸的系统, 可以取格点数 $N = F_s$ 且 $\beta = F_{s-1}/F_s$ 以保证准周期势的周期与格点的周期在系统尺寸内不匹配, 其中 F_s 表示斐波那契数列的第 s 个值. 为清楚表示有限尺寸下的边界条件, 在 (1) 式中特别将首尾之间的跃迁项显示写出 (第二个圆括号内), 并且可以表示在整个一维环中间加入磁通 Φ 后的哈密顿量 (取特定规范后). 为方便后面的电路模拟, 以格点态 $\{|n\rangle\}$ 为基矢写出哈密顿量 $\hat{H}$ 的矩阵形式:

$$\mathcal{H} = \kappa \begin{pmatrix} v_1 & \mathrm{e}^{-\alpha} & & & \mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{e}^{-i\Phi} \\ \mathrm{e}^{\alpha} & v_2 & \mathrm{e}^{-\alpha} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\alpha} & v_{N-1} & \mathrm{e}^{-\alpha} \\ \mathrm{e}^{-\alpha}\mathrm{e}^{i\Phi} & & & \mathrm{e}^{\alpha} & v_N \end{pmatrix}. \quad (2)$$

此模型的非厄米拓扑性质以及趋肤效应与局域化的竞争关系, 文献^[27] 已经在理论上详细讨论, 这里简单回顾下主要结论: 在周期边界条件下, 准无序强度较弱 ($\lambda < \max\{\mathrm{e}^{\alpha}, \mathrm{e}^{-\alpha}\} \equiv \lambda_c$) 时, 系统的本征态为扩展态, 其本征能谱在复平面上为绕原点的圈, 表明处于非厄米拓扑相, 可由能量缠绕数 $\nu = \pm 1$ 表征; 随着准无序强度的增强, 当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 系统的本征态经历从扩展态到局域态的转变, 与此同时, 本征能谱收缩成实轴上的一条线, 表明

处于拓扑平庸相, 相应的能量缠绕数 $\nu = 0$. 有趣的是, 拓扑相变与局域相变点完全一致, 这是由于局域化改变了系统的本征能谱在复平面的分布, 进而影响了能量缠绕数. 相应地, 在开边界条件下, 因为局域的转变使系统对边界不再敏感, 系统具有同样的相变点, 区别只是拓扑相区的本征态由于趋肤效应变为趋向某一边缘 (由 α 的正负决定哪个边缘), 且本征能谱变为实数; 局域相区的本征态两边的衰减长度变得不同.

本文的主要目的是通过对非互易 AA 量子模型的经典电路模拟, 详细介绍如何用电路的拉普拉辛形式模拟量子紧束缚模型, 便于感兴趣的读者利用类似方法模拟其他量子模型, 以及为实验实现提供详细指引. 剩下的内容安排如下: 第 2 节详细介绍如何构建经典电路的拉普拉辛形式与量子紧束缚模型的映射, 第 3 节具体给出实现不同边界条件下非互易 AA 模型的电路设计方案, 第 4 节和第 5 节利用 SPICE 分别模拟非互易 AA 模型在周期边界条件下的能谱和能量缠绕数以及在开边界条件下趋肤与局域模式的竞争, 最后一节进行总结.

2 经典电路的拉普拉辛形式与紧束缚模型的对应

任意经典电路组成的网络都可以用一个图 (graph) 来表示, 其节点和边分别对应电路的连接点和元件^[48,58,59]. 如由电阻、电感和电容 (RLC) 等被动元件组成的电路, 元件各自的物性方程为

$$V = RI, \quad V = L \frac{dI}{dt}, \quad C \frac{dV}{dt} = I, \quad (3)$$

这里的 V 和 I 分别表示元件两端的电压差和通过元件的电流, (R, L, C) 分别为元件的电阻、电感和电容. 根据基尔霍夫电流定律, 利用以上物性方程, 可以得到图中每个节点关于时间 t 的微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_n(t) = & C_{ng} \frac{d^2}{dt^2} V_n(t) + R_{ng}^{-1} \frac{d}{dt} V_n(t) + L_{ng}^{-1} V_n(t) \\ & + \sum_{m \neq n} \left\{ C_{nm} \frac{d^2}{dt^2} [V_n(t) - V_m(t)] \right. \\ & + R_{nm}^{-1} \frac{d}{dt} [V_n(t) - V_m(t)] \\ & \left. + L_{nm}^{-1} [V_n(t) - V_m(t)] \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $I_n(t)$ 和 $V_n(t)$ 分别代表电路节点 n 的外界输入电流和对地电压, 这里用 (R_{nm}, L_{nm}, C_{nm}) 分别表示从节点 n 到节点 m (下标 g 代表接地) 的等效电阻、等效电感和等效电容, 以便描述更一般的具有非互易特性的元件, 通常的被动 RLC 元件为互易的, 即 $R_{nm} = R_{mn} \equiv R$, $L_{nm} = L_{mn} \equiv L$, $C_{nm} = C_{mn} \equiv C$. 上述方程可以写成更紧凑的矩阵形式:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}(t) = \mathcal{C}\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{V}(t) + \mathcal{R}\frac{d}{dt}\mathcal{V}(t) + \mathcal{L}\mathcal{V}(t), \quad (5)$$

其中, $\mathcal{I}(t)$ 和 $\mathcal{V}(t)$ 分别表示节点输入电流和对地电压的列矢量, $(\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C})$ 分别为等效电阻、等效电感和等效电容构成的系数矩阵, 矩阵元分别为

$$C_{nn} = C_{ng} + \sum_{m \neq n} C_{nm}, \quad R_{nn} = R_{ng}^{-1} + \sum_{m \neq n} R_{nm}^{-1},$$

$$L_{nn} = L_{ng}^{-1} + \sum_{m \neq n} L_{nm}^{-1}; \quad C_{nm} = -C_{nm} (n \neq m),$$

$$R_{nm} = -R_{nm}^{-1} (n \neq m), \quad L_{nm} = -L_{nm}^{-1} (n \neq m). \quad (6)$$

对于微分方程 (5), 考虑具有固定频率 ω 的 AC 电流源 $\mathcal{I}(t)$ 及其电压响应 $\mathcal{V}(t)$, 其形式为

$$\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}e^{i\omega t}, \quad \mathcal{V}(t) = \mathcal{V}e^{i\omega t}. \quad (7)$$

将它们代入方程 (5), 得到不含时的矩阵方程:

$$\mathcal{I} = (i\omega\mathcal{C} + \mathcal{R} + \mathcal{L}/i\omega)\mathcal{V} \equiv \mathcal{J}(\omega)\mathcal{V}, \quad (8)$$

这里定义的 $\mathcal{J}(\omega)$ 被称为电路的拉普拉辛矩阵或基尔霍夫矩阵^[48], 具有导纳的量纲, 其矩阵元一般为复数, 并且依赖于驱动频率 ω . 如果没有外界电流输入, 即 $\mathcal{J}(\omega)\mathcal{V} = 0$, 则 $\det \mathcal{J}(\omega_c) = 0$ 决定了电路的本征频率谱 $\{\omega_c\}$. 另外, 也可以将 (8) 式的两边求逆, 得

$$\mathcal{V} = \mathcal{J}^{-1}(\omega)\mathcal{I} \equiv \mathcal{G}(\omega)\mathcal{I}, \quad (9)$$

其中, $\mathcal{G}(\omega) \equiv \mathcal{J}^{-1}(\omega)$ 被称为电路格林函数, 具有阻抗的量纲.

实际上, 对于具有 (7) 式形式的稳态解, 任意电路网络都可以表示为拉普拉辛的形式, 如包含放大器的主动电路^[49,50,53] 和具有非线性元件的非线性电路^[60,61] 等.

为了利用经典电路系统模拟量子紧束缚模型, 可以将电路拉普拉辛矩阵 $\mathcal{J}(\omega)$ 直接与紧束缚模型在实空间的哈密顿量矩阵 $\mathcal{H}$ 相对应^[59], 且拉普拉辛 $\mathcal{J}(\omega)$ 的本征方程

$$\mathcal{J}(\omega)\psi_n^{(r)}(\omega) = j_n(\omega)\psi_n^{(r)}(\omega),$$

$$\mathcal{J}^\dagger(\omega)\psi_n^{(l)}(\omega) = j_n^*(\omega)\psi_n^{(l)}(\omega), \quad (10)$$

可以直接对应哈密顿量矩阵的定态薛定谔方程. 这里, $j_n(\omega)$ 为拉普拉辛矩阵的第 n 个本征值, 构成本征导纳谱, 可以完整模拟 $\mathcal{H}$ 的能谱. 特别地, 由 $\det \mathcal{J}(\omega_c) = 0$ 可知, 本征频率 ω_c 使至少一个本征导纳为零, 即 $j_n(\omega_c) = 0$. 由于 $\mathcal{J}(\omega)$ 一般为非厄米矩阵, 即 $\mathcal{J}^\dagger(\omega) \neq \mathcal{J}(\omega)$, 相应的本征矢通常包含本征右矢和本征左矢 $\psi_n^{(r,l)}(\omega)$, 利用电路的交流分析, 可以得到 $\mathcal{J}(\omega)$ 的右本征模式 $\psi_n^{(r)}(\omega)$, 从而模拟 $\mathcal{H}$ 的右本征态; 左本征态可以用 $\mathcal{J}^\dagger(\omega)$ 模拟. 通过元件以及驱动频率的设计和调节, $\mathcal{J}(\omega)$ 具有高度可控性, 原则上可以模拟任意维度、任意边界条件、非线性和非厄米等非常广泛的量子模型的稳态性质.

接下来, 应用以上电路的拉普拉辛形式构建 $\mathcal{J}(\omega)$ 与非互易 AA 模型哈密顿量矩阵 $\mathcal{H}$ 的对应关系, 从而对其稳态性质进行模拟, 包括周期边界条件下的能谱和缠绕数以及开边界条件下趋肤和局域模式的竞争.

3 非互易 AA 模型的电路拉普拉辛

在交流驱动下, 被动元件往往呈现出互易性, 这是由最基本的基尔霍夫电流定律决定的, 如电容与电感的导纳 $J_C(\omega) = i\omega C$ 和 $J_L(\omega) = 1/(i\omega L)$ 均不依赖于正向或反向测量即可表征. 而根据 (8) 式的描述, 要实现拉普拉辛矩阵的非互易性 $J_{mn}(\omega) \neq J_{nm}(\omega)$, 则需要电路中某一元件的导纳值依赖于测量的方式, 这通常需要引入主动元件, 如电流型负阻抗变换器 (INIC)^[53]. 如图 1(b) 所示的 INIC 由放大器和若干线性元件构成, 根据基尔霍夫电流定律, 容易得出两端的输入电流分别为

$$I_l = -\frac{i\omega C_l Z_-}{Z_+}(V_l - V_r), \quad I_r = i\omega C_l(V_r - V_l), \quad (11)$$

这表明一般情况下 INIC 两端不同方向的导纳不相等:

$$J_l(\omega) = -\frac{i\omega C_l Z_-}{Z_+}, \quad J_r(\omega) = i\omega C_l. \quad (12)$$

为了方便起见, 理论上选取 INIC 中的阻抗满足 $Z_+ = Z_-$, 使得元件两端流向放大器的电流大小相同方向相反, 即 $I_l = I_r$, 从而得到两个方向符号相反的导纳: $J_l(\omega) = -J_r(\omega)$.

另外, 这里会用到具有负值的元件 (如负电阻

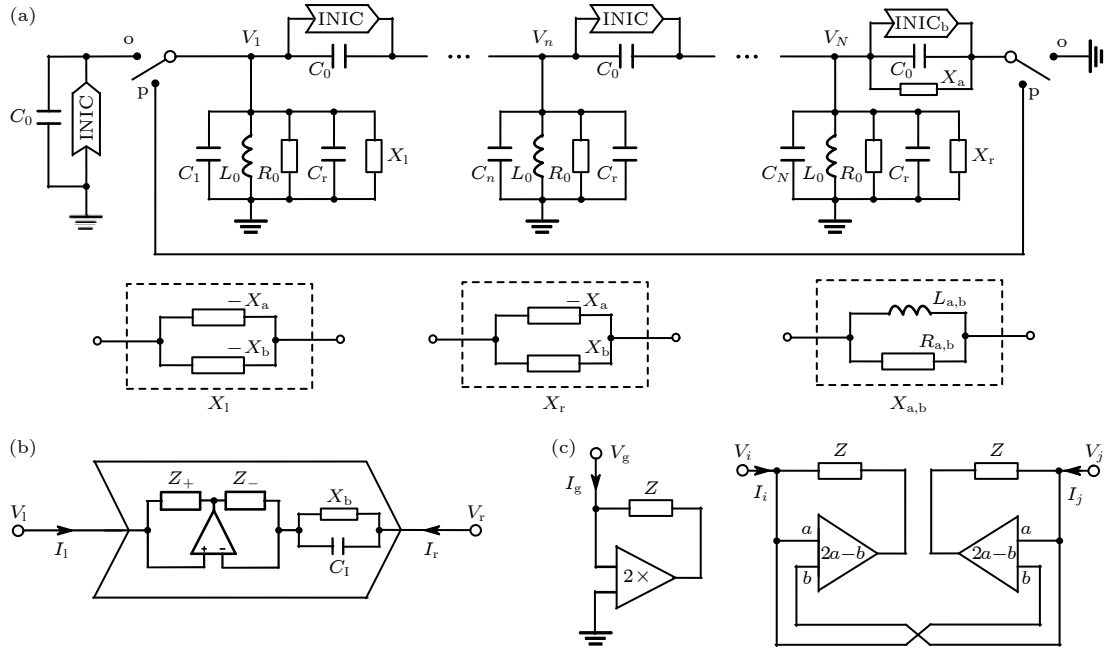


图 1 (a) 上图: 非互易 AA 模型的电路模拟示意图, 包含 N 个有效电压节点 V_n ($n = 1, \dots, N$), 节点间元件 C_0 和 $\text{INIC}_{(b)}$ 模拟格点间的耦合, 其中 $\text{INIC}_{(b)}$ 用于实现关键的非互易耦合, 其定义见图 (b); 接地元件 ($L_0, R_0, C_{0,r,n}$) 模拟格点的在位势; X 相关模块和开关控制对不同边界条件的模拟. 下图: X 相关模块的定义. (b) INIC 元件的内部电路图, 由理想放大器、阻抗 $Z_{\pm}$ 和目标元件 C_1 (没有 X_b) 构成, 可以实现 $V_{l,r}$ 两端不同方向的导纳不同; INIC_b 仅需将 INIC 中的目标元件 C_1 再并联一个 X_b 即可. (c) 负阻抗模块^[49], 左右图分别实现对地单端口和自由两端口间的等效负阻抗 $-Z$, 其中理想放大器上的标记表示输出电压与输入电压的关系. 各元件的具体功能描述详见正文.

Fig. 1. (a) Upper panel: Sketch of an electrical circuit simulating the nonreciprocal AA model. It includes N voltage nodes V_n ($n = 1, \dots, N$) with elements C_0 and $\text{INIC}_{(b)}$ simulating the intersite couplings, where $\text{INIC}_{(b)}$ defined in panel (b) is the key element to realize the nonreciprocity, and the grounded elements ($L_0, R_0, C_{0,r,n}$) simulating the on-site potentials; X modules and the switches control the simulation of boundary conditions. Lower panel: Definitions of X modules. (b) The internal circuit of the INIC , constructed by the ideal operational amplifier (opamp), impedance elements $Z_{\pm}$, and the targeted element C_1 (without X_b), which can realize unequal effective input inductances from the two different ports $V_{l,r}$; INIC_b is defined by adding an extra X_b module in parallel with C_1 in INIC . (c) Modules of negative impedance^[49]. The internal circuits of the grounded one-port and the floated two-port negative impedances $-Z$ for the left and right panels, respectively, where the labels of the ideal opamps represent the relation of the output voltage to the input voltages. See relevant texts for the detailed description of each element.

等), 其两种实现形式如图 1(c) 所示^[49], 它们通过放大器分别实现了对地单端口和自由两端口的等效负阻抗 (导纳). 根据基尔霍夫定律, 可得对地单端口电路 (图 1(c) 左图) 的输入阻抗为

$$Z_g = \frac{V_g}{I_g} = \frac{V_g}{(V_g - 2V_g)/Z} = -Z. \quad (13)$$

类似地, 自由端口电路 (图 1(c) 右图) 两端的输入阻抗分别为

$$Z_{ij} = \frac{V_i - V_j}{I_i} = \frac{V_i - V_j}{[V_i - (2V_i - V_j)]/Z} = -Z, \\ Z_{ji} = \frac{V_j - V_i}{I_j} = \frac{V_j - V_i}{[V_j - (2V_j - V_i)]/Z} = -Z. \quad (14)$$

即, $Z_{ji} = Z_{ij} = -Z$.

利用以上关键元件, 在由电感 L_0 和电容 C_0 组成的左手传输线离散模型 (lumped-element circuit

model for a left-handed transmission line)^[62] 的基础上, 设计了如图 1(a) 所示的非互易 AA 模型的电路模拟示意图, 由 RLC 和 INIC 等元件组成, 包含有 N 个有效电压节点, 对应模拟模型的 N 个格点. 根据方程 (8), 容易写出此电路的拉普拉斯矩阵:

$$\mathcal{J}(\omega) = -i\omega \times \begin{pmatrix} -C_1 & C_0 - C_1 & 0 & & X_R \\ C_0 + C_1 & -C_2 & C_0 - C_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & C_0 + C_1 & -C_{N-1} & C_0 - C_1 \\ X_L & & 0 & C_0 + C_1 & -C_N \end{pmatrix} \\ + \left[i\omega(2C_0 + C_r) + \frac{1}{i\omega L_0} + \frac{1}{R_0} \right] \mathcal{E} \equiv -i\omega \mathcal{A} + \mathcal{D}, \quad (15)$$

其中,

$$X_{R/L} = C_0 \pm C_1 - (\omega^2 L_a)^{-1} \mp (\omega^2 L_b)^{-1} + (i\omega R_a)^{-1} \pm (i\omega R_b)^{-1}, \quad (16)$$

电容 $C_{n,l}$ 、电感 $L_{a,b}$ 、电阻 $R_{a,b}$ 和 R_0 在图 1 中定义, $\mathcal{E}$ 为单位矩阵; 边界条件由图 1(a) 中 X 相关模块与开关控制: 当两端的开关同时接入端口 o 并且 X 相关模块 ($X_{a,b}$ 和 $X_{l,r}$) 均开路时, 系统对应于开边界条件; 当两端的开关同时接入端口 p 时, 下文中将会看到, 通过 X 相关模块参数的调节可以模拟具有磁通的周期边界条件。

将此电路的拉普拉辛矩阵 (15) 与非互易 AA 模型的哈密顿量矩阵 (2) 相比较, 可以建立除 $\mathcal{D}$ (正比于单位矩阵 $\mathcal{E}$) 外两者间的映射 $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{H}$, 并利用对应的无量纲化参数得到如下等式关系。

对于电路的主体部分 (不包含边界), 由

$$\frac{C_0 + C_1}{C_0 - C_1} = e^{2\alpha}, \quad \frac{-C_n}{C_0 + C_1} = \frac{2\lambda \cos(2\pi\beta n)}{e^\alpha}, \quad (17)$$

可得

$$\frac{C_1}{C_0} = \tanh \alpha, \quad \frac{C_n}{C_0} = -\frac{2\lambda \cos(2\pi\beta n)}{\cosh \alpha}, \quad (18)$$

这里将 C_0 作为参考电容. 由此可以理解电路主体各元件的作用: (C_0, C_r, L_0) 构成紧束缚模型的整体参考势 ((15) 式中的 $\mathcal{D}$ 部分), C_0 还承担格点间互易耦合的作用, 非互易耦合和变化的在位势由 INIC 中的电容 C_l 和接地电容 C_n 分别实现; 随后可以看到, 电阻 R_0 和电容 C_r 的引入是为了使电路的响应不发散, 它们仅使导纳谱在复平面内作整体平移. 需注意的是, C_n 随着节点 n 的变化会被要求为负数, 等效负电容可以使用图 1(c) 的方案实现。

对于边界部分, 同样利用对应的无量纲化参数关系

$$\frac{X_R + X_L}{2C_0} = \frac{e^\alpha e^{-i\Phi} + e^{-\alpha} e^{i\Phi}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}, \quad \frac{X_R - X_L}{2C_1} = \frac{e^\alpha e^{-i\Phi} - e^{-\alpha} e^{i\Phi}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}, \quad (19)$$

可得

$$\frac{L_a}{L_0} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2(1 - \cos \Phi)}, \quad L_b = L_a \coth \alpha; \quad \frac{R_b}{R_0} = \frac{\omega_0 \gamma}{\omega \sin \Phi}, \quad R_a = R_b \coth \alpha, \quad (20)$$

这里将 L_0 和 R_0 分别作为参考电感和参考电阻, $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{L_0 C_0}$ 作为参考频率, 并定义无量纲量 $\gamma \equiv R_0^{-1} \sqrt{L_0 C_0^{-1}}$. 当 Φ 为 2π 的整数倍时, $L_{a,b}$ 和

$R_{a,b}$ 均发散, 代表开路, 对应于无磁通的周期边界条件. 随着 Φ 的变化, $R_{a,b}$ 会为负数, 同样可以使用图 1(c) 方案实现。

4 周期边界条件下能谱和缠绕数的模拟

众所周知, 即使在周期边界条件下, 无序系统也不再具有平移不变性, 因而无法通过将哈密顿量变换到动量空间的方法计算系统的缠绕数, 而通常的办法是在链环中心加入磁通量为 Φ 的磁场, 此时系统变为 Φ 的周期函数 (周期为 2π), 从而进行计算. 对于非厄米系统, 由于能量一般为复数, 可以定义复能量在复平面的缠绕数来刻画非厄米系统的拓扑相 [17,27]:

$$\nu = \int_0^{2\pi} \frac{\partial_\Phi \ln \det \mathcal{H}(\Phi)}{2\pi i} d\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial_\Phi \theta(\Phi)}{2\pi} d\Phi, \quad (21)$$

其中, $\theta(\Phi)$ 是 $\det \mathcal{H}(\Phi)$ 的幅角. 对于非互易 AA 模型, 由文献 [27] 可知, 不同的缠绕数表示不同的拓扑相: 在周期边界条件下, $\nu = 0$ 表示拓扑平庸的局域相, $\nu = \pm 1$ 表示两种拓扑非平庸的扩展相。

为了通过电路模拟并测量非互易 AA 模型的缠绕数 ν , 利用两者的对应关系可以将定义 (21) 式中的 $\mathcal{H}$ 用拉普拉辛矩阵 (15) 中的 $\mathcal{A}/C_0$ 替换 (这里除以 C_0 是为了保证 $\ln$ 等函数的作用对象是无量纲的, 整体的倍数并不会影响 ν 的结果). 因此, 只要能从实验上测量出不同 Φ 下的 $\mathcal{A}(\Phi)$ 矩阵, 即可计算出相应的缠绕数。

本文利用电路的格林函数形式 (9) 进行 SPICE 模拟. 对于具有周期边界 (将图 1 所示电路两端的开关均置到 p 端口) 的电路, 仅在第 n 节点接入频率为 ω 的 AC 电流源, 测量所有 N 个节点的电压响应, 并除以输入电流强度, 即可得到电路的格林函数矩阵 $\mathcal{G}(\omega)$ 的第 n 列矩阵元; 每个节点均操作一次, 便可得到整个电路的格林函数矩阵. 然后根据关系 $\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{G}^{-1}(\omega)$ 得出拉普拉辛矩阵以及相应的矩阵 $\mathcal{A}$ [63]. 得到实验测量的拉普拉辛矩阵 $\mathcal{J}(\omega)$, 就可以计算其导纳谱及相应的左/右本征矢量, 以及由此定义的一切物理量, 从而和理论相比较。

需要注意的是, 上述分析是基于电路系统在 AC 电流驱动下的稳态响应, 即 (7) 式. 而事实上, 在驱动频率接近本征频率时, 除了会产生明显的共振响应外, 还会激发电路系统的其他本征模式,

这类响应通常被称为暂态响应. 实验上获得稳态响应的方法一般是进行延时测量, 待暂态响应消逝后再使用锁相放大器实现对稳态响应信号的捕捉. 而在周期边界条件下, 非互易 AA模型的本征能量会出现复数, 相应地, 此电路的本征频率 ω_c 一般也为复数 (图 2(b)、2(c) 左图), 这就意味着此频率下的暂态响应会随着时间发散 ($\text{Im}[\omega_c] < 0$) 或衰减 ($\text{Im}[\omega_c] > 0$). 对于以频率 $\omega \in \mathbb{R}$ 为驱动频率的系统, 发散的产生不利于系统响应的稳定, 因此必须考虑对暂态响应的抑制, 这里通过选取合适的 R_0 达到此目的.

可以采用无磁通 ($\Phi=0$) 的电路 (此时的 $\mathcal{A}$ 与 ω

无关) 计算本征频率的虚部, 从而估算出所需要的 R_0 . 将公式 $\mathcal{J}(\omega_c)\mathcal{V}=0$ 写成本征方程的形式:

$$\frac{\mathcal{A}}{C_0}\mathcal{V} = \left[(2+r) - \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} - i\gamma\frac{\omega_0}{\omega_c} \right] \mathcal{V}, \quad (22)$$

可以求出本征频率 ω_c 满足

$$\frac{\omega_{c,n}}{\omega_0} = \left(-\frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{(2+r) - a_n - \frac{\gamma^2}{4}} \right)^{-1}, \quad (23)$$

其中, $r = C_r/C_0$; a_n 表示矩阵 $\mathcal{A}/C_0$ 的第 n 个本征值, 在周期边界条件下一一般为复数 [27]. 因此, 只要选取合适的 R_0 以及 C_r 使所有本征频率的虚部都不小于 0, 即 $\min_n(\text{Im}[\omega_{c,n}]) \geq 0$, 则系统的响应不会

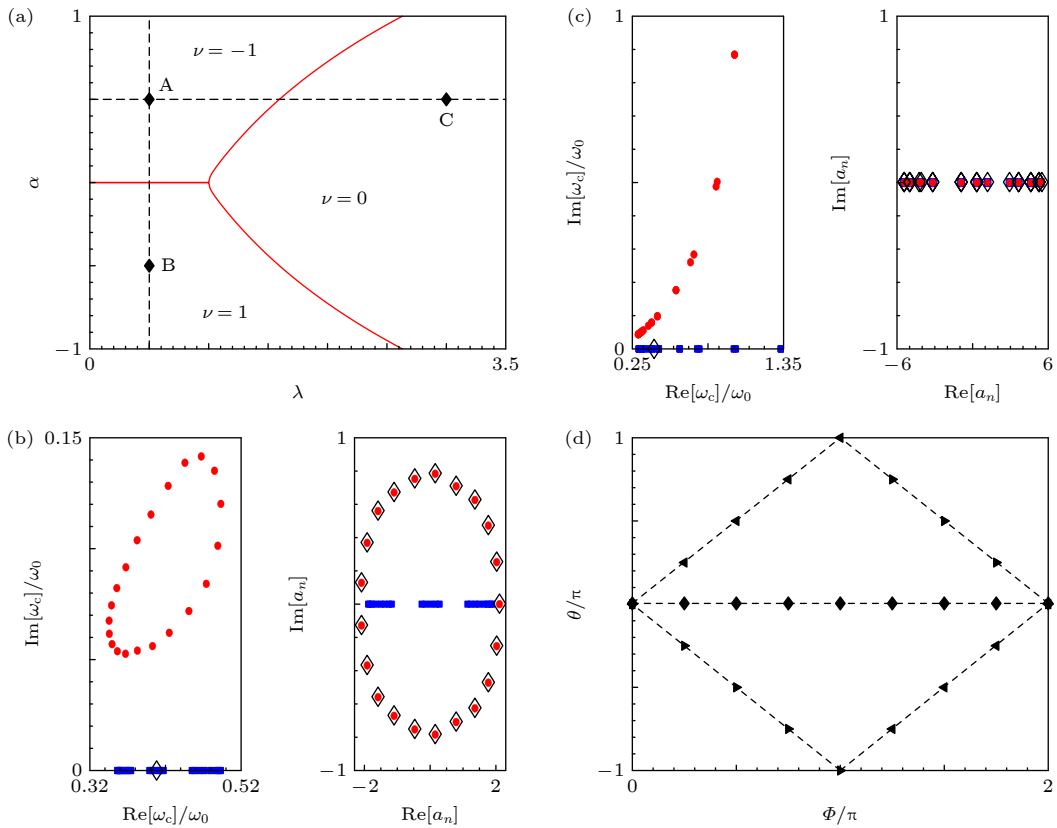


图 2 (a) 非互易 AA 模型的参考相图, 相边界 (红色实线) 由文献 [27] 附录中的解析表达式 (A6) 计算缠绕数 ν 求得. 虚线用于图 3 的计算. (b), (c) 分别对应图 (a) 中 B, C 两点的电路本征频率谱 (取 $\gamma = 0$ 时) (左图) 以及矩阵 $\mathcal{A}/C_0$ 的本征谱 (取 $\Phi = 0$ 时) (右图). 红色实点和蓝色实方块分别代表周期和开边界条件下的理论结果. 左图中的空心菱形标记驱动频率 ω 的位置, 右图中的空心菱形表示周期边界条件下 SPICE 的模拟结果. (d) 根据 SPICE 模拟得到的 $\mathcal{A}(\Phi)$ 计算得出 $\theta(\Phi) = \ln \det[\mathcal{A}(\Phi)/C_0]$ 随 Φ 的变化. 左向三角、右向三角和菱形分别对应图 (a) 中 A, B 和 C 三点, 虚线为相应的理论值. 以上所有计算取有限尺寸 $N = 21$, 电路元件的具体设置参见相关正文.

Fig. 2. (a) Referenced phase diagram of the non-reciprocal AA model, where phase boundaries (solid red lines) are obtained by calculating the winding number ν with Eq. (B6) in the Appendix of Ref. [27]. The dashed lines are for the plots in Fig. 3. (b), (c) The eigenfrequencies of the circuit at $\gamma = 0$ (left panels) and the eigenvalues of $\mathcal{A}/C_0$ at $\Phi = 0$ (right panels). Solid red dots and solid blue squares represents the theoretical results under PBCs and OBCs, respectively. The hollow diamonds in left panels label the driving frequency, and those in right panels are the simulated results under PBCs via SPICE. (d) $\theta(\Phi) = \ln \det[\mathcal{A}(\Phi)/C_0]$ versus Φ based on the simulated $\mathcal{A}(\Phi)$ via SPICE, where left-pointing triangles, right-pointing triangles, and solid diamonds represent points A, B, and C in panel (a), respectively. The dashed lines are the corresponding theoretical results. All figures are calculated in a finite size $N = 21$. See relevant texts for the specific setting of the circuit's elements.

随时间发散. 当系统以特定频率 ω 驱动时, 系统的稳定响应将以 ω 模式为主^[27]. 根据附录的推导, 可以得出使电路响应不发散的条件为

$$r \geq \max_n (\text{Re}[a_n]) - 2 \text{ 且 } \gamma \geq \max_n \left(\frac{|\text{Im}[a_n]|}{\sqrt{2+r-\text{Re}[a_n]}} \right). \quad (24)$$

另外, 为了尽可能多地诱导出本征模式, 驱动频率需要处于本征谱中间. 由于非互易 AA 模型 $\mathcal{H}$ 的能谱分布于复平面的原点附近, 相应地, 矩阵 $\mathcal{A}(\Phi=0)/C_0$ 的本征值 a_n 也具有同样的特点, 所以根据(23)式, 设 $\gamma = a_n = 0$ 可以得到合适的驱动频率 $\omega = \omega_0/\sqrt{2+r}$, 这样的取值同时可以保证(15)式中 $\mathcal{D} = R_0^{-1}\mathcal{E}$ 尽可能简洁. 除特别说明外, 以下计算保持 $\omega = \omega_0/\sqrt{2+r}$ 的取值.

利用 SPICE 模拟周期边界条件下含有 $N = 21$ 个节点的电路(图 1(a)), 基本的元件取值为 $(L_0, C_0, R_0, C_r) = (10 \mu\text{H}, 0.4 \mu\text{F}, 5 \Omega, 1.6 \mu\text{F})$, 即 $\omega_0 = 0.5 \text{ MHz}$ 和 $(r, \gamma) = (4, 1)$, 驱动频率选为 $\omega = \omega_0/\sqrt{6} \approx 0.2 \text{ MHz}$, 其他元件的取值 $(C_l, C_n, L_{a,b}, R_{a,b})$ 根据(18)式和(20)式由模型参数确定, 准周期势的周期参数选为 $\beta = 13/21$. 利用以上方案, 对理论相图(图 2(a))中的 3 个典型区域进行 SPICE 模拟. 在 $\nu = \pm 1$ 的拓扑区, 模拟的 $\mathcal{A}/C_0$ 本征谱在复平面内是绕原点的圈(图 2(b)右图), 而在缠绕数 $\nu = 0$ 的局域区, 则变成了实轴上的直线(图 2(c)右图); 用模拟得到的 $\mathcal{A}(\Phi)/C_0$ 计算相位 $\theta(\Phi) = \det \mathcal{A}(\Phi)/C_0$ 随 Φ 的变化(图 2(d)), 可以得到相应缠绕数的模拟值. 结果显示, 模拟结果与理论结果符合得很好.

5 开边界条件下趋肤与局域模式竞争的模拟

文献[27]里证明了非互易 AA 模型在开边界与周期边界条件下的相图一致, 只是拓扑相区的态在开边界条件下表现出趋肤态, 而在周期边界条件下表现为扩展态. 本节将同样利用电路的拉普拉辛方法模拟开边界条件下趋肤与局域模式的竞争.

在电路的设计上, 只需要将图 1(a)中两端的开关同时接入端口 o 并且令 X 相关模块均开路, 即可实现开边界条件. 同样地, 可以利用与第 4 节周期边界条件类似的方法, 通过 SPICE 模拟重构出开边界条件下的电路拉普拉辛矩阵以及相应的矩

阵 $\mathcal{A}/C_0$, 然后用此矩阵计算出相应的本征左/右矢, 即可看到趋肤和局域模式在不同参数下的竞争关系. 这里将采用一个相对简单的方法, 无须将 AC 电流源依次接入每个节点也可以达到此目的.

电路的格林函数形式(9)可以用拉普拉辛的本征左/右矢表示为

$$\mathcal{V} = \mathcal{G}(\omega)\mathcal{I} = \sum_n \frac{[\psi_n^{(l)}(\omega)]^\dagger \mathcal{I}}{j_n(\omega)} \psi_n^{(r)}(\omega), \quad (25)$$

这里, 趋肤或局域模式表现为本征左/右矢矩阵元的分布是趋向于一端还是局域在某个中间位置. 可以简单地在单一节点接入 AC 电流源, 测量相应的电压响应, 根据(25)式可知, 此电压响应是同一相区下所有本征右矢 $\psi_n^{(r)}(\omega)$ 按系数 $j_n^{-1}(\omega)[\psi_n^{(l)}(\omega)]^\dagger \mathcal{I}$ 线性叠加的结果, 所以必然表现为趋肤或局域效应.

取与周期边界条件时相同的元件参数, 除了 $\gamma = 0$ (即 R_0 开路), 这是因为开边界条件下所有的本征频率都是实数, 如图 2(b)和图 2(c)所示, 不存在响应发散的问题, 所以不需要用电阻抑制发散. 另外, 需要拉普拉辛矩阵中的 $\mathcal{D}(\omega) = 0$, 否则当此项很大时, 所有本征值 $j_n(\omega)$ 趋向于常数 j , 由(25)式可知 $\mathcal{V} \rightarrow j^{-1}\mathcal{I}$, 其正比于输入电流, 无法反映出竞争关系, 这也是取 $\gamma = 0$ 的一个原因.

用 SPICE 同样模拟了开边界条件下 $N = 21$ 个节点的电路系统, 在节点 $n_i = 11$ 接入频率为 $\omega = \omega_0/\sqrt{6}$ 的 AC 电流源, 然后测量每个节点频率为 ω 的电压幅值, 得到如图 3(a)和图 3(b)所示结果, 可以清楚地看出, 在拓扑相区时, 响应电压分布在右/左边界附近, 表现为右/左趋肤态; 在非拓扑相区时, 响应电压始终分布在驱动节点附近, 表现为局域态. 为了表征相应电压的局域化程度, 定义倒参与率 (inverse participation ratio, IPR):

$$\text{IPR} = \left(\sum_n |V_n|^4 \right) / \left(\sum_n |V_n|^2 \right)^2. \quad (26)$$

图 3(c)和图 3(d)显示 IPR 最低的点与理论相变点很接近, 因为趋肤和局域态都有较大的局域性, 对应较大的 IPR 值, 而相变点附近扩展性最强, 对应的 IPR 值都很小. 在左右趋肤的相边界(即 $\nu = \pm 1$ 之间的边界), 对应于互易模型, 因为趋肤效应消失, 所以其本征态为扩展态; 在趋肤与局域的相边界(即 $\nu = \pm 1$ 与 $\nu = 0$ 之间的边界), 对应于趋肤与局域竞争的平衡, 同样为扩展态.

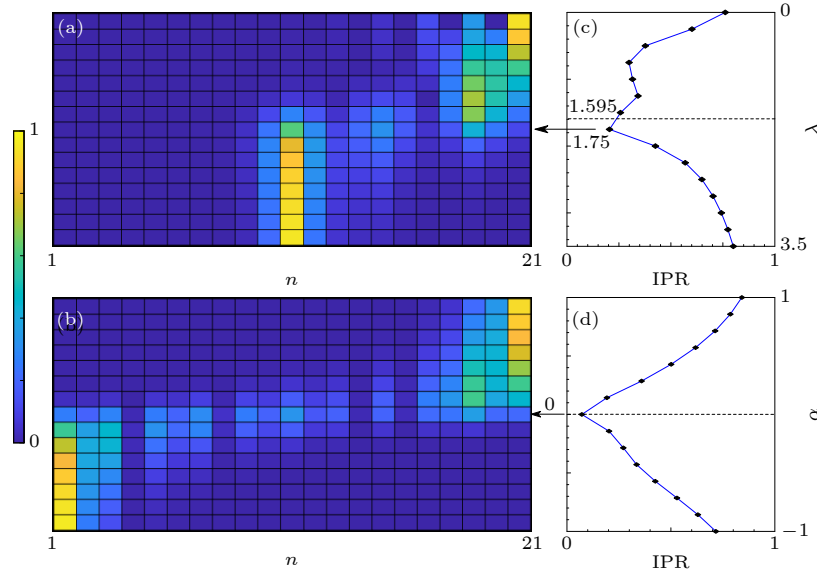


图 3 (a), (b) 由 SPICE 模拟得到的电压响应 (已经归一化) 在节点上的分布, 分别对应图 2(a) 中 $\alpha = 0.5$ 和 $\lambda = 0.5$ 的两条虚线. 频率为 $\omega = \omega_0/\sqrt{6}$ 的 AC 电流源接在第 11 个节点上. (c), (d) 分别为由图 (a) 和 (b) 中的电压分布根据 (26) 式计算的 IPR, 其中菱形为模拟值, 虚线为理论值, 箭头指的是最小模拟值, 虚线标出的是理论相变值.

Fig. 3. (a), (b) Node distributions of voltages (normalized) simulated by SPICE along dashed lines of $\alpha = 0.5$ and $\lambda = 0.5$ in Fig. 2(a), respectively. The AC current source with $\omega = \omega_0/\sqrt{6}$ is connected to the 11 th node. (c), (d) IPRs of the voltage distributions in panels (a) and (b), respectively, calculated by Eq. (26), where diamonds (dashed lines) are the simulation (theoretical) results. The arrows indicate the minima of simulated IPRs, while the dashed lines indicate the phase transition points in theory.

6 结 论

本文通过构建经典电路, 将其拉普拉斯矩阵与非互易 AA 模型的哈密顿量矩阵对应, 利用 SPICE 成功模拟了非互易 AA 模型重要的稳态性质, 包括周期边界条件下体现系统非厄米拓扑性质的复能谱和能谱缠绕数, 以及开边界下非厄米趋肤效应与准无序局域化的竞争. 其中, 详细讨论了电路参数的设置原则和理论依据, 为进一步的实验实现提供了具体的指导方案. 由于方案的普适性, 本文所讨论的设计原则和理论可以直接应用于其他量子紧束缚模型的模拟和实验, 如文献 [27] 中提到的非互易 AA 模型的对偶模型, 仅需将图 1 中的电路方案适当修改, 去除节点间的 INIC 元件以实现互易跃迁, 并调节相应的接地元件以实现准周期复在位势即可.

本文中的 SPICE 模拟使用了 LTspice 软件. 为了更接近于理论结果, 采用的电容、电感和电阻均为理想线性器件, 并且将 INIC 中放大器的开环增益倍数与输入阻抗分别设置为 500 G 和 500 G Ω 用于模拟理想放大器. 由于实际器件的非理想性, 模拟或者实验结果可能会有一定偏差, 需要根据情况具体分析.

本文只涉及对量子紧束缚模型稳态性质的模拟, 实际上, 经典电路也可以用于对动力学性质的模拟. 对于非互易 AA 模型, 文献 [27] 已有讨论. 另外, 由于电路元件的丰富特性, 同样可以利用非线性的电路元件实现对非线性量子系统的模拟 [64]. 所以, 对于模拟量子系统而言, 经典电路是一个成本低廉、技术成熟、模拟范围广的有力平台.

附录

根据本征频率的表达式 (23), 如使电路响应不发散, 需要满足 $\text{Im}[\omega_c^{(n)}/\omega_0] \geq 0$, 即

$$\begin{aligned} 0 &\geq 2\text{Im}\left[-\frac{i\gamma}{2} + \sqrt{(2+r) - a_n - \frac{\gamma^2}{4}}\right] \\ &= -\gamma - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - (2+r) + a_n} - \left[\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - (2+r) + a_n}\right]^* \\ &\Rightarrow -\gamma \leq \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - (2+r) + a_n} + \left[\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - (2+r) + a_n}\right]^*, \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

这里将根式 $\sqrt{\cdot}$ 整体看作复数, 由于不等式左边为非正数 ($\gamma \geq 0$), 所以只需考虑不等式右边 (为根式的两倍实部) 为非正数时满足的条件即可. 因此, 将不等式 (A1) 两边平方

并化简, 得

$$\frac{\gamma^2}{4} + (2+r) - \frac{a_n + a_n^*}{2} \geq \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - (2+r) + a_n} \left[\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - (2+r) + a_n} \right]^*, \quad (\text{A2})$$

两边再平方并化简, 得

$$(2+r - \text{Re}[a_n])\gamma^2 \geq (\text{Im}[a_n])^2. \quad (\text{A3})$$

由于不等式右方为非负数, 所以必须要求

$$2+r - \text{Re}[a_n] \geq 0 \Rightarrow r \geq \text{Re}[a_n] - 2, \quad (\text{A4})$$

且

$$\gamma \geq |\text{Im}[a_n]| / \sqrt{2+r - \text{Re}[a_n]}. \quad (\text{A5})$$

因为需保证所有本征频率都满足以上条件, 所以要求

$$r \geq \max_n (\text{Re}[a_n]) - 2 \text{ 且 } \gamma \geq \max_n \left(\frac{|\text{Im}[a_n]|}{\sqrt{2+r - \text{Re}[a_n]}} \right). \quad (\text{A6})$$

参考文献

- [1] Ashida Y, Gong Z, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
- [2] Daley A J 2014 *Adv. Phys.* **63** 77
- [3] Moiseyev N 2011 *Non-Hermitian Quantum Mechanics* (1st Ed.) (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [5] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, et al. 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902
- [6] Peng B, Ozdemir S K, Lei F, et al. 2014 *Nat. Phys.* **10** 394
- [7] Poli C, Bellec M, Kuhl U, Mortessagne F, Schomerus H 2015 *Nat. Commun.* **6** 6710
- [8] Li J, Harter A K, Liu J, de Melo L, Joglekar Y N, Luo L 2019 *Nat. Commun.* **10** 855
- [9] Ren Z, Liu D, Zhao E, He C, Pak K K, Li J, Jo G B 2021 arXiv: 2106.04874
- [10] Miri M A, Alù A 2019 *Science* **363** eaar7709
- [11] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
- [12] Zhang X L, Jiang T, Chan C T 2019 *Light Sci. Appl.* **8** 88
- [13] Lee T E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 133903
- [14] Leykam D, Bliokh K Y, Huang C, Chong Y, Nori F 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 040401
- [15] Shen H, Zhen B, Fu L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 146402
- [16] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
- [17] Gong Z, Ashida Y, Kawabata K, Takasan K, Higashikawa S, Ueda M 2018 *Phys. Rev. X* **8** 031079
- [18] Xiong Y 2018 *J. Phys. Commun.* **2** 035043
- [19] Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, Bergholtz E J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 026808
- [20] Martinez Alvarez V M, Barrios Vargas J E, Foa Torres L E F 2018 *Phys. Rev. B* **97** 121401(R)
- [21] Yin C, Jiang H, Li L, Lü R, Chen S 2018 *Phys. Rev. A* **97** 052115
- [22] Jin L, Song Z 2019 *Phys. Rev. B* **99** 081103
- [23] Lee C H, Thomale R 2019 *Phys. Rev. B* **99** 201103
- [24] Zhang K, Yang Z, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
- [25] Yang Z, Zhang K, Fang C, Hu J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 226402
- [26] Yokomizo K, Murakami S 2020 *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020** 12A102
- [27] Jiang H, Lang L J, Yang C, Zhu S L, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 054301
- [28] Longhi S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 237601
- [29] Zeng Q B, Yang Y B, Xu Y 2020 *Phys. Rev. B* **101** 020201
- [30] Zhang D W, Tang L Z, Lang L J, Yan H, Zhu S L 2020 *Sci. China Phys., Mech. Astron.* **63** 267062
- [31] Xu Z H, Xia X, Chen S 2021 *Sci. China Phys., Mech. Astron.* **65** 227211
- [32] Liu Y, Wang Y, Liu X J, Zhou Q, Chen S 2021 *Phys. Rev. B* **103** 014203
- [33] Lin Q, Li T, Xiao L, Wang K, Yi W, Xue P 2021 arXiv: 2112.15024
- [34] Mu S, Lee C H, Li L, Gong J 2020 *Phys. Rev. B* **102** 081115
- [35] Zhang D W, Chen Y L, Zhang G Q, Lang L J, Li Z, Zhu S L 2020 *Phys. Rev. B* **101** 235150
- [36] Xu Z, Chen S 2020 *Phys. Rev. B* **102** 035153
- [37] Lee E, Lee H, Yang B J 2020 *Phys. Rev. B* **101** 121109
- [38] Liu T, He J J, Yoshida T, Xiang Z L, Nori F 2020 *Phys. Rev. B* **102** 235151
- [39] Wang Z, Lang L J, He L 2022 *Phys. Rev. B* **105** 054315
- [40] Gou W, Chen T, Xie D, Xiao T, Deng T S, Gadway B, Yi W, Yan B 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 070402
- [41] Zeuner J M, Rechtsman M C, Plotnik Y, et al. 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 040402
- [42] Weimann S, Kremer M, Plotnik Y, et al. 2017 *Nat. Mater.* **16** 433
- [43] Zhu X Y, Gupta S K, Sun X C, He C, Li G X, Jiang J H, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2018 arXiv: 1801.10289
- [44] Cerjan A, Huang S, Wang M, Chen K P, Chong Y, Rechtsman M C 2019 *Nat. Photonics* **13** 623
- [45] Wang K, Dutt A, Yang K Y, Wojcik C C, Vučković J, Fan S 2021 *Science* **371** 1240
- [46] Brandenbourger M, Loesin X, Lerner E, Coulais C 2019 *Nat. Commun.* **10** 4608
- [47] Ghatak A, Brandenbourger M, van Wezel J, Coulais C 2020 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **117** 29561
- [48] Wu F Y 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 6653
- [49] Schindler J, Lin Z, Lee J M, Ramezani H, Ellis F M, Kottos T 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 444029
- [50] Helbig T, Hofmann T, Imhof S, et al. 2020 *Nat. Phys.* **16** 747
- [51] Lang L J, Weng Y, Zhang Y, Cheng E, Liang Q 2021 *Phys. Rev. B* **103** 014302
- [52] Ezawa M 2019 *Phys. Rev. B* **100** 081401
- [53] Hofmann T, Helbig T, Lee C H, Greiter M, Thomale R 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 247702
- [54] Ezawa M 2019 *Phys. Rev. B* **99** 121411
- [55] Zou D, Chen T, He W, Bao J, Lee C H, Sun H, Zhang X 2021 *Nat. Commun.* **12** 7201
- [56] Zhang X X, Franz M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 046401
- [57] Rafi-Ul-Islam S M, Siu Z B, Jalil M B A 2021 arXiv: 2102.03727
- [58] Tzeng W J, Wu F Y 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 8579
- [59] Lee C H, Imhof S, Berger C, Bayer F, Brehm J, Molenkamp L W, Kiessling T, Thomale R 2018 *Commun. Phys.* **1** 39
- [60] Hadad Y, Soric J C, Khanikaev A B, Alù A 2018 *Nat. Electron.* **1** 178
- [61] Wang Y, Lang L J, Lee C H, Zhang B, Chong Y D 2019 *Nat. Commun.* **10** 1102
- [62] Pozar D M 2012 *Microwave Engineering* (4th Ed.) (Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.)
- [63] Helbig T, Hofmann T, Lee C H, Thomale R, Imhof S, Molenkamp L W, Kiessling T 2019 *Phys. Rev. B* **99** 161114
- [64] Lang L J, Zhu S L, Chong Y D 2021 *Phys. Rev. B* **104** L020303

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Electrical circuit simulation of nonreciprocal Aubry-André models^{*}

Cheng En-Hong¹⁾ Lang Li-Jun^{1)2)†}

1) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

2) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Nuclear Science, Institute of Quantum Matter, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

(Received 30 January 2022; revised manuscript received 24 March 2022)

Abstract

The introduction of non-Hermiticity into traditional Hermitian quantum systems generalizes their basic notions and brings about many novel phenomena, e.g., the non-Hermitian skin effect that is exclusive to non-Hermitian systems, attracting enormous attention from almost all branches of physics. Contrary to the quantum platforms, classical systems have the advantages of low cost and mature techniques under room temperature. Among them, the classical electrical circuits are more flexible on simulating quantum tight-binding models in principle with any range of hopping under any boundary conditions in any dimension, and have become a powerful platform for the simulation of quantum matters. In this paper, by constructing an electrical circuit, we simulate by SPICE the static properties of a prototypical non-Hermitian model—the nonreciprocal Aubry-André (AA) model that has the nonreciprocal hopping and on-site quasiperiodic potentials.

The paper is organized as follows: Following the introduction, in Sec. II we review in detail the Laplacian formalism of electrical circuits and the mapping to the quantum tight-binding model. Then, in Sec. III, an electrical circuit is proposed with resistors, capacitors, inductors, and the negative impedance converters with current inversion (INICs), establishing a mapping between the circuit's Laplacian and the non-reciprocal AA model's Hamiltonian under periodic boundary conditions (PBCs) or open boundary conditions (OBCs). Especially, the nonreciprocity, the key of this model, is realized by INICs. In Sec IV, based on the mapping, for the proposed circuit under PBCs, we reconstruct the circuit's Laplacian via SPICE by measuring voltage responses of an AC current input at each node. The complex spectrum and its winding number ν can be calculated by the measured Laplacian, which are consistent with the theoretical prediction, showing $\nu = \pm 1$ for non-Hermitian topological regimes with complex eigenenergies and extended eigenstates, and $\nu = 0$ for topologically trivial regimes with real eigenenergies and localized eigenstates. In Sec V, for the circuit under OBCs, a similar method is used for measuring the node distribution of voltage response, which simulates the competition of non-Hermitian skin effects and the Anderson localization, depending on the strength of quasiperiodic potentials; the phase transition points also appear in the inverse participation ratios of voltage responses.

During the design process, the parameters of auxiliary resistors and capacitors are evaluated for obtaining stable responses, because the complex eigenfrequencies of the circuits are inevitable under PBCs. Our detailed scheme can directly instruct further potential experiments, and the designing method of the electrical circuit is universal and can in principle be applied to the simulation for other quantum tight-binding models.

Keywords: nonreciprocal Aubry-André model, non-Hermitian skin effect, non-Hermitian topology, quantum simulation

PACS: 03.65.Vf, 71.23.-k

DOI: 10.7498/aps.71.20220219

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11904109) and the Basic and Applied Basic Research Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 2019A1515111101).

[†] Corresponding author. E-mail: ljlang@scnu.edu.cn

非互易Aubry-André 模型的经典电路模拟

成恩宏 郎利君

Electrical circuit simulation of nonreciprocal Aubry-André models

Cheng En-Hong Lang Li-Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 160301 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220219

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220219>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非厄米镶嵌型二聚化晶格

Non-Hermitian mosaic dimerized lattices

物理学报. 2022, 71(13): 130302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220890>

非厄米局域拓扑指标的动力学特性

Dynamics of non-Hermitian local topological marker

物理学报. 2021, 70(23): 230309 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211576>

广义布里渊区与非厄米能带理论

Generalized Brillouin zone and non-Hermitian band theory

物理学报. 2021, 70(23): 230307 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211908>

三聚化非厄密晶格中具有趋肤效应的拓扑边缘态

Topological edge states with skin effect in a trimerized non-Hermitian lattice

物理学报. 2019, 68(10): 104206 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190112>

实验观测非厄米系统奇异点的手性翻转现象

Experimental observation of chiral inversion at exceptional points of non-Hermitian systems

物理学报. 2022, 71(13): 131101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220842>

量子计算与量子模拟

Quantum computation and quantum simulation

物理学报. 2018, 67(12): 120301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180710>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

面向量子计算的拓扑超导体材料、
物理和器件研究*姜达¹⁾ 余东洋¹⁾ 郑沾¹⁾ 曹晓超¹⁾ 林强^{1)†} 刘伍明^{1)2)‡}

1) (浙江工业大学理学院&前沿交叉科学研究院, 杭州 310014)

2) (中国科学院物理研究所, 北京 100190)

(2022 年 3 月 31 日收到; 2022 年 4 月 26 日收到修改稿)

鉴于“摩尔定律”已经逼近极限, 众多替代传统计算的方法被提出, 其中量子计算是最受关注和研究最广泛的一种. 由于量子体系的不可封闭性, 外界大量不可控的因素会导致量子耗散和退相干, 为了尽可能避免量子叠加态的退相干, 制备具有鲁棒性的量子比特成为了关键环节之一. 马约拉纳零能模是拓扑和超导复合体系中涌现的准粒子, 具有非阿贝尔统计性质, 它的时空编织受到非局域的拓扑性质保护, 因此, 以马约拉纳零能模构造的拓扑量子比特对量子退相干具有天然的鲁棒性. 虽然经过全球范围内各个实验组艰苦卓绝的探求, 目前关于马约拉纳零能模的实验验证仍然扑朔迷离. 本文回顾了量子计算的发展历程和主要的技术手段, 重点介绍了拓扑超导体/体的理论、可观测的实验现象、以及最新的实验研究进展, 并对此做出了分析和评述. 最后对拓扑超导体/体在量子计算领域的应用前景进行了展望.

关键词: 量子计算, 拓扑超导体**PACS:** 03.65.-w, 03.67.Lx**DOI:** 10.7498/aps.71.20220596

1 引言

1.1 何为量子计算

信息是现代科学的一个核心基本概念, 它已影响到生活的各个方面. 在经典信息论中, 信息的内容和形式以二进制方式加载在一连串确定状态 0 或 1 上. 由于内容和形式可以有不同的表达, 现代科学更关心信息的度量, 而非信息本身的价值. 信息量的基本单位是比特 (bit). 计算 (compute) 在拉丁语里由“com”和“putare”构成, 指的是处理信息并将其简化为数据. 量子计算, 相对于经典计算而言, 是指计算的物理实现遵循的是量子物理的

规律, 而非经典物理的规律. 因此, 在计算过程中量子计算会用到量子物理的非经典性质, 如态的叠加、纠缠、非局域性等. 一般情况下, 量子态不可进行克隆, 测量也将导致量子态坍缩. 这两个事实使得量子计算过程中往往无法进行复制和反馈, 这也意味着量子计算和经典计算必然存在巨大的差异.

对照经典计算, 量子计算也可分为软件和硬件两大部分: 软件部分包括算法分析和设计、量子编程语言、软件等; 硬件包括量子芯片、量子存储器等. 从处理信息的形式来分, 量子计算又可分为离散变量型和连续变量型. 量子计算也可从计算模型角度来区分. 在众多的计算模型中, 当下最受学界重视的方案有量子门阵列、单向量子计算、绝热量

* 国家自然科学基金 (批准号: 61727821, U20A20219, 61835013) 和国家重点研发计划 (批准号: 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1400243) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: qlin@zjut.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: wmliu@aphy.iphy.ac.cn

子计算和拓扑量子计算等四种.

尽管量子计算领域发展快速,但受限于量子计算的理论研究,人们尚不知道量子计算机的最终设计方案.需指出的是:目前所谈论的量子计算机往往指的是对特定问题能达到指数级别加速的处理器,而非一个独立完成计算任务的装置设备;相应地,目前所谈的量子计算其实是一种异构运算,它将需要加速的代码在量子芯片上执行并返还给经典计算机协同完成计算任务.

1.2 量子计算的意义

由于对数据处理量和计算速度要求的不断提高,芯片的集成度不断提高,运算产生的热已限制元件的性能和寿命.尽管多处理器和分布式计算能部分缓解该方面的压力,但无法从本质上克服困难,也无法降低计算的能耗.目前智能手机 3 nm 芯片即将进入使用,在该尺度及更小的尺度下,经典物理的规律将不再准确,必须考虑量子效应.因此,基于量子规律的量子芯片、量子存储器设计方案,以及相匹配的计算方案自然地成为了普遍关注的科学问题.

由于用于计算的量子态可以和电位的高低没有关系,量子比特位诸如翻转等演化没有产生焦耳热的机制,原则上讲,量子计算元件密集程度(性能和寿命)应不受散热条件的限制.

经典计算使用确定的宏观状态 0 和 1 进行运算.量子计算,以离散变量型为例,则以复 Hilbert 空间的微观量子比特 (qubit) 计算基矢 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 进行处理.与经典物理不同的是,量子态一般处在这两个基矢的叠加态上.一个位上的量子态,以 Bloch 球来表示,其分布可布满整个球面,而 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 则为球面的两个极点.由此可知,一个 qubit 可以有无穷多种存在方式,这意味着量子计算具有高度的并行性和几乎无限的信息承载能力.具体地说,由于一个经典的二进制存储器只能存储 0 或 1 中的一个数, n 个经典的二进制存储器只能存储 2 的 n 次方个排列中的一个数,而由于量子叠加原理, n 个量子二进制存储器可以存储 2^n 个排列的所有的数.可见,量子存储器的容载量是呈指数增长的.当 n 很大时,比如 $n = 275$,量子存储器可存储的数据量比宇宙中的原子总数(上限约为 10^{82} 个)还要多.由此可知,基于经典物理原理设计的存储器无法胜任很大规模下的信息处理.此外,由于哈密顿

算符是线性算子,量子叠加态的演化是并行的,且相互间不需要进行通信.同样地,由于态叠加原理,在各个量子比特位上可以同时多个数据的写入,或者同时进行多个数据的读出.因此,量子计算的高并行性特点原则上可展现出更快的计算速度.再考虑到量子比特间的纠缠等特性,一些特殊制备的量子源在特定问题上,有着超越经典计算机方案的处理速度和能力.

量子计算未来有十分巨大的应用前景,尤其在大数据量相关的一些研究和应用上,比如:

1) 大数据科学.使用量子计算可以更全面、快速、准确地找到需要的海量数据检索,用于检索商业信息,方案的优化,信息的整合和预测,比如便捷的线上贸易、私人定制的(健康、金融等)信息服务、投资组合优化和风险预测、犯罪分子的快速发现和追踪.

2) 量子模拟.工业生产前期往往需要利用行业软件进行大规模高精度的模拟,当前的模拟对软硬件要求很高,但仍无法得到很高的精度.使用量子计算有望在更大的规模、更长的演化时间上来研究相关的工业过程,得到更精确的结果,因而能带来巨大的经济效益.比如,应用量子计算改善催化剂,用于实现高效无害高质量的生产方式来生产氯乙烯和氨肥(或对应替代物),则分别对绿色环保和粮食增产起到重要作用.从科学和新技术角度来看,量子计算在化学合成、高分子新型药物的研制、生命现象等领域将发挥巨大的作用.比如,医学技术水平有望进入到原子、亚原子级别;意识和生死,作为涌现现象,有望通过大规模的模拟来进行初步地研究.

3) 人工智能.量子计算有助于提高机器学习的广度、速度和复杂度,提高视觉识别、语音识别、模式识别等来模仿和实现更复杂的人类智能行为,进而执行更为复杂的任务,比如地道的语言翻译、准确的医学诊断、严格的数学证明、有效的危险识别和规避等.得益于更快的计算速度,人工智能有望对一些微观物理化学过程进行"实时"反馈和调控,提升人类对微观粒子的操控能力.

4) 数字主权及安全.数据在现代社会中起着重要作用,数据的安全性是大家十分关心的问题.比如密码学的基本工作原理是大数分解成两位大质数的乘积,由于高的计算复杂度,经典计算要找出结果需很长的时间,而量子计算的高度并行性使

得计算在极短的时间内就可以完成, 因此, 量子计算的成熟应用必然要求彻底改变现代密码系统, 尤其是涉及敏感信息的国防系统和金融系统. 同样地, 数字货币也可能需用更安全的量子数字货币代替. 基于量子计算的安全协议变得十分重要. 考虑到通信的绝对安全性, 结合量子计算的高度并行性, 量子计算用于网络时, 可能使得网络攻击呈现范围大, 攻击密集, 实时性强等特点. 无论是进行网络攻击和防御的手段, 对国家安全而言都是重要的.

1.3 量子计算的发展历程

20 世纪初, 随着对微观世界的探索发现, 量子物理在争议声中快速发展, 人们认识到微观世界的规律, 可以完全不同于经典的经验; 同一期间, Gödel, Church 和 Turing 提出三种计算模型, 带动了数字电子计算机的高速发展. 通过对非传统计算方法开展研究, 后来人们认识到: 这三个模型都包含了与计算量相关的不合理的物理假设, 即某些物理过程并不能通过计算模拟出. 1970 年, Park^[1] 提出量子态不可克隆定理, 该定理在 1982 年被 Wootters 和 Zurek^[2] 重新发现. 1973 年, Bennett^[3] 提出了可逆图灵机的方案.

1980 年到 1999 年期间, 科学家主要在理论方面开展研究, 侧重点是量子逻辑门 (CNOT 门, Fredkin 门), 量子图灵机和一些算法的方案. 其中比较著名的有: 1980 年, Benioff^[4] 基于可逆图灵机提出了量子图灵机模型, Manin^[5] 也提出了量子计算机的想法. Feynman 在 1981 年建议建造量子计算机, 在 1982 年指出所有经典计算机模拟量子系统都存在指数变慢的现象, 而基于量子原理的模拟器则可能无此变慢. 1985 年, Deutsch 提出了第一个通用量子计算机模型. 1992 年, Deutsch 和 Jozsa^[6] 提出了指数加速的 Deutsch-Jozsa 算法. 1993 年, Bennett 等^[7] 提出了量子隐形传态方案. 1994 年, Shor^[8] 提出了 Shor 算法, 在量子计算机上该算法对于大数分解的计算速度远远快于表现最好的经典算法. 1995 年, Monroe 等^[9] 用俘获的离子首次实现 CNOT 门. 1996 年, DiVincenzo^[10] 提出了构建量子计算机的若干判据; Grover^[11] 提出了一种以平方幂次加速的量子搜索算法. 1997 年, Kitaev^[12] 提出拓扑量子计算的方案, 该方案可有效地对抗退相干. 1998 年, 第一个量子计算机 (2 比特 NMR 量子计算机) 诞生, 并在其上成功实现了 Deutsch 算法^[13];

Omer 提出了量子计算编程语言.

2000 年以后, 量子计算在理论和实验方面都开始有了突破. 2000 年, Pati 和 Braunstein^[14] 证明了量子不可删除定理, 它表明量子信息既不能被制造也不能被销毁. 2001 年, 基于单光子的光学量子计算模型^[15] 和基于测量的量子计算模型^[16] 出现. 2003 年, Pittman^[17] 和 O'Brien^[18] 两个组独立地演示了基于线性光学元件的量子 CNOT 门. 2004 年, 科学家实现了量子隐形传态^[19]. 2005 年, Chaneilère 等^[20] 演示了两个量子存储器间信息交换. 2007 年, 单原子单光子服务器出现^[21]. 2008 年, 基于量子光学频率梳的大规模量子计算方案出现^[22]. 2009 年, Lloyd 等^[23] 提出 HHL 量子算法, 对于求解线性系统能达到指数加速效果; Schoelkopf 等^[24] 制造了第一个固态量子处理器; O'Brien 等^[25] 制造了光子芯片, 并演示了 $15 = 3 \times 5$ 的 Shor 算法; 首个面向原子光学开发的拓扑簇态量子架构出现^[26].

自 2010 开始, 量子计算从软、硬件两方面都得到了快速的发展, 众多芯片方案均在实验上得到了验证, 商用的量子计算机也被制造出来. 2010 年出现了双光子芯片^[27]. 2011 年, 14 比特的量子注册机^[28] 制造了出来; Aaronson 等^[29] 提出了玻色采样理论方案; D-wave 制造并售出了量子淬灭机. 2012 年, 世界第一家量子计算软件公司 1 QB 量子技术成立. 2013 年, 量子态可达到小时级别的相干时间^[30,31]. 2014 年, 基于钻石的大规模量子计算架构方案^[32] 出现; 基于隐形传态技术, 科学家实现了高保真、米级的数据传输^[33]. 2016 年, 在基于离子阱的量子计算机上实现了 Shor 算法^[34], IBM 开放了量子云计算平台 Quantum Experience^[35], Google 利用 9 个超导比特对氢气分子进行了量子模拟^[36]. 2017 年, 科学家在微芯片上产生了两个纠缠的比特, 共含 100 个态分量 (每个比特上有 10 个态分量)^[37]; 微软发布量子编程语言 Q Sharp; 第一个用于商业量子计算机的用户交互式操作系统出现; 反事实量子通信方案通过实验验证^[38], 量子信息交换有望不通过携带者或隐形传态方式直接完成. 2018 年, 三光子态用于加速量子计算^[39]; 硅基双比特量子处理器通过测试^[40]; 用于连续变量量子信息处理的集成光子平台出现^[41]; IonQ 公司制造了基于离子陷阱的首台商用量子计算机. 2019 年, IBM 制造了它的第一台商用量子计算机, 奥地利科学家在量子计算机上模拟了晶格模型^[42]; 谷歌声称量

子计算机实现了量子优越性; IBM 研制出了 53 个 qubit 构成的量子计算机; 潘建伟团队实现了多光子玻色采样^[43]. 2020 年, 科学家提出并给出了一个量子布线问题的解决方案^[44], 对纠缠声子对进行测量后实现了测量信息的量子擦除^[45], 利用谷歌公司的量子求解器研究了氢链的结合能和二氮烯的异构机制^[46], 在城际级别实现了 8 用户量子通信网络^[47]. 潘建伟团队使用 (峰值为 76 个光子比特) 九章玻色采样机实现了量子优越性^[48]. 2021 年, 中国科学家建立了世界最大的综合量子通信网络, 实现了地面和卫星的连接^[49]; 在无人机间成功传输了纠缠的光子, 标志着量子网络的研究进入可移动的阶段^[50]; 制造出了目前世界上最强的量子计算机祖冲之 2, 它是一台 66 比特可编程超导量子计算机. 国外研究人员展示了用于分布式量子计算机的第一个量子逻辑门的原型^[51]; 奥地利、德国和瑞士的研究人员展示了两台 19 英寸机架的量子计算演示器^[52]. 在量子比特数目方面, 研究也取得了较大突破: 可编程的量子模拟器可操作的量子比特数达到 256 个^[53], 基于 Rydberg 原子的量子模拟器的原子数也达到 196 个^[54]. 另外, 滑铁卢大学利用量子计算机对重子进行了模拟^[55]. 到目前, 量子计算的各个方面都在蓬勃发展.

2 量子计算的理论基础

2.1 量子比特

比特是计算的基本单位, 在传统计算机中, 一般用低电平 0 和高电平 1 编码二进制数据位. 类似地, 在量子计算中, 其物理对应可以是任意的一个二能级比特体系, 比如把低能级标记为 $|0\rangle$ 态, 高能级标记为 $|1\rangle$ 态. 一个量子比特, 即量子双态系统组成的态矢空间, 就是一个二维 Hilbert 空间. 理论上一次量子操作可以同时实现 2^n 个叠加的数据进行并行运算, 这相当于电子计算机进行 2^n 次操作. 基于量子力学的量子计算提供了一种从根本上实现并行计算的模式, 具备远超过经典计算机运算能力的前景.

值得指出的是, 传统图灵机的架构同样适用于量子计算, 可以对量子比特执行可编程的逻辑操作, 实现通用的量子运算, 从而获得计算能力的指数级加速提升. 作为比较, 每秒运算万亿次的电子

计算机对一个 300 位的大数质因数分解需要 10 年以上, 而利用同样运算速率、采用数学家 Shor 提出的量子分解算法的量子计算机只需要 1 s^[8], 这对经典信息安全体系将带来深远的影响.

2.2 叠加态

经典计算机中每个比特只能表示 0 或者 1 中的一种状态, 经过逻辑门运算之后得到的结果也是如此. 对于量子比特而言, 遵循量子力学的定律, 不仅可以是 $|0\rangle$ 态或 $|1\rangle$ 态, 也可以是 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的任意线性叠加态: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, 其中 α, β 都是复数, 且满足归一化条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. 一个量子比特可以同时包含 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态的信息, 这体现了量子力学中特有的相干性. 目前单量子比特可以用 Bloch 球表示, 如图 1 所示, 多量子比特则用张量乘积来描述. 根据 Feynman 关于态叠加原理解释, 如果一个系统处在叠加态, 在不破坏这个态的前提下, 原则上没有任何物理手段可以确定或区分在这个态中系统究竟处于 $|0\rangle$ 态还是 $|1\rangle$ 态. 量子体系与外界环境的作用会导致叠加态的分布和相位信息丢失, 使编码量子态退化为经典态, 即量子退相干现象, 这是目前量子计算遇到的关键难题.

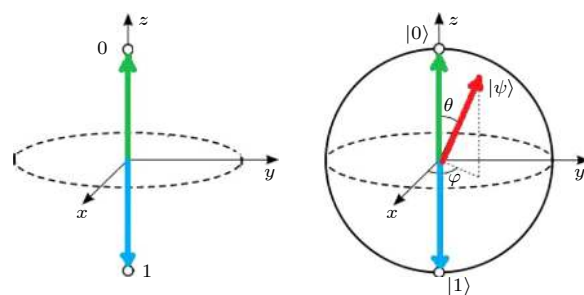


图 1 经典比特(左)和量子比特(右)图示. 量子比特可以代表 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态的叠加态

Fig. 1. Classic bit (left) and qubit (right). Qubit presents the superposition of $|0\rangle$ and $|1\rangle$.

作为态叠加原理应用在多体量子系统时的特有性质, 量子纠缠代表不同体系之间的非局域、非经典关联^[56], 在数学上表现为复合系统的量子态无法写成子系统之间的直积. 目前光子纠缠源的产生有两个主要方法: 基于自发参量下转换技术^[57]和单个原子自发辐射产生的确定性单光子^[58], 纠缠光子在量子通信及量子计算中有着重要的应用价值^[59,60].

3 实现量子计算的主要技术路线

3.1 超导体

超导体是实现量子计算的又一条有效技术路线, 是通过超导系统的量子态来实现量子计算^[61]. 超导量子计算的一个重要优势是与现有的半导体工业技术兼容, 可以在技术上很顺利的从传统计算过渡到量子计算, 而它的劣势则是需要在低温下才能工作.

在超导电路中实现量子比特的基本元器件是具有非线性特性的约瑟夫森结 (Josephson junction), 它是两个超导体之间夹一个绝缘体薄层的三明治结构 (如图 2 所示). 在超导态时, 库珀对可以隧穿绝缘层造成的势垒形成超导电流, 这就是约瑟夫森效应, 这里的超导电流满足以下两个方程:

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1)$$

$$I = I_c \sin \varphi, \quad (2)$$

其中 I 是流经约瑟夫森结的电流; I_c 是临界电流; φ 是绝缘层两侧超导体的相位差; V 是两侧超导体的电势差; $\Phi_0 = h/2e$ 是磁通量子. 这就是约瑟夫森效应方程. 由约瑟夫森效应方程 (1) 和方程 (2) 可以推导出约瑟夫森结本身存储的能量:

$$E = \int IV dt = \int I_c \sin \varphi \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = E_J (1 - \cos \varphi), \quad (3)$$

其中 $E_J = I_c \frac{\Phi_0}{2\pi}$ 是约瑟夫森结能量. 受限于现有工艺制备技术, 实际的约瑟夫森结可以等效为理想约瑟夫森结、电容和电感组成的并联电路, 因此可得出约瑟夫森结的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \hat{H} &= 4E_c \hat{n}^2 + \frac{1}{2} E_L \hat{\varphi}^2 - E_J (\cos \hat{\varphi}_1 + \cos \hat{\varphi}_2), \\ &= 4E_c \hat{n}^2 + \frac{1}{2} E_L \hat{\varphi}^2 - 2E_J \cos \frac{\pi \hat{\Phi}_c}{\Phi_0} \cos \hat{\varphi} \\ &= 4E_c \hat{n}^2 + \frac{1}{2} E_L \hat{\varphi}^2 - E_J \cos \hat{\varphi}, \end{aligned} \quad (4)$$

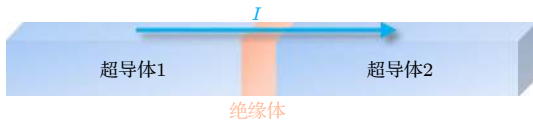


图 2 约瑟夫森结示意图.

Fig. 2. The schematic of Josephson Junction.

其中 $E_c = \frac{e^2}{2C}$ 是电容器上的能量; $E_L = \frac{\hbar/2e}{L}$ 表示电感的能量, $E_J = 2E_J \cos \frac{\pi \hat{\Phi}_c}{\Phi_0}$, $\hat{\varphi} = \frac{\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2}{2}$, $\hat{\Phi}_c = (\hbar/2e)(\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2)$.

从约瑟夫森结的哈密顿量出发, 基于约瑟夫森结的电路可以设计出三种量子比特结构: 电荷量子比特 (charge qubit)、磁通量子比特 (flux qubit) 及相位量子比特 (phase qubit).

电荷量子比特 当 $E_c \geq E_J$ 时, 电荷能量占据优势, 电感可以忽略, 超导体中的库珀对数目可以作为量子比特的量子态, 这种类型的量子比特称为电荷量子比特, 也称为 Cooper-pair box^[62].

磁通量子比特 当 $E_J > E_c$ 时, 电容可以忽略, 电路由电感和约瑟夫森结组成, 通过磁场调节约瑟夫森结的中间势垒高度, 改变约瑟夫森结两边势阱的最低能级跃迁, 产生两个超导电流方向, 分别对应着量子比特中的 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 量子态, 这种类型的量子比特称为磁通量子比特.

相位量子比特 当 $E_J \gg E_c$ 时, 与磁通量子比特类似. 通过外加直流偏置电流, 使得势阱中只存在几个有限的能级, 将最低两个能级作为量子比特的 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 量子态, 这种类型的量子比特称为相位量子比特.

超导量子计算中所用到的超导体分为两大类, 一类是以铝为代表的传统超导体; 另一类是存在马约拉纳准粒子的拓扑超导体.

3.1.1 传统超导体

谷歌、IBM、英特尔、本源量子、浙江大学、南京大学、北京量子信息科学研究院等国内外企业和科研机构采用的是传统超导体来实现量子计算的技术路径. 2019 年美国谷歌公司研制的 53 个量子比特的 Sycamore 处理器首次实现了“量子优越性”^[63], 制备该处理器的材料是生长在硅片上的常规超导体铝膜, 通过紫外曝光和电子束曝光进行 14 次光刻过程完成, 该研究成果具有里程碑式的意义; 2021 年, 中国科技大学潘建伟院士团队推出了 62 个量子比特的超导处理器“祖冲之号”^[64], 该处理器同样也是利用传统超导铝膜制备, 通过 $\text{Al}/\text{AlO}_x/\text{Al}$ 结构来制备约瑟夫森结, 从而实现量子比特; 同年, 浙江大学也发布了利用传统超导体铝膜制备的“莫干 1 号”和“天目 1 号”超导量子芯片学术成果^[65]. 传统超导量子计算已经逐渐成为实现量子计算的主

要技术路径之一. 但是传统超导量子计算存在一些无法忽视的问题, 除了需要在低温下工作外, 由于量子体系的不可封闭性, 外界大量不可控的因素会导致量子耗散和退相干, 即量子叠加态的坍塌, 因此传统超导量子计算机的相干时间较短, 远短于用光学方法制备的量子计算机.

3.1.2 拓扑超导体

为了尽可能避免量子叠加态的坍塌, 制备稳定的量子比特成为关键环节之一. 解决这个问题有一个有效方法就是使用马约拉纳零能模构造的拓扑量子比特. 马约拉纳零能模只在具有非平庸拓扑的超导体中可能出现, 然而, 目前关于拓扑超导体的研究面临理论不完善、材料工艺要求奇高、制备复杂、探测手段匮乏等困境. 微软、荷兰代尔夫特大学、清华大学、北京大学、中国科学院物理研究所等国内外企业和研究机构都在拓扑超导体中尝试基于拓扑量子比特的量子计算路径. 目前, 关于拓扑超导态和拓扑超导体的理论研究已经非常丰富, 在超导异质结和拓扑超导体等体系都观察到了马约拉纳零能模的间接信号, 新的拓扑超导材料研发及其器件的制备等仍然有待进一步提高. 在后面的第 4、第 5 章节将详细介绍面向量子计算的拓扑超导体理论和实验上可观测的现象; 第六章将详细介绍目前面向量子计算的拓扑超导体材料的实验研究进展.

3.2 半导体

硅基半导体集成电路技术是现代工业文明的基石, 据此发展起来的技术和工艺丰富多样, 因而与现代硅基半导体集成电路技术兼容的半导体量子点量子计算方案始终受到广泛的关注. 根据研究, 为了实现能够容错的量子计算, 单比特和双比特的相干时间 (退相干时间) 要尽可能的长, 而操控时间要尽可能的短, 它们成为衡量一个量子计算平台的两个重要物理指标 [66]. 早期的半导体量子计算研究利用电子的自旋作为量子比特, 主要材料是 III/V 主族材料体系 [67], 如 GaAs 量子点, InSb 纳米线等. 由于受到材料核自旋的超精细相互作用的随机影响, 这些异质结中的电子自旋量子比特退相干时间都较短, 使得在半导体工艺中构造高保真度量子比特困难重重. 近年来, 基于 VI 族的 Si 和 Ge 材料得到了迅速的发展, 尤其是同位素纯化技术使

得人们能够制备出无核自旋 ^{28}Si 和 ^{72}Ge 的量子点, 配合诸如动力学解耦脉冲 (dynamical decoupling pulse) 等技术, 人们大幅提高了半导体中的量子比特的相干时间. 类比于经典计算机, 量子计算机的任意程序也可以分解为有限次的逻辑量子比特的连续操作, 比如三个单量子比特 Hadamard 门, Pauli-Z 门和 T 门, 以及一个让两个量子比特纠缠的双比特门, 如 CNOT 门或 $\sqrt{\text{SWAP}}$ 门或 CZ 门等 [68]. 但是, 由于不可避免的耗散和环境相互作用, 半导体量子点平台的量子比特始终具有有限的保真度 (fidelity), 微弱的错误会在后续的计算中叠加和累计直到量子比特完全被损坏. 一种基于纠错码的容错量子比特方案即 Surface 码在 2012 年提出, 该方案指出只有单比特门和双比特门的保真度均超过 99% 时才能够构造一个大规模的量子计算平台 [69].

单量子比特是两个能级 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的线性叠加, $|\psi\rangle = \cos\theta/2|0\rangle + e^{i\varphi/2}\sin\theta/2|1\rangle$, 它可以表达为布洛赫球面的一点. 单量子比特的基本逻辑门操作都可以分解为沿着 Bloch 球两个独立坐标轴的转动, 因此半导体量子点计算平台都在围绕着如何以尽可能高的保真度沿 Bloch 球表面转动, 如 Rabi 振荡. $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 可以是任意的两个能够控制的能级, 比如电子, 原子核或者空穴的自旋, 此时 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 分别对应自旋朝下和朝上, 在外加一个较大的沿 z 轴静态磁场 B_0 , 一个较小的与 B_0 垂直的振荡磁场 B_1 , 以及一个用于控制的微波场, 在旋转坐标系下该体系的哈密顿量写为 [70]

$$H \approx (-\omega_0 + \omega) \sigma_z/2 - \omega_R/2 [\cos(\phi) \sigma_x - \sin(\phi) \sigma_y], \quad (5)$$

其中 ω , $\omega_0 = \gamma B_0$ 和 $\omega_R = \gamma B_1$ 分别是微波脉冲、拉莫尔和拉比频率. 基于自旋的量子比特读取需要通过自旋/能量依赖隧穿或者自旋阻塞实现自旋-电荷转换, 从而读取自旋量子比特. 比如通过自旋/能量依赖隧穿技术, 人们实现了对硅附近束缚电子自旋的单次读取 [71]. 自旋阻塞效应需要辅助量子比特协助以实现量子比特的读取, Harvey-Collard 等 [72] 借助 charge-state latching 技术实现了 99.86% 的受控测量保真度. 半导体材料如 ^{29}Si 的超精细相互作用的随机涨落会导致其中的量子比特相干时间很短, 通过使用同位素纯化 (^{28}Si) 以及电偶极自旋共振等技术, 2017 年 Yoneda 等 [73] 实现了退相干时间 20 μs , 操控时间 17 ns, 受控保真度达到了 99.6% 的良好成绩. 而自 Kane 提出 Si: ^{31}P

系统核自旋可以用作量子比特以来, Si: ^{31}P 系统得到了深入的研究, 2014 年 Muhonen 等^[74] 实现了 99.99% 的受控保真度以及达 600 ms 的退相干时间. 除了使用自旋量子比特以外, 人们也使用电荷, 自旋-电荷杂化系统作为量子比特, 相关的研究都取得了很好的进展.

双比特量子比特门主要依靠三种方式耦合两个单量子比特而实现, 包括交换相互作用 (近邻, 次近邻等)、库伦相互作用以及腔量子电动力学, 特别地, 交换相互作用因为控制简单而研究最多. 近年来, 一种新的双比特门——“CROT 门”——得到了深入的研究, 它结合了 CNOT 门和一个单比特门, 而且它不需要操控交换相互作用的强度便能实现一次 CROT 门操作, 有效减少了环境噪声的影响. 在 2018 年, Huang 等^[75] 实现了 CNOT 门高达 98% 的保真度. Gate-set tomography 技术能够将 Hamiltonian error 和随机错误分离, 因而使得人们能够纠正控制错误、门依赖错误等, 从而提高保真度^[76]. 2022 年初, 三个小组同时报道了单比特门和双比特门均超过 99% 临界保真度的小规模量子点量子计算系统, 包括在磷 ^{31}P 掺杂的 ^{28}Si 材料中实现的 1 个电子 2 个核自旋量子比特系统^[77]、同位素纯化的硅基半导体量子点^[78] 和同位素纯化的 $^{28}\text{Si}/\text{SiGe}$ 异质结^[79], 此三项工作标志着半导体量子计算迈上了新的台阶. 继续优化和发展制备、操控和测量等工艺和技术, 进一步实现可扩展的更大尺度的量子点量子计算系统便成为下一步最为紧迫的方向.

3.3 光 学

近 20 余年来, 基于量子光学的量子计算方向获得了很多有意义的进展, 涉及的物理系统主要包括离子阱^[80]、腔 QED 系统^[81]、极性分子系统^[82]、光晶格^[83] 等. 离子阱的特点是与外部环境耦合较弱, 相干时间长, 并且在量子比特的光学读取上具有很大优势. 光学腔 QED 利用原子与腔场的相互作用控制原子内部状态, 以光子作为飞行量子位进行量子计算. 极性分子体系则集合了中性原子与离子的特点, 它通过微波控制量子位翻转, 不影响双光子拉曼过程中激发态的布居, 由于分子间偶极相互作用远小于离子间的库仑力, 更容易俘获操控. 在光晶格系统里, 通过调节激光场可以操控占据同一格点的玻色子之间的相互作用强度及其在不同格点之间的隧穿概率. 2002 年, 慕尼黑大学的 Greiner 等^[84] 利用光晶格体系模拟了从超流态到 Mott 绝缘态的相变, 成果被量子物理专家 Cirac 和 Zoller^[85] 认定为量子计算的首次实际应用. 2021 年, 清华大学的段路明研究组^[86] 通过精确调控施加在一维光晶格中的超冷原子所在位置的磁场, 首次在实验上实现了量子中继协议中的两个中继模块间的高效纠缠连接 (见图 3). 2022 年初, 麻省理工学院物理系的 Hartke 等^[87] 利用激光干涉形成二维网状势阱, 捕获了大约 400 对冷原子, 并成功在每个钾原子对中观测到了两种不同量子振荡行为的叠加态, 这是一种全新的量子比特. 芝加哥大学的 Bernien 团队^[88] 设计了一个由中性铷原子和铯原子构成的原子阵列, 实现了首个由 512 个量子位组成的中性原子

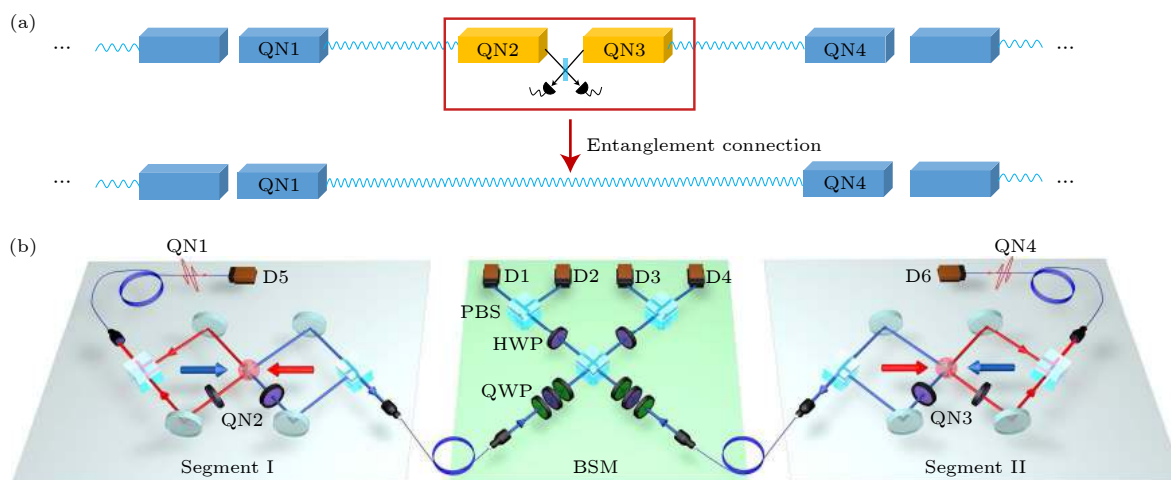
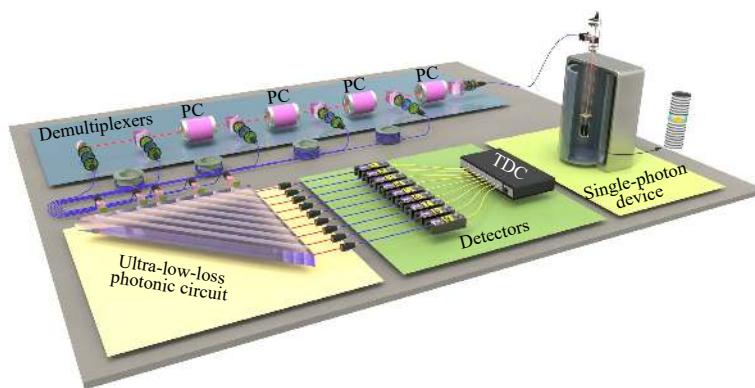


图 3 (a) 量子中继协议中的纠缠连接示意图^[86]; (b) 量子中继模块之间的纠缠连接的实验系统示意图^[86]

Fig. 3. (a) A sketch of entanglement connection (swapping) in the quantum repeater protocol^[86]; (b) the whole experimental set-up^[86].

图 4 多光子玻色采样实验装置图^[97]Fig. 4. Experimental set-up for multiphoton boson-sampling^[97].

体系. 两种元素可以分别用作量子存储器和量子计算, 扮演计算机中的 RAM(随机存取存储器) 及 CPU(中央处理器) 角色, 对新的量子协议具有重要启发意义.

光子是传递电磁相互作用的玻色子, 该“飞行比特”作为量子处理单元的物理载体和“链接”多个量子系统的桥梁, 优点是抗环境噪声干扰能力强, 是实现长距离量子网络和分布式量子计算的最佳载体, 缺点是调控手段相对复杂. 目前, 科学家们已经成功利用光子的偏振^[57]、路径(透射路和反射路)^[89]、轨道角动量^[90]、频率^[91]等自由度作为量子比特编码. 基于现有的光量子比特的制备和操控技术^[92], 国内外学者们先后展示了特定功能的量子计算平台. 2013 年, 意大利、英国、奥地利、澳大利亚等四个国家的研究团队分别采用单光子源和集成光学芯片展示了 3 光子玻色采样^[93–96]. 2017 年, 中国科学技术大学的潘建伟研究组^[97]利用一种共振激发的量子点单光子源产生的高品质光子, 首次在国际上实现 5 光子玻色采样(见图 4). 2018 年, 上海交通大学的金贤敏团队^[98]利用“飞秒激光直写”技术制备出节点数达 49×49 的光量子计算芯片, 创造了当时的世界纪录. 2021 年, 日本科学家 Kashiwazaki 等^[99]研制出新型光纤耦合量子压缩光源, 标志着人类向通用计算机的目标迈出了坚实的一步.

目前光量子计算机在解决特定问题时的计算速度已经远超经典计算机, 在相关实用前景还需要进一步验证. 光量子计算的优势是信息存储相对容易, 另一方面, 它面临的关键技术难点是高品质纠缠光学的制备和光子多自由度调控技术, 光量子比特和其他系统之间的相互耦合也存在一些挑战. 此

外, 光子数解析探测器及光学芯片制造技术也决定着光量子计算机的应用前景.

4 面向量子计算的拓扑超导体理论

4.1 粒子-空穴对称

凝聚态物质的主要组分是电子, 电子是自旋为 $1/2$ 的费米子, 并满足狄拉克-费米统计, 即每一个量子态只能最多占据一个电子, 因此, 自由电子气的基态将是电子从低能到高能依次填满的费米海. 在传统的 Barden-Cooper-Schrieffer(BCS) 超导理论中, 晶格的声子元激发能够在电子之间间接诱导微弱的吸引相互作用, 该吸引相互作用导致费米海表面附近(费米面)的电子失去稳定性, 形成无数的 Cooper 对, 从而形成超导现象. 超导体的单粒子激发需要破坏 Cooper 对束缚态, 将电子从费米海内“踢出”去, 即一个“空穴型”元激发和“粒子”元激发同时产生, 粒子型元激发带正电, 空穴型元激发带负电, 因此, 超导体的单粒子激发是粒子型元激发和空穴型元激发的相干叠加并呈电中性, 超导体一般具有粒子-空穴对称性(PHS). 粒子-空穴对称性显著地改变了凝聚态物质的拓扑性质, 使得在一、二和三维都能够存在拓扑非平庸的拓扑超导体. 特别需要指出的是, 开放非厄密系统成为近年来的研究热点^[100], 北京师范大学 Zhao 等^[101,102]和 Jing 等^[103]研究了非厄密 Kitaev 链, 他们发现非厄密特性会破坏粒子-空穴对称性, 从而导致非厄密系统的马约拉纳零能模显著区别于厄密系统, 比如不完全马约拉纳零能模等. 下面我们简单介绍单带常规超导体(厄密系统)中的粒子-空穴对称性.

众多电子构成的多体系统可以由以下哈密顿量描述:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\mathbf{k}, s_1, s_2} \hat{c}_{\mathbf{k}s_1}^\dagger (\varepsilon_{\mathbf{k}} \sigma_0 + \mathbf{g}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mu_B \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma})_{s_1, s_2} \hat{c}_{\mathbf{k}s_2} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} V_{s_1 s_2, s_3 s_4} \\ & \times (\mathbf{k}, \mathbf{k}') \hat{c}_{-\mathbf{k}s_1}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}s_2}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}'s_3} \hat{c}_{-\mathbf{k}'s_4}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中第一项是电子的单粒子性质, 包括动能 $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ (如二次抛物型 $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m^*$, m^* 为电子有效质量)、自旋轨道耦合效应 $\mathbf{g}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ (spin-Orbit coupling, 如二维体系中的 Rashba 型 $\mathbf{k}_x \sigma_y + \mathbf{k}_y \sigma_x$), 以及磁场 $\mathbf{h}$ 诱导的塞曼能等; 第二项描述了电子之间的有效的相互作用, 它们包括电子之间的库伦相互作用、由晶格振动以及反铁磁涨落等引起的有效吸引相互作用等. 在 BCS 理论中, 假设对关联效应较弱, 平均场近似依然较为准确, 得到 Nambu 表象下的平均场哈密顿量:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^\dagger \mathcal{H}_{\text{BdG}}(\mathbf{k}) \hat{\psi}_{\mathbf{k}}, \quad (7)$$

这里 $\hat{\psi}_{\mathbf{k}} = [\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger, \hat{c}_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger, \hat{c}_{-\mathbf{k}\uparrow}, \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}]$, BdG 哈密顿量 $\mathcal{H}_{\text{BdG}}(\mathbf{k})$ 是 Nambu 表象下的 4×4 矩阵^[100],

$$\mathcal{H}_{\text{BdG}}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \varepsilon(\mathbf{k}) & \Delta(\mathbf{k}) \\ \Delta^\dagger(\mathbf{k}) & -\varepsilon(-\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$\varepsilon_{\mathbf{k}}$ 和 $\Delta_{\mathbf{k}}$ 都是 2×2 的矩阵. 由于费米子算符的反对易关系, 有 $\Delta_{\mathbf{k}} = -\Delta_{-\mathbf{k}}^T$,

$$\Delta_{s_1 s_2}(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{s_3, s_4} V_{s_1 s_2, s_3 s_4}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \langle \hat{c}_{\mathbf{k}'s_3} \hat{c}_{-\mathbf{k}'s_4} \rangle, \quad (9)$$

上述哈密顿量能够被波戈留波夫变换 $\mathcal{H}_{\text{BdG}}(\mathbf{k}) [u_j(\mathbf{k}), v_j(-\mathbf{k})]^T = E_j(\mathbf{k}) [u_j(\mathbf{k}), v_j(-\mathbf{k})]^T$ 所对角化, 其本征谱为 $E_j(\mathbf{k})$. 定义粒子-空穴变换,

$$\hat{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathcal{K}}, \quad (10)$$

其中 $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ 是 2×2 的单位矩阵, $\hat{\mathcal{K}}$ 是厄密共轭算符. $\mathcal{H}_{\text{BdG}}(\mathbf{k})$ 在该粒子-空穴变换下有如下关系,

$$\hat{\mathcal{C}} \mathcal{H}_{\text{BdG}}(\mathbf{k}) \hat{\mathcal{C}}^{-1} = -\mathcal{H}_{\text{BdG}}(-\mathbf{k}). \quad (11)$$

因此, $\mathcal{H}_{\text{BdG}}(\mathbf{k}) \hat{\mathcal{C}} [u_j(-\mathbf{k}), v_j(\mathbf{k})]^T = -E_j(-\mathbf{k}) \hat{\mathcal{C}} [u_j \times (-\mathbf{k}), v_j(\mathbf{k})]^T$, 即是说, BdG 哈密顿量的单粒子能谱是正能谱和负能谱成对出现的, 此即粒子-空穴对称性 (PHS). 新的准粒子 $\hat{\alpha}_{E_j(\mathbf{k})} = \sum_s u_s^{(j)*}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\mathbf{k}s} +$

$v_s^{(j)*}(-\mathbf{k}) \hat{c}_{-\mathbf{k}s}^\dagger$ 依然是费米子, 满足 $\hat{\alpha}_{E_j(\mathbf{k})} = \hat{\alpha}_{-E_j(-\mathbf{k})}^\dagger$, 它是原费米子的粒子元激发与空穴元激发的相干叠加. 该模型推广到多带模型是直接的, 即把自旋指标 s_j 换成自旋与能带的复合指标, 即 $s_j \rightarrow (n, s_j)$. 超导体特殊的基态导致互为“反”粒子的粒子型元激发和空穴型元激发相干叠加, 该机制使得人们有可能在“低能”的超导体物理中模拟“高能”的马约拉纳费米子, 该研究范式在凝聚态物理中具有典型性和普遍性.

4.2 拓扑超导与马约拉纳准粒子

根据一般的拓扑理论, 在没有特殊对称性 (如时间反演对称性、中心反演对称性等) 的情况下, 一维和三维是不能够支持拓扑非平庸的拓扑物态的^[104]. 但是, 正是粒子-空穴对称性的出现, 它显著改变了拓扑物态的性质, 使得在一、二和三维都能够定义拓扑非平庸的物态. 比如, 在一维情形下, Kitaev 于 2001 年提出了一个最简单的无自旋 p 波超导模型. 当参数合适时, 体系处于拓扑非平庸状态, 该拓扑状态由缠绕数 Z_2 描述, 此时在纳米线两端涌现两个空间分立的马约拉纳零能模, 它受到体系的体态的拓扑性质保护, 不受局域的杂质等影响^[105].

由于超导体具有粒子-空穴对称性, 它的负能级均被填满, 而正能级往往是空的, 与绝缘体相似, 正因如此, 绝缘体的拓扑分类理论也能类似地应用到对传统超导体的拓扑分类, 该理论指导人们构造和发现了为数众多的拓扑超导体. 拓扑超导体近年来得到广泛的研究, 一个重要的原因是它能够产生具有非阿贝尔统计的任意子, 任意子 (anyon) 的拓扑保护特性使得它能够运用于抗退相干的拓扑量子计算. 根据拓扑物态的体-边对应关系, 拓扑非平庸的超导体具有无能隙的元激发, 该元激发的色散关系在能带交叉点附近往往是线性的; 同时, 在布里渊区的一些高对称点上, 如 Γ , K 点等, 该元激发能量为零, 此时粒子元激发的波函数与空穴元激发的波函数相同: $u_s^{(j)} = v_s^{(j)*}$ 则 $\hat{\alpha}_j = \hat{\alpha}_j^\dagger$, 即该零能准粒子的反粒子是其自身, 该零能模被称为马约拉纳零能模 (Majorana zero mode, MZM), 是一种特殊的马约拉纳费米子 (Majorana Fermion). 在基本粒子物理中, 马约拉纳费米子是 Dirac 方程的实数解, 由意大利物理学家马约拉纳二十世纪三十年代提出, 至今仍然没有找到哪种基本粒子是马约拉

纳费米子. 但是, 正如前面所述, 在凝聚态物理中, 拓扑超导体的元激发有可能具有马约拉纳零能模, 它由体系的体态拓扑性质保护, 能够抵抗局域微扰, 因此能够用于抗退相干的拓扑量子计算 [106,107].

目前, 实现拓扑超导的主要机制有两种方案: 一, 自旋三重态配对机制 [108]; 二, 自旋轨道耦合 [109–111]. 从实现拓扑超导的材料而言, 有本征拓扑超导体和人造超导异质结两种材料, 特别地, 人造超导异质结为人们构造、探测和操控马约拉纳零模提供了非常好的理论和实验平台, 吸引了全世界众多研究小组的注意力和大量投入. 2001 年, Kitaev 提出一维无自旋的 p 波超导体链能够在两端产生马约拉纳零能模, 该马约拉纳零能模受到体态非平庸拓扑保护因而对微弱的局域扰动免疫, 该模型在众多文章中均已详尽描述, 因此这里就不再赘述. 1999 年, Read 和 Green 提出在 $p_x + ip_y$ 无自旋二维超导体的涡旋中心能够产生 MZM [112], 在之后的长时间里, 研究人员一直为找到一个具体物理模型实现 $p_x + ip_y$ 无自旋超导而苦苦寻找而不得, 直到 2008 年傅亮和 Kane 才首次提出超导/拓扑绝缘体异质结能够实现该模型 [113]. 紧接着, Sato 等 [114] 甚至提出一个具有强的 Rashba 自旋轨道耦合的体系也能等价于 $p_x + ip_y$ 无自旋超导体模型 (见图 5), 其 BdG 哈密顿量如下,

$$\mathcal{H}_{\text{BdG}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_k - h\sigma_z + \mathbf{g}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} & i\psi_s \sigma_y \\ -i\psi_s \sigma_y & -\varepsilon_k + h\sigma_z + \mathbf{g}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \end{pmatrix}. \quad (12)$$

这里, $\mathbf{g}_k = 2\lambda(\sin(k_y d), -\sin(k_x d))$ 描述 Rashba 自旋轨道耦合的强度, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ 是泡利矩阵, h 为沿着 z 轴的塞曼场强度, ε_k 是单粒子的色散关系. Sato 等人观察到上述哈密顿量能够通过一个幺正变换 U 变换为另一个哈密顿量 $\mathcal{H}'_{\text{BdG}}(\mathbf{k}) = U\mathcal{H}_{\text{BdG}}(\mathbf{k})U^\dagger$,

$$\mathcal{H}'_{\text{BdG}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \psi_s - h\sigma_z & -i\varepsilon_k \sigma_y - i\mathbf{g}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} \sigma_y \\ i\varepsilon_k \sigma_y + i\mathbf{g}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} \sigma_y & -\psi_s + h\sigma_z \end{pmatrix}. \quad (13)$$

这里

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i\sigma_y \\ i\sigma_y & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

它等价于 s 波和 p 波超导配对混合模型, 新的 s 波“序参量”为 $-\varepsilon_k$ 和 p 波“序参量” $\mathbf{d}_k$ 矢量为 $\mathbf{g}_k$, 因

此当 $\mathbf{g}_k$ 足够强时, 该模型就等价于 $p_x + ip_y$ 无自旋超导体模型, 具体的计算表明: 当 $\psi_s^2 + \varepsilon(0,0)^2 < h^2 < \psi_s^2 + \varepsilon(0,\pi)^2$ 时, 此时拓扑不变量陈数等于 1, 体边对应关系要求出现两个无能隙的边带模, 如下图所示. 此时, $\mathcal{H}'_{\text{BdG}}(k)$ 有一个零能解, $\gamma^\dagger = \int d\mathbf{r} u_0 \psi_+^\dagger + v_0 \psi_+$, $u_0 = v_0^* = i(re^{i\theta})^{-1/2} e^{-(h-\psi_s)r/2\lambda}$, 满足 $\gamma^\dagger = \gamma$, 即马约拉纳零能模. 虽然, 由于轨道的去配对效应, Sato 等的模型还不能应用到凝聚态物理而更适合应用到超冷原子气体量子模拟等领域. 但是, 傅亮和 Kane、以及 Sato 等工作启发了寻找马约拉纳零能模的一个非常重要的方向, 即通过强自旋轨道耦合效应诱导超导体产生自旋三重态配对.

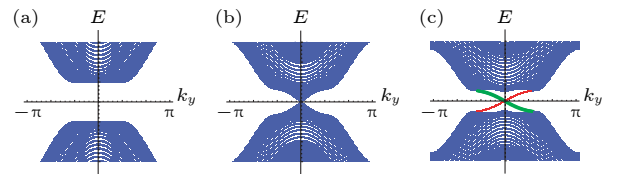


图 5 (a), (b), (c) 展示了在 x 方向为有限边界而 y 方向为周期性边界时的能级结构, 从 (a) 到 (c) 缓慢增加磁场 h 的大小, 当满足 $\psi_s^2 + (0,0)^2 < h^2 < \psi_s^2 + (0,\pi)^2$ 时, 即 (c), 边界涌现了两个无能隙的边界模, 表明发生了拓扑相变 [114]. Fig. 5. (a), (b), and (c) The band energy of the lattice Hamiltonian with edges at x direction. The magnetic field increases from Figure (a) to Figure (c). The red thin line indicates a gapless chiral edge mode localized on the one side and green thick line a gapless chiral edge mode on the other side. They appear for $\psi_s^2 + (0,0)^2 < h^2 < \psi_s^2 + (0,\pi)^2$ at Figure (c), which indicates the occurrence of topological phase transition [114].

4.3 马约拉纳准粒子的非阿贝尔统计

拓扑物态的体态具有非平庸拓扑性质, 在不同拓扑物态的交界处波函数必然出现奇点, 该奇点表现为无能隙的边界模, d 维拓扑非平庸的体态与 $(d-1)$ 维边界态之间的这种对应关系被称为体-边对应关系. 当超导序参量出现后, 由于粒子空穴对称性, 无能隙的边界态往往表现为马约拉纳零能模, 比如, 在二维无自旋 p 波超导体的涡旋中心就有马约拉纳零能模, 因为涡旋是拓扑超导态与正常态的边界. 近年来, 前述的一阶拓扑绝缘体概念被推广到高阶拓扑绝缘体, 即 d 维的拓扑非平庸体态拥有 $(d-n)$ 维的边界态 ($n>1$). 在 2016 年到 2017 年间, 先后有四个小组通过不同的方案提出了高阶拓扑物态的概念, 比如, 三维拓扑绝缘体拥有一维的或者零维的无能隙边界模 [115–118]. 高阶拓扑绝缘体

概念很快被推广到高阶拓扑金属和高阶拓扑超导体. 利用混合超导, 如 $s+id$ 超导配对, 便能够在具有 Rashba 自旋轨道耦合的铁基超导体/半导体/高温超导体异质结中诱导出高阶拓扑超导体^[119]; 利用高阶拓扑绝缘体/s 波超导体异质结, 在无外加磁场情形下便能够实现高阶拓扑超导, 形成马约拉纳零能模^[120,121]. 虽然, 目前关于高阶拓扑超导体的实验研究还处于初级阶段^[122], 但是, 关于高阶拓扑超导体的理论和实验研究为模拟马约拉纳零能模开辟了新的方向.

由于马约拉纳零能模的存在, 拓扑超导体的基态具有 2^N 重简并度 ($2N$ 为马约拉纳零能模的个数), 并且与激发态具有有限大小的能隙. 由于费米子 (电子) 粒子数守恒 (Fermion number parity), 每一个空间局域的马约拉纳准粒子 (马约拉纳准粒子之间相距足够远以至于它们之间完全没有耦合) 都能够绝热地被移动, 比如绕某一个马约拉纳准粒子绕一圈. 该绝热演化将会导致马约拉纳准粒子的世界线 (worldline, 即时空中的轨迹) 在时空中发生缠绕, 数学表示为: $\psi_f(T) = U_{fi}\psi_i$, U_{fi} 为定义在拓扑超导体的简并基态子空间的幺正矩阵, $U_{fi}(T) = \mathcal{T}e^{-i\int_0^T d\tau H(\tau)}$, $\mathcal{T}$ 为编时算子, 为了保证绝热演化, 要求操作时间 $T \gg \hbar/|\Delta_{\text{gap}}|$, U_{fi} 也是辫子群 $\mathcal{B}_{2N}$ 的群元, 一般地, 不同的群元是不对易的, 故马约拉纳准粒子满足非阿贝尔统计^[106,107,123], 下面我们以一维马约拉纳准粒子详细说明.

假设有 $2N$ 个马约拉纳准粒子, 并从左到右依次编号为: $\hat{\gamma}_j = \hat{\gamma}_j^\dagger$ ($j = 1, 2, 3, \dots, 2N$), 每相邻两个马约拉纳准粒子定义一个复费米子: $\hat{c}_k^\dagger = (\hat{\gamma}_{2k-1} - i\hat{\gamma}_{2k})/2$, $\hat{c}_k = (\hat{\gamma}_{2k-1} + i\hat{\gamma}_{2k})/2$. 通过绝热演化 $U_k(T)$, 新的马约拉纳费米子 $\hat{\gamma}'_k = U_k^\dagger(T) \hat{\gamma}_k U_k(T)$. 为了具体化, 设 $U_k(T)$ 只交换编号近邻的两个马约拉纳准粒子并规定为顺时针方向 (反时针方向为 $U_k^\dagger(T)$), 即 $\hat{\gamma}_k$ 和 $\hat{\gamma}_{k+1}$, 所以, $\hat{\gamma}'_k = \alpha_{k+1}\hat{\gamma}_{k+1}$ 和 $\hat{\gamma}'_{k+1} = \alpha_{k+1}\hat{\gamma}_k$ (α_k 和 α_{k+1} 等于 ± 1). 因为费米粒子数守恒的限制, $\hat{\gamma}'_k \hat{\gamma}'_{k+1} = \hat{\gamma}_k \hat{\gamma}_{k+1}$, 所以, $\alpha_k \alpha_{k+1} = 1$, 不失一般性, 我们取 $\alpha_k = 1$ 和 $\alpha_{k+1} = -1$, 这时我们有 $\hat{\gamma}'_k = -\hat{\gamma}_{k+1}$ 和 $\hat{\gamma}'_{k+1} = \hat{\gamma}_k$, 即左边马约拉纳费米子获得了一个负号而右边的马约拉纳准粒子不变. 一个具体的表示可以写成:

$$U_k = e^{\frac{\pi}{4}\hat{\gamma}_k \hat{\gamma}_{k+1}} = \frac{1 + \hat{\gamma}_k \hat{\gamma}_{k+1}}{\sqrt{2}} \equiv B_{k,k+1}. \quad (15)$$

当交换两对不同的近邻马约拉纳准粒子时, 与交换顺序无关, 如果 $|k-l| \geq 2$ 时, $B_{k,k+1}B_{l,l+1} = B_{l,l+1}B_{k,k+1}$; 而当两次交换涉及同一个马约拉纳准粒子时, 两次交换不对易, 详细的代数计算表明:

$$B_{k-1,k}B_{k,k+1} - B_{k,k+1}B_{k-1,k} = \hat{\gamma}_{k-1}\hat{\gamma}_{k+1} \neq 0. \quad (16)$$

这就是马约拉纳准粒子的非阿贝尔统计性质. 如果相邻的三个马约拉纳准粒子交换三次 ($|k-l|=1$), 有 Yang-Baxter 方程:

$$B_{k,k+1}B_{l,l+1}B_{k,k+1} = B_{l,l+1}B_{k,k+1}B_{l,l+1}. \quad (17)$$

方程左右两边的拓扑等价. 马约拉纳准粒子的世界线编织受到哈密顿量的拓扑性质保护, 因此, 任意局域的微弱退相干机制都不能够破坏马约拉纳准粒子, 从而实现具有高度鲁棒性的拓扑量子比特, 这是拓扑量子比特和拓扑量子计算区别于所有其他量子计算平台的最大不同点和最大优势. 一旦实现了可扩展的拓扑超导量子比特, 实现相同逻辑量子比特数所需要的物理量子比特数将显著少于其他非拓扑保护的量子计算平台, 如半导体量子计算平台. 因此, 拓扑超导量子计算一直是量子计算领域非常前沿的和具有革命性突破的研究方向.

5 面向量子计算的拓扑超导体在实验上可观测的现象

根据上述对拓扑超导体理论的研究, 可以预言一些面向量子计算的拓扑超导体在实验上可观测的现象, 通过在实验上探索这些现象又可以反过来表征拓扑超导体.

5.1 马约拉纳零能模和零偏置电导峰 (zero-bias conductance peak)

马约拉纳准粒子是拓扑超导体中涌现的非局域准粒子, 它的反粒子是其自身. 在粒子物理中, 马约拉纳准粒子对应于马约拉纳费米子, 它由意大利物理学家埃托雷·马约拉纳于 1937 年提出. 自理论提出之后, 科学家们试图在现实材料中寻找到这种准粒子, 因为马约拉纳准粒子无论是在基础研究还是应用研究都有深远的意义, 它满足非阿贝尔统计, 可用来实现容错的拓扑量子计算. 2008 年, 傅亮和 Charles Kane 通过理论计算, 预言在拓扑绝缘体和超导体的界面上可能会出现马约拉纳准粒子^[113], 拓扑超导体由此走入科学家们的视线. 由于马约拉

纳准粒子的空间非局域性, 实验探测变得特别困难, 一个间接探测其存在的简易工具是观测其零偏置电导峰. 如第 4 章所述, 在固体材料中, 马约拉纳准粒子在拓扑缺陷上的产生湮灭算符满足自共轭关系, 这就是马约拉纳零能模, 对多个马约拉纳准粒子进行交换编织操作能够形成量子比特.

以一维的拓扑超导纳米线为例, 在纳米线的两端各有一个马约拉纳准粒子, 它引起的隧穿电导为

$$\frac{dI}{dV} = \frac{2e^2}{h} \frac{1}{1 + (eV/2\Gamma)^2}, \quad (18)$$

其中 I 是隧穿电流; V 是偏置电压; Γ 是谱的宽度. 由此公式可见, 在偏置电压为零的时候, 有一个电导峰, 如果用扫描隧道显微镜 (STM) 研究它, 会在电子隧道谱上观测到在零能时有个电导峰, 即零偏置电导峰, 在 0 K 温度时, 马约拉纳零偏置电导峰的高度为量子化电导值 ($2e^2/h$)^[124]. 因此通过实验直接观测马约拉纳零偏置电导峰高度接近 $2e^2/h$ 是证实马约拉纳零模存在的关键证据之一. 最近几年多个材料体系在实验上观测到了高度为量子化电导值的零偏置电导峰 (详见第 6 章节). 需要指出的是, 对于三维拓扑超导体, 在理论上, 隧穿极限下的零偏置电导是零^[125], 在实验上观测到的在零偏置时的电导峰并非真正的零偏置电导峰, 往往是由以下一个或几个原因导致^[126]: 1) 隧穿势垒较低; 2) 马约拉纳准粒子与正常态存在于表面的狄拉克费米子的能量色散纠缠; 3) 体材料的超导能隙中有节点或者节线; 4) 在绝对零度以上, 热致宽效应导致零偏置时的凹陷被抹平.

5.2 热导和量子化热霍尔效应 (quantized thermal Hall conductivity)

除了 STM 外, 输运测量同样可以为马约拉纳准粒子或拓扑超导体的存在提供实验证据. 由于在超导态电阻为零, 电输运无法用来研究超导态的准粒子, 而热输运可以. 在超导态时, 导电的库珀对无法进行热传导, 系统中只有马约拉纳费米子具有热导能力, 因此在超导态时测量系统边界的热导就能很好的证实马约拉纳准粒子的存在.

前文中提到, 在三维拓扑超导体系统中, 无法观测到零偏置电导峰, 因此证实三维的拓扑超导体必须要有其他的实验证据. 由马约拉纳准粒子的热导出发, 科学家们预言在三维拓扑超导体中存在量

子化的热霍尔效应^[126,127].

科学家们设计出了如图 6 所示的材料体系, 在三维拓扑超导体的表面覆盖传统 s 波超导体. 由于近邻效应, 三维拓扑超导体表面具有了 s 波配对和相位为 π 的约瑟夫森结, 由此可以在马约拉纳准粒子的狄拉克点处打开能隙.

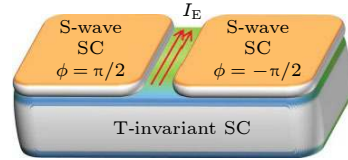


图 6 三维拓扑超导体测量量子热霍尔效应的实验示意图^[127]

Fig. 6. Illustration of the experimental setting for the measurement of quantum thermal Hall effect in the 3D topological superconductor^[127].

图 6 中红色箭头方向为手性马约拉纳准粒子沿着结的方向扩散产生的量子化热流, 它的理论大小为

$$I_E = N \frac{\pi k_B^2 T^2}{24\hbar}, \quad (19)$$

其中 N 为三维体材料的拓扑量子数, 它和手性马约拉纳准粒子的数量有关, T 是趋近于 0 K 的温度. 从方程 (19) 可以推算出霍尔热导率为

$$\kappa_{xy} = \frac{I_E}{T} = N \frac{\pi k_B^2 T}{24\hbar}, \quad (20)$$

因此当实验上观测到这样的量子化热霍尔效应同样可以证实在三维拓扑超导体中存在马约拉纳准粒子. 目前从这个角度研究拓扑超导体尚不多见.

5.3 反常约瑟夫森效应

不同于常规超导体, 拓扑超导体的相位改变既不会破坏对称性, 也不会出现临界行为, 只会改变相应的拓扑不变量和连续系统的边界特性^[128], 由此可以设计基于拓扑超导体的约瑟夫森结来观测它的反常约瑟夫森效应. 理论上认为, 将时间反演不变的拓扑超导体和常规 s 波超导体组成约瑟夫森结会出现不同寻常的约瑟夫森效应: 由于配对对称性不同, 结上常规的约瑟夫森耦合会非常的弱, 但马约拉纳表面态会产生一个非平庸的约瑟夫森耦合^[129], 这种耦合会出现反常的电流-相位关系^[126,129]. 在拓扑超导体和常规 s 波超导体的相位差 φ 为 0 或者 π 的时候, 受时间反演对称保护, 马约拉纳表面态保持无能隙; 在相位差 φ 不为 0 或者 π 的

时候, 马约拉纳表面态的能隙打开从而降低能量^[129]. 一般约瑟夫森结上电流 J 和相位差 φ 之间的关系可以描述为^[126,130]

$$J(\varphi) = \sum_{n=1} (J_n \sin n\varphi + I_n \cos n\varphi), \quad (21)$$

其中 J_n 和 I_n 随着 n 的增大而减小. 由于时间反演对称, $J(\varphi) = -J(-\varphi)$, 因此 $I_n = 0$, 在此情况下,

$$J(\varphi) \sim \sin\varphi. \quad (22)$$

考虑到镜像对称, 会出现新的约束条件: $J(\varphi) = J(\pi + \varphi)$, 由此可以推出 $J_{2n+1} = I_{2n+1} = 0$. 在这种情况下, $J(\varphi) \sim \sin\varphi$ 消失了, 出现了异常电流-相位关系:

$$J(\varphi) \sim \sin 2\varphi. \quad (23)$$

同时, 约瑟夫森结的电流-相位关系也可以确定配对势的宇称^[130–132]. 如果配对势的宇称为奇, 则系统具有拓扑性; 反之, 如果配对势的宇称为偶, 则系统不具备拓扑性.

因此反常的电流-相位关系可用于确定拓扑超导体的配对对称性, 是实验上可以观测到的拓扑超导体的一个重要特征.

5.4 奇频库珀对 (odd-frequency Cooper pairs)

奇频库珀对的概念由 Berezinskii^[133] 于 1974 年提出, 用于更好的理解非常规超导和超流. 在拓扑超导体中, 奇频库珀对引发的异常邻近效应导致了基于马约拉纳准粒子的各种奇异现象^[134], 尤其是零偏置电导峰.

马约拉纳准粒子与奇频库珀对的关系可以通过基于 p_x 波超导体的约瑟夫森结的格林函数来分析. 当 $|E| \ll \Delta$ (配对势), 格林函数可以写作:

$$g(E; x, x') \approx \frac{u_0(x) u_0^*(x') + v_0^*(x) v_0(x')}{E + i\delta_\epsilon}, \quad (24)$$

$$f(E; x, x') \approx \frac{u_0(x) v_0^*(x') + v_0^*(x) u_0(x')}{E + i\delta_\epsilon}, \quad (25)$$

其中 $u_0(x) = C(x)\chi$, $v_0(x) = C(x)\chi^*$, $C(x) = \sqrt{2/\xi_0} e^{-x/2\xi_0} \sin(kx)$, $\chi = e^{i\pi/4} e^{i\varphi/2}$, ξ_0 是相干长度. 对于马约拉纳准粒子来说, 它的反粒子是其自身, 所以 $v_0(x) = u_0^*(x)$, 由此可以得出两个格林函数的关系为

$$g(E; x, x') = (\chi^*)^2 f(E; x, x') = I(E; x, x'). \quad (26)$$

马约拉纳准粒子和奇频库珀对通过这个关系式联

系起来. $(\chi^*)^2 f(E; x, x')$ 的实部是关于 E 的奇函数, 代表了库珀对的奇频对称; $(\chi^*)^2 f(E; x, x')$ 虚部是关于 E 的偶函数, 代表了马约拉纳准粒子局域态密度.

根据上述理论分析, 以基于纳米线的拓扑超导结构为例, 将具有强自旋-轨道耦合的纳米线置于 NS 结和 SNS 结上 (如图 7 所示), 由于近邻效应, 纳米线上有一部分是正常态, 一部分是超导态, 在纳米线上形成 NS 结或者 SNS 结.

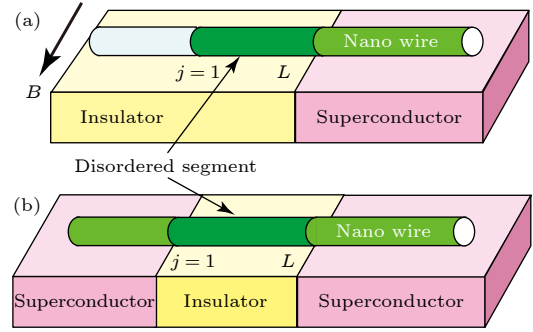


图 7 (a) 纳米线在普通金属/超导体结 (NS) 上示意图^[134]; (b) 纳米线在超导体/普通金属/超导体约瑟夫森结 (SNS) 上示意图^[134]

Fig. 7. Schematic pictures of NS (a) and SNS (b) junctions^[134].

对于 NS 结, 它的微分电导可以用如下方程描述:

$$G_{\text{NS}} = \frac{e^2}{h} \sum_{\alpha, \beta} \left[\delta_{\alpha, \beta} - |r_{\alpha, \beta}^{\text{ee}}|^2 + |r_{\alpha, \beta}^{\text{he}}|^2 \right]_{E=eV}, \quad (27)$$

其中 $r_{\alpha, \beta}^{\text{ee}}$ 和 $r_{\alpha, \beta}^{\text{he}}$ 是结上正常态系数和安德列夫反射系数. 由此在理论上可以画出微分电导 G_{NS} 随偏置电压 eV 的变化曲线 (如图 8 所示). 图 8(a) 是不具有拓扑性的纳米线的 $G_{\text{NS}}-eV$ 曲线, 图 8(b) 是具有拓扑性的纳米线的 $G_{\text{NS}}-eV$ 曲线, 可以看出, 具有拓扑性的纳米线在零偏压的时候, 有明显的微分电导峰, 高度为量子化电导值 $\frac{2e^2}{h}$.

对于 SNS 结, 具有拓扑性的纳米线在物理机制上和 p_x 波超导体一样^[134], 因此在低温下, 拓扑纳米线的 SNS 结的约瑟夫森电流表现出了分数的电流-相位关系 (如图 9 所示): $J \propto \sin(\Delta\varphi/2)$, 其中 $-\pi \leq \Delta\varphi \leq \pi$.

拓扑纳米线的 NS 结和 SNS 结的异常运输现象都是和奇频库珀对密切相关, 由此可见奇频库珀对是实现马约拉纳准粒子不可或缺的, 也可以作为表征马约拉纳准粒子的一个重要手段.

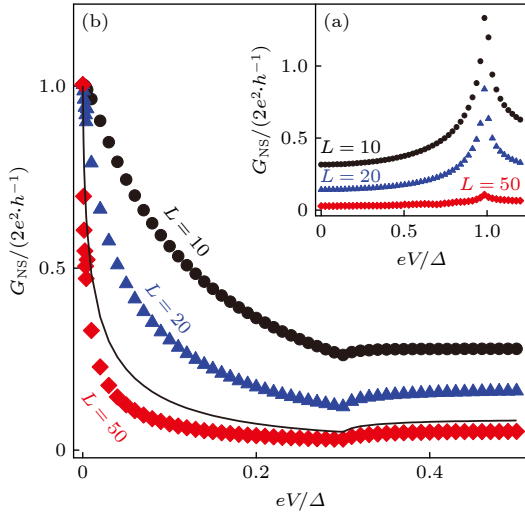


图 8 微分电导 G_{NS} 随偏置电压 eV 的变化曲线 (a) 不具有拓扑性的纳米线的曲线^[134]; (b) 具有拓扑性的纳米线的曲线^[134]
Fig. 8. The differential conductance of NS nanowires is plotted as a function of the bias voltage for nontopological nanowire in (a) and for the topological nanowire in (b)^[134].

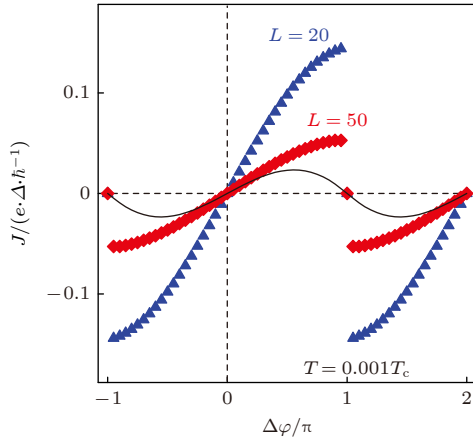


图 9 拓扑纳米线的 SNS 结的电流-相位关系, 作为对比, 黑色实线是非拓扑纳米线的电流-相位关系^[134]
Fig. 9. Current-phase relationship in SNS junctions of topological wire. For comparison, the results for nontopological wire is plotted with a solid line^[134].

6 面向量子计算的拓扑超导体的实验研究进展

目前拓扑超导体的实验研究主要集中在对材料本身的探索上, 大体上分为两大类: 本征拓扑超导体和人工构建的拓扑超导体. 一些具有非平庸的拓扑能隙函数的超导体、具有奇频库珀对的超导体、以及具有较强自旋三重态特征的非中心对称超导体一般被认为有很大可能是本征拓扑超导体; 除此之外, 科学家们还将超导体和一些金属、半导

体、拓绝缘体等材料进行复合, 人工构建了一些潜在的拓扑超导体.

6.1 本征拓扑超导体

随着理论和实验的不断推进, 越来越多的材料被发现具有本征拓扑超导性. 本征拓扑超导体的优势在于可以排除平庸态信号和复杂界面效应的干扰, 直接观测到干净的马约拉纳束缚态.

6.1.1 $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$

$\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 是最早被发现的拓扑超导材料. 2010 年, 美国普林斯顿大学 R. J. Cava 课题组^[135] 在 Bi_2Se_3 中进行 Cu 掺杂形成 $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$, 并在其中发现了 $T_c = 3.8 \text{ K}$ 超导性 (如图 10 所示), 从而引发学术界对 $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 拓扑超导性的研究. 角分辨光电子能谱 (ARPES) 的研究证实, 当 Cu 的掺杂量达到超导出现的程度时, $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 在动量空间的拓扑表面态依然存在^[136]; 点接触的电输运方式测量到了 $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 的零偏置电导峰^[137]; 用核磁共振测量奈特位移发现 $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 在超导态的时候, 它的自旋旋转对称性自发破缺, 由此可以推论出 $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 的超导是由赝自旋三重态的奇频配对引起的, 它的自旋角动量被钉扎在某个晶向,

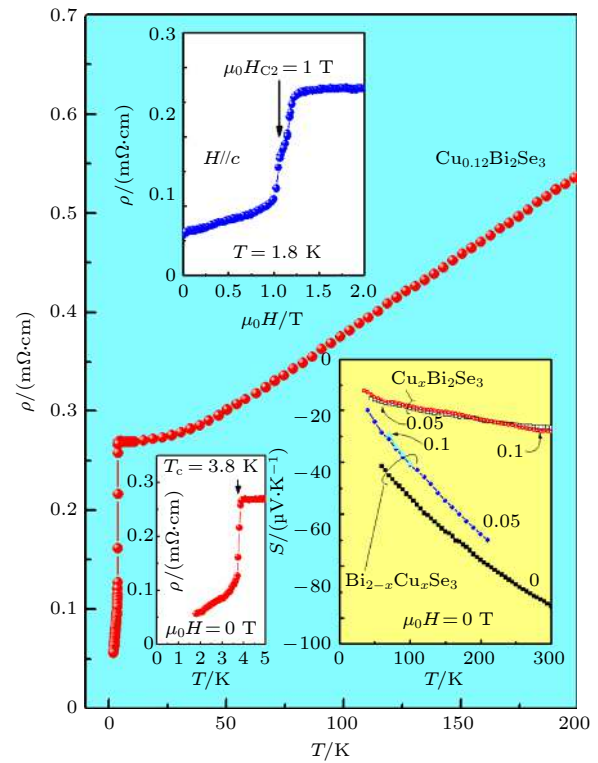


图 10 在 $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 中发现了 $T_c = 3.8 \text{ K}$ 的超导性^[135]

Fig. 10. Superconductivity at 3.8 K in $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ ^[135].

因此核磁共振测量给出了 $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 是拓扑超导体的直接证据^[138]; 比热的测量也和核磁共振的测量相互印证^[139].

受到 $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 晶体的启发, 华中科技大学强磁场科学中心的张裕恒、张昌锦课题组利用高温熔融法, 将碱土金属元素 Sr 替代 Cu 插入到拓扑绝缘体 Bi_2Se_3 中, 获得了高质量的 $\text{Sr}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 单晶体^[140], 在 10 到 35 T 磁场区间 $\text{Sr}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 出现了周期性的量子振荡信号, 证明 $\text{Sr}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 存在拓扑保护表面态.

Asaba 等^[141] 在 Nb 掺杂的 Bi_2Se_3 中测量出了超导电性, 同时通过磁矩测量还观测到旋转对称性自发破缺, 表明在 $\text{Nb}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ 的超导基态具有向列序.

从上述几例中可以看出, 对拓扑绝缘体 Bi_2Se_3 进行掺杂, 掺杂后的材料一旦出现超导, 则有望实现本征拓扑超导体. 对 Bi_2Se_3 掺杂形成的拓扑超导体是目前较为庞大的一个拓扑超导体系, 也是研究较为全面和深入的材料体系.

6.1.2 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$

$\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 是典型的铁基非常规超导体, 中国科学院物理研究所的丁洪研究员团队和高鸿钧院士团队对 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 的拓扑性质进行了系统

的谱学实验研究. 要证实 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 的本征拓扑性需要在谱学上观测到三个现象^[142]: 1) 狄拉克锥表面态; 2) 表面态处有螺旋自旋极化, 使得自旋方向垂直于动量方向; 3) 在超导态时, 表面态有 s 波超导能隙.

2014 年, 丁洪课题组^[143] 在尝试调控 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 费米能级的时候发现了狄拉克锥表面态的初步迹象^[144], 理论计算表明这一能带反转具有拓扑非平庸的性质, 即使 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 单晶薄至单层依然可以通过 ARPES 观测到拓扑非平庸能带反转^[145,146]; 2018 年, 该课题组利用超高分辨 ARPES 证实了 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 在费米能级处有狄拉克锥式的自旋螺旋表面态, 且在超导态展现出 s 波超导能隙^[142]; 同年, 利用 He-3 极低温强磁场 STM 系统对 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 的测量验证了它的狄拉克锥拓扑表面态, 并在磁通涡旋处观察到尖锐的零偏置电导峰, 这也是首次清晰的观测到了纯净的马约拉纳束缚态^[147], 它的零偏置电导峰在低温下表现出量子化的电导, 即可以观测到马约拉纳零能模的近量子化电导平台特征 (如图 11 所示), 以往导致平台电导值小于量子化电导 $2e^2/h$ 的因素可能和系统能量展宽和准粒子中毒效应有关^[148]; 进一步的 STM 研究表明, 有两类超导涡旋共存于 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$

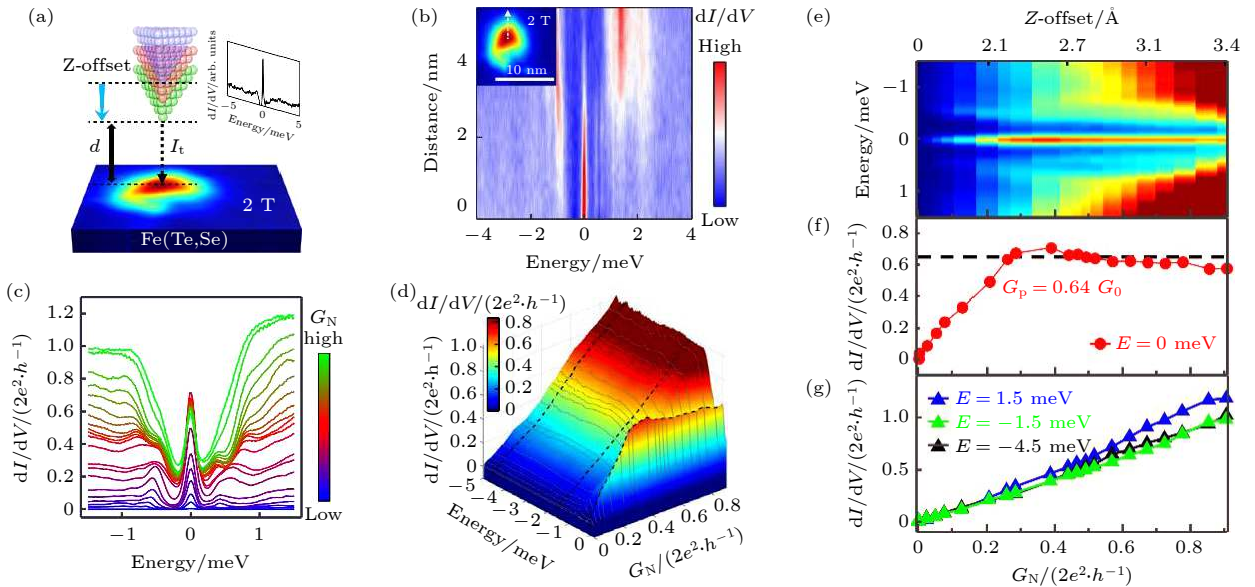


图 11 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 上马约拉纳零能模的近量子化电导平台特征 (a) 扫描隧道显微镜示意图^[148]; (b) 小图中涡旋的线界面图^[148]; (c) 微分电导谱^[148]; (d) 三维微分电导谱^[148]; (e) 图 (c) 的彩色图^[148]; (f) 图 (e) 在零偏置时的水平切线^[148]; (g) 图 (e) 在高偏置时的水平切线^[148].

Fig. 11. Zero-bias conductance plateau observed on $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$: (a) Schematic of variable tunnel coupling STM/S method^[148]; (b) a line-cut intensity plot along the dashed white arrow in the inset^[148]; (c) an overlapping plot of dI/dV spectra^[148]; (d) 3D plot of tunnel coupling dependent measurement, $dI/dV(E, G_N)$ ^[148]; (e) color-scale plot of Figure (c)^[148]; (f) horizontal line-cut at the zero-bias from Figure (e)^[148]; (g) horizontal line-cuts at high-bias from Figure (e)^[148].

表面: 拓扑涡旋和平庸涡旋, 马约拉纳零能模存在于拓扑涡旋中, 同时伴有整数量子化能级序列的涡旋束缚态 ($E_n = n\Delta^2/E_F$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 其中 $n = 0$ 是马约拉纳零能模), 而平庸涡旋中没有马约拉纳零能模, 且其涡旋束缚态能级序列呈现半整数行为 ($E_n = n\Delta^2/E_F$, $n = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots$)^[149].

除了谱学研究, $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 的电磁学研究为其拓扑性提供了一些佐证. 在对过量铁的 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 薄片的电磁输运和扫描超导量子干涉仪 (sSQUID) 的研究中发现, 虽然铁杂质的存在大大压制了块材的超导性, 材料的边缘却显现出稳固的超导性 (如图 12 所示), 这种在热与磁性干扰下保持稳固的本征性质暗示这一边缘超导很可能有拓扑性的根源^[150].

$\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 是目前研究得较为深入和全面的拓扑超导体, 具有向 qubit 原型器件进一步推进的可能.

6.1.3 $\text{Li}(\text{Fe}, \text{Co})\text{As}$

$\text{Li}(\text{Fe}, \text{Co})\text{As}$ 是铁基超导体中又一个可能存在拓扑超导性质的材料. 在 LiFeAs 的能带结构测量中并没有发现其具有拓扑性, 但当利用高分辨的激光 ARPES 和具有自旋分辨的 ARPES 对 Co 掺杂的 LiFeAs 进行能带结构研究时, 发现 $\text{Li}(\text{Fe}, \text{Co})\text{As}$ 具有拓扑非平庸性的能带反转 (如图 13 所示), 确认了在费米能级附近同时具有拓扑绝缘态和狄拉克半金属态, 通过改变载流子的掺杂可以将拓扑非平庸能带调控到费米能级, 从而可以在同一个材料中得到多个不同的拓扑超导态^[152].

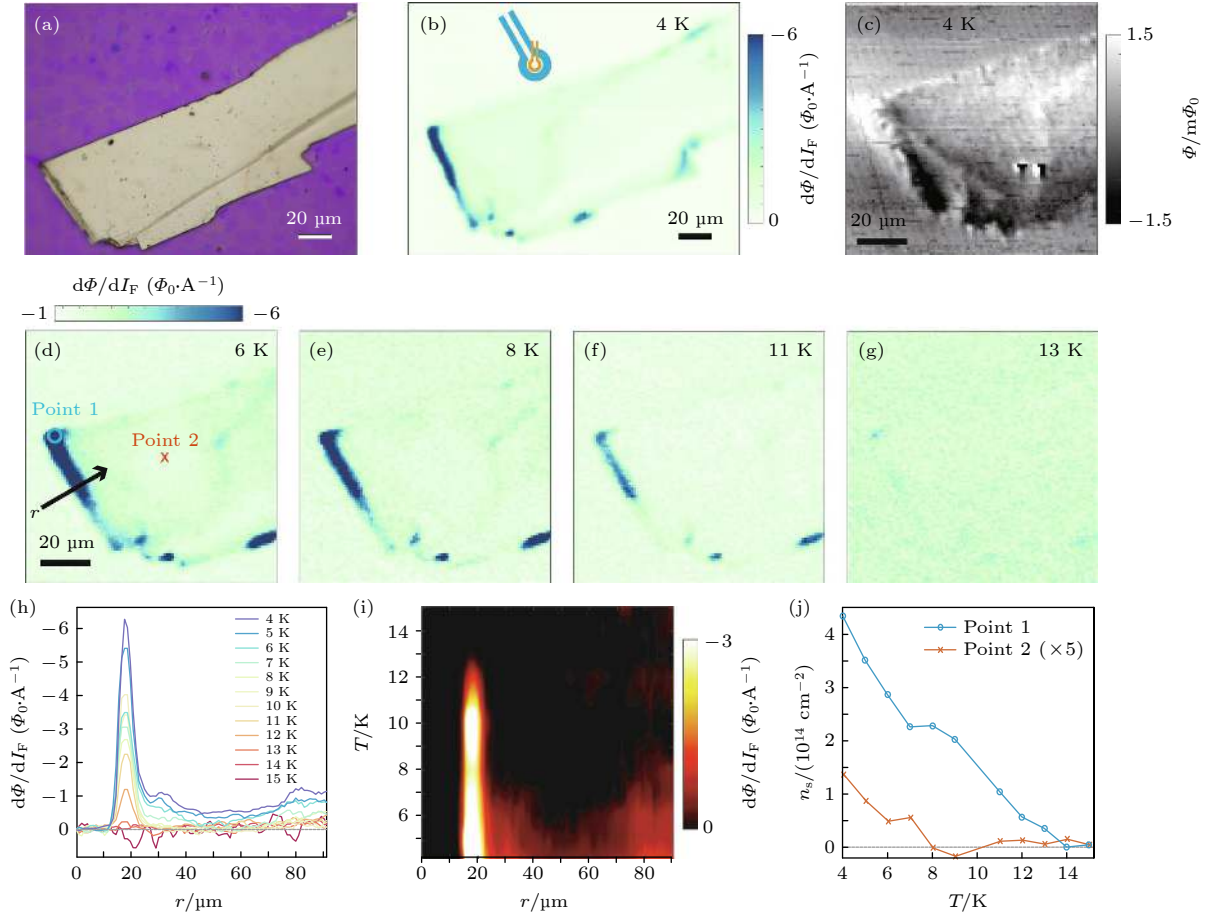


图 12 超导抗磁性在 $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ 薄片中的分布 (a) 样品光学显微镜照片^[150]; (b), (c) 样品的抗磁和磁化强度 sSQUID 扫描图^[150]; (d)–(g) 随温度变化的抗磁 sSQUID 扫描图^[150]; (h) 图 (d) 中 r 箭头指向的不同温度抗磁曲线^[150]; (i) 根据图 (h) 做出的彩图^[150]; (j) 在图 (d) 中 1 和 2 两点处提取的随温度变化的超流密度^[150]

Fig. 12. Distinctive edge features in susceptometry of $\text{Fe}_{1+y}\text{Se}_x\text{Te}_{1-x}$ flake: (a) Optical image of the sample^[150]; (b), (c) the susceptometry and magnetometry images of the sample, respectively^[150]; (d)–(g) susceptometry images of the sample at various T ^[150]; (h) line cuts of the susceptometry images at various T along the vector direction (r) as labeled by the arrow in Figure (d)^[150]; (i) interpolated image from the line cuts in Figure (h)^[150]; (j) superfluid densities as a function of T extracted from point 1 and 2 in Figure (d)^[151].

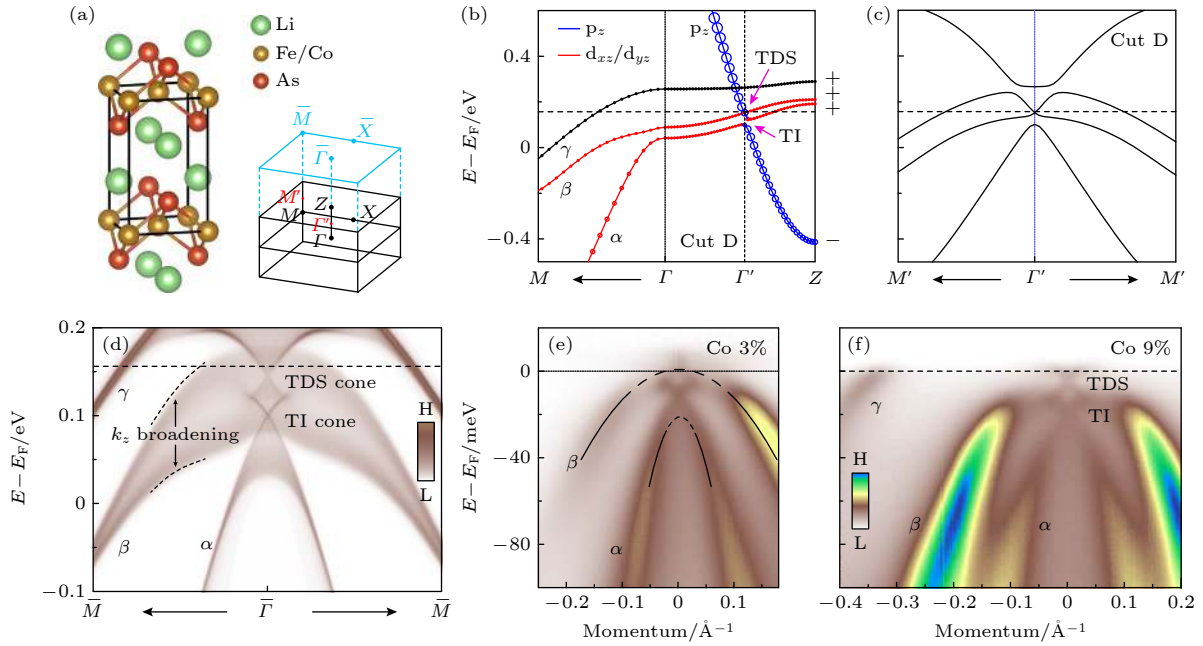


图 13 Li(Fe, Co)As 的电子结构 (a) Li(Fe, Co)As 的晶体结构^[151]; (b) LiFeAs 随 ΓM 和 ΓZ 的能带色散^[151]; (c), (b) Cut D 处的面内能带结构^[151]; (d) LiFeAs (001) 面的表面谱^[151]; (e) 15 K 时 $\text{LiFe}_{1-x}\text{Co}_x\text{As}$ ($x = 3\%$) 的 ARPES 谱^[151]; (f) 10 K 时 $\text{LiFe}_{1-x}\text{Co}_x\text{As}$ ($x = 9\%$) 的 ARPES 谱^[151]

Fig. 13. Electronic structure of Li(Fe, Co)As: (a) Crystal structure of Li(Fe, Co)As^[151]; (b) zoomed-in view of the LiFeAs band dispersion along ΓM and ΓZ ^[151]; (c) in-plane band structure at Cut D in Figure(b)^[151]; (d) (001) surface spectrum of LiFeAs^[151]; (e) ARPES intensity plot of $\text{LiFe}_{1-x}\text{Co}_x\text{As}$ ($x = 3\%$) at 15 K^[151]; (f) ARPES intensity plot of $\text{LiFe}_{1-x}\text{Co}_x\text{As}$ ($x = 9\%$) at 10 K^[151].

6.1.4 (Li, Fe)OHFeSe

(Li, Fe)OHFeSe 同样也是铁基超导体中具有拓扑超导性质的一种材料, 它的 T_c 高达 42 K. 中国科学技术大学的封东来院士课题组^[152] 对该材料进行了系统的研究. 首先在 ARPES 的测量中观测到了狄拉克锥表面态, 能带计算也确认其拓扑性质; 在无缺陷的 (Li, Fe)OHFeSe 样品区域用 STM 发现了涡旋处的零偏置电导峰^[152]; 通过使用极高能量分辨率的 STM 对 (Li, Fe)OHFeSe 进一步的研究, 发现了马约拉纳零能模诱导的共振 Andreev 反射现象及量子化的零偏置电导峰^[153] (如图 14 所示); 具有高空间分辨的低温 STM 测量发现非零能态展现出清晰的空间振荡, 而零能模则没有发现振荡^[154], 这一发现与理论上 (Li, Fe)OHFeSe 体材料的 s_{++} 波配对和表面的拓扑超导态相一致.

6.1.5 $\text{Sn}_{1-x}\text{In}_x\text{Te}$

SnTe 和 Bi_2Se_3 类似, 也是一种拓扑绝缘体, 对其中 2% 或以上的 Sn 进行 In 替换会使其成为超导体^[155]. 在不同掺杂量的 $\text{Sn}_{1-x}\text{In}_x\text{Te}$ 晶体中, 当 $x \approx 0.04$ ($T_c \approx 1.2$ K) 时, 零偏置电导峰也能被观测到^[156] (如图 15 所示), 同时, ARPES 的测量

表明 In 掺杂后拓扑表面态保持完整^[157], $\text{Sn}_{1-x}\text{In}_x\text{Te}$ 的拓扑超导性得到进一步验证. 需要指出的是, 目前只在 $x \approx 0.04$ 组分中看到了零偏置电导峰.

6.1.6 TaSe_3

2018 年有理论学家通过第一性原理计算预言 TaSe_3 有可能是拓扑超导体^[158], 从而引起了学术界的广泛关注. 科学家们利用 ARPES, STM、电输运测量等实验手段对这一新型准一维超导材料

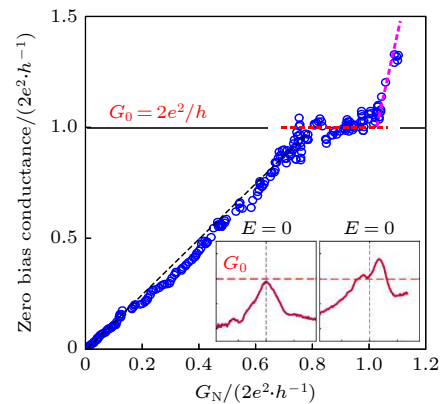


图 14 (Li, Fe)OHFeSe 中量子化的零偏置电导峰^[153]

Fig. 14. Quantized zero-bias conductance peak in (Li, Fe)OHFeSe^[153].

TaSe₃ 的电子结构进行了系统的研究, 成功观测到该材料的拓扑表面态 (如图 16 所示), 从而确认了该材料的拓扑属性, 并通过 STM 测得了它的超导能隙约为 0.25 meV, 证明了 TaSe₃ 是潜在的拓扑超导材料^[159,160]; 在台阶式的边缘附近还观测到更多的边界态, 这很可能有拓扑性的根源^[160].

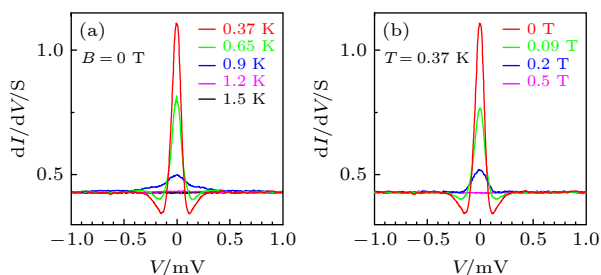


图 15 $\text{Sn}_{1-x}\text{In}_x\text{Te}$ 的零偏置电导峰 (a) 固定磁场改变温度^[156]; (b) 固定温度改变磁场^[156]

Fig. 15. Zero-bias conductance peak in $\text{Sn}_{1-x}\text{In}_x\text{Te}$: (a) Different temperatures at $B = 0$ T^[156]; (b) different magnetic fields at $T = 0.37$ K^[156].

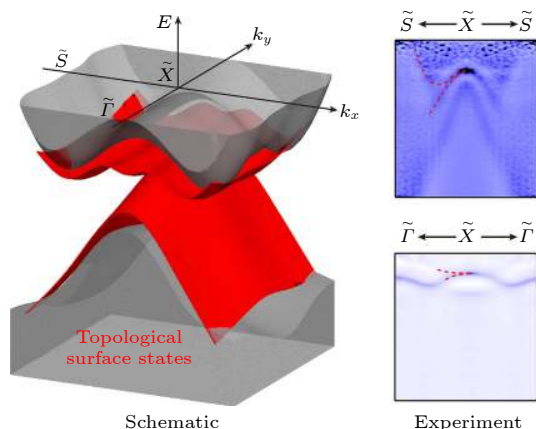


图 16 TaSe₃ 的电子结构^[159]

Fig. 16. Electronic structure of TaSe₃^[159].

6.1.7 2M-WS₂

WS₂ 作为过渡金属硫族化合物 (TMDCs) 中的一员, 是二维材料领域研究的热点之一. 以往对 WS₂ 的研究主要集中在 1T' 相, 因为该相的制备工艺比较成熟. 2019 年中国科学院上海硅酸盐研究所的黄富强团队通过拓扑化学的方法成功制备出 2M 相的 WS₂ 单晶, 该单晶表现出 8.8 K 的超导转变温度, 是本征 TMDCs 材料中最高的, 理论计算表明该材料的能带中存在受拓扑保护的狄拉克锥拓扑表面态^[161](如图 17 所示); 之后科学家们利用低温强磁场 STM 观测 2M-WS₂ 磁通内态密度随空间的演化, 发现了空间各向异性的马约拉纳束缚

态, 这可能是各向异性的超导序参量和拓扑表面态共同导致的^[162], 进一步证实 2M-WS₂ 是拓扑超导体.

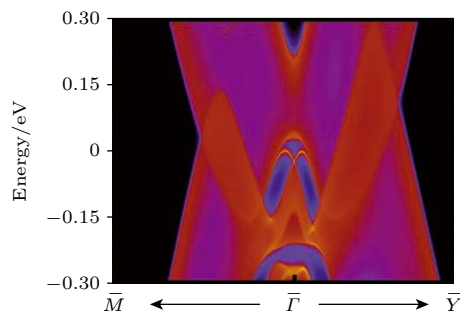


图 17 2M-WS₂ 的拓扑表面态^[161]

Fig. 17. Topological surface states of 2M-WS₂^[161].

6.1.8 PbTaSe₂

在非中心对称的材料中, 由于反转对称性破缺, 可以使得 s 波和 p 波并存, 如果 p 波的能隙大于 s 波的能隙, 那么这个超导体就是拓扑的^[163]. PbTaSe₂ 是非中心对称的 TMDC 材料, 有很强的自旋-轨道耦合, 同时还具有转变温度为 1.8 K 的超导电性, 有理论计算表明 PbTaSe₂ 有拓扑的能带结构^[164]. ARPES 的研究发现 PbTaSe₂ 拥有拓扑节线态, 是整数拓扑不变量, 被反射对称保护^[165]; 利用准粒子散射干涉成像可以观测到 PbTaSe₂ 中有两个拓扑表面态 (如图 18 所示), 内部拓扑表面态在费米能级处与附近的体态完全分离, 而外部拓扑表面态在费米能级处融入附近的体态^[166]; 研究人员还在 PbTaSe₂ 观测到点接触谱中具有一直持续到表面超导上临界场的二重对称性, 暗示其可能是一种“仅存在于表面”的向列性超导^[167].

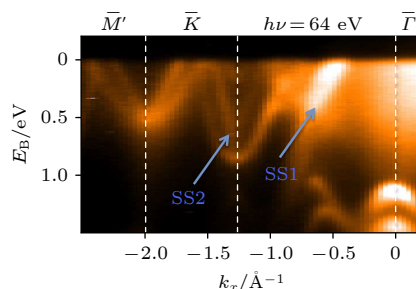


图 18 PbTaSe₂ 中有两个拓扑表面态^[165]

Fig. 18. Two topological surface states in PbTaSe₂^[165].

6.1.9 β -Bi₂Pd

除了上述非中心对称超导体具有成为拓扑超导体的可能性, 中心对称的超导体同样也会有机会

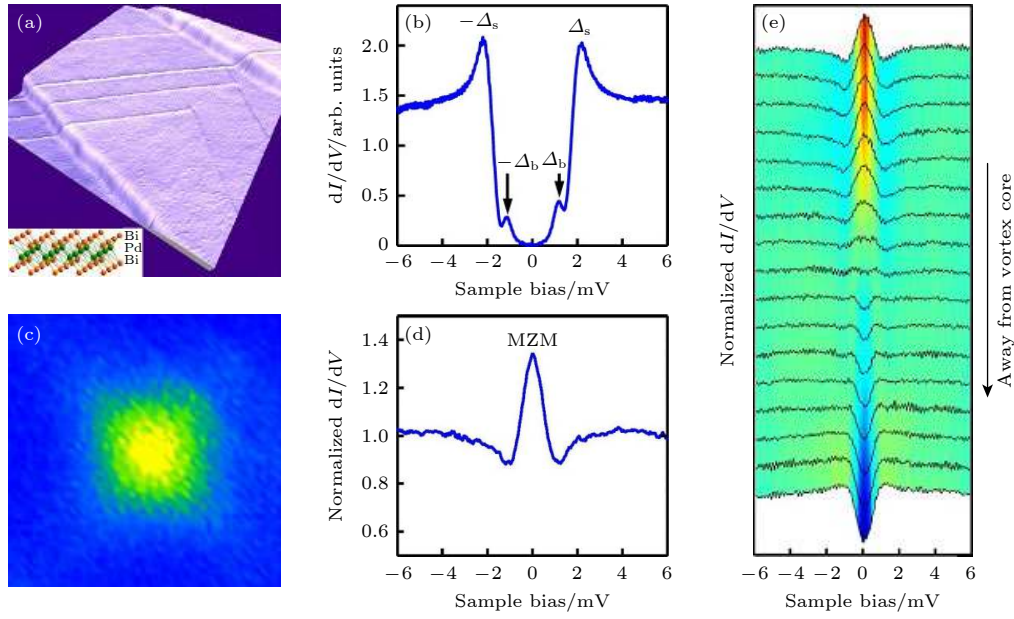


图 19 分子束外延 β - Bi_2Pd 薄膜的拓扑超导电性和马约拉纳零能模 (a) 扫描隧道显微镜的扫描图^[169]; (b) β - Bi_2Pd 的微分电导谱^[169]; (c) 归一化的零偏置电导峰分布图^[169]; (d) 隧穿电导谱^[169]; (e) 涡旋核心附近的归一化微分电导谱^[169]

Fig. 19. Topological superconductivity and MZM in β - Bi_2Pd film grown by MBE: (a) STM topography^[169]; (b) Differential conductance dI/dV spectrum^[169]; (c) normalized zero-bias conductance map^[169]; (d) tunneling conductance dI/dV spectrum^[169]; (e) normalized dI/dV spectra measured at location with radial distance r from the vortex center^[169].

成为拓扑超导体, 比如 β - Bi_2Pd . 自旋分辨 ARPES 观测到了 β - Bi_2Pd 正常态费米能级处有拓扑表面态^[168]; 尽管 β - Bi_2Pd 单晶并未在实验上观测到零能束缚态, 但是在分子束外延制备的 β - Bi_2Pd 薄膜中可以用 ARPES 观测到拓扑表面态在低温下打开一个受时间反演对称性保护的超导能隙, 该超导能隙大于体态的超导能隙, 同时, 在磁通涡旋中心附近观察到了马约拉纳零能模引发的零偏置电导峰^[169,170](如图 19 所示), 这些都为确认 β - Bi_2Pd 是拓扑超导体提供了实验上的证据.

6.1.10 WTe_2

WTe_2 晶体是“第二类外尔半金属”, 具有拓扑不闭合表面态、量子自旋霍尔效应^[171]、巨磁阻^[172]等特性. 由于其是层状材料, 易于解理, 当解理到单个晶胞厚度时, WTe_2 由外尔半金属态变成了二维拓扑绝缘体态, 并在实验上观测到了一维导电边界态^[173], 证实单个晶胞厚的 WTe_2 是拓扑非平庸体系. 在此基础上, 科学家们对此体系进行门电压调控载流子浓度, 获得了超导电性^[174,175](如图 20 所示), 并且发现边界态也是超导的.

除了对单个晶胞厚的 WTe_2 进行电场调控产生超导外, 科学家们还通过对 WTe_2 晶体进行加

压^[176,177]和 K 掺杂^[178]等手段获得了超导电性. 种种迹象表明, WTe_2 中可能存在马约拉纳零能模.

在上述的多个拓扑超导材料体系中, 如 $\text{Li}(\text{Fe}, \text{Co})\text{As}$, $(\text{Li}, \text{Fe})\text{OHFeSe}$, PbTaSe_2 和 β - Bi_2Pd 等, 目前仅有谱学研究的实验证据, 尚缺少输运方面的实验研究, 后期的研究工作重点可以放在输运研究, 以取得更多的实验证据.

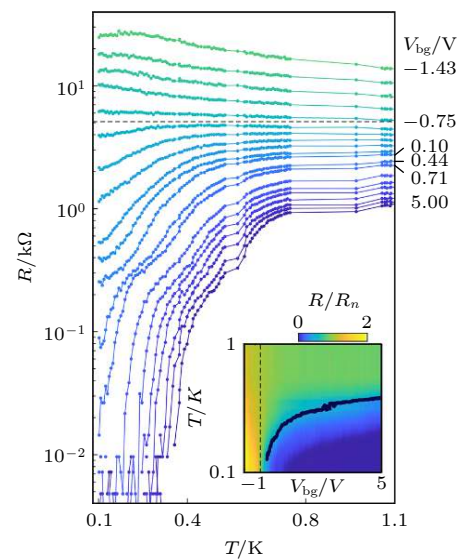


图 20 单个晶胞厚的 WTe_2 通过门电压调控出超导电性^[174]

Fig. 20. Gate-tuned superconductivity in monolayer WTe_2 ^[174].

6.2 人工构建的拓扑超导体

人工构建的拓扑超导体主要是由两部分组成: 自旋非简并金属和 s 波超导电性. 2008 年, 傅亮和 Kane^[113] 最早在理论上提出了人工构建拓扑超导体的可行性, 他们设想将 s 波超导体和具有拓扑表面态的拓扑绝缘体堆垛在一起, 就会得到一个等效的二维 p 波超导体, 在涡旋处会出现马约拉纳零能模.

6.2.1 拓扑绝缘体/s 波超导体异质结

2012 年, 上海交通大学贾金锋院士课题组^[179] 在 NbSe₂ 单晶表面通过分子束外延方式生长出原子级清晰的拓扑绝缘体 Bi₂Se₃, 这种异质结构中的 s 波超导体 NbSe₂ 通过邻近效应将超导电性注入到拓扑绝缘体 Bi₂Se₃ 中, ARPES 和 STM 的测量证实 Bi₂Se₃ 的表面具有超导能隙, 成功实现了超导态和拓扑态的共存; 2014 年, 该课题组成功生长出质量更好的拓扑超导异质结构 Bi₂Te₃/NbSe₂, 通过极低温强磁场 STM 在拓扑绝缘体 Bi₂Te₃ 的表面观测到 Abrikosov 涡旋和 Andreev 低能束缚态, 表明 Bi₂Te₃ 薄膜表面的超导是拓扑超导^[180]; 对 Bi₂Te₃ 表面量子磁通涡旋处的束缚态空间分布进行系统研究, 发现当 Bi₂Te₃ 大于三层后, 拓扑表面态形成, Bi₂Te₃ 上零偏置电导峰在远离涡旋中心 20 nm 处劈裂 (如图 21 所示), 这种行为可能源自

马约拉纳零能模, 为进一步实现对马约拉纳准粒子的调控奠定了基础^[181].

该材料体系非常适合用来研究马约拉纳费米子的新奇特性.

6.2.2 半导体-超导体异质纳米线

半导体-超导体异质纳米线因其制备门槛低并可用门电压调控, 成为拓扑超导体研究的热点材料体系. 理论上预言将强自旋-轨道耦合的半导体纳米线与 s 波超导体进行耦合, 在外加磁场的作用下, 可以在纳米线两端出现马约拉纳准粒子^[182,183]. 该材料体系要求半导体纳米线具有较强的自旋-轨道耦合、较大的朗道 g 因子、较高的迁移率且与超导体容易耦合. 科学家们先后在超导体 NbTiN 与 InSb 纳米线的耦合系统 (NbTiN/InSb)^[184]、超导体 Nb 与 InSb 纳米线的耦合系统 (Nb/InSb)^[185]、超导体 Al 与 InAs 纳米线的耦合系统 (Al/InAs)^[186] 中观测到了零偏置电导峰. 由于早期工艺原因, 器件的杂质和缺陷较多, 无法观测到量子化的零偏置电导峰. 分子束外延技术的引入, 使得器件质量大幅度提高, 纯净能隙中的零偏置电导峰能被观察到^[187,188] (如图 22 所示).

由于半导体-超导体异质纳米线的材料和器件制备与目前的半导体工艺相兼容, 成为了拓扑超导体的主流研究方向之一, 也是研究推进得最快的方向之一, 是最有可能实现实际应用的材料体系.

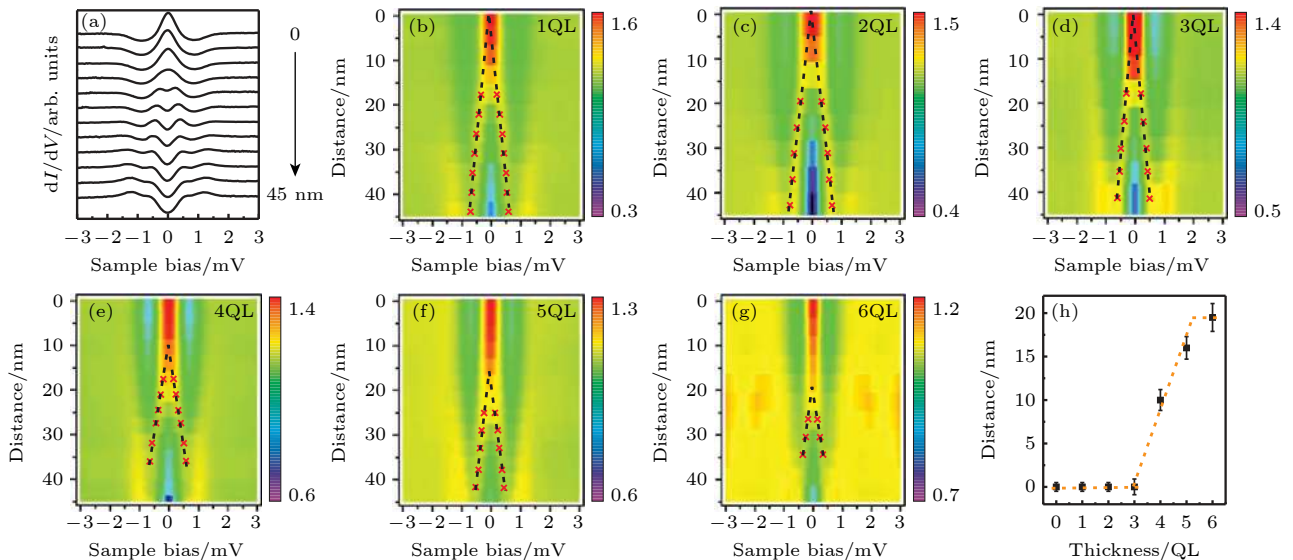


图 21 Bi₂Te₃/NbSe₂ 上的零偏置电导峰劈裂 (a) 电导曲线^[181]; (b) 通过图 (a) 做出的彩色图^[181]; (c)–(g) 2–6 层的电导彩色图^[181]; (h) 劈裂点随层数变化曲线^[181]

Fig. 21. (a) A series of dI/dV curves^[181]; (b) the color image of Figure (a)^[181]; (c)–(g) the experimental results for 2–6QL samples, following the similar data process of Figure (b)^[181]; (h) summary of the start points of the peak split^[181].

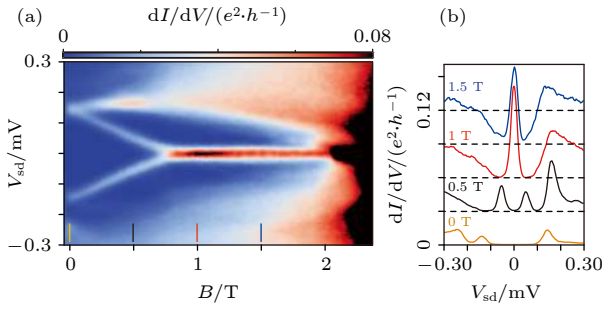


图 22 分子束外生长的 Al/InAs 结构中测得的量子化零偏置电导峰 (a) B - V_{sd} 扫描谱^[187]; (b) 从图 (a) 中提取的不同磁场下的微分电导曲线^[187]

Fig. 22. Quantum zero-bias conductance peak in Al/InAs grown by MBE: (a) B - V_{sd} sweep^[187]; (b) differential conductance line-cut plots taken from Figure (a) at various B values^[187].

6.2.3 量子阱与超导薄膜耦合形成约瑟夫森结

2017 年有理论指出将具有强自旋-轨道耦合的二维电子气置于两层超导铝电极之间, 形成面内约瑟夫森结可以实现拓扑超导电性^[189]. 2019 年, 有科学家根据这个设想设计出一种约瑟夫森结, 它是 HgTe 量子阱与薄膜 Al 耦合形成的. 可以通过控制结上的相位差和改变面内磁场的大小来实现从传统超导态到拓扑超导态的转变^[190], 通过测量结边缘的隧穿谱来确定拓扑超导态: 在弱磁场下, 整个器件处于常规超导状态, 并未观测到零偏置电导峰; 随着磁场的增加, 在一定相位差范围内观测到了零偏置电导峰, 意味着此时整个器件进入了拓扑超导态 (如图 23 所示), 这些研究结果和之前的理论计算结果保持一致.

7 拓扑超导体用于量子计算的展望

基于传统超导体、半导体或者光学的量子计算

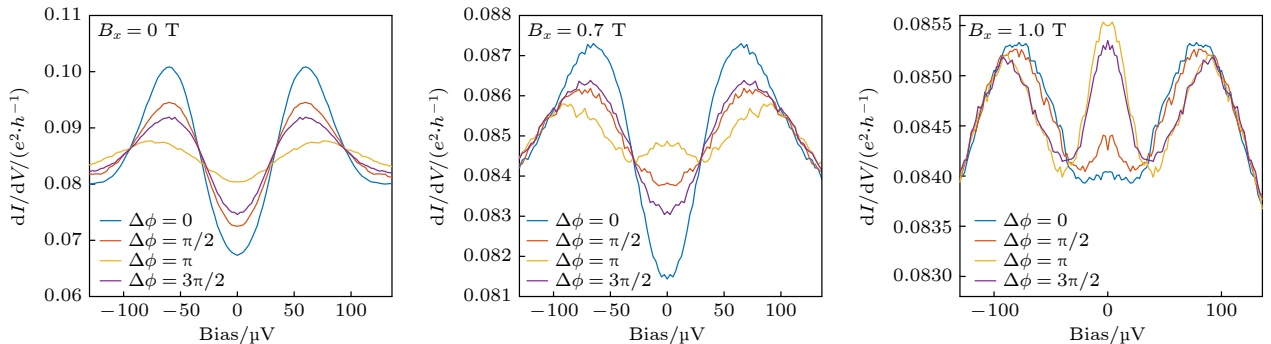


图 23 不同磁场下隧穿电导峰^[190]

Fig. 23. The differential conductance curves as a function of the bias voltage at different magnetic fields^[190].

机已经显示出远强于普通计算机的计算能力^[95–97], 实现了“量子优越性”. 然而它们各自都有一些缺陷, 尤其是在相干时间上, 退相干是无法避免的, 因此制备稳定的量子比特模块是量子计算发展过程中必须要去面对和解决的问题, 基于拓扑超导的拓扑量子计算便是能够克服这个难题的技术路线之一.

目前已经证实多个材料体系具有拓扑超导电性, 其中半导体-超导体异质纳米线最为接近实际应用, 因为其在材料制备和器件加工方面与现有的技术相兼容, 工艺相对成熟, 并已经有明确可行的理论路线图来实现非阿贝尔任意子编织和拓扑量子计算^[191], 是国际上的一个主流方向, 对于这个材料体系, 下一步除了深入理解马约拉纳费米子更多的物理特性外, 还需大力推进器件和系统设计, 最终构建稳定的量子比特模块, 实现量子计算.

拓扑绝缘体/s 波超导体异质结体系是研究多个马约拉纳零能模相互作用的理想平台, 对这类体系可以使用电场调控拓扑超导涡旋从而实现拓扑编织. 因此, 对于此类材料体系, 一方面需要研究马约拉纳准粒子的新奇特特性, 另一方面要将研究推进到马约拉纳零能模的调控、编织等方面, 为制备稳定的量子比特做好技术上的储备.

本征拓扑超导体, 尤其是拓扑非平庸的铁基超导材料, 是能在单一材料中实现纯净马约拉纳零能模的理想材料. 对该材料体系中马约拉纳涡旋态宏观调控已经有一定的实验积累, 下一步将会探索在实验上观测非阿贝尔统计, 实现拓扑量子计算.

在理论和实验方面, 拓扑超导体在量子计算中取得了一系列重要的进展和成果, 相比于其他量子计算技术路线, 由于材料受拓扑保护, 基于拓扑超导体的量子计算有望解决量子比特退相干与容错

量子计算的关键问题; 但利用拓扑超导体完全实现量子计算还面临巨大挑战, 尚未在实验上直接验证非阿贝尔统计, 目前该领域正处于研究的关键阶段, 围绕二维拓扑超导体的探索可能为马约拉纳零能模的探测与编织提供更优平台, 有望在不远的将来实现质的飞跃.

参考文献

- [1] Park J 1970 *Found. Phys.* **1** 23
- [2] Wootters W, Zurek W 1982 *Nature* **299** 802
- [3] Bennett C 1973 *IBM J. Res. Dev.* **17** 525
- [4] Benioff P 1980 *J. Stat. Phys.* **22** 563
- [5] Manin Y I 1980 *Sov. Radio* 13
- [6] Deutsch D, Jozsa R 1992 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **439** 553
- [7] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [8] Shor P W 1994 *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* Santa Fe, NM, USA, November 20–22, 1994 pp124–134
- [9] Monroe C, Meekhof D M, King B E, Itano W M, Wineland D J 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4714
- [10] Divincenzo D P 1997 *Mesoscopic Electron Transport NATO ASI Series* p345 (Dordrecht: Springer)
- [11] Grover L K 1996 *In Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of Computing, Association for Computing Machinery* New York, NY, USA, May 22–24, 1996 p212
- [12] Kitaev A Y 2003 *Ann. Phys.* **303** 2
- [13] Chuang I L, Gershenfeld N, Kubinec M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3408
- [14] Pati A K, Braunstein S L 2000 *Nature* **404** 164
- [15] Knill E, Laflamme R, Milburn G J 2001 *Nature* **409** 46
- [16] Raussendorf R, Briegel H J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5188
- [17] Pittman T B, Fitch M J, Jacobs B C, Franson J D 2003 *Phys. Rev. A* **68** 032316
- [18] O'Brien J L, Pryde G J, White A G, Ralph T C, Branning D 2003 *Nature* **426** 264
- [19] Riebe M, Häffner H, Roos C F, Hänsel W, Benhelm J, Lancaster G P T, Körber T W, Becher C, Schmidt-Kaler F, James D F V, Blatt R 2004 *Nature* **429** 734
- [20] Chanelière T, Matsukevich D N, Jenkins S D, Lan S Y, Kennedy T A B, Kuzmich A 2005 *Nature* **438** 833
- [21] Hijkema M, Weber B, Specht H P, Webster S C, Kuhn A, Rempe G 2007 *Nat. Phys.* **3** 253
- [22] Menicucci N C, Flammia S T, Pfister O 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 130501
- [23] Harrow A W, Hassidim A, Lloyd S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 150502
- [24] DiCarlo L, Chow J M, Gambetta J M, Bishop L S, Johnson B R, Schuster D I, Majer J, Blais A, Frunzio L, Girvin S M, Schoelkopf R J 2009 *Nature* **460** 240
- [25] Politi A, Matthews J C F, O'Brien J L 2009 *Science* **325** 1221
- [26] Devitt S J, Fowler A G, Stephens A M, Greentree A D, Hollenberg L C L, Munro W J, Nemoto K 2009 *New J. Phys.* **11** 1221
- [27] Schneider C, Enderlein M, Huber T, Schaetz T 2010 *Nat. Photonics* **4** 772
- [28] Monz T, Schindler P, Barreiro J T, Chwalla M, Nigg D, Coish W A, Harlander M, Hänsel W, Hennrich M, Blatt R 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 130506
- [29] Aaronson S, Arkhipov A 2011 *The Computational Complexity of Linear Optics* (New York: ACM Press) p333
- [30] Saeedi K, Simmons S, Salvail J Z, Dluhy P, Riemann H, Abrosimov N V, Becker P, Pohl H, Lorton J J L, Thewalt M W 2013 *Science* **342** 830
- [31] Devitt S, Stephens A M, Munro W J, Nemoto K 2013 *Nat. Commun.* **4** 2524
- [32] Nemoto K, Trupke M, Devitt S J, Stephens A M, Scharfenberger M, Buczak K, Nöbauer T, Everitt M S, Schmiedmayer J, Munro W J 2014 *Phys. Rev. X* **4** 031022
- [33] Pfaff W, Jensen B H, Bernien H, Van Dam S B, Blok M S, Taminiau T H, Tiggelman M J, Schouten R N, Markham M, Twitchen D J, Hanson R 2014 *Science* **345** 532
- [34] Monz T, Nigg D, Martinez E A, Brandl M F, Schindler P, Rines R, Wang S X, Chuang I L, Blatt R 2016 *Science* **351** 1068
- [35] Devitt S J 2016 *Phys. Rev. A* **94** 032329
- [36] O'Malley P J J 2016 *Phys. Rev. X* **6** 031007
- [37] Kues M, Reimer C, Roztocki P, Cortés L R, Sciara S, Wetzel B, Zhang Y, Cino A, Chu S T, Little B E, Moss D J, Caspani L, Azaña J, Morandotti R 2017 *Nature* **546** 622
- [38] Cao Y, Li Y, Cao Z, Yin J, Chen Y, Yin H, Chen T, Ma X, Peng C, Pan J 2017 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **114** 4920
- [39] Liang Q Y, Venkatramani A V, Cantu S H, Nicholson T L, Hullans M J, Gorshkov A V, Thompson J D, Chin C, Lukin M D, Vuletic V 2018 *Science* **359** 783
- [40] Watson T F, Philips S G J, Kawakami E, Ward D R, Scarlino P, Veldhorst M, Savage D E, Lagally M G, Friesen M, Coppersmith S N, Eriksson M A, Vandersypen L M K 2018 *Nature* **555** 633
- [41] Lenzini F, Janousek J, Thearle O, Villa M, Haylock B, Kasture S, Cui L, Phan H P, Dao D V, Yonezawa H, Lam P K, Huntington E H, Lobino M 2018 *Sci. Adv.* **4** eaat9331
- [42] Kokail C, Maier C, van Bijnen R, Brydges T, Joshi M K, Jurcevic P, Muschik C A, Silvi P, Blatt R, Roos C F, Zoller P 2019 *Nature* **569** 355
- [43] Wang H, Qin J, Ding X, Chen M, Chen S, You X, He Y, Jiang X, You L, Wang Z, Schneider C, Renema J J, Höfling S, Lu C, Pan J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 250503
- [44] Mukai H, Sakata K, Devitt S J, Wang R, Zhou Y, Nakajima Y, Tsai J S 2020 *New J. Phys.* **22** 043013
- [45] Bienfait A, Zhong Y P, Chang H S, Chou M H, Conner C R, Dumur E, Grebel J, Peairs G A, Povey R G, Satzinger K J, Cleland A N 2020 *Phys. Rev. X* **10** 021055
- [46] Google AI Quantum Collaborators, Arute F, Arya K, Babbush R, Bacon D, Bardin J C, Barends R, Boixo S, Broughton M, Buckley B B, Buell D A, Burkett B, Bushnell N, Chen Y, Chen Z, Chiaro B, Collins R, Courtney W, Demura S, Dunsworth A, Eppens D, Farhi E, Fowler A, Foxen B, Gidney C, Giustina M, Graff R, Habegger S, Harrigan M P, Ho A, Hong S, Huang T, Huggins W J, Ioffe L, Isakov S V, Jeffrey E, Jiang Z, Jones C, Kafri D, Kechedzhi K, Kelly J, Kim S, Klimov P V, Korotkov A, Kostritsa F, Landhuis D, Laptev P, Lindmark M, Lucero E, Martin E, Martinis J M, McClean J R, McEwen M, Megrant A, Mi X, Mohseni M, Mruczkiewicz W, Mutus J, Naaman O, Neeley M, Neill C, Neven H, Niu M, O'Brien T E, Ostby E, Petukhov A, Putterman H, Quintana C, Roushan P, Rubin N C, Sank D, Satzinger K J, Smelyanskiy V, Strain

- D, Sung K J, Szalay M, Takeshita T Y, Vainsencher A, White T, Wiebe N, Yao Z, Yeh P, Zalcman A 2020 *Science* **369** 1084
- [47] Joshi S K, Aktas D, Wengerowsky S, Loncaric M, Neumann S P, Liu B, Scheidl T, Lorenzo G C, Samec Z, Kling L, Qiu A, Razavi M, Stipcevic M, Rarity J, Ursin R 2020 *Sci. Adv.* **6** eaba0959
- [48] Zhong H, Wang H, Deng Y, Chen M, Peng L, Luo Y, Qin J, Wu D, Ding X, Hu Y, Hu P, Yang X, Zhang W, Li H, Li Y, Jiang X, Gan L, Yang G, You L, Wang Z, Li L, Liu N, Lu C, Pan J 2020 *Science* **370** 1460
- [49] Chen Y, Zhang Q, Chen T, Cai W, Liao S, Zhang J, Chen K, Yin J, Ren J, Chen Z, Han S, Yu Q, Liang K, Zhou F, Yuan X, Zhao M, Wang T, Jiang X, Zhang L, Liu W, Li Y, Shen Q, Cao Y, Lu C, Shu R, Wang J, Li L, Liu N, Xu F, Wang X, Peng C, Pan J 2021 *Nature* **589** 214
- [50] Liu H, Tian X, Gu C, Fan P, Ni X, Yang R, Zhang J, Hu M, Guo J, Cao X, Hu X, Zhao G, Lu Y, Gong Y, Xie Z, Zhu S 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 020503
- [51] Daiss S, Langenfeld S, Welte S, Distant E, Thomas P, Hartung L, Morin O, Rempe G 2021 *Science* **371** 614
- [52] Pogorelov I, Feldker T, Marciniak C D, Postler L, Jacob G, Krieglsteiner O, Podlesnic V, Meth M, Negnevitsky V, Stadler M, Höfer B, Wächter C, Lakhmanskiy K, Blatt R, Schindler P, Monz T 2021 *PRX Quantum* **2** 020343
- [53] Ebadi S, Wang T T, Levine H, Keesling A, Semeghini G, Omran A, Bluvstein D, Samajdar R, Pichler H, Ho W, Choi S, Sachdev S, Greiner M, Vuletić V, Lukin M D 2021 *Nature* **595** 227
- [54] Scholl P, Schuler M, Williams H J, Eberharter A A, Barredo D, Schymik K, Lienhard V, Henry L, Lang T C, Lahaye T, Läuchli A M, Browaeys A 2021 *Nature* **595** 233
- [55] Atas Y Y, Zhang J, Lewis R, Jahanpour A, Haase J F, Muschik C A 2021 *Nat. Commun.* **12** 6499
- [56] Schrödinger E 1936 *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **32** 446
- [57] Kwiat P G, Mattle K, Weinfurter H, Zeilinger A, Sergienko A V, Shih Y 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4337
- [58] Aharonovich I, Englund D, Toth M 2016 *Nat. Photonics* **10** 631
- [59] Bouwmeester D, Pan J, Mattle K, Eibl M, Weinfurter H, Zeilinger A 1997 *Nature* **390** 575
- [60] Takeda S, Mizuta T, Fuwa M, van Loock P, Furusawa A 2013 *Nature* **500** 315
- [61] Wang J, Liu J, Chen P 2009 *Micronanoelectron. Technol.* **46** 321 (in Chinese) [王吉林, 刘建设, 陈培毅 2009 微纳电子技术 **46** 321]
- [62] Nakamura Y, Pashkin Y A, Tsai J S 1999 *Nature* **398** 786
- [63] Arute F, Arya K, Babbush R, Bacon D, Bardin J C, Barends R, Biswas R, Boixo S, Fernando G. S. L. Brandao F G S L, Buell D A, Burkett B, Chen Y, Chen Z, Chiaro B, Collins R, Courtney W, Dunsworth A, Farhi E, Foxen B, Fowler A, Gidney C, Giustina M, Graff R, Guerin K, Habegger S, Harrigan M P, Hartmann M J, Ho A, Hoffmann M, Huang T, Humble T S, Isakov S V, Jeffrey E, Jiang Z, Kafri D, Kechedzhi K, Kelly J, Klimov P V, Knysh S, Korotkov A, Kostitsa F, Landhuis D, Lindmark M, Lucero E, Lyakh D, Mandrà S, McClean J R, McEwen M, Megrant A, Mi X, Michielsen K, Mohseni M, Mutus J, Naaman O, Neeley M, Neill C, Niu M, Ostby E, Petukhov A, Platt J C, Quintana C, Rieffel E G, Roushan P, Rubin N C, Sank D, Satzinger K J, Smelyanskiy V, Sung K J, Trevithick M D, Vainsencher A, Villalonga B, White T, Yao Z, Yeh P, Zalcman A, Neven H, Martinis J M 2019 *Nature* **574** 505
- [64] Gong M, Wang S, Zha C, Chen M C, Huang H L, Wu Y, Zhu Q, Zhao Y, Li S, Guo S, Qian H, Ye Y, Chen F, Ying C, Yu J, Fan D, Wu D, Su H, Deng H, Rong H, Zhang K, Cao S, Lin J, Xu Y, Sun L, Guo C, Li N, Liang F, Bastidas V M, Nemoto K, Munro W J, Huo Y H, Lu C Y, Peng C Z, Zhu X, Pan J W 2021 *Science* **372** 948
- [65] Guo Q, Cheng C, Li H, Xu S, Zhang P, Wang Z, Song C, Liu W, Ren W, Dong H, Mondaini R, Wang H 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 240502
- [66] Zhang X, Li H, Cao G, Xiao M, Guo G C, Guo G P 2021 *National Sci. Rev.* **6** 32
- [67] Petta J R, Johnson A C, Taylor J M, Laird E A, Yacoby A, Lukin M D, Marcus C M, Hanson M P, Gossard A C 2005 *Science* **309** 2180
- [68] Wang Z 2010 *Topological Quantum Computation* (Rhode Island: American Mathematical Soc) p112
- [69] Fowler A G, Mariantoni M, Martinis J M, Cleland A N 2012 *Phys. Rev. A* **86** 032324
- [70] Hile S J, Fricke L, House M G, Peretz E, Chen C Y, Wang Y, Broome M, Gorman S K, Keizer J G, Rahman R, Simmons M Y 2018 *Sci. adv.* **4** 1459
- [71] Morello A, Pla J J, Zwanenburg F A, Chan K W, Tan K Y, Huebl H, Möttönen M, Nugroho C D, Yang C, van Donkelaar J A, Alves A D C, Jamieson D N, Escott C C, Hollenberg L C L, Clark R G, Dzurak A S 2010 *Nature* **467** 687
- [72] Harvey-Collard P, D'Anjou B, Rudolph M, Jacobson N T, Dominguez J, Eyck G A T, Wendt J R, Phuy M, Lilly M P, Coish W A, Pioro-Ladrière M, Carroll M S 2018 *Phys. Rev. X* **8** 021046
- [73] Yoneda J, Takeda K, Otsuka T, Nakajima T, Delbecq M R, Allison G, Honda T, Kodera T, Oda S, Hoshi Y, Usami N, Itoh K M, Tarucha S 2018 *Nat. Nanotechnol.* **13** 102
- [74] Muhonen J T, Dehollain J P, Laucht A, Hudson F E, Kalra R, Sekiguchi T, Itoh K M, Jamieson D N, McCallum J C, Dzurak A S, Morello A 2014 *Nat. Nanotechnol.* **9** 986
- [75] Huang W, Yang C H, Chan K W, Tanttu T, Hensen B, Leon R C C, Fogarty M A, Hwang J C C, Hudson F E, Itoh K M, Morello A, Laucht A, Dzurak A S 2019 *Nature* **569** 532
- [76] Blume-Kohout R, Gamble J K, Nielsen E, Rudinger K, Mizrahi J, Fortier K, Maunz P 2017 *Nat. Commun.* **8** 1
- [77] Mądzik M T, Asaad S, Youssef A, Joecker B, Rudinger K M, Nielsen E, Young K C, Proctor T J, Baczewski A D, Laucht A, Schmitt V, Hudson F E, Itoh K M, Jakob A M, Johnson B C, Jamieson D N, Dzurak A S, Ferrie C, Blume-Kohout R, Morello A 2022 *Nature* **601** 348
- [78] Noiri A, Takeda K, Nakajima T, Kobayashi T, Sammak A, Scappucci G, Tarucha S 2022 *Nature* **601** 338
- [79] Xue X, Russ M, Samkharadze N, Undseth B, Sammak A, Scappucci G, Vandersypen L M K 2022 *Nature* **601** 343
- [80] Monz T, Kim K, Villar A S, Schindler P, Chwalla M, Riebe M, Roos C F, Haffner H, Hansel W, Hennrich M, Blatt R 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 200503
- [81] Wilk T, Webster S C, Kuhn A, Rempe G 2007 *Science* **317** 488
- [82] DeMille D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 067901
- [83] Jaksch D, Bruder C, Cirac J I, Gardiner C W, Zoller P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3108
- [84] Greiner M, Mandel O, Esslinger T, Hänsch T W, Bloch I 2002 *Nature* **415** 39
- [85] Cirac J I, Zoller P 2004 *Phys. Today* **57** 38
- [86] Pu Y F, Zhang S, Wu Y K, Jiang N, Chang W, Li C, Duan

- L M 2021 *Nat. Photonics* **15** 374
- [87] Hartke T, Oreg B, Jia N, Zwierlein M 2022 *Nature* **601** 537
- [88] Singh K, Anand S, Pocklington A, Kemp J T, Bernien H 2022 *Phys. Rev. X* **12** 011040
- [89] Gao W B, Lu C Y, Yao X C, Xu P, Guhne O, Goebel A, Chen Y A, Peng C Z, Chen Z B, Pan J W 2010 *Nat. Phys.* **6** 331
- [90] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A 2001 *Nature* **412** 313
- [91] Prechtel J H, Kuhlmann A V, Houel J, Greuter L, Ludwig A, Reuter D, Wieck A D, Warburton R J 2013 *Phys. Rev. X* **3** 041006
- [92] Jayakumar H, Predojevic A, Huber T, Kauten T, Solomon G S, Weihs G 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 135505
- [93] Crespi A, Osellame R, Ramponi R, Brod D J, Galvão E F, Spagnolo N, Vitelli C, Maiorino E, Mataloni P, Sciarrino F 2013 *Nat. Photonics* **7** 545
- [94] Spring J B, Metcalf B J, Humphreys P C, Kolthammer W S, Jin X M, Barbieri M, Datta A, Thomas-Peter N, Langford N K, Kundys D, Gates J C, Smith B J, Smith P G R 2012 *Science* **339** 798
- [95] Tillmann M, Dakić B, Heilmann R, Nolte S, Szameit A, Walther P 2013 *Nat. Photonics* **7** 540
- [96] Broome M A, Fedrizzi A, Rahimi-Keshari S, Dove J, Aaronson S, Ralph T C, White A G 2013 *Science* **339** 794
- [97] Wang H, He Y, Li Y H, Su Z E, Li B, Huang H L, Ding X, Chen M C, Liu C, Qin J, Li J P, He Y M, Schneider C, Kamp M, Peng C Z, Hofling S, Lu C Y, Pan J W 2017 *Nat. Photonics* **11** 361
- [98] Tang H, Lin X F, Feng Z, Chen J Y, Gao J, Sun K, Wang C Y, Lai P C, Xu X Y, Wang Y, Qiao L F, Yang A L, Jin X M 2018 *Sci. Adv.* **4** 3174
- [99] Kashiwazaki T, Yamashita T, Takanashi N, Inoue A, Umeki T, Furusawa A 2021 *Appl. Phys. Lett.* **119** 251104
- [100] Ashida Y, Zongping G, Masahito U 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
- [101] Zhao X M, Guo C X, Kou S P, Zhuang L, Liu W M 2021 *Phys. Rev. B* **104** 205131
- [102] Zhao X M, Guo C X, Yang M L, Wang H, Liu W M, Kou S P 2021 *Phys. Rev. B* **104** 214502
- [103] Jing D Y, Wang H Y, Liu W M 2022 *J. Phys. Condens. Matter* **34** 195401
- [104] De Gennes P G 1999 *Superconductivity of metals and alloys* (Boca Raton: CRC Press)
- [105] Avron J E, Seiler R, Simon B 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 51
- [106] Kitaev A Y 2001 *Phys. Usp.* **44** 131
- [107] Lahtinen V, Pachos J 2017 *SciPost Phys.* **3** 021
- [108] Sarma S D, Freedman M, Nayak C 2015 *NPJ Quantum Inf.* **1** 1
- [109] Read N, Green D 2000 *Phys. Rev. B* **61** 10267
- [110] Fu L, Berg E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 097001
- [111] Cho G Y, Bardarson J H, Lu Y M, Moore J E 2012 *Phys. Rev. B* **86** 214514
- [112] Kobayashi S, Sato M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 187001
- [113] Fu L, Kane C L 2008 *Phys. Rev. Lett.* **10** 096407
- [114] Sato M, Takahashi Y, Fujimoto S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 020401
- [115] Langbehn J, Peng Y, Trifunovic L, von Oppen F, Brouwer P W 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 246401
- [116] Song Z, Fang Z, Fang C 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 246402
- [117] Benalcazar W A, Bernevig B A, Hughes T L 2017 *Phys. Rev. B* **96** 245115
- [118] Schindler F 2018 *Sci. Adv.* **4** 0346
- [119] Zhu X 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 236401
- [120] Yan Z 2019 *Phys. Rev. B* **100** 205406
- [121] Hsu C H, Stano P, Klinovaja J, Loss D 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 196801
- [122] Zhang P 2018 *Science* **360** 182
- [123] Hassler F 2014 *Majorana qubits* arXiv: 1404.0897
- [124] Law K T, Lee P A, Ng T K 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 237001
- [125] Yamakage A, Yada K, Sato M, Tanaka Y 2012 *Phys. Rev. B* **85** 180509
- [126] Sato M, Ando Y 2017 *Rep. Prog. Phys.* **80** 076501
- [127] Wang Z, Qi X, Zhang S 2011 *Phys. Rev. B* **84** 014527
- [128] Marra P, Citro R, Braggio A 2016 *Phys. Rev. B* **93** 220507
- [129] Chung S B, Horowitz J, Qi X L 2013 *Phys. Rev. B* **88** 214514
- [130] Yamakage A, Sato M, Yada K, Kashiwaya S, Tanaka Y 2013 *Phys. Rev. B* **87** 100510
- [131] Sato M 2010 *Phys. Rev. B* **81** 220504
- [132] Fu L, Berg E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 097001
- [133] Berezinskii V L 1974 *JETP Lett.* **20** 287
- [134] Asano Y, Tanaka Y 2013 *Phys. Rev. B* **87** 104513
- [135] Hor Y S, Williams A J, Checkelsky J G, Roushan P, Seo J, Xu Q, Zandbergen H W, Yazdani A, Ong N P, Cava R J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 057001
- [136] Wray L A, Xu S, Xia Y, Hor Y S, Qian D, Fedorov A V, Lin H, Bansil A, Cava R J, Hasan M Z 2010 *Nat. Phys.* **6** 855
- [137] Sasaki S, Kriener M, Segawa K, Yada K, Tanaka Y, Sato M, Ando Y 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 217001
- [138] Matano K, Kriener M, Segawa K, Ando Y, Zheng G 2016 *Nat. Phys.* **12** 852
- [139] Yonezawa S, Tajiri K, Nakata S, Nagai Y, Wang Z, Segawa K, Ando Y, Maeno Y 2017 *Nat. Phys.* **13** 123
- [140] Liu Z, Yao X, Shao J, Zuo M, Pi L, Tan S, Zhang C, Zhang Y 2015 *J. Am. Chem. Soc.* **137** 10512
- [141] Asaba T, Lawson B J, Tinsman C, Chen L, Corbae P, Li G, Qiu Y, Hor Y S, Fu L, Li L 2017 *Phys. Rev. X* **7** 011009
- [142] Zhang P, Yaji K, Hashimoto T, Ota Y, Kondo T, Okazaki K, Wang Z, Wen J, Gu G D, Ding H, Shin S 2018 *Science* **360** 182
- [143] Zhang P, Richard P, Xu N, Xu Y M, Ma J, Qian T, Fedorov A V, Denlinger J D, Gu G D, Ding H 2014 *Appl. Phys. Lett.* **105** 172601
- [144] Wang Z, Zhang P, Xu G, Zeng L K, Miao H, Xu X, Qian T, Weng H, Richard P, Fedorov A V, Ding H, Dai X, Fang Z 2015 *Phys. Rev. B* **92** 115119
- [145] Wu X, Qin S, Liang Y, Fan H, Hu J 2016 *Phys. Rev. B* **93** 115129
- [146] Shi X, Han Z, Richard P, Wu X, Peng X, Qian T, Wang S, Hu J, Sun Y, Ding H 2017 *Sci. Bull.* **62** 503
- [147] Wang D, Kong L, Fan P, Chen H, Zhu S, Liu W, Cao L, Sun Y, Du S, Schneeloch J, Zhong R, Gu G, Fu L, Ding H, Gao H 2018 *Science* **362** 333
- [148] Zhu S, Kong L, Cao L, Chen H, Papaj M, Du S, Xing Y, Liu W, Wang D, Shen C, Yang F, Schneeloch J, Zhong R, Gu G, Fu L, Zhang Y, Ding H, Gao H 2020 *Science* **367** 189
- [149] Kong L, Zhu S, Papaj M, Chen H, Cao L, Isobe H, Xing Y, Liu W, Wang D, Fan P, Sun Y, Du S, Schneeloch J, Zhong R, Gu G, Fu L, Gao H, Ding H 2019 *Nat. Phys.* **15** 1181
- [150] Jiang D, Pan Y, Wang S, Lin Y, Holland C M, Kirtley J R, Chen X, Zhao J, Chen L, Yin S, Wang Y 2021 *Sci. Bull.* **66** 425
- [151] Zhang P, Wang Z, Wu X, Yaji K, Ishida Y, Kohama Y, Dai G, Sun Y, Bareille C, Kuroda K, Kondo T, Okazaki K, Kindo K, Wang X, Jin C, Hu J, Thomale R, Sumida K, Wu

- S, Miyamoto K, Okuda T, Ding H, Gu G D, Tamegai T, Kawakami T, Sato M, Shin S 2019 *Nat. Phys.* **15** 41
- [152] Liu Q, Chen C, Zhang T, Peng R, Yan Y, Wen C, Lou X, Huang Y, Tian J, Dong X, Wang G, Bao W, Wang Q, Yin Z, Zhao Z, Feng D 2018 *Phys. Rev. X* **8** 041056
- [153] Chen C, Liu Q, Zhang T Z, Li D, Shen P P, Dong X L, Zhao Z X, Zhang T, Feng D L 2019 *Chin. Phys. Lett.* **36** 057403
- [154] Zhang T, Bao W, Chen C, Li D, Lu Z, Hu Y, Yang W, Zhao D, Yan Y, Dong X, Wang Q, Zhang T, Feng D 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 127001
- [155] Novak M, Sasaki S, Kriener M, Segawa K, Ando Y 2013 *Phys. Rev. B* **88** 140502
- [156] Sasaki S, Ren Z, Taskin A A, Segawa K, Fu L, Ando Y 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 217004
- [157] Sato T, Tanaka Y, Nakayama K, Souma S, Takahashi T, Sasaki S, Ren Z, Taskin A A, Segawa K, Ando Y 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 206804
- [158] Nie S, Xing L, Jin R, Xie W, Wang Z, Prinz F B 2018 *Phys. Rev. B* **98** 125143
- [159] Chen C, Liang A, Liu S, Nie S, Huang J, Wang M, Li Y, Pei D, Yang H, Zheng H, Zhang Y, Lu D, Hashimoto M, Barinov A, Jozwiak C, Bostwick A, Rotenberg E, Kou X, Yang L, Guo Y, Wang Z, Yuan H, Liu Z, Chen Y 2020 *Matter* **3** 2055
- [160] Liu S, Nie S, Qi Y, Guo Y, Yuan H, Yang L, Chen Y, Wang M, Liu Z 2021 *Chin. Phys. Lett.* **38** 077302
- [161] Fang Y, Pan J, Zhang D, Wang D, Hirose H T, Terashima T, Uji S, Yuan Y, Li W, Tian Z, Xue J, Ma Y, Zhao W, Xue Q, Mu G, Zhang H, Huang F 2019 *Adv. Mater.* **31** 1901942
- [162] Yuan Y, Pan J, Wang X, Fang Y, Song C, Wang L, He K, Ma X, Zhang H, Huang F, Li W, Xue Q 2019 *Nat. Phys.* **15** 1046
- [163] Sato M, Fujimoto S 2009 *Phys. Rev. B* **79** 094504
- [164] Yang X, Bao J, Lou Z, Li P, Jiang C, Wang J, Sun T, Liu Y, Guo W, Ramakrishnan S, Kotla S R, Tolkiehn M, Paulmann C, Cao G, Nie Y, Li, Yang Liu W, van Smaalen S, Lin X, Xu Z 2022 *Adv. Mater.* **34** 2108550
- [165] Bian G, Chang T R, Sankar R, Xu S Y, Zheng H, Neupert T, Chiu C K, Huang S M, Chang G, Belopolski I, Sanchez D S, Neupane M, Alidoust N, Liu C, Wang B, Lee C C, Jeng H T, Zhang C, Yuan Z, Jia S, Bansil A, Chou F, Lin H, Hasan M Z 2016 *Nat. Commun.* **7** 10556
- [166] Guan S Y, Chen P J, Chu M W, Sankar R, Chou F, Jeng H T, Chang C S, Chuang T M 2016 *Sci. Adv.* **2** 1600894
- [167] Le T, Sun Y, Jin H, Che L, Yin L, Li J, Pang G M, Xu C Q, Zhao L X, Kittaka S, Sakakibara T, Machida K, Sankar R, Yuan H Q, Chen G F, Xu X, Li S, Zhou Y, Lu X 2020 *Sci. Bull.* **65** 1349
- [168] Sakano M, Okawa K, Kanou M, Sanjo H, Okuda T, Sasagawa T, Ishizaka K 2015 *Nat. Commun.* **6** 8595
- [169] Lv Y F, Wang W L, Zhang Y M, Ding H, Li W, Wang L, He K, Song C L, Ma X C, Xue Q K 2017 *Sci. Bull.* **62** 852
- [170] Guan J Y, Kong L, Zhou L Q, Zhong Y G, Li H, Liu H J, Tang C Y, Yan D Y, Yang F Z, Huang Y B, Shi Y G, Qian T, Weng H M, Sun Y J Ding H 2019 *Sci. Bull.* **64** 1215
- [171] Wu S, Fatemi V, Gibson Q D, Watanabe K, Taniguchi T, Cava R J, Jarillo-Herrero P 2018 *Science* **359** 76
- [172] Wang Y, Liu E, Liu H, Pan Y, Zhang L, Zeng J, Fu Y, Wang M, Xu K, Huang Z, Wang Z, Lu H, Xing D, Wang B, Wan X, Miao F 2016 *Nat. Commun.* **7** 13142
- [173] Peng L, Yuan Y, Li G, Yang X, Xian J, Yi C, Shi Y, Fu Y 2017 *Nat. Commun.* **8** 659
- [174] Fatemi V, Wu S, Cao Y, Bretheau L, Gibson Q D, Watanabe K, Taniguchi T, Cava R J, Jarillo-Herrero P 2018 *Science* **362** 926
- [175] Sajadi E, Palomaki T, Fei Z, Zhao W, Bement P, Olsen C, Luescher S, Xu X, Folk J A, Cobden D H 2018 *Science* **362** 922
- [176] Pan X, Chen X, Liu H, Feng Y, Wei Z, Zhou Y, Chi Z, Pi L, Yen F, Song F, Wan X, Yang Z, Wang B, Wang G, Zhang Y 2015 *Nat. Commun.* **6** 7805
- [177] Kang D, Zhou Y, Yi W, Yang C, Guo J, Shi Y, Zhang S, Wang Z, Zhang C, Jiang S, Li A, Yang K, Wu Q, Zhang G, Sun L, Zhao Z 2015 *Nat. Commun.* **6** 7804
- [178] Zhu L, Li Q Y, Lü Y Y, Li S, Zhu X Y, Jia Z Y, Chen Y B, Wen J, Li S C 2018 *Nano Lett.* **18** 6585
- [179] Wang M X, Liu C, Xu J P, Yang F, Miao L, Yao M Y, Gao C L, Shen C, Ma X, Chen X, Xu Z A, Liu Y, Zhang S C, Qian D, Jia J F, Xue Q K 2012 *Science* **336** 52
- [180] Xu J P, Liu C, Wang M X, Ge J, Liu Z L, Yang X, Chen Y, Liu Y, Xu Z A, Gao C L, Qian D, Zhang F C, Jia J F 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 217001
- [181] Xu J P, Wang M X, Liu Z L, Ge J F, Yang X, Liu C, Xu Z A, Guan D, Gao C L, Qian D, Liu Y, Wang Q H, Zhang F C, Xue Q K, Jia J F 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 017001
- [182] Oreg Y, Refael G, von Oppen F 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 177002
- [183] Lutchyn R M, Sau J D, Das Sarma S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 077001
- [184] Mourik V, Zuo K, Frolov S M, Plissard S R, Bakkers E P A M, Kouwenhoven L P 2012 *Science* **336** 1003
- [185] Deng M T, Yu C L, Huang G Y, Larsson M, Caroff P, Xu H Q 2012 *Nano Lett.* **12** 6414
- [186] Das A, Ronen Y, Most Y, Oreg Y, Heiblum M, Shtrikman H 2012 *Nat. Phys.* **8** 887
- [187] Deng M T, Vaitiekėnas S, Hansen E B, Danon J, Leijnse M, Flensberg K, Nygard J, Krogstrup P, Marcus C M 2016 *Science* **354** 1557
- [188] Gazibegovic S, Car D, Zhang H, Balk S C, Logan J A, de Moor M W A, Cassidy M C, Schmits R, Xu D, Wang G, Krogstrup P, Op het Veld R L M, Zuo K, Vos Y, Shen J, Bouman D, Shojaei B, Pennachio D, Lee J S, van Veldhoven P J, Koelling S, Verheijen M A, Kouwenhoven L P, Palmstrøm C J, Bakkers E P A M 2017 *Nature* **548** 434
- [189] Pientka F, Keselman A, Berg E, Yacoby A, Stern A, Halperin B I 2017 *Phys. Rev. X* **7** 021032
- [190] Ren H, Pientka F, Hart S, Pierce A T, Kosowsky M, Lunczer L, Schlereth R, Scharf B, Hankiewicz E M, Molenkamp L W, Halperin B I, Yacoby A 2019 *Nature* **569** 93
- [191] Alicea J, Oreg Y, Refael G, von Oppen F, Fisher M P A 2011 *Nat. Phys.* **7** 412

SPECIAL TOPIC—Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Research progress of material, physics, and device of topological superconductors for quantum computing^{*}

Jiang Da¹⁾ Yu Dong-Yang¹⁾ Zheng Zhan¹⁾ Cao Xiao-Chao¹⁾

Lin Qiang^{1)†} Liu Wu-Ming^{1)2)‡}

1) (*School of Science & Institute for Frontiers and Interdisciplinary Sciences, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China*)

2) (*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(Received 31 March 2022; revised manuscript received 26 April 2022)

Abstract

Since the physical limit of Moore's law is being approached, many alternative computing methods have been proposed, among which quantum computing is the most concerned and widely studied. Owing to the non closeability of quantum system, the uncontrollable external factors will lead to quantum dissipation and decoherence. In order to avoid the decoherence of quantum superposition state, the fabrication of robust quantum bits has become one of the key factors. Majorana zero mode (MZM) is a quasi-particle emerging in the topological and superconducting hybrid system. It has non-Abelian statistical properties. Therefore, the topological qubit constructed by MZM has natural robustness to quantum decoherence. Despite the arduous exploration by various experimental groups, the experimental verification of MZM is still lacking. This paper reviews the history and main technical routes of quantum computing, focusing on the theory of topological superconductors, observable experimental phenomena, and the latest experimental progress. Furthermore we discuss and analyze the present status of the topological superconductor research. Finally, we prospect the future experiments and applications of topological superconductors in quantum computing.

Keywords: quantum computing, topological superconductor

PACS: 03.65.-w, 03.67.Lx

DOI: 10.7498/aps.71.20220596

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61727821, U20A20219, 61835013), and the National Key R&D Program of China (Grants Nos. 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1400243).

[†] Corresponding author. E-mail: qlin@zjut.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: wmliu@aphy.iphy.ac.cn

面向量子计算的拓扑超导材料、物理和器件研究

姜达 余东洋 郑沾 曹晓超 林强 刘伍明

Research progress of material, physics, and device of topological superconductors for quantum computing

Jiang Da Yu Dong-Yang Zheng Zhan Cao Xiao-Chao Lin Qiang Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 160302 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220596

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220596>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

拓扑超导体 $\text{FeSe}_x\text{Te}_{1-x}$ 单晶超导性能与磁通钉扎

Superconducting and flux pinning properties of $\text{FeSe}_x\text{Te}_{1-x}$ topological superconductors

物理学报. 2020, 69(23): 237401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20201125>

电子型 FeSe 基高温超导体的磁通束缚态与Majorana零能模

Vortex bound states and Majorana zero mode in electron-doped FeSe -based high-temperature superconductor

物理学报. 2021, 70(1): 017401 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201673>

硅和锗量子计算材料研究进展

Research progress of silicon and germanium quantum computing materials

物理学报. 2021, 70(21): 217802 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211492>

核磁共振量子信息处理研究的新进展

New research progress of nuclear magnetic resonance quantum information processing

物理学报. 2018, 67(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180754>

量子存储式量子计算机与无噪声光子回波

“Quantum memory” quantum computers and noiseless photon echoes

物理学报. 2022, 71(7): 070305 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212245>

铌基超导量子比特及辅助器件的制备

Fabrication of superconducting qubits and auxiliary devices with niobium base layer

物理学报. 2022, 71(5): 050303 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211865>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

基于级联四波混频过程产生四模簇态*

董安琪¹⁾ 张凯^{1)†} 荆杰泰^{1)2)3)‡} 刘伍明^{4)5)6)††}

1) (华东师范大学, 精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200062)

2) (中国科学院超强激光科学卓越创新中心, 上海 201800)

3) (山西大学, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

4) (中国科学院物理研究所, 北京凝聚态物理国家研究中心, 北京 100190)

5) (中国科学院大学物理科学学院, 北京 100190)

6) (松山湖材料实验室, 东莞 523808)

(2022 年 3 月 10 日收到; 2022 年 4 月 11 日收到修改稿)

簇态是量子计算和量子信息处理的重要资源, 因其具有独特的纠缠性质和丰富的结构而受到广泛的关注. 本文从理论上提出一种基于级联四波混频过程产生四模纠缠态的方案, 利用部分转置正定判据和本征模分解研究其内部纠缠特性. 此外, 通过调控平衡零拍探测的相对相位和后处理噪声信号, 将输出的纠缠态重构优化, 最终生成三种不同结构的四模簇态. 该方法可以有效地减少在有限的压缩条件下产生簇态而引入的额外噪声. 本文理论结果为基于原子系综四波混频过程产生可扩展的连续变量簇态提供可靠方案.

关键词: 四波混频, 本征模, 簇态

PACS: 03.67.Bg, 03.65.Ud, 42.50.-p

DOI: 10.7498/aps.71.20220433

1 引言

连续变量簇态作为一种重要的物理资源, 在基于测量的量子计算和量子信息处理领域起着至关重要的作用^[1]. 为了在真实物理系统中实现可扩展的量子计算, 研究者们已经在理论上提出多种方案, 并且在不同系统中进行了实验, 其中单向量子计算机是基于测量的量子计算的重要理论框架^[2],

因此, 簇态作为单向量子计算的基本资源而得到广泛的关注. 依据特定的顺序和测量基矢对簇态做单模测量就可以实现量子计算^[3]. 在连续变量系统中, 通常使用线性分束器网络耦合多个独立的单模压缩态来构造连续变量簇态^[4, 5]. 然而, 随着纠缠模式数的增加系统的复杂性也急剧增加. 目前最新研究趋势是通过空间^[6]、时间^[7-9]和频率^[10, 11]复用多个非线性过程形成量子网络, 这些方法产生的簇态适用于量子计算, 但是由于产生的光束不易空间

* 上海市教委创新计划 (批准号: 2021-01-07-00-08-E00100)、国家自然科学基金 (批准号: 11874155, 91436211, 11374104, 12174110)、上海市教委基础研究项目 (批准号: 20JC1416100)、上海市自然科学基金 (批准号: 17ZR1442900)、闵行领军人才 (批准号: 201971)、上海市科技创新行动计划 (批准号: 17JC1400401)、上海青年科技英才扬帆计划 (批准号: 21YF1410800)、国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2016YFA0302103)、上海市市级科技重大专项 (批准号: 2019SHZDZX01)、高等学校学科创新引智计划 (批准号: B12024) 和中国博士后科学基金 (批准号: 2020M681224) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: kzhang@lps.ecnu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: jtjing@phy.ecnu.edu.cn

†† 通信作者. E-mail: wliu@iphy.ac.cn

分离, 所以很难应用在量子通信网络. 因此, 需要一种可扩展的确定性产生的方法生成空间分离的簇态.

基于热铷原子系综的四波混频 (four-wave mixing, FWM) 过程由于其独特的优势, 已经证明是量子信息处理的重要资源 [12–16]. 该系统由于原子相干特性而具有很强的非线性效应, 使系统不需要借助光学腔而具有空间多模性, 因此产生空间分离的非经典光束 [17]. 利用四波混频的空间多模特性 [18–19], 可以将相互正交的轨道角动量模式引入产生多组并行的连续变量纠缠 [20–22], 利用轨道角动量模式匹配的参量放大器实现多通道量子隐形传态 [23]. 四波混频因空间多模特性而成为高容量连续变量量子信息处理的重要资源. 这些特点使得基于原子系综的四波混频过程取得一系列重要的研究进展, 例如实现全光子量子隐形传态 [23]、可控的量子态延迟 [24]、量子密集编码 [25] 以及量子克隆等 [26]. 基于该系统的独特优势, 本文理论上提出一种基于级联四波混频过程产生四模纠缠态的方案, 通过非对称结构级联三个热铷原子池确定性地产生空间分离的四模纠缠态. 然后, 通过优化算法后处理从一组初始的正交振幅和正交相位压缩态重构出多模簇态, 这种方法可以减小在有限压缩的条件下产生簇态而引入的额外噪声 [27–29]. 该方法通过调控平衡零拍探测的本振光和信号光的相对相位和利用实数正交矩阵来重组优化结果以生成不同结构的簇态.

2 基于级联四波混频过程产生四模纠缠态

2.1 理论模型

基于原子系综的级联四波混频过程已经被证明是产生纠缠态的重要手段 [22,30]. 通过非对称结构级联三个四波混频过程产生四模纠缠态的理论示意图如图 1 所示. 首先探针光 $\hat{a}_{Pr1}$ 注入第一个热铷原子池与泵浦光发生相互作用, 探针光被放大为 $\hat{a}_{Pr2}$, 同时产生共轭光 $\hat{a}_{C1}$. $\hat{a}_{Pr2}$ 与泵浦光以一定角度注入第二个热铷原子池, 经过第二次四波混频过程产生双光束 $\hat{a}_{Pr3}$ 和 $\hat{a}_{C2}$. 被放大的探针光 $\hat{a}_{Pr3}$ 再次注入第三个热铷原子池产生 $\hat{a}_{Pr4}$ 和 $\hat{a}_{C3}$. 最终在级联四波混频过程的输出端产生一束探针光 $\hat{a}_{Pr4}$ 和三束共轭光 $\hat{a}_{C1}, \hat{a}_{C2}, \hat{a}_{C3}$. 该级联四波混频过程的输入输出关系可以写为

$$\begin{aligned}\hat{a}_{C1} &= \sqrt{g_1}\hat{a}_{Pr1}^\dagger + \sqrt{G_1}\hat{a}_{v1}, \\ \hat{a}_{C2} &= \sqrt{G_1g_2}\hat{a}_{Pr1}^\dagger + \sqrt{g_1g_2}\hat{a}_{v1} + \sqrt{G_2}\hat{a}_{v2}, \\ \hat{a}_{C3} &= \sqrt{G_1G_3g_3}\hat{a}_{Pr1}^\dagger + \sqrt{g_1g_3G_2}\hat{a}_{v1} \\ &\quad + \sqrt{g_2g_3}\hat{a}_{v2} + \sqrt{G_3}\hat{a}_{v3}, \\ \hat{a}_{Pr4} &= \sqrt{G_1G_2G_3}\hat{a}_{Pr1} + \sqrt{g_1G_2G_3}\hat{a}_{v1}^\dagger \\ &\quad + \sqrt{g_2G_3}\hat{a}_{v2}^\dagger + \sqrt{g_3}\hat{a}_{v3}^\dagger,\end{aligned}\quad (1)$$

其中 G_1 , G_2 和 G_3 分别表示三个四波混频过程的

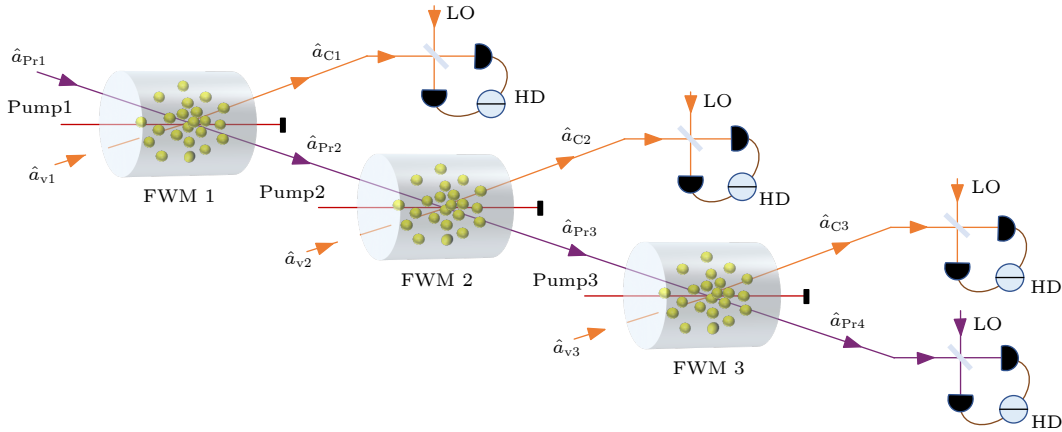


图 1 通过非对称结构级联三个四波混频过程产生四模纠缠态的示意图. $\hat{a}_{Pr1}$, $\hat{a}_{Pr2}$ 和 $\hat{a}_{Pr3}$ 是四波混频过程 FWM1, FWM2 和 FWM3 的信号光; $\hat{a}_{v1}$, $\hat{a}_{v2}$ 和 $\hat{a}_{v3}$ 是真空输入模式; $\hat{a}_{C1}$, $\hat{a}_{C2}$, $\hat{a}_{C3}$ 和 $\hat{a}_{Pr4}$ 是最终输出的四个模式; Pump1, Pump2 和 Pump3 表示三个四波混频过程的泵浦光; LO 表示用于平衡零拍探测 (HD) 的本振光场

Fig. 1. Schematic diagram of four-mode entangled states generated by cascading three four-wave mixing processes with asymmetric structure. $\hat{a}_{Pr1}$, $\hat{a}_{Pr2}$ and $\hat{a}_{Pr3}$ are seed beams of FWM1, FWM2 and FWM3, respectively. $\hat{a}_{v1}$, $\hat{a}_{v2}$ and $\hat{a}_{v3}$ are vacuum input modes. $\hat{a}_{C1}$, $\hat{a}_{C2}$, $\hat{a}_{C3}$ and $\hat{a}_{Pr4}$ are the final four output modes. Pump1, pump2 and pump3 denote the pump light of three four-wave mixing processes. LO denotes the local oscillator for balanced homodyne detection (HD).

强度增益; $g_n = G_n - 1$ ($n = 1, 2, 3$); $\hat{a}_{v1}$, $\hat{a}_{v2}$ 和 $\hat{a}_{v3}$ 是真空态注入. 将四个输出模的湮灭和产生算符以向量的形式写为 $\hat{x} = [\hat{a}_{C1}, \hat{a}_{C2}, \hat{a}_{C3}, \hat{a}_{Pr4}]^T$ 和 $\hat{y} = [\hat{a}_{C1}^\dagger, \hat{a}_{C2}^\dagger, \hat{a}_{C3}^\dagger, \hat{a}_{Pr4}^\dagger]^T$. 将正交振幅和正交相位算符定义为 $\hat{X} = \hat{x} + \hat{y}$ 和 $\hat{Y} = i(\hat{y} - \hat{x})$, 其中 $\hat{X} = [\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3, \hat{X}_4]^T$, $\hat{Y} = [\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_3, \hat{Y}_4]^T$. 根据以上公式容易计算出系统的协方差矩阵:

$$\sigma = \langle \zeta \zeta^T \rangle = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & 0 \\ 0 & \sigma_{YY} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\zeta = [\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3, \hat{X}_4, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_3, \hat{Y}_4]^T$. 两模的正交振幅和正交相位算符的协方差可分别表示为

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}_i \hat{X}_j \rangle &= \frac{\langle \hat{X}_i \hat{X}_j + \hat{X}_j \hat{X}_i \rangle}{2} - \langle \hat{X}_i \rangle \langle \hat{X}_j \rangle, \\ \langle \hat{Y}_i \hat{Y}_j \rangle &= \frac{\langle \hat{Y}_i \hat{Y}_j + \hat{Y}_j \hat{Y}_i \rangle}{2} - \langle \hat{Y}_i \rangle \langle \hat{Y}_j \rangle \\ (i, j &= 1, \dots, 4). \end{aligned}$$

此外, 正交振幅与正交相位算符是相互正交的, 所以 $\langle \hat{X}_i \hat{Y}_j \rangle = \langle \hat{Y}_j \hat{X}_i \rangle = 0$. 为了计算简便, 我们假设三个四波混频过程的强度增益相等, 当 $G_1 = G_2 = G_3 = G = 1.2$ 时, 该系统的协方差矩阵如图 2 所示.

2.2 四模量子纠缠特性

为了检验基于级联四波混频过程产生的四模态纠缠情况, 利用部分转置正定判据来判断该体系产生的四模态是否纠缠^[31,32]. 部分转置是反转正交相位算符的符号, 即 $\hat{Y}_k$ 转置为 $-\hat{Y}_k$, k 是被转置的光束. 因此, 部分转置的协方差矩阵可以表示为: $\sigma' = T_{2N} \sigma T_{2N}$, 其中 T_{2N} 表示 $2N$ 维的对角矩阵, 并且除了 $T_{2k,2k} = -1$ 以外的所有对角元素均为 1.

通过转置部分协方差矩阵把体系分成两部分, 从而判断这两部分的纠缠情况. 对于 N 模系统, 需要验证 $2^{N-1} - 1$ 种可能的两分情况, 如果所有的两分情况均不可分, 就可以证明产生了真正的 N 模纠缠态. 这里协方差矩阵的表达式定义为 $\sigma = \langle \zeta \zeta^T \rangle$, 可以将四个模式的正交分量的对易关系写为 $[\hat{\zeta}_i, \hat{\zeta}_j] = 2i\Omega_{ij}$, 其中 $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 1 和 -1 分别表示对角元素为 1 和 -1 的对角矩阵. 对于高斯态的协方差矩阵必须满足不确定性关系: $\sigma + i\Omega \geq 0$, 这意味着 $\sigma \geq 0$, 即协方差矩阵的所有最小辛本征值应大于等于 1. 部分转置后的协方差矩阵最小辛本征值可以通过求解 $i\Omega\sigma$ 的本征值得到, 当最小辛本征值小于 1 时证明存在纠缠. 对于四模态系统有两种两分情况需要分析, 即 4 种 1×3 和 3 种 2×2 , 共 7 种情况. 图 3 展示了不同强度增益下 7 个最小辛本征值的计算结果, 结果表明 7 种情况的最小辛本征值均小于 1, 并且随着强度增益的增加最小辛本征值逐渐减小, 说明产生真正的四模纠缠态.

2.3 本征模

为进一步研究四模态系统内部的纠缠结构, 还分析了系统中的本征模. 多模高斯态经过 Bloch Messiah 分解可以得到一组相互正交的单模压缩态和线性分束器网络^[33]. 分解过程可表示为 $\sigma_{XX} = U_0 K U_0^T$, 其中 $K = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \dots)$ 是由本征分解协方差矩阵得到的特征值组成的对角矩阵, 其值在对数空间代表单模压缩态的压缩度, U_0 是本征分解协方差矩阵得到的本征向量, 其可以用线性分束器

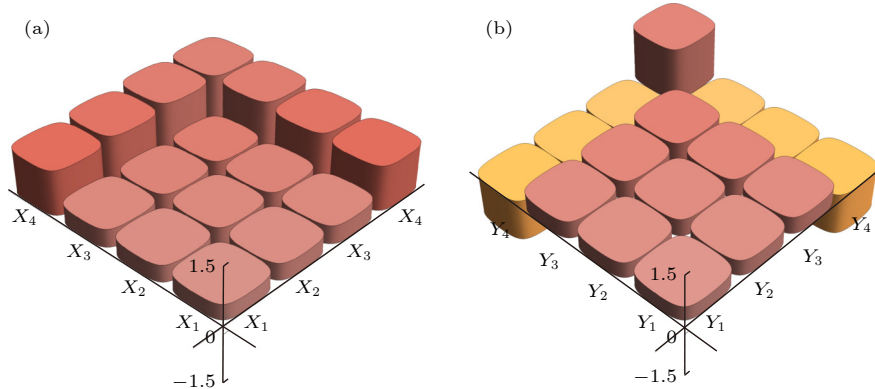


图 2 当 $G_1 = G_2 = G_3 = 1.2$ 时四模态系统的协方差矩阵 (a) 正交振幅的协方差矩阵 $\langle \hat{X}_i \hat{X}_j \rangle$; (b) 正交相位的协方差矩阵 $\langle \hat{Y}_i \hat{Y}_j \rangle$.

Fig. 2. The covariance matrix of the four-mode state in the case of $G_1 = G_2 = G_3 = 1.2$: (a) The covariance of amplitude quadratures $\langle \hat{X}_i \hat{X}_j \rangle$; (b) the covariance of phase quadratures $\langle \hat{Y}_i \hat{Y}_j \rangle$.

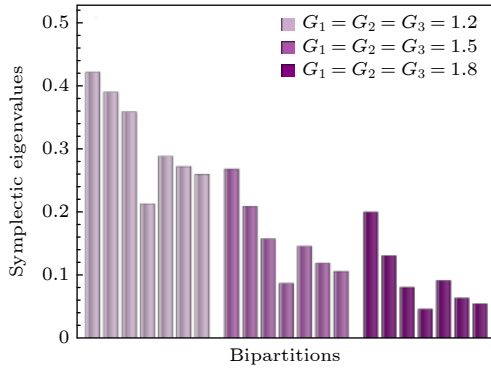


图 3 不同强度增益情况下, 四模态的最小辛本征值. 不同颜色的条形图分别表示强度增益为 1.2, 1.5 和 1.8 时的最小辛本征值

Fig. 3. The smallest symplectic eigenvalues of four-mode state for different gains. Bar chart with different colors represent the smallest symplectic eigenvalues at gains of 1.2, 1.5 and 1.8, respectively.

网络实现. 这里我们分解协方差矩阵中与正交振幅相关的部分 (分解协方差矩阵的正交相位部分和正交振幅部分结果相似), 选择强度增益 G 为 1.2, 1.5 和 8, 分别得到本征值和对应的本征向量如图 4 所示. 通过对本征模进行分析, 发现经过级联四波混频过程产生的四模纠缠态可以等价于两个单模压缩态和两个真空态经过线性分束器网络得到. 同时发现压缩值随着强度增益 G 的增加而变大, 这意味着纠缠度增强. 值得注意的是随着强度增益 G 的

增加, 压缩模和反压缩模中的 $\hat{a}_{C1}$ 和 $\hat{a}_{C2}$ 在四个模中占的相对权重变低, 使得相应模式对整体的纠缠影响逐渐变小, 这是由于系统的非对称结构导致的.

3 基于级联四波混频过程产生四模簇态

多模纠缠态作为量子信息技术的重要资源, 不仅是基础量子理论领域 [34], 也是量子计算和量子信息处理应用领域的重要研究课题 [35–41]. 簇态是具有很强的纠缠保持特性和丰富结构的多模纠缠态, 作为量子计算的重要平台而得到广泛研究. 第二节已经证明基于级联四波混频过程的输出态是四模纠缠态, 本节通过操纵这些输出态生成连续变量簇态.

簇态的相互作用仅局限于相邻模式之间, 各结点通过纠缠连接. 在理想压缩的情况下, 连续变量簇态定义为

$$\hat{y}_{\hat{a}_i} - \sum_j V_{ij} \cdot \hat{x}_{\hat{a}_j} \equiv \hat{\delta}_i \rightarrow 0, \quad (3)$$

其中模 $\hat{a}_i$ 是连续变量簇态中的任意模态, $\hat{a}_j$ 是与模 $\hat{a}_i$ 毗邻的且有相互作用的所有模态 [42,43]. V 是描述簇态结构的邻接矩阵, 通常是由零和非零两种元素组成的对称矩阵, 非零元素表示两结点间存在关

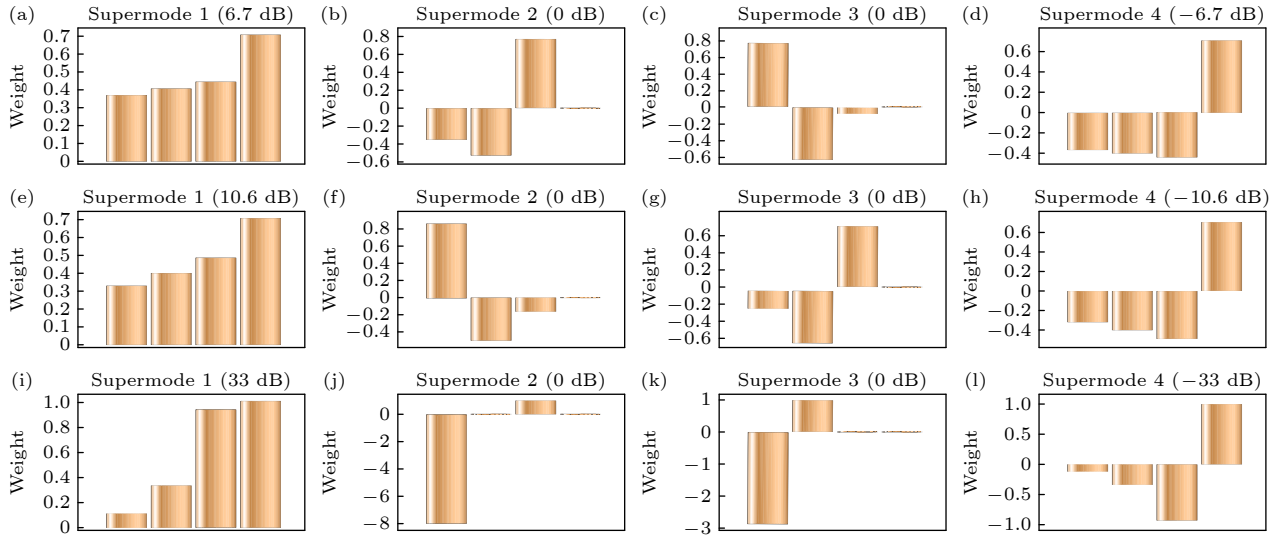


图 4 对于不同强度增益 G , 基于级联四波混频过程生成的四模纠缠态的本征模及其相应的压缩值. 每幅图中的条形柱分别表示模 $\hat{a}_{C1}$, $\hat{a}_{C2}$, $\hat{a}_{C3}$ 和 $\hat{a}_{P4}$ 的相对权重, 图上面的数字代表压缩值. 图 (a)–(d), 图 (e)–(h) 和图 (i)–(l) 分别对应强度增益 G 为 1.2, 1.5 和 8 时的本征模分解情况

Fig. 4. The supermodes of the four-mode entangled state generated based on the cascade four-wave mixing process and their corresponding squeezing levels for different gain values G . The bars represent the relative weight of the modes $\hat{a}_{C1}$, $\hat{a}_{C2}$, $\hat{a}_{C3}$ and $\hat{a}_{P4}$, respectively. The number above the figure represents the squeezing levels. Figures (a)–(d), Figures (e)–(h) and Figures (i)–(l) correspond to the eigenmode decomposition when the gain values G are 1.2, 1.5 and 8, respectively.

联, 数值大小表示相对权重^[1]. 这里仅考虑相对权重为 1 的情形. 在无限压缩的极限条件下, N 模连续变量簇态是满足 (3) 式正交分量线性叠加算符的零本征值态, 每个子模所对应的正交分量组成的 N 个线性组合将同时为零, 这些表达式 $\hat{\delta}_i$ 称为簇态的 nullifier^[44]. 级联四波混频系统生成的四模纠缠态存在线型、T-型和方型三种结构簇态, 其结构和对应邻接矩阵如图 5 所示. 在压缩无限大的情况下, 三种四模连续变量簇态的量子关联式为

$$\text{线型: } \begin{cases} \hat{y}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_2} \rightarrow 0, \\ \hat{y}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3} \rightarrow 0, \\ \hat{y}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_4} \rightarrow 0, \\ \hat{y}_{\hat{a}_4} - \hat{x}_{\hat{a}_3} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{T-型: } \begin{cases} \hat{y}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_1} \rightarrow 0, \\ \hat{y}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_4} \rightarrow 0, \\ \hat{y}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_2} \rightarrow 0, \\ \hat{y}_{\hat{a}_4} - \hat{x}_{\hat{a}_2} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{方型: } \begin{cases} \hat{y}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_4} \rightarrow 0, \\ \hat{y}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3} \rightarrow 0, \\ \hat{y}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_4} \rightarrow 0, \\ \hat{y}_{\hat{a}_4} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (6)$$

根据簇态的定义, 构造簇态的光学网络可以通过一个酉矩阵 U_V 描述. 文献 [45] 中已表明矩阵 U_V 可分解为

$$U_V = X_V + iY_V, \quad (7)$$

其中 $X_V = \text{Re}[U_V]$, 为矩阵 U_V 的实数部分; $Y_V = \text{Im}[U_V]$, 为矩阵 U_V 的虚数部分. 设此簇态在理想情况下对应的邻接矩阵为 V , 该簇态的正交分量满足 (3) 式, 所以 X_V , Y_V 和 V 之间满足如下关系:

$$Y_V = V X_V, \quad X_V X_V^T + Y_V Y_V^T = I. \quad (8)$$

在四波混频系统中可以从一组初始的正交相位压缩态经过后处理变换得到簇态. 首先引入对角移相矩阵 D , 通过对输入态进行 $\pi/2$ 相移使正交振幅压缩变为正交相位压缩, 从而使得所有输入模式均处于正交相位压缩态. 在第二节将正交振幅的协方差矩阵进行本征模分解得到一个正交相位压缩态、两个真空态和一个正交振幅压缩态, 因此移相矩阵的具体形式为 $D = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$. 在四波混频系统中酉矩阵 U_{FWM} 可以表示为 $U_{\text{FWM}} = U_0 D$, 其中 U_0 是第二节中本征分解协方差矩阵得到的本征向量^[46]. 然后, 根据文献 [29], 引入两个变换对输出的纠缠态优化后处理得到满足条件的簇态. 总的变换结果 U 可表示为

$$U = \mathcal{O} P_h U_0 D, \quad (9)$$

其中 $P_h = \text{diag}(e^{i\phi_1} \dots e^{i\phi_N})$ 是对本振光和信号光之间的相对相位进行相移的对角矩阵. 实验上通过控制每个平衡零拍探测本振光和信号光的相对相位来实现. 实数正交矩阵 $\mathcal{O}$ 可以通过调节噪声信号的增益或衰减来优化重构结果. 此时得到的簇态的每个结点不是空间分离的单一模式, 而是多模纠缠态的叠加^[10]. 将变换的结果与给定的簇态转换矩阵 U_V 作比较, 可以找到一组参数满足如下关系:

$$U_V = U = \mathcal{O} P_h U_0 D. \quad (10)$$

那么就实现了从四波混频系统生成的纠缠态经过平衡零拍探测的相位调控和输出信号的后处理到连续变量簇态网络的转变. 这种变换存在一些特征, 定义矩阵 $U'_V = U_V R^\dagger$, 其中 $R = U_0 D$. $U'_V{}^T U'_V$ 是对角矩阵, 并且是 (10) 式成立的充分必要条件. 整理替换以上方程式可以得到:

$$P_h^2 = U'_V{}^T U'_V, \quad (11)$$

$$\mathcal{O} = U'_V P_h^{-1}. \quad (12)$$

接下来将说明如何通过优化后处理, 以邻接矩

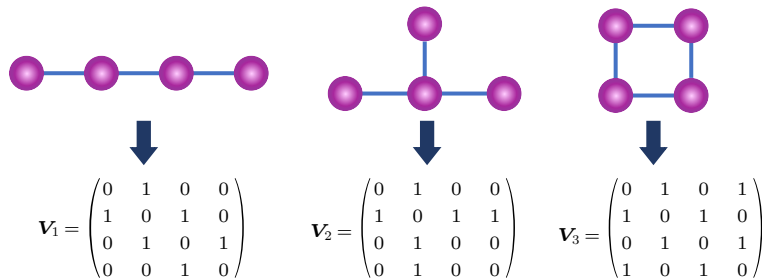


图 5 四模线型、T-型和方型簇态的结构图和对应的邻接矩阵

Fig. 5. The structure diagram and corresponding adjacency matrix of four-mode linear, T-type, and square cluster states.

阵 V 给定的簇态 U_V 为目标, 将本文提出的基于级联四波混频系统生成的四模纠缠态优化重构, 最终生成三种不同结构的四模簇态. 实数正交矩阵 $\mathcal{O}(\theta)$ 有 $N(N-1)/2$ 个自由度可以选择^[46]. 特别地, 对于四模态存在六个自由度. 同时对角矩阵 P_h 有四个自由度. 为了得到最优的正交矩阵 $\mathcal{O}$ 和对角矩阵 P_h , 用搜索算法寻找使矩阵 $\mathcal{O}(\theta)$ 和 P_h 满足簇态条件的最小 nullifiers 值^[41], 该算法特别适用于高维参数搜索. 当 nullifiers 值均低于散粒噪声极限时, 意味着四个输出态存在量子关联. 然后根据 van Loock 和 Furusawa^[47] 提出的连续变量多组份纠缠态的不可分判据, 推导出满足连续变量四模线型簇态的条件为

$$V(\hat{y}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_2}) + V(\hat{y}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3}) < 4, \quad (13)$$

$$U_V = \begin{pmatrix} -0.107 + 0.038i & -0.439 + 0.52i & 0.463 + 0.413i & 0.182 + 0.324i \\ -0.016 + 0.274i & 0.459 - 0.474i & 0.192 + 0.299i & 0.295 + 0.524i \\ 0.397 - 0.559i & -0.013 + 0.139i & -0.296 - 0.243i & 0.295 + 0.524i \\ -0.509 + 0.424i & -0.283 + 0.022i & -0.295 - 0.504i & 0.182 + 0.324i \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} -0.302 & 0.874 & -0.307 & 0.223 \\ -0.065 & -0.0069 & 0.6157 & 0.785 \\ 0.386 & -0.476 & -0.6386 & 0.464 \\ -0.869 & -0.0917 & 0.344 & -0.343 \end{pmatrix},$$

$$P_h = \begin{pmatrix} -0.87 + 0.49i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.67 - 0.74i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.52 + 0.85i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.87 + 0.49i \end{pmatrix}.$$

经验证结果满足 (8) 式、(11) 式和 (12) 式. Nullifiers 的值分别为 {1.174, 1.87, 1.783, 1.386}. 对于线型簇态, 对应的散粒噪声极限为 {2, 3, 3, 2}. 因此归一化后的 Nullifiers 方差为 {0.59, 0.62, 0.59, 0.69}, 数值结果都小于 1, 说明低于散粒噪声极限. 根据 Nullifiers 的结果, 可以计算出不等式 (13) 式—(15) 式左侧方差的组合分别为: {3.04, 3.63, 3.15}. 所有的组合结果都小于 4, 这意味着四模线型簇态可以由四波混频系统生成的纠缠态通过优化后处理得到. 同时研究了不同强度增益时的 Nullifiers 值, 结果列在表 1 中. 对于强度增益较小时, 不同的强度增益应用优化算法均找到最优值使得 Nullifiers

$$V(\hat{y}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3}) + V(\hat{y}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_4}) < 4, \quad (14)$$

$$V(\hat{y}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_4}) + V(\hat{y}_{\hat{a}_4} - \hat{x}_{\hat{a}_3}) < 4, \quad (15)$$

其中, 这些不等式的左侧和右侧分别是 nullifiers 方差的组合和边界条件. 当左侧的所有方差组合都小于 4 时, 说明重构出连续变量四模簇态. 该方法可以减小在有限的压缩条件下生成簇态而引起的额外噪声. 如果所有的输入模的压缩值不相等, 则此方法可以以最佳的方式重新分配模式之间的相关性.

对于四模纠缠态存在三种簇态结构, 即线型、T-型和方型簇态. 首先研究线型结构的簇态. 令三个级联四波混频的强度增益相等, 即 $G = 1.2$, 进而可以得到实际的压缩值和反压缩值: {-6.7 db, 0 db, 0 db, 6.7 db}. 利用优化算法找到满足条件的正交矩阵 $\mathcal{O}$ 和 P_h , 实现线型簇态, 结果如下:

的归一化方差小于 1, 当强度增益为 1.5 和 1.8 时, 不等式 (13) 式—(15) 式左侧方差的组合分别为 {3.04, 3.12, 2.42} 和 {2.58, 2.97, 2.09}, Nullifiers 的方差组合都小于 4, 满足 van Loock-Furusawa 判据.

同样的方法也可以研究 T-型和方型簇态的变换情况, 满足连续变量四模 T-型簇态的条件为

$$V(\hat{y}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_1}) + V(\hat{y}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_4}) < 4, \quad (16)$$

$$V(\hat{y}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_4}) + V(\hat{y}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_2}) < 4, \quad (17)$$

$$V(\hat{y}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_2}) + V(\hat{y}_{\hat{a}_4} - \hat{x}_{\hat{a}_2}) < 4. \quad (18)$$

T-型簇态的散粒噪声极限为 {2, 4, 2, 2}, 归一化后的 Nullifiers 方差如表 2 所列. 当强度增益为 1.2, 1.5

和 1.8 时, 不等式 (16) 式—(18) 式左侧方差的组合分别为 $\{2.42, 2.5, 1.96\}$, $\{1.76, 1.84, 1.6\}$ 和 $\{1.52, 1.52, 1.44\}$, Nullifiers 的方差组合都小于 4, 满足 van Loock-Furusawa 判据. 满足连续变量四模方型簇态的条件为

$$V(\hat{y}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_4}) + V(\hat{y}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3}) < 4, \quad (19)$$

$$V(\hat{y}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3}) + V(\hat{y}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_4}) < 4, \quad (20)$$

$$V(\hat{y}_{\hat{a}_3} - \hat{x}_{\hat{a}_2} - \hat{x}_{\hat{a}_4}) + V(\hat{y}_{\hat{a}_4} - \hat{x}_{\hat{a}_1} - \hat{x}_{\hat{a}_3}) < 4. \quad (21)$$

方型簇态的散粒噪声极限为 $\{3, 3, 3, 3\}$, 归一化后的 Nullifiers 方差如表 3 所列. 当强度增益为 1.2, 1.5 和 1.8 时, 不等式 (19) 式—(21) 式左侧方差的组合分别为 $\{2.7, 2.7, 2.1\}$, $\{1.65, 1.65, 1.86\}$ 和 $\{2.34,$

1.74, 3.06 $\}$, Nullifiers 的方差组合都小于 4, 满足 van Loock-Furusawa 判据. 结果表明当强度增益较小时, 对于不同的强度增益, 不同结构的簇态均可以找到相应的优化矩阵满足簇态条件. 这意味着基于级联四波混频过程生成的四模纠缠态, 可以通过调控输出光场的相位和后处理得到三种不同结构的簇态. 但是对于强度增益较大时, 应用此方法很难找到最优的变换矩阵使 Nullifiers 的归一化方差小于 1, 结果如表 1、表 2 和表 3 中的最后一行所示. 这与非对称的级联四波混频系统输出端的模式结构有关, 强度增益很大时 $\hat{a}_{C1}$ 和 $\hat{a}_{C2}$ 在四个输出模中占的相对权重逐渐变小并趋于 0, $\hat{a}_{C3}$ 和 $\hat{a}_{Pr4}$ 的相对权重逐渐变大并趋于 1, 这导致无法通过后处理转换为簇态.

4 结 论

本文提出基于级联四波混频系统产生四模纠缠态的方案, 并调控输出态的相位和对噪声信号后处理重构出三种不同结构的簇态. 首先利用部分转置正定判据证明该体系可以产生真正的四模纠缠态. 然后分析四模纠缠态的本征模, 发现该系统可分解为两个单模压缩态和两个真空态. 最后研究了不同强度增益下基于优化算法重构簇态的情况, 并利用 van Loock-Furusawa 判据判断重构的态是否为簇态. 结果表明在强度增益较小时, 可以重构出线型、T-型和方型结构的四模簇态, 强度增益很大时系统输出端的双模式结构影响生成四模簇态. 这种基于级联四波混频过程重构不同结构簇态的多功能量子网络平台在量子计算和量子信息处理中存在潜在的应用.

参考文献

- [1] Fabre C, Treps N 2020 *Rev. Mod. Phys.* **92** 035005
- [2] Briegel H J, Browne D E, Dür W, Raussendorf R, Van den Nest M 2009 *Nat. Phys.* **5** 19
- [3] Menicucci N C, Loock P V, Gu M, Weedbrook C, Ralph T C, Nielsen M A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 110501
- [4] Su X L, Hao S H, Deng X W, Ma L Y, Wang M H, Jia X J, Xie C D, Peng K C 2013 *Nat. Commun.* **4** 2828
- [5] Su X L, Zhao Y P, Hao S H, Jia X J, Xie C D, Peng K C 2012 *Opt. Lett.* **37** 5178
- [6] Armstrong S, Morizur J F, Janousek J, Hage B, Treps N, Lam P K, Bachor H A 2012 *Nat. Commun.* **3** 1026
- [7] Asavanant W, Shiozawa Y, Yokoyama S, et al. 2019 *Science* **366** 373
- [8] Larsen M V, Guo X S, Breum C R, Neergaard-Nielsen J S,

表 1 对于不同的强度增益, 四模线型簇态 Nullifier 的归一化方差

Table 1. Normalized variances of the four-mode linear cluster state nullifiers for different intensity gains.

强度增益	Nullifier 1	Nullifier 2	Nullifier 3	Nullifier 4
$G_1 = G_2 = G_3 = 1.2$	0.59	0.62	0.59	0.69
$G_1 = G_2 = G_3 = 1.5$	0.68	0.56	0.48	0.49
$G_1 = G_2 = G_3 = 1.8$	0.51	0.52	0.47	0.34
$G_1 = G_2 = G_3 = 3$	0.59	2.14	0.68	5.6

表 2 对于不同的强度增益, 四模 T-型簇态 Nullifier 的归一化方差

Table 2. Normalized variances of the four-mode T-type cluster state nullifiers for different intensity gains.

强度增益	Nullifier 1	Nullifier 2	Nullifier 3	Nullifier 4
$G_1 = G_2 = G_3 = 1.2$	0.47	0.37	0.51	0.47
$G_1 = G_2 = G_3 = 1.5$	0.36	0.26	0.4	0.4
$G_1 = G_2 = G_3 = 1.8$	0.34	0.21	0.34	0.38
$G_1 = G_2 = G_3 = 3$	2.63	0.56	0.56	3.79

表 3 对于不同的强度增益, 四模方型簇态 Nullifier 的归一化方差

Table 3. Normalized variances of the four-mode square cluster state nullifiers for different intensity gains.

强度增益	Nullifier 1	Nullifier 2	Nullifier 3	Nullifier 4
$G_1 = G_2 = G_3 = 1.2$	0.36	0.54	0.36	0.34
$G_1 = G_2 = G_3 = 1.5$	0.24	0.31	0.24	0.38
$G_1 = G_2 = G_3 = 1.8$	0.58	0.20	0.38	0.64
$G_1 = G_2 = G_3 = 3$	0.87	0.51	4.67	4.38

- Andersen U L 2019 *Science* **366** 369
- [9] Larsen M V, Guo X S, Breum C R, Neergaard-Nielsen J S, Andersen U L 2021 *Nat. Phys.* **17** 1018
- [10] Cai Y, Roslund J, Ferrini G, Arzani F, Xu X, Fabre C, Treps N 2017 *Nat. Commun.* **8** 15645
- [11] Barbosa F A S, Coelho A S, Muñoz-Martínez L F, Ortiz-Gutiérrez L, Villar A S, Nussenzeig P, Martinelli M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 073601
- [12] Marino A M, Pooser R C, Boyer V, Lett P D 2009 *Nature* **457** 859
- [13] Lawrie B, Evans P, Pooser R 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 156802
- [14] Qin Z Z, Cao L M, Wang H L, Marion A M, Zhang W P, Jing J T 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 023602
- [15] Liu S S, Lou Y B, Jing J T 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 113602
- [16] Pooser R C, Savino N, Batson E, Beckey J L, Garcia J, Lawrie B J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 230504
- [17] McCormick C F, Boyer V, Arimondo E, Lett P D 2007 *Opt. Lett.* **32** 178
- [18] Boyer V, Marino A M, Pooser P C, Lett P D 2008 *Science* **321** 5888
- [19] Cao L M, Du J J, Feng J L, Qin Z Z, Marino A M, Kolobov M I, Jing J T 2017 *Opt. Lett.* **42** 7
- [20] Pan X Z, Yu S, Zhou Y F, Zhang K, Zhang K, Lv S C, Li S J, Wang W, Jing J T 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 070506
- [21] Li S J, Pan X Z, Ren Y, Liu H Z, Yu S, Jing J T 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 083605
- [22] Wang W, Zhang K, Jing J T 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 140501
- [23] Liu S S, Lou Y B, Jing J T 2020 *Nat. Commun.* **11** 3875
- [24] Marino A M, Pooser R C, Boyer V, Lett P D 2009 *Nature* **457** 859
- [25] Chen Y X, Liu S S, Lou Y B, Jing J T 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 093601
- [26] Liu S S, Lou Y B, Chen Y X 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 060503
- [27] Medeiros de Araújo R, Roslund J, Cai Y, Ferrini G, Fabre C, Treps N 2014 *Phys. Rev. A* **89** 053828
- [28] Roslund J, Medeiros de Araújo R, Jing S F, Fabre C, Treps N 2014 *Nat. Photonics* **8** 109
- [29] Ferrini G, Gazeau J P, Coudreau T, Fabre C, Treps N 2013 *New J. Phys.* **15** 093015
- [30] Zhang K, Wang W, Liu S S, Pan X Z, Du J J, Lou Y B, Yu S, Lü S C, Treps N, Fabre C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 090501
- [31] Simon R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2726
- [32] Werner R F, Wolf M M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3658
- [33] Braunstein S L 2005 *Phys. Rev. A* **71** 055801
- [34] Hensen B, Bernien H 2005 *Nature* **526** 682
- [35] Lloyd S, Braunstein S L 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1784
- [36] Braunstein S L, van Loock P 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 513
- [37] Weedbrook C, Pirandola S 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 621
- [38] Kimble H J 2008 *Nature* **453** 1023
- [39] Guo X, Breum C R 2020 *Nat. Phys.* **16** 281
- [40] Ferrini G, Roslund J, Arzani F, Fabre C, Treps N 2016 *Phys. Rev. A* **94** 062332
- [41] Ferrini G, Roslund J, Arzani F, Cai Y, Fabre C, Treps N 2015 *Phys. Rev. A* **91** 032314
- [42] Gu M, Weedbrook C, Menicucci N C, Ralph T C, Look P V 2009 *Phys. Rev. A* **79** 062318
- [43] Menicucci N C, Flammia S T, Look P V 2011 *Phys. Rev. A* **83** 042335
- [44] Hao S H 2016 *Ph. D. Dissertation* (Shanxi: Shanxi University) (in Chinese) [郝树宏 2016 博士学位论文 (山西: 山西大学)]
- [45] van Loock P, Weedbrook C, Gu M 2007 *Phys. Rev. A* **76** 032321
- [46] Cai Y, Feng J L, Wang H L, Ferrini G, Xu X Y, Jing J T, Treps N 2015 *Phys. Rev. A* **91** 013843
- [47] van Loock P, Furusawa A 2003 *Phys. Rev. A* **67** 052315

SPECIAL TOPIC—Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Generation of four-mode cluster states based on cascade four-wave mixing process^{*}Dong An-Qi¹⁾ Zhang Kai^{1)†} Jing Jie-Tai^{1)2)3)‡} Liu Wu-Ming^{4)5)6)††}1) (*State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, East China Normal University, Shanghai 200062, China*)2) (*Center for Excellence in Ultra-intense Laser Science, CAS, Shanghai 201800, China*)3) (*Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)4) (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)5) (*School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)6) (*Songshan Lake Materials Laboratory, Dongguan 523808, China*)

(Received 10 March 2022; revised manuscript received 11 April 2022)

Abstract

As a crucial quantum resource for quantum computing and quantum information processing, cluster state has attracted extensive attention due to its unique entanglement properties and rich structures. In this work, we theoretically propose a scheme for generating four-mode entangled states based on cascaded four-wave mixing (FWM) process. The internal entanglement characteristics are studied by using the positivity under partial transposition criterion and eigenmode decomposition. In addition, the output entangled states are reconstructed and optimized by adjusting the relative phase of balanced homodyne detection and postprocessing the signal noise, and finally three four-mode cluster states with different structures are generated. Such a method can effectively reduce the excess noise induced by finite squeezing. Our theoretical results provide a reliable way of generating scalable continuous variable cluster states based on FWM process in atomic ensemble.

Keywords: four-wave mixing, eigenmode, cluster states**PACS:** 03.67.Bg, 03.65.Ud, 42.50.-p**DOI:** 10.7498/aps.71.20220433

* Project supported by the Innovation Program of Shanghai Municipal Education Commission, China (Grant No. 2021-01-07-00-08-E00100), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11874155, 91436211, 11374104, 12174110), the Basic Research Project of Shanghai Science and Technology Commission, China (Grant No. 20JC1416100), the Natural Science Foundation of Shanghai, China (Grant No. 17ZR1442900), the Minhang Leading Talents, China (Grant No. 201971), the Program of Science and Technology Innovation of Shanghai, China (Grant No. 17JC1400401), the Shanghai Young Science and Technology Sailing Program, China (Grant No. 21YF1410800), the National Basic Research Program of China (Grant No. 2016YFA0302103), the Shanghai Municipal Science and Technology Major Project, China (Grant No. 2019SHZDZX01), the 111 Project (Grant No. B12024), and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2020M681224).

† Corresponding author. E-mail: kzhang@lps.ecnu.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: jtjing@phy.ecnu.edu.cn

†† Corresponding author. E-mail: wliu@iphy.ac.cn

基于级联四波混频过程产生四模簇态

董安琪 张凯 荆杰泰 刘伍明

Generation of four-mode cluster states based on cascade four-wave mixing process

Dong An-Qi Zhang Kai Jing Jie-Tai Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 160304 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220433

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220433>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于级联四波混频过程的量子导引

Quantum steering based on cascaded four-wave mixing processes

物理学报. 2021, 70(16): 160301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201981>

基于四波混频过程的纠缠光放大

Amplification of entangled beam based on four-wave mixing process

物理学报. 2022, 71(5): 050301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211324>

基于四波混频过程和线性分束器产生四组份纠缠

Generation of quadripartite entanglement based on four-wave mixing process and linear beam splitter

物理学报. 2020, 69(9): 090303 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200040>

空频复用光纤中四波混频过程的解析分析方法

Analytical method for four wave mixing in space-frequency multiplexing optical fibers

物理学报. 2019, 68(11): 114207 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182129>

四波混频光相位运算器原理及其噪声性能研究

Principle and noise performance of optical phase arithmetic devices using four wave mixing

物理学报. 2018, 67(9): 094208 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172638>

级联四波混频系统中纠缠增强的量子操控

Quantum manipulation of entanglement enhancement in cascaded four-wave-mixing process

物理学报. 2019, 68(9): 094205 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181837>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

连续变量量子计算和量子纠错研究进展*

王美红¹⁾ 郝树宏²⁾ 秦忠忠¹⁾ 苏晓龙^{1)†}

1) (山西大学光电研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

2) (安徽工业大学数理科学与工程学院, 马鞍山 243000)

(2022 年 4 月 7 日收到; 2022 年 5 月 9 日收到修改稿)

量子计算机在解决某些复杂问题方面具有经典计算机无法比拟的优势. 实现大规模量子计算需建立具有通用性、可扩展性和容错性的硬件平台. 连续变量光学系统具有独特的优势, 是实现大规模量子计算的一种可行途径, 近年来受到了广泛关注. 基于测量的连续变量量子计算通过对大规模高斯簇态 (cluster 态) 的测量和测量结果的前馈来实现计算, 为实现量子计算提供了一条可行的途径. 量子纠错是量子计算和量子通信中保护量子信息的重要环节. 本文简要介绍了基于 cluster 态的单向量子计算、基于光学薛定谔猫态的量子计算和连续变量量子纠错的基本原理和研究进展, 并讨论了连续变量量子计算面临的问题和挑战.

关键词: 量子计算, 连续变量, cluster 态, 薛定谔猫态, 量子纠错**PACS:** 03.67.Lx, 03.67.Pp, 42.50.-p, 42.50.Dv**DOI:** 10.7498/aps.71.20220635

1 引言

量子计算机有望解决经典计算机无法完成的计算任务, 在解决某些复杂问题方面 (如大数分解^[1]、量子模拟^[2]等) 相比经典计算机实现指数级别的加速. 相比于经典计算机, 量子计算机主要有并行性^[3,4]和随机性^[5]两大特点. 鉴于量子计算的巨大潜在价值, 世界各国积极整合研究力量和资源, 开展了相关研究; 同时, 大型高科技公司如谷歌、微软、IBM 等也纷纷介入量子计算研究.

研究表明, 量子计算机的研制需要七个阶段^[6]: 1) 对单个量子比特的运算; 2) 多量子比特的算法; 3) 用于纠错和控制的量子非破坏 (quantum non-demolition, QND) 测量; 4) 存储时间比量子比特退相干时间更长的逻辑存储器; 5) 对单个逻辑量子比特的运算; 6) 多个逻辑量子比特的算法; 7) 容错量子计算. 完成这七个研究阶段, 将实现具有通用

性、可扩展性和容错性的大规模量子计算机.

目前, 超导系统^[7-10]、离子阱系统^[11,12]、半导体量子点^[13,14]和集成光学芯片^[15,16]等不同系统在量子计算方面取得了极大的研究进展. 例如, 在超导系统中, 2019 年, 谷歌公开报道利用可编程超导量子比特的处理器制备了包含 53 个量子比特量子计算原型机“悬铃木 (Sycamore)”, 其处理“量子随机线路取样”问题比经典超算快 2 个数量级^[17]. 2019 年初, 中国科学技术大学潘建伟教授研究组^[18]将一维阵列中的 12 个超导量子比特应用到量子行走研究, 为多体现象的模拟以及通用量子计算的研究奠定了基础. 2021 年, 该研究组先后成功构建了包含 62 个量子比特和 66 个量子比特的可编程超导量子计算原型机“祖冲之号”^[9]和“祖冲之二号”^[19], 并分别演示了二维可编程量子行走和“量子随机线路取样”任务的快速求解. 在光学系统中, 中国科学技术大学潘建伟教授研究组^[20]于 2020 年构建了“九章”量子计算原型机, 实现了“高斯玻色取样”

* 国家自然科学基金 (批准号: 11834010, 62005149, 11804001, 11974227)、山西省“1331 工程”重点学科建设经费和山西省基础研究计划 (批准号: 20210302121002, 20210302122002, 201901D211164) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: suxl@sxu.edu.cn

任务的快速求解. 根据现有理论, 该量子计算系统处理高斯玻色采样的速度比目前最快的超级计算机快一百万亿倍. 随后, 该研究组构建了 113 个光子 144 模式的“九章二号”量子计算原型机^[21].

然而, 目前实际量子算法的执行仍然具有挑战性. 实现大规模量子计算机需要实现通用、可扩展和容错的量子计算. 由于光学系统不需要低温或真空环境, 且具有与环境的相互作用较弱等优势, 因此具有良好的可扩展性和容错性. 量子信息科学根据所采用的量子系统本征态具有分离谱或是连续谱结构而划分为离散变量 (discrete variables, DV) 与连续变量 (continuous variables, CV) 两类. 离散变量编码在有限维希尔伯特空间, 连续变量编码在无限维希尔伯特空间. 基于 DV 和 CV 系统的光量子信息处理各有优缺点, 正在并行发展^[22,23]. 离散变量系统使用光子的偏振和原子的自旋等编码信息, 可以获得最大纠缠度, 但纠缠的产生通常是概率性的. 而连续变量系统通常使用光场的正交振幅和正交位相编码, 其纠缠的产生是确定性的, 但无法获得完美的纠缠^[24,25].

鉴于连续变量在无限维空间编码信息的独特优势, 近年来基于连续变量的量子计算引起了越来越多关注, 如高斯玻色采样及其相关算法^[26–29]、基于连续变量的量子机器学习^[30–32]、和其他连续变量量子算法和模拟^[33,34]. 本文简要介绍基于光场的连续变量量子计算和量子纠错的基本原理和研究进展.

2 连续变量量子逻辑门

2.1 连续变量

包含 N 个正则玻色模的连续变量系统由一个无限维 Fock 空间 $\mathbf{H}_k$ 的张量积构造而成的希尔伯特空间 $\mathbf{H} = \bigotimes_{k=1}^N \mathbf{H}_k$ 描述, 其中每一个 $\mathbf{H}_k$ 对应一个模式^[35]. 考虑一个无相互作用的量子化电磁场, 其哈密顿量描述由 N 个不同频率的谐振子构成的系统:

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^N \hbar \omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}), \quad (1)$$

其中 $\hbar$ 是普朗克常数 h 除以 2π ; $\hat{a}_k$ 和 $\hat{a}_k^\dagger$ 是中心频率为 ω_k 模式 k 的湮灭和产生算符, 满足对易关系 $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$, $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0$. 每个模式对

应的量子化光场的正交振幅和正交位相分量表示为

$$\hat{x}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger), \hat{p}_k = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger), \quad (2)$$

其满足对易关系 $[\hat{x}_k, \hat{p}_{k'}] = i\hbar\delta_{kk'}$. 因此, 一个光学模式的正交振幅和正交位相分量的不确定关系为

$$\langle (\Delta \hat{x}_k)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{p}_k)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |[\hat{x}_k, \hat{p}_k]|^2 = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (3)$$

基于光场的连续变量量子信息处理通常将信息编码到光场的正交分量, 通过对其进行操控和测量实现量子信息处理. 光场的正交振幅和正交位相分量可以通过平衡零拍探测系统进行测量, 其示意图如图 1 所示. 在平衡零拍测量中, 待测信号光场 $\hat{a}$ 和本地振荡光场 $\hat{L}$ 在一个 50:50 分束器上耦合, 然后将耦合后的两束光进入光电管进行测量. 输出光场表示为

$$\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{L}e^{i\phi}), \quad (4a)$$

$$\hat{d} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{L}e^{i\phi}). \quad (4b)$$

ϕ 表示信号光和本地振荡光之间的相对位相差. 两个探测器输出光电流差表示为 $i = (\hat{a}\hat{L}^\dagger e^{-i\phi} + \hat{a}^\dagger \hat{L}e^{i\phi})$. 将光场写成线性化算符的形式 $\hat{a} = \alpha + \delta\hat{a}$, $\hat{L} = l + \delta\hat{L}$, 则相减之后的光电流重新表示为

$$i = \alpha^* l e^{i\phi} + l^* \alpha e^{-i\phi} + \alpha^* \delta\hat{L} e^{i\phi} + \alpha \delta\hat{L}^\dagger e^{-i\phi} + l \delta\hat{a}^\dagger e^{i\phi} + l^* \delta\hat{a} e^{-i\phi}, \quad (5)$$

其中第一项和第二项为光电流的直流部分. 当本地光的能量足够大时, 方程 (5) 的第三、四项可以忽略, 输出光电流的起伏为 $\delta i = l \delta\hat{a}^\dagger e^{i\phi} + l^* \delta\hat{a} e^{-i\phi}$. 因此, 通过改变相对位相 ϕ , 可以实现信号光场不同正交分量的测量. 当 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi/2$, 光电流差分别表示为 $\delta i = l \delta\hat{x}_a$ 和 $\delta i = l \delta\hat{p}_a$, 即分别对应待测

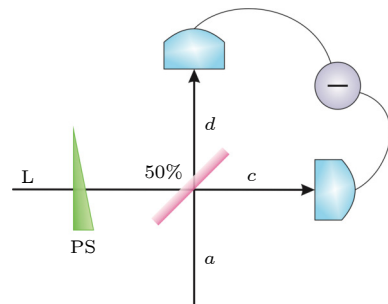


图 1 平衡零拍探测系统示意图^[36]

Fig. 1. Schematic of balance homodyne detection^[36].

光场的正交振幅和正交位相分量. 如果我们所测量的信号光为压缩光, 为了测定压缩度, 则需要确定与之相应的散粒噪声极限 (shot noise limit, SNL). 为此, 实验中可以挡住信号光场 (相当于输入真空场), 则此时平衡零拍探测系统输出的光电流为真空场的噪声, 即 SNL.

2.2 量子逻辑门

量子逻辑门是实现量子计算的核心. 离散变量量子计算以 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 作为计算基矢实现量子信息处理, 其基本信息单元是量子比特 (qubits); 而连续变量量子计算将无限维希尔伯特空间的 $\{|s\rangle_x\}_{s\in\mathbb{R}}$ 作为计算基矢, 其基本信息单元是量子模式 (qumodes). 表 1 总结了离散变量和连续变量量子逻辑门的比较. 连续变量量子逻辑门根据其哈密顿量的不同分为高斯量子逻辑门和非高斯量子逻辑门. 哈密顿量为 2 阶及其以下的为高斯量子逻辑门, 反之则为非高斯量子逻辑门. 高斯量子逻辑门将输入的高斯态变换为另一个高斯态. 在高斯量子逻辑门的基础上至少增加一个非高斯操作即可实现通用量子计算. 下面是几种典型的连续变量量子逻辑门.

1) 平移操作 光场正交振幅和正交位相分量的平移操作分别被定义为 $\hat{X}(v) = e^{-iv\hat{p}}$ 和 $\hat{Z}(u) = e^{iu\hat{x}}$, 其中 $v, u \in \mathbb{R}$. 平移算符作用到正交分量的本征态, 得到:

$$\hat{X}(v)|s\rangle_x = |s+v\rangle_x, \hat{Z}(u)|t\rangle_p = |t+u\rangle_p. \quad (6)$$

可见 $\hat{X}(v)$ 使得本征态 $|s\rangle_x$ 的正交振幅分量发生平移, $\hat{Z}(u)$ 使得本征态 $|t\rangle_p$ 的正交位相分量发生平移. 因为 $|s\rangle_p$ 是正交位相算符 $\hat{p}$ 的本征态 (即 $\hat{p}|s\rangle_p = s|s\rangle_p$), 而 $|s\rangle_x$ 是正交振幅算符 $\hat{x}$ 的本征态 (即 $\hat{x}|s\rangle_x = s|s\rangle_x$), 因此量子态在算符 $\hat{X}(v)$ 作用下正交位相分量不发生变化, 在 $\hat{Z}(u)$ 作用下正交振幅分量不发生变化^[38]. $\hat{X}(v)$ 和 $\hat{Z}(u)$ 的线性组合可得平移算符 $\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}$, 其中 $\alpha = (v + iu)/2$. 平移算符作用到量子态的结果如图 2 所示^[38].

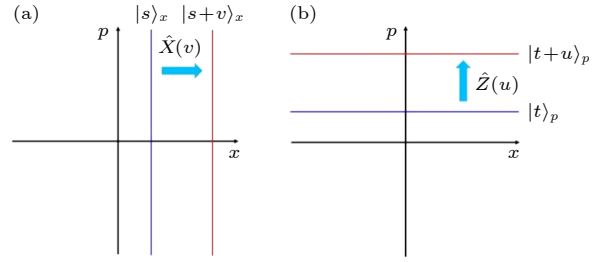


图 2 平移算符对量子态的作用效果^[39]

Fig. 2. Effect of displacement operation on quantum state^[39].

2) 压缩操作 压缩操作被定义为 $\hat{S}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})} = e^{\frac{\xi}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})}$, 其中 $\xi = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}$ 表示压缩的幅度, θ 为压缩方向. 当 $\theta = 0$ 时, 输入态的正交振幅分量被压缩, 正交位相分量被放大. 压缩操作对输入态的作用表示为

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{out}} \\ \hat{p}_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-r} & 0 \\ 0 & e^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}} \\ \hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-r}\hat{x}_{\text{in}} \\ e^r\hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

表 1 离散变量和连续变量量子逻辑门的比较^[37]

Table 1. Comparison between quantum logical gates with discrete variables and continuous variables^[37].

	离散变量 (qubits)	连续变量 (qumodes)
计算基矢	$\{ 0\rangle_L, 1\rangle_L\}$	$\{ s\rangle_x\}_{s\in\mathbb{R}}$
共轭基矢	$\{ \pm\rangle_L = (0\rangle_L \pm 1\rangle_L)/\sqrt{2}\}$	$\left\{ t\rangle_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{ist} s\rangle_x\right\}_{t\in\mathbb{R}}$
编码	$ \psi\rangle = \alpha 0\rangle_L + \beta 1\rangle_L \quad (\alpha ^2 + \beta ^2 = 1)$	$ \psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds \psi(s) s\rangle_x \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} ds \psi(s) ^2 = 1\right)$
探测方式	光子探测	平衡零拍探测
量子逻辑门	Bit-flip: $\hat{X} 0\rangle_L = 1\rangle_L, \hat{X} 1\rangle_L = 0\rangle_L$ Phase-flip: $\hat{Z} 0\rangle_L = 0\rangle_L, \hat{Z} 1\rangle_L = - 1\rangle_L$ Hadamard门: $\hat{H} 0\rangle_L = +\rangle_L, \hat{H} 1\rangle_L = -\rangle_L$ 可控非门: $\hat{C}\hat{X} 0\rangle_L 0(1)\rangle_L = 0\rangle_L 0(1)\rangle_L$ $\hat{C}\hat{X} 1\rangle_L 0(1)\rangle_L = 1\rangle_L 1(0)\rangle_L$	x方向平移: $\hat{X}(v) s\rangle_x = s+v\rangle_x$ p方向平移: $\hat{Z}(u) t\rangle_p = t+u\rangle_p$ 傅立叶变换: $\hat{R}(\pi/2) s\rangle_x = s\rangle_p, \hat{R}(\pi/2) t\rangle_p = -t\rangle_x$ 可控X门: $\hat{C}\hat{X} s_1\rangle_{q_1} s_2\rangle_{q_2} = s_1\rangle_{q_1} s_2 + s_1\rangle_{q_2}$ $\hat{C}\hat{X} t_1\rangle_{p_1} t_2\rangle_{p_2} = t_1 - t_2\rangle_{p_1} t_2\rangle_{p_2}$

当 $\theta = \pi$ 时, 输入态变换为

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{out}} \\ \hat{p}_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}} \\ \hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^r \hat{x}_{\text{in}} \\ e^{-r} \hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

3) 旋转操作 旋转操作为 $\hat{R}(\theta) = e^{i\frac{\theta}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)} = e^{i\theta\hat{a}\hat{a}^\dagger}$, 其中 θ 为旋转的角度, 其作用是量子态在相空间发生旋转. 旋转操作对输入态的作用描述为

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{out}} \\ \hat{p}_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}} \\ \hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\hat{x}_{\text{in}} - \sin\theta\hat{p}_{\text{in}} \\ \sin\theta\hat{x}_{\text{in}} + \cos\theta\hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

当 $\theta = \pi/2$ 时, 旋转操作对输入态的作用表示为

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{out}} \\ \hat{p}_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}} \\ \hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{p}_{\text{in}} \\ \hat{x}_{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

此时旋转操作为傅立叶变换操作.

4) Shear 操作 Shear 变换操作也是一种常见的操作, 表示为 $\hat{P}(s) = e^{i\frac{s}{2}\hat{x}^2}$. 经过 Shear 变换操作后输入态和输出态的关系为

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{out}} \\ \hat{p}_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}} \\ \hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}} \\ s\hat{x}_{\text{in}} + \hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

输出态的正交振幅分量保持不变, 而正交相位分量发生平移.

5) 可控 X 门 除了以上的单模逻辑门外, 双模量子逻辑门也是连续变量量子逻辑门的重要组成部分. 可控 X 门操作是一种常见的双模逻辑门, 表示为 $\hat{C}_X(g) = e^{-ig\hat{x}_1\hat{p}_2} = e^{-ig\hat{x}_c\hat{p}_t}$. 模式 1 为控制模式, 模式 2 为目标模式. 当 $g = 1$ 时, 量子态正交分量的输入输出关系为

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{out}}^c \\ \hat{p}_{\text{out}}^c \\ \hat{x}_{\text{out}}^t \\ \hat{p}_{\text{out}}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}}^c \\ \hat{p}_{\text{in}}^c \\ \hat{x}_{\text{in}}^t \\ \hat{p}_{\text{in}}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}}^c \\ \hat{p}_{\text{in}}^c - \hat{p}_{\text{in}}^t \\ \hat{x}_{\text{in}}^t + \hat{x}_{\text{in}}^c \\ \hat{p}_{\text{in}}^t \end{pmatrix}. \quad (12)$$

连续变量可控 X 门也称为 QND 门.

6) 可控位相门 可控位相门表示为 $\hat{C}_Z(g) = e^{ig\hat{x}_1\hat{x}_2} = e^{ig\hat{x}_c\hat{x}_t}$, 同样模式 1 为控制模式, 模式 2

为目标模式. 当 $g = 1$ 时, 初始态经过可控位相门操作后, 其正交分量变换为

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{out}}^c \\ \hat{p}_{\text{out}}^c \\ \hat{x}_{\text{out}}^t \\ \hat{p}_{\text{out}}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}}^c \\ \hat{p}_{\text{in}}^c \\ \hat{x}_{\text{in}}^t \\ \hat{p}_{\text{in}}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}}^c \\ \hat{p}_{\text{in}}^c + \hat{x}_{\text{in}}^t \\ \hat{x}_{\text{in}}^t \\ \hat{p}_{\text{in}}^t + \hat{x}_{\text{in}}^c \end{pmatrix}. \quad (13)$$

7) 分束器变换操作 分束器操作被定义为 $\hat{B}(\theta) = e^{i\frac{\theta}{2}(\hat{x}_1\hat{p}_2 + \hat{p}_1\hat{x}_2)} = e^{i\frac{\theta}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger)}$, 其中 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 分别是模式 1 和模式 2 的湮灭算符, 分束器的透射率 $T = \cos^2(\theta/2) \in [0, 1]$. 模式 1 和模式 2 经分束器耦合后, 其正交分量变换为

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{out}}^c \\ \hat{p}_{\text{out}}^c \\ \hat{x}_{\text{out}}^t \\ \hat{p}_{\text{out}}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & 0 & \sqrt{1-T} & 0 \\ 0 & \sqrt{T} & 0 & \sqrt{1-T} \\ -\sqrt{1-T} & 0 & \sqrt{T} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-T} & 0 & \sqrt{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T}\hat{x}_1 + \sqrt{1-T}\hat{x}_2 \\ \sqrt{T}\hat{p}_1 + \sqrt{1-T}\hat{p}_2 \\ -\sqrt{1-T}\hat{x}_1 + \sqrt{T}\hat{x}_2 \\ -\sqrt{1-T}\hat{p}_1 + \sqrt{T}\hat{p}_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

单模和双模高斯门可以组合成任意多模高斯门. 经过高斯逻辑门操作, 输入态的正交分量呈现线性变换. 然而高斯量子逻辑门仅能实现高斯运算, 无法完成任意的么正量子逻辑门操作.

8) 非高斯量子逻辑门 在任意高斯操作的基础上, 至少增加一个非高斯操作即可实现通用量子计算, 因此非高斯逻辑门是连续变量量子计算的一个关键组成部分^[40,41]. 典型的非高斯逻辑门通常表示为 $\hat{U}_n(t) = e^{it\hat{x}^n/n}$, 其中 $n \geq 3$, t 表示非线性相互作用. 经过非高斯逻辑门操作后, 输出态正交分量变换为

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{out}} \\ \hat{p}_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}} \\ t\hat{x}_{\text{in}}^{n-1} + \hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

当 $n = 3$ 时, $\hat{U}_3(t) = e^{itx^3/3}$ 被称为立方位相门.

3 基于 cluster 态的连续变量量子计算

3.1 基于测量的连续变量量子计算

量子计算有两种模型:一种是量子线路模型,另一种是基于测量的量子计算模型,也被称为单向量子计算^[42].单向量子计算基于大规模簇态(cluster态)执行测量,通过测量结果的前馈来实现量子计算.在光学系统中,量子比特的测量通常比基于量子线路模型的量子门更容易,并在特定 cluster 态下仅使用单个量子比特测量可实现通用量子计算^[43].因此,单向量子计算已经成为实现大规模光量子计算的一种重要模型.

Cluster 态是一种具有相邻相互作用的多体纠缠态^[38,44],是单向量子计算^[43,45,46]和量子网络^[47–49]的基本量子资源.连续变量 cluster 态的纠缠结构示意图如图 3 所示,图中每个节点代表一个 qumode,节点间的连接代表相邻节点相互作用.

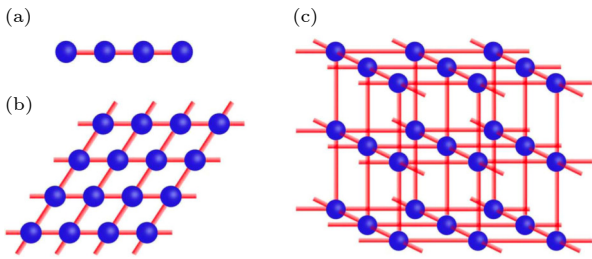


图 3 多组份 cluster 态示意图 (a) 四组份线性 cluster 态^[45]; (b) 二维 cluster 态^[45]; (c) 三维 cluster 态^[45]

Fig. 3. Schematic of multipartite cluster entangled states: (a) Linear four-mode cluster state^[45]; (b) two-dimensional cluster state^[45]; (c) three-dimensional cluster state^[45].

连续变量 cluster 态的量子关联形式为^[38,44]

$$\hat{p}_a - \sum_{b \in N_a} \hat{x}_b \equiv \hat{\delta}_a \rightarrow 0, a \in G, \quad (16)$$

式中, $a \in G$ 表示 cluster 态所代表的图 G (graph G) 的节点^[50], 而模式 $b \in N_a$ 是与模式 a 相连的邻点, $\hat{\delta}_a$ 表示额外噪声. 具有方程 (16) 形式的多体纠缠态被称为连续变量 cluster 态, 方程 (16) 被称为 nullifier. 在理想压缩情况下, N 模连续变量 cluster 态是各个模式正交分量线性叠加算符的零本征值态, 即 $\hat{\delta}_a = 0$. 由于一次测量仅破坏与其相邻节点间的相互作用, 而其余模式间的纠缠仍然存在, 因此 cluster 态具有良好的纠缠保持特性.

利用光场不同自由度的复用技术可实现不同

尺度 cluster 态的实验制备. 目前发展的复用技术主要包括空间、时间和频率复用技术. 将实验获得的压缩态光场经过特定的分束器网络结构耦合, 可以实现空间复用 cluster 态的制备^[51–54]. 山西大学在国际上首次实验制备了空间分离的连续变量四组份 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态和 cluster 态^[51], 进一步实验制备了空间分离的连续变量八组份 cluster 态光场^[54], 扩展了连续变量 cluster 态的尺度. 空间复用可以方便的将本地操作作用到每个模式上, 然而随着纠缠模式数目的增加, 分束器网络结构将会越来越复杂.

光频梳技术被应用于制备频率复用连续变量 cluster 态^[55]. 该方法通过光学参量放大器的共振频率模式实现频率复用. 2014 年, Chen 等^[56] 实现了最多 60 个频率模式的 cluster 态. Roslund 等^[57] 和 Cai 等^[58] 分别制备了 10 个和 13 个独立频率模式的 cluster 态. 由于受到位相匹配带宽的影响, 该方法产生的最大频率梳数目受到限制, 且纠缠模式不易分离.

制备大尺度纠缠态的另一种方法是时间复用. 2011 年, Menicucci^[59] 提出了利用时间复用制备任意尺度连续变量 cluster 态的方法. 2013 年, Yokoyama 等^[60] 实验上实现了 10000 个模式 cluster 态的制备. 随后扩展到 100 万个光学模式的纠缠态^[61]. 2019 年, 日本 Furusawa 研究组^[62] 和丹麦 Anderson 研究组^[63] 分别在实验上成功制备了二维 cluster 态. 三维 cluster 态是实现容错量子计算的一种重要量子资源^[64,65]. 2020 年, Fukui 等^[66] 提出了一种三维 cluster 态的产生方案, 并展示该纠缠态对基于拓扑保护测量的量子计算中有限压缩度产生的模拟误差具有鲁棒性.

3.2 基于测量的连续变量量子计算研究进展

光量子计算的主要挑战是实现可以对量子态进行任意么正变换的通用量子逻辑门. 在实验中, 高斯量子逻辑门的实现较为简单, 如平移操作可以通过将输入态和有调制信号的辅助态在分束器上耦合实现, 旋转操作和分束器操作可以仅通过使用线性光学元件实现. 而非高斯量子逻辑门的实现较为复杂.

日本 Furusawa 教授研究组实现了基于测量的压缩门^[67]、QND 门^[68]、单向二次位相门^[69]和可控位相门操作^[70], 并提出了利用四组份 cluster 态

实现任意压缩操作的方案^[71]. 我们基于连续变量四组份 cluster 态, 通过平衡零拍探测和电子学前馈系统, 实验实现了连续变量可控 X 量子逻辑操作^[72]. 2014 年, 我们实验演示了基于两组份纠缠光场的单模压缩操作和傅里叶变换, 实现了基本的量子逻辑门单元, 简化了实验方案、节省了量子资源^[73]. 仅仅一个量子逻辑门无法实现真正的量子算法. 一般, 需要连续执行一系列量子逻辑门操作, 才能实现量子算法. 我们以连续变量六组份 cluster 态光场为资源, 实验实现了一个包含单模压缩门和可控位相门的连续变量量子逻辑门序列, 展现了连续变量量子计算的可行性^[74].

近年来, 基于时间复用 cluster 态的连续变量量子计算取得了重要进展. 2021 年, Asavanant 等^[75]使用时间复用 cluster 态实现了旋转和 shear 等量子逻辑操作. 同年, Larsen 等^[76]基于二维 cluster 态实验实现了一组量子逻辑门.

3.3 连续变量量子计算的通用性

1999 年, Lloyd 和 Braunstein^[40]提出了用连续变量构建通用量子计算机的充要条件. 2006 年, Menicucci 等^[43]提出在实现任意的多模高斯操作 (Clifford 群的操作) 的基础上, 至少增加一个非高斯操作 (非 Clifford 操作) 就可以实现通用量子计算. 立方位相门是一种典型的非高斯门. 2001 年, Gottesman 等^[77]提出了基于双模压缩真空和光子数分辨探测器实现立方位相门的方案, 如图 4(a) 所示. 首先, 输入态 $|\psi\rangle$ 和三阶位相辅助态 $|\gamma\rangle$ 执行可控 X 操作后对量子态 $|\gamma\rangle$ 的正交振幅分量 $\hat{x}_\gamma$ 进行测量. 然后, 将测量的 $\hat{x}_\gamma$ 反馈到输入态的正交位相分量上 $\hat{p}_\psi \rightarrow \hat{p}_\psi + \gamma \hat{x}^2 + 2m\gamma \hat{x} + m^2\gamma$. 最后, 通过前馈 shear 操作 $\hat{P}(-2m\gamma)$ 和平移操作 $Z(-m^2\gamma)$ 消除 $2m\gamma \hat{x}$ 和 $m^2\gamma$ 项. 因此输出态表示为

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{out}} \\ \hat{p}_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{\text{in}} \\ \gamma \hat{x}_{\text{in}}^2 + \hat{p}_{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

非高斯辅助态对立方位相门的实现非常重要. 2016 年, Miyata 等^[78]提出通过自适应非高斯测量实现量子立方门, 该方法需要制备立方位相态 (cubic phase state). 2018 年, Sabapathy 和 Weedbrook^[79]提出通过使用压缩态、分束器耦合 BS 、平移操作 Z 和依赖于单光子计数结果的压缩操作, 可实现三阶立方位相门辅助态 $|\gamma\rangle$ 的制备, 其制备线路图如

图 4(b) 所示. 然而, 该方案对压缩度提出较高的要求. 而 Fock 态的叠加可以被看作是立方位相态. 目前, 弱立方位相态 $|0\rangle + c|1&3\rangle$ 已经被实验制备^[80].

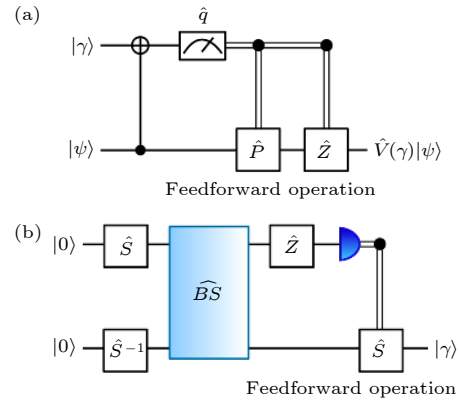


图 4 立方位相门 (a) 基于立方位相态实现立方位相门的线路图^[77]; (b) 立方位相态的产生方案^[37]

Fig. 4. Cubic phase gate: (a) The cubic phase gate by the measurement-induced scheme using the cubic phase state^[77]; (b) the preparation of the cubic phase state^[37].

3.4 连续变量量子计算的可扩展性

构建量子计算机需要扩展量子计算机的规模, 大规模量子计算机的实现需要有效增加量子比特数. 增加量子比特数目的一种方法是基于时间复用连续变量 cluster 态实现量子计算. 目前, 采用该方法已经能够产生纠缠模式大于 10000 的连续变量 cluster 态^[60–63], 并且正在开展量子逻辑门研究^[75,76].

增加量子比特数目的另一种方法是采用集成光学芯片实现大规模量子计算. 目前实现的连续变量集成光学芯片主要基于氧化硅、氮化硅和铌酸锂 (lithium niobate, LiNbO_3) 三种材料. 在氧化硅集成光学芯片方面, Furusawa 研究组^[81]实现了芯片上连续变量两组份纠缠态的制备. 最近, 美国弗吉尼亚大学实现了压缩态光场和 20 对双模压缩态光场的制备^[82]. 在氮化硅集成光学芯片方面, 已经实现了最高 -1.70 dB 压缩态光场的制备^[83–85]. 2021 年, 加拿大 Zhang 等^[86]将微环腔和线路集成在一起, 实现了片上的高斯玻色采样、分子振动光谱和图形相似性的计算^[15]. 在铌酸锂集成光学芯片方面, 已经实验实现了压缩态光场^[87,88]和双模纠缠态的产生和表征^[89]. 2020 年, Yi 等^[90]和 Chen 等^[91]基于 LiNbO_3 的集成光学芯片实现了量子态的产生和操控.

4 基于光学猫态的量子计算

4.1 基本原理

在量子计算中, 量子态的叠加原理使得量子计算机在处理某些复杂问题时能够具有经典计算机无法替代的优势. 薛定谔猫态不仅可以用于探索经典和量子物理的边界^[92–94], 还可以用于量子计算、量子隐形传态和精密测量^[95–98]. 光学薛定谔猫态是两个幅度相同、位相相反相干态的叠加, 被定义为 $(|\alpha\rangle + e^{i\phi} |-\alpha\rangle)/\sqrt{N_{\pm}}$, 其中 $N_{\pm} = 2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})$. $\phi = 0$ 对应于偶猫态, 仅包含偶数项光子. $\phi = \pi$ 对应于奇猫态仅含有奇数项光子. 两个相干态的重叠度为 $|\langle\alpha|-\alpha\rangle|^2 = e^{-4|\alpha|^2}$. 光学薛定谔猫态是一种非高斯态, 可以通过对一个高斯态作用非高斯操作实现. 实验上可以通过从压缩真空态中减去光子产生, 减去奇数个光子制备奇猫态, 或者减去偶数个光子制备偶猫态^[99]. 国际上已经有多个研究组基于此方案成功的产生了尺度较小的光学薛定谔猫态^[100–103].

光学薛定谔猫态是相干叠加态, 可以做为量子比特应用于量子计算中. 当以相干态为基矢来编码 qubit 时, 光学薛定谔猫态中的 $|-\alpha\rangle$ 被编码为 $|0\rangle_L$, $|\alpha\rangle$ 被编码为 $|1\rangle_L$. 基于光学猫态的量子计算要求两个相干态几乎正交, 即重叠部分几乎为零. 当 $|\alpha| = 2$ 时, 两个相干态的重叠部分 $\approx 10^{-7}$, 也就是说 $|\langle\alpha|-\alpha\rangle|^2 \approx 0$. 所以产生 $\alpha \geq 2$ 的光学薛定谔猫态在连续变量量子信息处理中有重要意义^[95]. 下面我们介绍基于光学猫态的几种典型量子逻辑门.

1) Bit-flip 门 也称为 X 门. Bit-flip 门表示为 $X = e^{i\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}}$, 它的作用效果为 $X(\mu|-\alpha\rangle + v|\alpha\rangle) = \mu|\alpha\rangle + \nu|-\alpha\rangle$. 该逻辑门可以通过将输入态相对于本地振荡延迟半个周期来翻转实现^[95].

2) Phase-flip 门 也称为 Z 门. Phase-flip 门的作用效果为对输入比特进行位相反转操作 $Z(\mu|-\alpha\rangle + v|\alpha\rangle) = \mu|-\alpha\rangle - v|\alpha\rangle$. 实现 phase-flip 门的方案如下^[95]. 将输入态 $\mu|-\alpha\rangle + v|\alpha\rangle$ 和 Bell 纠缠猫态 $(|-\alpha, -\alpha\rangle + |\alpha, \alpha\rangle)/\sqrt{2}$ 一个模式耦合后进行 Bell 态测量, 并将测量结果反馈至 Bell 纠缠猫态的另一个模式, 得到四种输出结果: 1) $\mu|-\alpha\rangle + \nu|\alpha\rangle$; 2) $\mu|-\alpha\rangle - \nu|\alpha\rangle$; 3) $\mu|\alpha\rangle + \nu|-\alpha\rangle$; 4) $\mu|\alpha\rangle - \nu|-\alpha\rangle$. 通过使用 bit-flip 操作可将 3) 和 4) 的错误反转纠正为 3) $\mu|-\alpha\rangle + \nu|\alpha\rangle$, 4) $\mu|-\alpha\rangle$

$-v|\alpha\rangle$. 因此, 在纠正错误后, 得到两种输出结果: 1) 和 3) 情况下输入结果不变, 2) 和 4) 情况下输入比特发生位相反转操作.

3) Hadamard 门 相干态 $|\pm\alpha\rangle$ 经过 Hadamard 门操作后转换为 $(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)/\sqrt{N_{\pm}}$. 实现 Hadamard 门的方案如图 5 所示^[104]. 经过平移操作 $\hat{D}$ 的输入态 $|\psi_{in}\rangle = (\mu|\alpha\rangle + v|-\alpha\rangle)/\sqrt{N_{+}}$ 和辅助态分别经过低反射率分束器 BS_u 后, 反射部分在分束器 BS_r 实现不可区分的减光子操作 $r\hat{a} + t\hat{b}$, 当输入态的透射部分在单光子探测器有响应时, 即可实现 Hadamard 门变换.

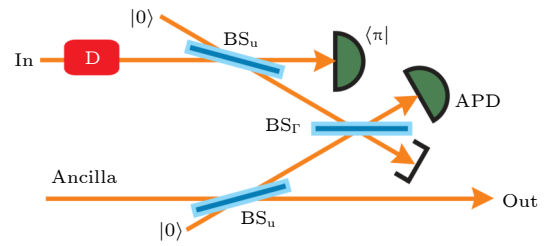


图 5 基于光学猫态的 Hadamard 门方案示意图^[104]

Fig. 5. Schematic of Hadamard gate based on optical cat state^[104].

4) Phase rotation gate 门 实现位相旋转门 (phase rotation gate) 的方案如图 6 所示^[95]. 首先将输入态沿着相空间的虚轴 (正交位相方向) 做微小平移 $D\left(\frac{i\theta}{4\alpha}\right)$, 其输入态变换为

$$\begin{aligned} & D\left(\frac{i\theta}{4\alpha}\right)(\mu|-\alpha\rangle + v|\alpha\rangle) \\ &= e^{-\frac{i\theta}{4}}\mu|-\alpha(1 - i\theta/4\alpha^2)\rangle \\ &+ e^{\frac{i\theta}{4}}v|\alpha\left(1 + \frac{i\theta}{4\alpha^2}\right)\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

然后将平移后的量子态和 Bell 猫态的一个模式进行联合测量, 并将测量结果经过 X 门操作和 Z 操作纠正后, 得到的输出态为

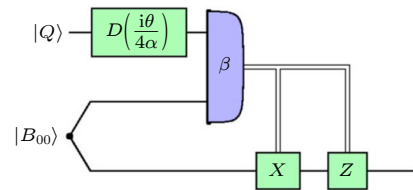


图 6 基于光学猫态的位相旋转门方案示意图^[95]

Fig. 6. Schematic of phase rotation gate based on optical cat state^[95].

$$e^{-\frac{\theta^2 \alpha^2}{32}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2} \alpha^2} \mu |-\alpha\rangle + e^{i\frac{\theta}{2} \alpha^2} v |\alpha\rangle \right). \quad (19)$$

其效果为围绕 Z 轴旋转 θ 。

5) 可控位相门 可控位相门是一种重要的两比特量子逻辑门。基于光学猫态实现可控位相门的原理图如图 7 所示^[95]。首先将输入的两个量子态：

$$v |-\alpha\rangle_a |-\alpha\rangle_b + \mu |\alpha\rangle_a |-\alpha\rangle_b \\ + \tau |-\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b + \gamma |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b. \quad (20)$$

在分束器上耦合, 然后分束器的两个输出态分别和纠缠猫态的一个模式进行 Bell 测量, 并将测量的结果经过 X 操作和 Z 操作进行错误纠正后得到最终的输出态

$$e^{-\frac{\theta^2 \alpha^2}{4}} (e^{i\theta \alpha^2} v |-\alpha\rangle_a |-\alpha\rangle_b \pm e^{-i\theta \alpha^2} \mu |\alpha\rangle_a |-\alpha\rangle_b \\ \pm e^{-i\theta \alpha^2} \tau |-\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b + e^{i\theta \alpha^2} \gamma |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b). \quad (21)$$

输出态的正负号由 Bell 测量的输出结果决定。如果选择 $\phi = 2\theta \alpha^2 = \pi/2$, 该方案即可实现等价于可控 X 量子逻辑门。

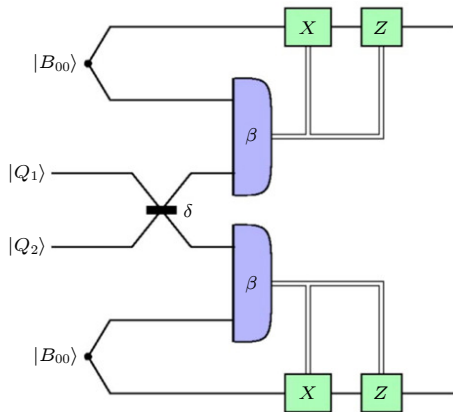


图 7 基于光学猫态的可控位相门方案示意图^[95]

Fig. 7. Schematic of controlled phase gate based on optical cat state^[95].

4.2 研究进展

2003 年, Ralph 等^[95] 理论上提出了利用相干叠加态实现单模和双模量子逻辑门的方案。随后, 研究表明相干叠加态可以实现容错量子计算^[97], 并进一步提出了单模位相门、双模位相门、双模受控位相门以及单模 Hadamard 逻辑门的实验方案^[104]。2011 年, 丹麦 Andersen 研究组^[105] 利用相干叠加态作为量子比特, 实现了 Hadamard 量子逻辑门。

2012 年, 法国 Grangier 研究组^[106] 利用减光子操作将一个奇猫态转化为偶猫态, 实现了 π 相移的量子逻辑门。

目前, 实验中实现的基于光学猫态的量子逻辑门局限于单模逻辑门, 双模量子逻辑门的实现仍然具有挑战性。要想实现双模逻辑门, 首先需要制备纠缠猫态 (Bell-cat)。实验上制备光学 Bell 猫态的方法有两种: 1) 将两个压缩真空态在减光子部分建立纠缠, 对其中一束光进行光子计数。Grangier 研究组^[107] 和 Lvovsky 研究组^[108] 通过该方法分别制备了 Bell 猫态。2) 直接将薛定谔猫态与真空态在 50:50 分束器上耦合, 产生 Bell 猫态。此方案中 Bell 猫态的产率仅取决于薛定谔猫态本身的产率, 但对应 Bell 猫态的尺度将会降低 $\sqrt{2}$ 倍。

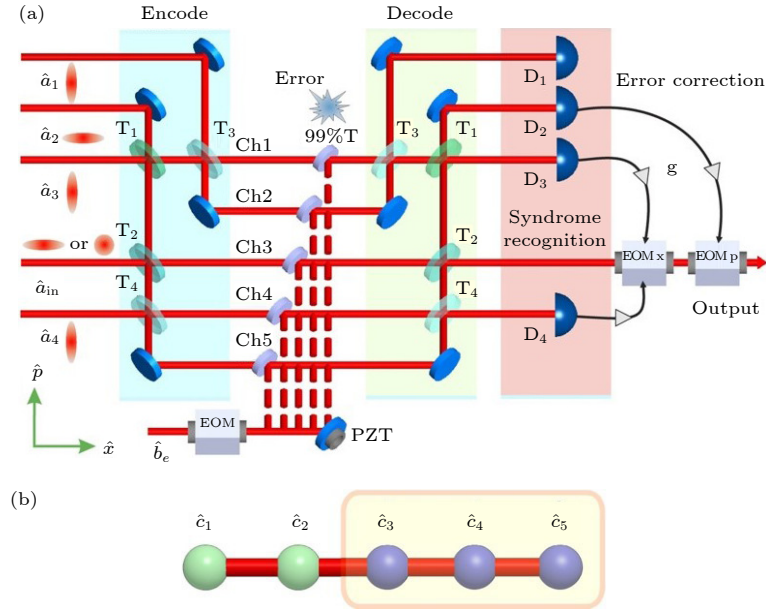
5 连续变量量子纠错

量子态受到环境中损耗和噪声等因素的影响会导致退相干效应, 从而使得最终输出态和输入态之前存在误差。这些误差会破坏相干性, 降低量子计算的计算能力。因此, 量子纠错是实现高保真度量子信息处理的一个关键环节。

5.1 玻色子码

在连续变量量子纠错中, 玻色子码 (Bosonic code) 是常用的一种纠错码。玻色子码将离散的量子信息编码到玻色子模式^[37], 它能够纠正由于环境损耗引入的误差, 从而保护量子信息。连续变量量子纠错码有多种玻色子码, 包括九波包编码^[109,110]、五波包编码^[111,112]、Gottesman Kitaev Preskil (GKP) 码^[77]、纠缠辅助编码^[113] 和量子擦除 (quantum erasure) 方案^[114] 等。

研究表明高斯误差是不能通过纯高斯操作来实现量子纠错^[115]。然而, 对于非高斯类型的误差, 可以利用分束器网络的结构对输入模式进行编码, 通过耦合适当的辅助模式来实现纠错^[112]。在连续变量量子纠错中, 多种不同结构的纠正单一非高斯误差的九波包编码连续变量量子纠错^[116]、量子擦除纠错方案^[114]、关联信道纠错方案^[117] 和五波包编码量子纠错^[118] 已经被实验实现。研究表明对于高斯噪声引入的误差可以通过光子计数进行非高斯操作来实现量子纠错^[119]。

图 8 基于五波包部分编码方式的连续变量量子纠错方案^[118]Fig. 8. Scheme of CV quantum error correction with five-wave-packet code^[118].

5.1.1 五波包编码量子纠错

与九波包编码量子纠错相比,五波包编码量子纠错能够节省量子资源,高效的实现量子纠错. 1998 年 Braunstein^[111] 提出了利用五波包结构高效地实现量子纠错编码的方案. 2010 年, Walker 和 Braunstein^[112] 通过使用新的数学算法演示了一种可用于五波包量子纠错编码的线性光学网络结构. 2015 年, Hao 等实现了纠正单一随机误差的五波包编码连续变量量子纠错^[118]. 在该编码方案中,采用五模连续变量的纠缠态光场进行编码. 值得注意的是,输入态的信息仅仅被编码在五个传输信道的其中三个信道,剩余的两个信道引入的误差不会影响到输出态的结果,即输出量子态对这两个信道上的误差有免疫功能. 其实验装置图如图 8 所示,采用了真空态和压缩态光场作为输入信号,验证了任意的单一误差的量子纠错过程,而且输出态的保真度高于相应的经典极限.

5.1.2 GKP 码

2001 年, Gottesman 等^[77] 提出一种 GKP 码的编码方式,可用于实现通用和容错连续变量量子计算. 随后,研究表明 GKP 魔术态结合高斯操作和高斯测量可以实现通用量子计算^[37]. 因此 GKP 编码提供了一种实现通用量子计算的有效途径. 当正交振幅和正交位相分量发生小于纠错阈值的平移误差时,采用 GKP 码作为纠错量子线路的辅助

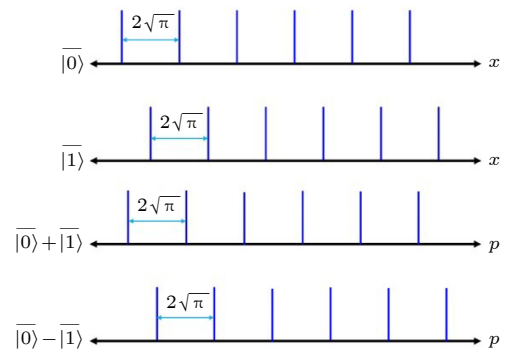
态,结合可控 X 门可分别实现对正交振幅和正交位相分量的量子纠错^[120]. 此外,相比于基于猫态的量子计算, GKP 编码具有良好的容错性和对抗噪声能力^[121].

通过将连续变量无限维希尔伯特空间转换为有限维的编码空间,产生 GKP 量子比特. 具体而言, GKP 码将量子比特编码到谐振子的正交振幅和正交位相分量,如图 9 所示. 理想情况下(无限压缩), GKP 码的逻辑 $|0\rangle$ 和逻辑 $|1\rangle$ 分别表示为

$$|0\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |2m\sqrt{\pi}\rangle_x, \quad (22a)$$

$$|1\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |(2m+1)\sqrt{\pi}\rangle_x. \quad (22b)$$

逻辑 $|0\rangle$ 和逻辑 $|1\rangle$ 均是间隔为 $2\sqrt{\pi}$ 正交振幅分量

图 9 GKP 量子比特的编码方式^[77]Fig. 9. The codeword for the GKP qubit^[77].

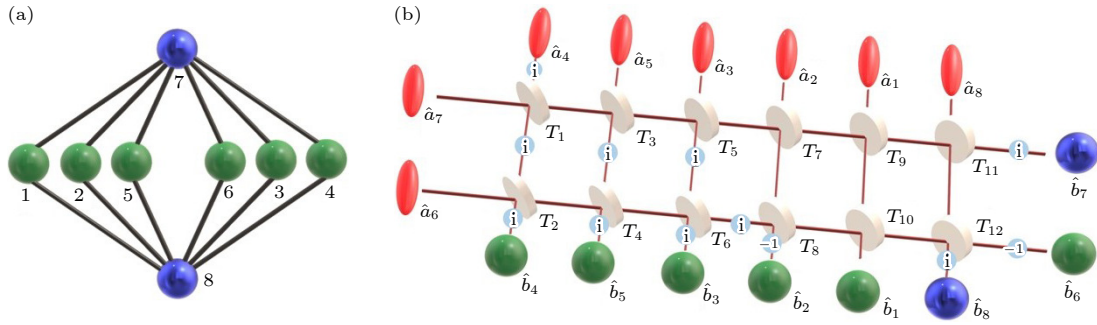


图 10 基于 cluster 态的连续变量拓扑误差修正方案 (a) 八组份拓扑结构连续变量 cluster 纠缠态的图态表示^[135]; (b) 产生八组份连续变量 cluster 纠缠态的分束器网络^[135]

Fig. 10. Scheme of topological error correction with CV a Gaussian cluster state: (a) The graph structure of the topological eight-partite CV cluster state; (b) the beam-splitter network for the preparation of the cluster state^[135].

本征态的叠加, 通过在正交振幅分量平移 $\sqrt{\pi}$ 即可实现逻辑 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的相互转换. 间隔为 $2\sqrt{\pi}$ 的正交位相分量本征态的叠加为 $(|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$, 通过在正交位相分量平移 $\sqrt{\pi}$ 可实现 $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 和 $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ 的相互转换.

目前, 超导系统^[122]和离子阱系统^[123]已经实现了 GKP 量子比特的制备. 在光学系统中, 几种 GKP 码的制备方案已经被提出, 例如迭代方法^[124]和基于可分辨光子数探测器的高斯玻色采样^[125,126]等. 在迭代方案中, 两个压缩猫态在一个分束器上耦合, 并对一个输出端口的正交位相分量进行平衡零拍测量. 当测量结果接近 0 时, 另一个端口为近似的 GKP 量子比特. 重复以上迭代过程可以不断增加 GKP 量子比特中的高斯峰的数目^[124]. 在基于可分辨光子数探测器的高斯玻色采样方案中, 首先对输入的真空态分别进行平移和压缩操作, 然后通过分束器网络干涉, 最后对输出态进行可分辨光子数测量^[126]. 迄今为止, 光学系统 GKP 量子比特的实验实现仍是一个挑战性问题.

5.2 拓扑码

拓扑纠错可以有效地修正量子计算中的误差, 使得量子计算可以在高误差阈值和高容错率前提下被执行. 研究表明, 在量子纠错和容错量子计算中, 对三维 cluster 态进行适当的操控就能实现量子算法^[64,65,127]. 基于 cluster 态的拓扑性质, 可以实现拓扑量子计算和拓扑误差修正^[127–129]. 2020 年, Fukui 等^[66]提出了对有限压缩度产生的模拟误差具有鲁棒性的三维 cluster 态产生方案.

近年来, 一些与连续变量拓扑量子计算有关的基本概念已经被提出, 例如任意子统计^[130]、图形演

化^[50]、拓扑码^[131]及其在量子通信中的应用^[132]、基于任意子的连续变量量子计算^[133]和容错量子计算^[97,134]. 2021 年, Hao 等^[135]提出了基于八组份高斯 cluster 态的连续变量拓扑纠错方案, 方案如图 10 所示. 首先, 该方案提出了拓扑结构连续变量八组份纠缠态的产生方案, 然后设计了连续变量拓扑纠错方案. 当单个平移误差发生在任意一个模式和某两个模式时, 双模的拓扑量子关联可以纠正误差. 更有趣的是, 与离散变量的拓扑纠错方案不同, 当特定组合的三个模式发生相同的误差时, 该方案仍可以有效地识别和纠正这些误差.

6 总结讨论

综上所述, 连续变量量子计算以其独特的优势为实现可扩展、通用和容错的量子计算机提供了一条可行途径. 经过多年的发展, 已经实现了大尺度 cluster 态的实验制备和一系列高斯量子逻辑门, 展现了连续变量量子计算的可行性. 然而, 面向可实用的大规模量子计算, 仍然有一系列挑战性问题需要解决. 在量子计算的通用性方面, 非高斯量子逻辑门是通用量子计算的重要组成部分. 目前光学系统中制备非高斯量子逻辑门的理论方案已经被提出, 但非高斯量子逻辑门的实验实现仍然是连续变量量子计算的挑战之一. 在量子计算的可扩展性方面, 纠缠模式大于 10000 的连续变量 cluster 态已经被制备, 为实现大规模量子计算提供了量子资源. 然而, 随着光学模式数和操作步骤的增加, 需要的光学元件数目和占用的空间增加, 因此急需发展连续变量集成光学芯片. 目前已经实现了基于集成光学芯片压缩态和纠缠态的制备和操控, 但基于集成光学芯片的量子逻辑门是实现可扩展量子计

算的一个挑战. 在量子计算的容错性方面, 玻色子码和拓扑码是最常用的量子纠错码. GKP 码是一种较有优势的玻色子码, 但光学系统 GKP 码的制备和容错量子计算仍然具有挑战性.

本文简要介绍了近年来基于 cluster 态的连续变量量子计算、基于光学薛定谔猫态的量子计算和连续变量量子纠错的基本原理和研究进展, 并分析了实现大规模容错连续变量量子计算所面临的挑战. 时间复用技术提供了连续变量量子计算所需的大尺度量子资源, 为解决可扩展性问题提供了一条有效途径. 集成光学芯片可以解决自由空间尺寸限制的问题, 为连续变量量子计算的可扩展性提供了另一条可行途径, 是发展实用化量子计算的必然趋势. GKP 码为实现通用性和容错性量子计算提供了可行的解决方案. 虽然仍有一系列挑战性问题亟待解决, 连续变量量子计算已经展现了独特的优势, 例如“九章”量子计算原型机展示了解决高斯玻色采样难题的优势, 具有广阔的发展前景.

参考文献

- [1] Shor P W 1994 *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* Santa Fe, American, November 20–22, 1994
- [2] Feynman R P 1982 *Int. J. Theor. Phys.* **21** 467
- [3] Lloyd S 1993 *Science* **261** 1569
- [4] Lloyd S 1994 *Science* **263** 695
- [5] Rarity J G, O'neil P C M, Tapster P R 1994 *J. Mod. Opt.* **41** 2435
- [6] Devoret M H, Schoelkopf R J 2013 *Science* **339** 1169
- [7] Gambetta J M, Chow J M, Steffen M 2017 *NPJ Quantum Inf.* **3** 2
- [8] Li Z Y, Yu H F, Tan X S, Zhao S P, Yu Y 2019 *Chin. Phys. B* **28** 098505
- [9] Gong M, Wang S, Zha C, et al. 2021 *Science* **372** 948
- [10] Huang H L, Wu D, Fan D, Zhu X 2020 *Sci. Chin. Inf. Sci.* **63** 180501
- [11] Pagano G, Bapat A, Becker P, Collins K S, De A, Hess P W, Kaplan H B, Kyprianidis A, Tan W L, Baldwin C, Brady L T, Deshpande A, Liu F, Jordan S, Gorshkov A V, Monroe C 2020 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **117** 25396
- [12] Pino J M, Dreiling J M, Figgatt C, et al. 2021 *Nature* **592** 209
- [13] Watson T F, Philips S G J, Kawakami E, et al. 2018 *Nature* **555** 633
- [14] Hendrickx N W, Lawrie W I L, Russ M, et al. 2021 *Nature* **591** 580
- [15] Arrazola J M, Bergholm V, Brádler K, et al. 2021 *Nature* **591** 54
- [16] Zwanenburg F A, Dzurak A S, Morello A, Simmons M Y, Hollenberg L C L, Klimeck G, Rogge S, Coppersmith S N, Eriksson M A 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 961
- [17] Arute F, Arya K, Babbush R, et al. 2019 *Nature* **574** 505
- [18] Yan Z, Zhang Y R, Gong M, et al. 2019 *Science* **364** 753
- [19] Wu Y, Bao W S, Cao S, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 180501
- [20] Zhong H S, Wang H, Deng Y H, et al. 2020 *Science* **370** 1460
- [21] Zhong H S, Deng Y H, Qin J, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 180502
- [22] van Loock P 2011 *Laser Photonics Rev.* **5** 167
- [23] Andersen U L, Neergaard-Nielsen J S, van Loock P, Furusawa A 2015 *Nat. Phys.* **11** 713
- [24] Braunstein S L, van Loock P 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 513
- [25] Weedbrook C, Pirandola S, García-Patrón R, Cerf N J, Ralph T C, Shapiro J H, Lloyd S 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 621
- [26] Huh J, Guerreschi G G, Peropadre B, McClean J R, Aspuru-Guzik A 2015 *Nat. Photonics* **9** 615
- [27] Hamilton C S, Kruse R, Sansoni L, Barkhofen S, Silberhorn C, Jex I 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 170501
- [28] Arrazola J M, Bromley T R 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 030503
- [29] Banchi L, Fingerhuth M, Babej T, Ing C, Arrazola J M 2020 *Sci. Adv.* **6** eaax1950
- [30] Lau H K, Pooser R, Siopsis G, Weedbrook C 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 080501
- [31] Schuld M, Killoran N 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 040504
- [32] Killoran N, Bromley T R, Arrazola J M, Schuld M, Quesada N, Lloyd S 2019 *Phys. Rev. Res.* **1** 033063
- [33] Kalajdzievski T, Weedbrook C, Rebertus P 2018 *Phys. Rev. A* **97** 062311
- [34] Arrazola J M, Kalajdzievski T, Weedbrook C, Lloyd S 2019 *Phys. Rev. A* **100** 032306
- [35] Adesso G, Illuminati F 2007 *J. Phys. A:Math. Theor.* **40** 7821
- [36] Su X L, Jia X J, Peng K C 2016 *Process Phys.* **36** 101 (in Chinese) [苏晓龙, 贾晓军, 彭堃堦 2016 物理学进展 **36** 101]
- [37] Fukui K, Takeda S 2022 *J. Phys. B:At. Mol. Opt. Phys.* **55** 012001
- [38] Gu M, Weedbrook C, Menicucci N C, Ralph T C, van Loock P 2009 *Phys. Rev. A* **79** 062318
- [39] Furusawa A, van Loock P 2011 *Quantum Teleportation and Entanglement: A Hybrid Approach to Optical Quantum Information Processing* (Hoboken: Wiley) p16
- [40] Lloyd S, Braunstein S L 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1784
- [41] Furusawa A, van Loock P 2011 *Quantum Teleportation and Entanglement: A Hybrid Approach to Optical Quantum Information Processing* (Hoboken: Wiley) p58
- [42] Raussendorf R, Briegel H J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5188
- [43] Menicucci N C, van Loock P, Gu M, Weedbrook C, Ralph T C, Nielsen M A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 110501
- [44] Zhang J, Braunstein S L 2006 *Phys. Rev. A* **73** 032318
- [45] Hao S, Deng X, Liu Y, Su X, Xie C, Peng K 2021 *Chin. Phys. B* **30** 060312
- [46] Su X L, Jia X J, Xie C D, Peng K C 2010 *Physics* **39** 746 (in Chinese) [苏晓龙, 贾晓军, 谢常德, 彭堃堦 2010 物理 **39** 746]
- [47] Peng K C, Su X L, Jia X J, Xie C D 2012 *J. Shanxi Univ.* **35** 231 (in Chinese) [彭堃堦, 苏晓龙, 贾晓军, 谢常德 2012 山西大学学报 **35** 231]
- [48] Wang Y, Tian C, Su Q, Wang M, Su X 2019 *Sci. Chin. Inf. Sci.* **62** 72501
- [49] Su X, Wang M, Yan Z, Jia X, Xie C, Peng K 2020 *Sci. Chin. Inf. Sci.* **63** 180503
- [50] Menicucci N C, Flammia S T, van Loock P 2011 *Phys. Rev. A* **83** 042335
- [51] Su X, Tan A, Jia X, Zhang J, Xie C, Peng K 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 070502
- [52] Yukawa M, Ukai R, van Loock P, Furusawa A 2008 *Phys. Rev. A* **78** 012301

- [53] Tan A, Wang Y, Jin X, Su X, Jia X, Zhang J, Xie C, Peng K 2008 *Phys. Rev. A* **78** 013828
- [54] Su X, Zhao Y, Hao S, Jia X, Xie C, Peng K 2012 *Opt. Lett.* **37** 5178
- [55] Pysher M, Miwa Y, Shahrokhsahi R, Bloomer R, Pfister O 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 030505
- [56] Chen M, Menicucci N C, Pfister O 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 120505
- [57] Roslund J, de Araújo R M, Jiang S, Fabre C, Treps N 2014 *Nat. Photonics* **8** 109
- [58] Cai Y, Roslund J, Ferrini G, Arzani F, Xu X, Fabre C, Treps N 2017 *Nat. Commun.* **8** 15645
- [59] Menicucci N C 2011 *Phys. Rev. A* **83** 062314
- [60] Yokoyama S, Ukai R, Armstrong S C, Sornphiphatphong C, Kaji T, Suzuki S, Yoshikawa J I, Yonezawa H, Menicucci N C, Furusawa A 2013 *Nat. Photonics* **7** 982
- [61] Yoshikawa J I, Yokoyama S, Kaji T, Sornphiphatphong C, Shiozawa Y, Makino K, Furusawa A 2016 *APL Photonics* **1** 060801
- [62] Larsen M V, Guo X, Breum C R, Neergaard-Nielsen J S, Andersen U L 2019 *Science* **366** 369
- [63] Asavanant W, Shiozawa Y, Yokoyama S, et al. 2019 *Science* **366** 373
- [64] Raussendorf R, Harrington J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 190504
- [65] Raussendorf R, Harrington J, Goyal K 2007 *New J. Phys.* **9** 199
- [66] Fukui K, Asavanant W, Furusawa A 2020 *Phys. Rev. A* **102** 032614
- [67] Yoshikawa J I, Hayashi T, Akiyama T, Takei N, Huck A, Andersen U L, Furusawa A 2007 *Phys. Rev. A* **76** 060301
- [68] Yoshikawa J I, Miwa Y, Huck A, Andersen U L, van Loock P, Furusawa A 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 250501
- [69] Miwa Y, Yoshikawa J I, van Loock P, Furusawa A 2009 *Phys. Rev. A* **80** 050303
- [70] Ukai R, Yokoyama S, Yoshikawa J I, van Loock P, Furusawa A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 250501
- [71] Ukai R, Iwata N, Shimokawa Y, Armstrong S C, Politi A, Yoshikawa J I, van Loock P, Furusawa A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 240504
- [72] Wang Y, Su X, Shen H, Tan A, Xie C, Peng K 2010 *Phys. Rev. A* **81** 022311
- [73] Hao S, Deng X, Su X, Jia X, Xie C, Peng K 2014 *Phys. Rev. A* **89** 032311
- [74] Su X, Hao S, Deng X, Ma L, Wang M, Jia X, Xie C, Peng K 2013 *Nat. Commun.* **4** 2828
- [75] Asavanant W, Charoensombutamon B, Yokoyama S, et al. 2021 *Phys. Rev. Appl.* **16** 034005
- [76] Larsen M V, Guo X, Breum C R, Neergaard-Nielsen J S, Andersen U L 2021 *Nat. Phys.* **17** 1018
- [77] Gottesman D, Kitaev A, Preskill J 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012310
- [78] Miyata K, Ogawa H, Marek P, Filip R, Yonezawa H, Yoshikawa J I, Furusawa A 2016 *Phys. Rev. A* **93** 022301
- [79] Sabapathy K K, Weedbrook C 2018 *Phys. Rev. A* **97** 062315
- [80] Yukawa M, Miyata K, Yonezawa H, Marek P, Filip R, Furusawa A 2013 *Phys. Rev. A* **88** 053816
- [81] Masada G, Miyata K, Politi A, Hashimoto T, O'Brien J L, Furusawa A 2015 *Nat. Photonics* **9** 316
- [82] Yang Z, Jahanbozorgi M, Jeong D, Sun S, Pfister O, Lee H, Yi X 2021 *Nat. Commun.* **12** 4781
- [83] Dutt A, Luke K, Manipatruni S, Gaeta A L, Nussenzveig P, Lipson M 2015 *Phys. Rev. Appl.* **3** 044005
- [84] Zhao Y, Okawachi Y, Jang J K, Ji X, Lipson M, Gaeta A L 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 193601
- [85] Vaidya V D, Morrison B, Helt L G, et al. 2020 *Sci. Adv.* **6** eaba9186
- [86] Zhang Q Y, Xu P, Zhu S N 2018 *Chin. Phys. B* **27** 054207
- [87] Kaiser F, Fedrici B, Zavatta A, D'Auria V, Tanzilli S 2016 *Optica* **3** 362
- [88] Fürst J U, Strekalov D V, Elser D, Aiello A, Andersen U L, Marquardt Ch, Leuchs G 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 113901
- [89] Lenzini F, Janousek J, Thearle O, Villa M, Haylock B, Kasture S, Cui L, Phan H P, Dao D V, Yonezawa H, Lam P K, Huntington E H, Lobino M 2018 *Sci. Adv.* **4** eaat9331
- [90] Qi Y, Li Y 2020 *Nanophotonics* **9** 1287
- [91] Chen P K, Briggs I, Hou S, Fan L 2022 *Opt. Lett.* **47** 1506
- [92] Schrödinger E 1935 *Naturwissenschaften* **23** 807
- [93] Haroche S 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1083
- [94] Arndt M, Hornberger K 2014 *Nat. Phys.* **10** 271
- [95] Ralph T C, Gilchrist A, Milburn G J, Munro W J, Glancy S 2003 *Phys. Rev. A* **68** 042319
- [96] Jeong H, Kim M S 2002 *Phys. Rev. A* **65** 042305
- [97] Lund A P, Ralph T C, Haselgrove H L 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 030503
- [98] Sychev D V, Ulanov A E, Tiunov E S, Pushkina A A, Kuzhamuratov A, Novikov V, Lvovsky A I 2018 *Nat. Commun.* **9** 3672
- [99] Dakna M, Anhut T, Opatrný T, Knöll L, Welsch D G 1997 *Phys. Rev. A* **55** 3184
- [100] Ourjoumtsev A, Tualle-Brouri R, Laurat J, Grangier P 2006 *Science* **312** 83
- [101] Neergaard-Nielsen J S, Melholt Nielsen B, Hettich C, Mølmer K, Polzik E S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 083604
- [102] Wakui K, Takahashi H, Furusawa A, Sasaki M 2007 *Opt. Express* **15** 3568
- [103] Lee N, Benichi H, Takeno Y, Takeda S, Webb J, Huntington E, Furusawa A 2011 *Science* **332** 330
- [104] Marek P, Fiurásek J 2010 *Phys. Rev. A* **82** 014304
- [105] Tipsmark A, Dong R, Laghaout A, Marek P, Ježek M, Andersen U L 2011 *Phys. Rev. A* **84** 050301
- [106] Blandino R, Ferreyrol F, Barbieri M, Grangier P, Tualle-Brouri R 2012 *New J. Phys.* **14** 013017
- [107] Ourjoumtsev A, Ferreyrol F, Tualle-Brouri R, Grangier P 2009 *Nat. Phys.* **5** 189
- [108] Sychev D V, Novikov V A, Pirov K K, Simon C, Lvovsky A I 2019 *Optica* **6** 1425
- [109] Braunstein S L 1998 *Nature* **394** 47
- [110] Lloyd S, Slotine J J E 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 4088
- [111] Braunstein S L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 4084
- [112] Walker T A, Braunstein S L 2010 *Phys. Rev. A* **81** 062305
- [113] Wilde M M, Krovi H, Brun T A 2007 *Phys. Rev. A* **76** 052308
- [114] Niset J, Andersen U L, Cerf N J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 130503
- [115] Niset J, Fiurásek J, Cerf N J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 120501
- [116] Aoki T, Takahashi G, Kajiya T, Yoshikawa J I, Braunstein S L, van Loock P, Furusawa A 2009 *Nat. Phys.* **5** 541
- [117] Lassen M, Berni A, Madsen L S, Filip R, Andersen U L 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 180502
- [118] Hao S, Su X, Tian C, Xie C, Peng K 2015 *Sci. Rep.* **5** 15462
- [119] Ralph T C 2011 *Phys. Rev. A* **84** 022339
- [120] Glancy S, Knill E 2006 *Phys. Rev. A* **73** 012325
- [121] Albert V V, Noh K, Duijvenvoorden K, Young D J, Brierley R T, Reinhold P, Vuillot C, Li L, Shen C, Girvin S M, Terhal B M, Jiang L 2018 *Phys. Rev. A* **97** 032346
- [122] Flühmann C, Nguyen T L, Marinelli M, Negnevitsky V, Mehta K, Home J P 2019 *Nature* **566** 513
- [123] Campagne-Ibarcq P, Eickbusch A, Touzard S, Zalys-Geller

- E, Frattini N E, Sivak V V, Reinhold P, Puri S, Shankar S, Schoelkopf R J, Frunzio L, Mirrahimi M, Devoret M H 2020 *Nature* **584** 368
- [124] Vasconcelos H M, Sanz L, Glancy S 2010 *Opt. Lett.* **35** 3261
- [125] Fukui K, Takeda S, Endo M, Asavanant W, Yoshikawa J I, van Loock P, Furusawa A 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 240503
- [126] Su D, Myers C R, Sabapathy K K 2019 *Phys. Rev. A* **100** 052301
- [127] Fowler A G, Goyal K 2009 *Quantum Inf. Comput.* **9** 727
- [128] Raussendorf R, Harrington J, Goyal K 2006 *Ann. Phys.* **321** 2242
- [129] Stern A, Lindner N H 2013 *Science* **339** 1179
- [130] Zhang J, Xie C, Peng K, van Loock P 2008 *Phys. Rev. A* **78** 052121
- [131] Morimae T 2013 *Phys. Rev. A* **88** 042311
- [132] Menicucci N C, Baragiola B Q, Demarie T F, Brennen G K 2018 *Phys. Rev. A* **97** 032345
- [133] Milne D F, Korolkova N V, van Loock P 2012 *Phys. Rev. A* **85** 052325
- [134] Menicucci N C 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 120504
- [135] Hao S, Wang M, Wang D, Su X 2021 *Phys. Rev. A* **103** 052407

SPECIAL TOPIC—Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Research advances in continuous-variable quantum computation and quantum error correction^{*}

Wang Mei-Hong¹⁾ Hao Shu-Hong²⁾ Qin Zhong-Zhong¹⁾ Su Xiao-Long^{1)†}

¹⁾ (State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Opto-Electronics, Collaborative

Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

²⁾ (School of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology, Maanshan 243000, China)

(Received 7 April 2022; revised manuscript received 9 May 2022)

Abstract

Quantum computation presents incomparable advantages over classical computer in solving some complex problems. To realize large-scale quantum computation, it is required to establish a hardware platform that is universal, scalable and fault tolerant. Continuous-variable optical system, which has unique advantages, is a feasible way to realize large-scale quantum computation and has attracted much attention in recent years. Measurement-based continuous-variable quantum computation realizes the computation by performing the measurement and feedforward of measurement results in large-scale Gaussian cluster states, and it provides an efficient method to realize quantum computation. Quantum error correction is an important part in quantum computation and quantum communication to protect quantum information. This review briefly introduces the basic principles and research advances in one-way quantum computation based on cluster states, quantum computation based on optical Schrödinger cat states and quantum error correction with continuous variables, and discusses the problems and challenges that the continuous-variable quantum computation is facing.

Keywords: quantum computation, continuous variables, cluster states, Schrödinger cat states, quantum error correction

PACS: 03.67.Lx, 03.67.Pp, 42.50.-p, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.71.20220635

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11834010, 62005149, 11804001, 11974227), the Fund for Shanxi “1331 Project” Key Subjects Construction, China, and the Fundamental Research Program of Shanxi Province, China (Grant Nos. 20210302121002, 20210302122002, 201901D211164).

[†] Corresponding author. E-mail: suxl@sxu.edu.cn



连续变量量子计算和量子纠错研究进展

王美红 郝树宏 秦忠忠 苏晓龙

Research advances in continuous-variable quantum computation and quantum error correction

Wang Mei-Hong Hao Shu-Hong Qin Zhong-Zhong Su Xiao-Long

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 160305 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220635

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220635>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

无噪线性放大的连续变量量子隐形传态

Continuous variable quantum teleportation with noiseless linear amplifier

物理学报. 2022, 71(13): 130307 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212341>

基于测量的量子计算研究进展

Research progress of measurement-based quantum computation

物理学报. 2021, 70(21): 210301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210923>

基于量子催化的离散调制连续变量量子密钥分发

Discrete modulation continuous-variable quantum key distribution based on quantum catalysis

物理学报. 2020, 69(6): 060301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191689>

基于峰值补偿的连续变量量子密钥分发方案

Continuous-variable quantum key distribution based on peak-compensation

物理学报. 2021, 70(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202073>

量子计算与量子模拟中离子阱结构研究进展

Advances in the study of ion trap structures in quantum computation and simulation

物理学报. 2022, 71(13): 133701 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220224>

量子计算与量子模拟

Quantum computation and quantum simulation

物理学报. 2018, 67(12): 120301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180710>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

集成光量子计算的研究进展*

周文豪^{1) #} 王耀^{1) #} 翁文康^{2) †} 金贤敏^{1) 3) ‡}

1) (上海交通大学物理与天文学院, 上海 200240)

2) (南方科技大学量子科学与工程研究院, 深圳 518055)

3) (上海交通大学无锡光子芯片研究院, 无锡 214000)

(2022 年 9 月 12 日收到; 2022 年 10 月 11 日收到修改稿)

基于量子力学的叠加和纠缠等性质, 量子计算具备超越经典计算机的强大计算能力. 光子作为一种高效信息载体, 具有传输速度快、操控性高及相干时间长的优点, 是实现量子计算的一个理想物理平台. 集成光量子技术, 使得我们在微型结构上便能够稳定地实现光量子态的产生、处理和探测. 近年来, 随着新兴的集成光量子技术的快速发展, 集成光量子计算的实验复杂度和规模在不断提高, 并成功模拟和解决了复杂的物理和计算问题. 为此, 本综述总结了近年来集成光量子计算的技术进展, 包括各类集成光量子实验平台, 并讨论了基于集成光量子平台实现的量子行走实验范例. 最后, 我们亦简述了基于光量子行走而实现的量子算法和量子模拟的方案.

关键词: 集成光量子计算, 量子行走, 量子算法, 量子优越性**PACS:** 03.67.-a, 03.67.Ac, 42.50.-p, 42.82.Et**DOI:** 10.7498/aps.71.20221782

1 引言

20 世纪 60 年代, Gordon Moore 提出了著名的摩尔定律 (Moore's Law)^[1], 该定律预测未来一段时间内, 随着晶体管技术的发展, 每隔 18 个月计算机的计算能力将能够提升一倍. 几十年来, 摩尔定律非常贴切地反映了半导体产业以及集成电路芯片的发展趋势. 当时间来到 21 世纪, 传统半导体产业以及经典计算机的发展越来越受到晶体管密度、集成电路能耗以及器件发热等集成电路工艺的限制, 摩尔定律所描述的算力发展速度越来越难以持续. 然而, 人类对计算能力的追求脚步却

从未停止. 因此, 近些年来, 科学界在不断探索一种新的计算方式以进一步提升算力.

早在 20 世纪 80 年代, 人们就发现随着问题规模的增大, 求解多体问题所需的算力 (比特数) 呈指数爆炸式增长, 使用经典计算机来模拟复杂的量子物理系统是充满挑战的^[2]. 著名物理学家 Feynman^[2]认为可以放弃经典计算机, 转而构建一台量子计算机, 量子计算机中的每个量子比特 (qubits) 表示多体物理问题中的每个粒子状态, 随着粒子数的增加, 所需的比特数线性增长, 这将能够解决我们所面对的计算爆炸挑战, 量子计算的概念也因此诞生. 随后, Peter Shor^[3]在 1994 年提出的 Shor 算法以及 Grover^[4]在 1997 年提出的 Grover 算法 (也

* 国家重点研发计划 (批准号: 2019YFA0308700, 2019YFA0706302, 2017YFA0303700)、国家自然科学基金 (批准号: 11904229, 61734005, 11761141014, 11690033)、上海市科学技术委员会 (批准号: 20JC1416300, 2019SHZDZX01) 和上海市教育委员会 (批准号: 2017-01-07-00-02-E00049) 资助的课题.

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: yung@sustech.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: xianmin.jin@sjtu.edu.cn

被称为量子搜索算法) 等方案都表明量子计算对特定的计算问题具有指数加速的优势. 因此, 人们相信量子计算有望在未来超越经典计算机为人类带来更高的算力.

一般地, 量子计算模型可以被分为量子线路 (quantum circuit)^[5] 及绝热量子计算 (adiabatic quantum computation)^[6], 量子线路模型又包含一次量子计算 (one-way quantum computing)^[7] 和拓扑量子计算 (topological quantum computing)^[8] 两类特殊方案.

最常见的量子计算构建方案是量子线路. 量子线路类似于传统的逻辑电路, 为研究者提供了一种线路逻辑语言来表示不同的量子位、不同的逻辑操作以及不同顺序的应用. 在量子线路图形化中, 通常使用连线来表示量子位, 并使用标记框和其他符号来表示这些量子位上的幺正变换 U . 在阅读量子线路图时, 定义时间 (通常被认为以离散时间步长发生) 从左到右流动. 量子线路可以将任意幺正变换 U 分解为一系列的量子门 (quantum gates) 操作, 从而实现特定的量子计算功能, 因此量子门的制备和实现也是量子线路方案中的实验重点.

一次量子计算由 Raussendorf 和 Briegel^[7] 于 2001 年提出, 该方案完全由对簇态 (cluster state) 的制备和对量子比特的测量组成, 这些测量方式被对应到不同的量子逻辑电路上. 由于量子测量属于破坏性测量, 即测量同时会破坏其纠缠特性, 因此簇态量子计算是一次性的、单向的量子计算机, 由测量结果最终构成量子逻辑电路.

拓扑量子计算则是指在半导体结构引导的电子行为中观察准粒子行为, 并进一步采用准粒子来进行编码计算. 在拓扑量子计算中, 制备马约拉纳零模 (Majorana zero mode) 是实现非阿贝尔任意子的重要方式之一, 但马约拉纳零模体系存在两个待解决问题: 一是准粒子中毒, 这在测量马约拉纳零模时会出现, 并导致相干时间的缩短, 从而会影响量子计算的性能; 第二则是如何实现拓扑保护下的通用量子门. 因此拓扑量子计算的实验实现依然非常困难.

中国科学技术大学郭光灿院士团队^[9] 采用光量子模拟器实验证明了基于仲费米子 (parafermions) 的通用量子计算的关键组件. 研究人员首先通过操纵光子状态, 实现了对应于仲费米子统计的 Clifford-operator Berry 相位. 随后, 他们通过证明仲

费米子编码的量子态的互文性 (contextuality), 首次研究了拓扑系统中的量子互文资源. 研究者通过光量子模拟器展现了仲费米子零模的编织统计和拓扑抗噪性质, 从而为实现拓扑量子计算迈出了重要一步.

与量子线路不同, 绝热量子计算是基于量子退火过程 (quantum annealing) 和绝热定理提出的, 现已发展成量子计算标准电路模型的重要替代方案. 绝热量子计算过程中, 通过设置一个简单易求解的初态哈密顿量 H_0 并随时间缓慢地向求解目标哈密顿量 H_1 演化, 系统的量子态会保持在能量最低的基态. 由于量子隧穿效应, 求解结果在量子退火过程不会被束缚在局域最优解内, 能够通过隧穿效应离开局域解向全局最优解方向演化.

尽管已经有大量的理论和实验工作投入到不同体系下量子计算及量子算法的构建中, 但通用量子计算 (universal quantum computation) 的实现仍然是非常困难的, 这是由于无论以何种技术路线来实现通用量子计算机, 都需要满足 DiVincenzo^[10] 在 2001 年为通用量子计算机提出的五项基本条件: 1) 一个可扩展的物理系统以及量子比特; 2) 可以制备量子比特的初态; 3) 量子比特具有足够长的相干时间, 不易退相干; 4) 能够实现通用量子逻辑门操作; 5) 能够测量特定的量子比特.

由于这五项条件的约束, 通用量子计算机的研制在当前的技术条件下并不成熟, 为此在前期的研究探索中, 不需要复杂的纠错机制, 且相对容易实现的模拟量子计算 (analog quantum computation) 似乎是当下比较可靠的选择. 模拟量子计算, 是通过搭建目标指向的系统哈密顿量来对应特定的物理问题. 短期内, 通过模拟量子计算, 已经在某些特定的物理问题上实现了对早期经典计算机算力的超越, 如九章量子计算机^[11] 和悬铃木^[12] (Sycamore) 量子计算机分别在玻色采样 (Boson sampling) 和随机线路采样 (random circuit sampling) 这两类问题上宣称超越了经典计算机的算力, 这一里程碑式的研究成果标志着量子优越性 (quantum advantage) 不再仅仅停留在理论的预测阶段, 已经迈进了实验证明阶段.

随着科学技术的发展, 通用量子计算和模拟量子计算正加速迈向下一个时代, 为此 Preskill^[13] 在 2018 年提出了含噪音中型量子计算 (NISQ) 的概念, 这里的噪音是指当前对量子比特的操控仍然不

稳定,例如对于量子门的不完美调控会降低实验保真度,对于整个系统而言是一种噪音;中型是指目前最大可操控的量子比特数仍然在 100 个左右,离实现通用量子计算所需要的量子比特数还有距离.这一概念如今被广泛接受,表明量子计算机的发展还处于早期阶段,依然以突破和解决某一特定物理问题为主,离真正实现通用量子计算仍然有一定的距离.

如果把量子算法称之为构建量子计算机的软件,那对于算法的实验实现则是构建量子计算机的硬件.目前实现量子计算的硬件路径主要有超导、离子阱、光子、及核磁共振等^[14],其中光子由于相干时间长、探测和操控方便,并且具有多个自由度等优势,是构建通用量子计算和模拟量子计算的理想平台,在接下来的部分,将展开介绍近年来光量子计算特别是集成光量子计算方面的研究进展.

2 光量子计算

量子计算的重点之一在于对量子比特的选取和编码,在光子、原子、核磁自旋、超导线路等可用于编码量子比特的系统中^[14],光子由于不易退相干、速度快、易于操控等特性被认为是编码量子比特的理想载体^[15,16].另一方面,尽管光子不易与环境耦合的特性保证了其鲁棒性,但也导致了光子之间很难有相互作用,只能通过线性光学器件来实现概率性的量子逻辑门,这对于大规模通用量子计算来说是一大瓶颈问题^[17].虽然通用量子计算的实现仍然存在困难,但是以光子作为载体的模拟量子计算为量子计算打开了另一扇窗,通过构建系统哈密顿量来模拟可控物理系统,可以避免复杂的量子门操作和额外的量子纠错系统.

2.1 量子行走概述

在模拟量子计算中,量子行走 (quantum walk) 是一类被广泛研究的问题,它也被视为经典随机行走的量子版本.下面将介绍基于量子行走来实现模拟量子计算的研究和发展.

随机行走 (random walk) 的概念可以追溯到 1905 年,由 Pearson^[18] 提出,在随后 100 多年的历史里,经典随机行走一直被用作一种计算方法和架构基础来解决复杂的计算问题,并在物理、化学、经济学及生物学等领域都有了进一步的发展和应

用.与经典的随机行走的对应,1993 年 Aharonov, Davidovich 和 Zagury 三人^[19]提出了量子行走这一概念,其本质来源于 Feynman 的积分路径理论,并引入了关于多路径叠加的想法.

量子行走由于量子力学独特的量子叠加 (quantum superposition) 态特性,表现出向外扩散的弹道输运性质,在各类算法 (如空间搜索算法、指数快速击中算法及图连通性算法等) 中表现出了计算时间上的加速^[20].在过去的十几年中,量子行走已经成为了一种常用的计算模型,其随计算规模展现出多项式级的计算时间复杂度,与之对应的经典算法往往需要指数级的运行时间.例如: Childs 等^[21]在 2003 年提出了一种用于图遍历问题的连续时间量子行走算法,相比于目前所有的经典算法,具备指数级的计算加速.正因如此,通过量子行走实现量子计算也是备受关注的研究领域.

2.2 量子行走的理论基础

基于量子行走的算法对经典算法的加速效果引起了广泛的研究兴趣,同时基于量子力学与其他科学领域的交叉研究,量子计算、量子算法、量子信息理论等新兴领域得到了蓬勃发展.与经典随机行走类似,量子行走可以被分为两大类:离散时间量子行走^[22]和连续时间量子行走^[23].

如图 1(a) 所示,在离散时间量子行走中,时间是离散化的.离散时间量子行走给出了 t 时间步长之后特定位置 i 上行走粒子的量子概率振幅.这里的行走粒子可以是一枚量子硬币 (quantum coin),在不具体测量硬币算符结果的情况下,硬币处于正面和反面的叠加状态:

$$\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

除上述硬币算符 (coin operator) 外,在离散时间量子行走中,还需引入平移算符 (translation operator) 来实现行走过程中行走粒子在位置上的变化.平移算符如下所示:

$$\begin{aligned} \hat{T} |x, +\rangle &\equiv \hat{T}_+ |x, +\rangle = |x+1, +\rangle, \\ \hat{T} |x, -\rangle &\equiv \hat{T}_- |x, -\rangle = |x-1, -\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

最终,通过硬币算符 C 和平移算符 T 的不断作用,可以得到 n 步之后的行走概率幅结果:

$$|\psi_n\rangle = [\hat{T}\hat{C}]^n |\psi_0\rangle. \quad (3)$$

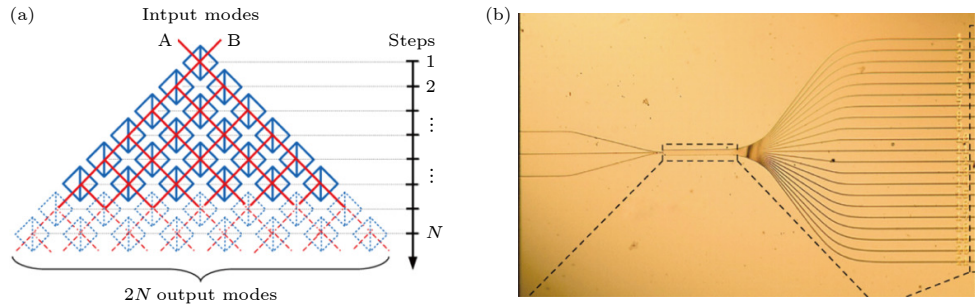


图 1 (a) 离散时间量子行走, 图片来自文献 [22]; (b) 连续时间量子行走, 图片来自文献 [23]

Fig. 1. (a) Discrete-time quantum walks, the picture is reproduced from the Ref. [22]; (b) continuous-time quantum walks, the picture is reproduced from the Ref. [23].

而在图 1(b) 中所展示的时间连续量子行走则无需硬币算符, 也没有步长的概念. 物理系统的状态用么正变换的哈密顿量 (Hamiltonian) 来描述, 系统经过了 t 时间的演化后, 行走最终的概率幅结果由初态波函数和系统哈密顿量根据演化方程所决定:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle. \quad (4)$$

无论是离散时间量子行走还是连续时间量子行走, 其本质都源自量子态的叠加特性. 迄今为止, 这两类量子行走已经在多种平台上得以实现.

2.3 实现量子行走的实验平台

在实现量子行走的众多技术路线中, 如光纤网络 [24,25]、超导系统 [26]、核磁共振系统 [27]、囚禁离子原子系统等 [28,29], 基于光子的量子行走在实验实现上最为方便和稳定. 在光子量子行走的实验实现中, 也存在不同的实验平台上, 如传统光学平台、光纤平台以及近年来蓬勃发展的集成光量子平台等.

最早人们通过传统光学和线性光学器件来实现量子行走. 在 2005 年, Roldán 和 Soriano [30] 展示了仅使用线性光学器件就可以实现的二维量子行走的实验方案. 该方案通过调节线性光学器件的参数可以实现不同的么正变换, 从而实现量子行走.

在光纤中, 也有实验证明了量子行走实验的可能性. 在 2012 年, Schreiber 等 [31] 提出了一个二维量子行走的灵活实现方式. 研究者展示了非平凡图结构上的可扩展量子行走. 他们使用光纤网络实现了 12 步长和 169 个格点的相干量子行走. 基于量子硬币算符, 研究者能够在条件相互作用的二分系统中模拟纠缠的产生. 进一步通过引入动态控制, 这项工作还可以被用于研究强非线性或者是双粒子散射等效应.

上述两种实现量子行走的方式都是基于宏观光学器件完成的, 宏观光学器件由于其灵活性和可操控性的特点在未来的量子信息实验中依然会扮演极其重要的角色. 另一方面, 随着实验尺度的增大, 光学器件的数量会随着光学网络的复杂度而不断增长, 这会在一定程度上阻碍实验系统的稳定性和规模大小, 为此对于实验装置的小型化和集成化也是光学平台的发展趋势. 随着集成光量子技术的发展, 我们常使用硅基技术或光刻 (lithography) 技术来制备新一代的光子芯片, 这些方法被统称为集成光子平台.

2008 年, Politi 等 [32] 在硅基二氧化硅平台上刻写了光波导线路, 并实现了量子干涉和受控非门 (CNOT) 门, 实验结果的高保真度证明了集成光量子的稳定性和可控性, 这是集成光子平台里程碑式的工作. 此后, 更多的单量子比特和双量子比特的片上量子态制备和调控在硅基二氧化硅平台 [33,34] 以及激光写入二氧化硅平台 [35–38] 上得以实现. 随着工艺和科学技术水平的发展, 在 2015 年, Carolan 等 [39] 通过硅基平面波导结构展示了一个可编程的光学芯片并且基于芯片展示了一系列线性光学方案, 包括量子逻辑门、量子纠缠门、玻色采样等实验. 他们的实验成果进一步展示了可编程芯片在量子技术中的重要作用.

时至今日, 一系列的光波导平台已经被应用于集成光量子系统的实验中, 主要包括以下几类: 硅基平台 (silicon-on-insulator) [40]; 硅基二氧化硅平台 (silica-on-silicon) [41]; 飞秒激光直写平台 [42]; UV 直写平台 [43] 和铌酸锂平台.

硅基平台 (silicon-on-insulator) 是一系列材料 (硅, 硅的碳化物和氮化物) 的统称, 如图 2(a) 所示. 硅基平台的最大优势在于它与传统互补金属

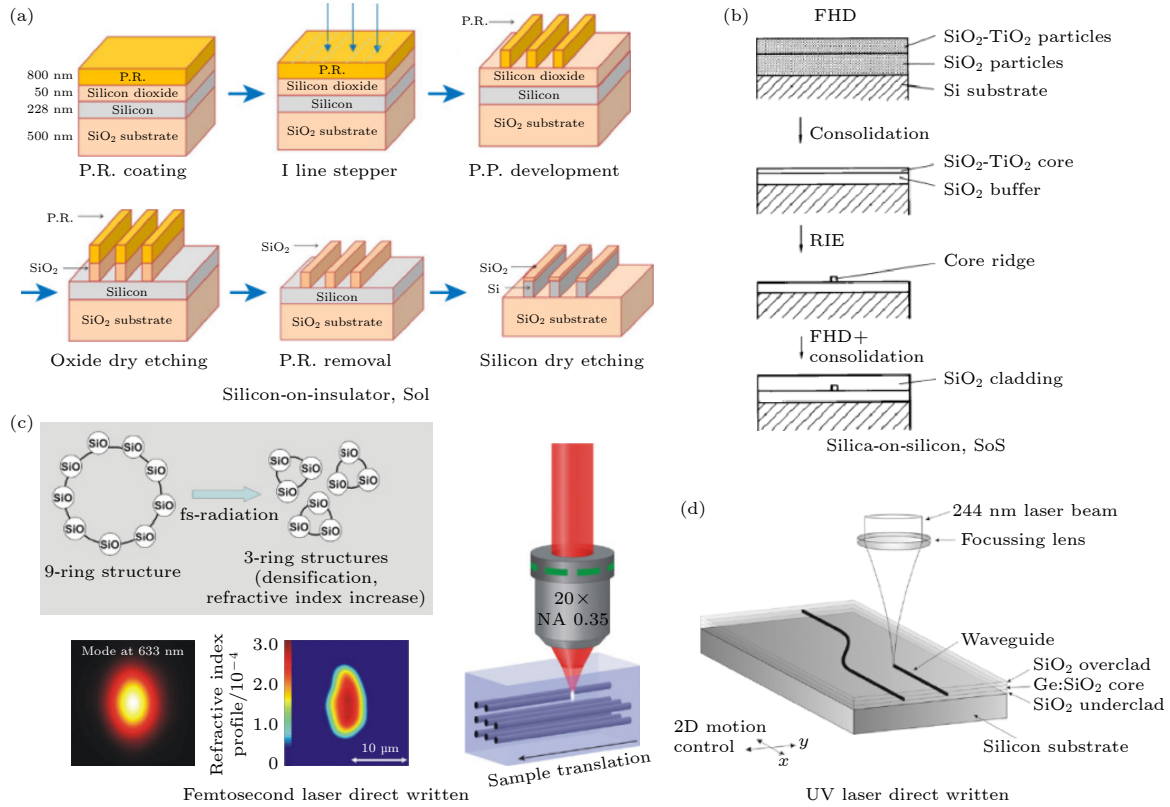


图 2 不同的集成光量子平台 (a) 硅基平台, 图片来自文献 [40]; (b) 硅基二氧化硅平台, 图片来自文献 [41]; (c) 飞秒激光直写平台, 图片来自文献 [42]; (d) UV 直写平台, 图片来自文献 [43]

Fig. 2. Different integrated optical quantum platforms: (a) Silicon-on-insulator platform, the picture is reproduced from the Ref. [40]; (b) silica-on-silicon platform, the picture is reproduced from the Ref. [41]; (c) femtosecond laser direct writing platform, the picture is reproduced from the Ref. [42]; (d) UV direct writing platform, the picture is reproduced from the Ref. [43].

氧化物半导体 (CMOS) 作工艺相兼容, 因此具有成熟的晶体管半导体制备工艺这一天生的优势. 但是, 硅基器件的波导尺寸较小, 在与传统的单模光纤相连接的时候耦合损耗和传输损耗较大. 通过对硅基波导的制备参数进行优化, 这一缺点已经在实验上得到了改进 [44].

硅基二氧化硅平台 (silica-on-silicon) 是指在传统的单晶硅基底上制备一层二氧化硅层, 如图 2(b) 所示, 通过刻蚀的方式加工出波导, 最后在最上层再制备一层二氧化硅层来保护波导. 由于硅基二氧化硅平台在刻蚀波导的过程中需要掩模版, 因此制备工艺较为复杂.

得益于学术界和产业界的快速发展, 硅纳米光子学已经被广泛用于量子光学实验之中. 例如, 由于硅具有很高的三阶非线性系数 $\chi^{(3)}$, 因此可以用于产生量子光源. 在 2014 年, Harris 等 [45] 就在单个硅片上基于四波混频 (SFWM) 原理演示了关联光子对的产生, 并且进一步对信号光子和闲频光子进行解复用和路由. 由于该技术与 CMOS 工艺兼

容, 因此可以重复制造, 并且为最终将光源、处理器和探测集成在同一芯片上铺平了道路.

硅基平台另一个优点在于其集成度高, 可实现单个芯片上数百个光学元件的集成. Sun 等 [46] 在硅芯片上展示了大规模二维纳米光子相位调控阵列 (nano-photonics phased array). 他们在 $576 \mu\text{m} \times 576 \mu\text{m}$ 的芯片上集成了 4096 个光学纳米天线 (optical nanoantenna) 从而实现主动相位调控.

除了硅基平台, 激光直写平台也为集成光量子实验提供了可选择的技术路径. Davis 等 [47] 在 1996 年首次提出了飞秒激光直写技术, 如图 2(c) 所示. 其基本原理是将高能量的飞秒激光聚焦于玻璃材料内部, 由于聚焦区域的非线性能量吸收, 会使得局部区域内材料的折射率发生永久性的改变, 这种变化一般情况下为折射率的提高, 从而使光在波导中以全反射的形式进行传输. 在低脉冲能量的情况下, 这种改性在许多玻璃材料内表现为平滑的折射率改变, 而在高脉冲能量的情况下, 激光诱导的改性可能包含周期性纳米平面等更多的结构. 迄

今为止, 仍然没有飞秒激光与物质相互作用的完整物理模型, 但研究表明可以将飞秒激光直写的加工过程大致分为三个阶段: 自由等离子体形成、能量弛豫过程和材料改性过程^[48]. 飞秒激光直写技术的最大优点在于其三维加工的特点, 传统的硅基波导被限制在一个二维平面内, 而飞秒激光直写技术可以制备二维波导阵列, 从而增加了物理维度和结构复杂度, 为进一步探索更加复杂的物理问题提供了一种可靠的实验平台.

UV 直写技术由一个三明治二氧化硅结构构成, 如图 2(d) 所示. 二氧化硅层置于硅基底上, 中间一层二氧化硅由于掺入元素锗 (Ge) 而具有光敏性, 可以将连续 UV 激光聚焦在中间层 (Ge:SiO₂) 对其改性, 并且通过移动基底来刻写不同的波导结构. UV 直写技术不需要硅基二氧化硅工艺中的掩膜流程, 从而降低了制备波导的复杂度, 但通过 UV 直写制备的波导双折射通常较大, 这不利于光子的片上极化编码.

除此之外, 最近几年铌酸锂薄膜 (LNOI) 的商用化应用也受到了学术界广泛的关注和研究^[49–51]. 铌酸锂 (LN), 也被称为“光子学中的硅”, 这足以看出其在集成光子平台中的重要性. 铌酸锂具有宽光学透明窗口, 大的电光效应 (electro-optical effect) 和高玻璃化转变温度, 这些优点对于加工工艺的稳定性和兼容性至关重要. 此外, 薄膜铌酸锂 (LNOI) 还由于其高固有电光效率、稳定性及可扩展制造技术的快速发展等, 也成为了光通信、传感、量子信息等领域强有力的竞争者. 薄膜铌酸锂平台继承了传统体铌酸锂器件所有的材料优势, 并且以更小的占用空间、更宽的带宽和更低的功耗, 凸显了其相比于其他材料的优越性, 也是当前集成光子平台的候选者之一.

总体来看, 对于实验上不同系统、不同材料、不同波导几何形状和制造技术、不同实验平台和波导加工方式各有其特点和优势. 研究者根据实验所要求的集成度、调制速度及制造成本等因素, 通过选取合适的实验平台, 可以开展不同的量子信息实验.

2.4 基于集成光量子平台的量子行走实验实现

集成光子学作为一个新兴的科研平台, 可以执行各式各样的量子信息任务, 例如量子行走、玻色采样、拓扑光子学实验等, 是实现大规模量子信息

实验的可靠平台. 由于集成光子平台集成度高、兼容性好, 有利于拓展量子信息实验的规模, 并且已经提供了实际的应用场景, 例如芯片量子密钥分发^[52].

2008 年, Perets 等^[53]首次展示了基于一维波导晶格实现的量子行走. 波导晶格具有易于大规模构建并且光子在其中不易退相干的特性, 是研究量子行走和量子算法理想且多功能化的实验平台. 研究者通过实验观察了 100 个格点的大型一维量子行走并且从理论上研究了包括弹道传播、无序性和边界相关等量子行走效应.

实现大规模量子行走的目的在于将其与复杂物理系统相对应, 从而解决实际的物理问题, 为此目前的研究工作主要聚焦在于拓展物理系统的复杂化. 实验上, 对于增加系统演化的复杂度, 扩展其物理维度和增加初态光子数量是两种有效的研究方向.

2010 年, Peruzzo 等^[23]在 SiO₂/N_y 芯片中集成了 21 根连续渐逝耦合的波导并第一次实现了关联光子对的一维量子行走实验. 他们观察到的量子关联性最大达到了 76 个经典极限的标准差的破坏并且发现量子行走中的量子关联性依赖于注入态的选取. 实验结果为在指数增长的更大的态空间编码信息提供了有效的方法.

更进一步, 在 2017 年, Harris 等^[54]利用硅波导, 在纳米光子平台实现了由 88 个通用分束器组成的可编程纳米光子处理器, 其中每一个分束器都可以通过调控振幅和相位, 从而在微秒时间尺度上进行编程. 基于这个可编程处理器, 他们研究了环境辅助的量子传输机制以及静态无序离散时间系统中的“quantum goldilocks”机制. 这种低损耗和高保真度的可编程处理器是实现量子模拟实验的可靠平台.

尽管在调控技术和可编程速度上不如硅基波导成熟和快速, 但得益于三维制造的优势, 激光直写技术有利于在二维波导阵列上研究量子行走及其传输特征. Owens 等^[55]在 2011 年研究了椭圆形波导阵列中双光子态的演变, 如图 3(b) 所示. 研究者利用超快直写技术在高纯度熔融石英芯片中制造了椭圆形波导结构, 并利用相干光态层析来特征化光子芯片, 进而使用特征化结果来预测时间上不可区分和可区分的双光子输入态之间的明显差异, 并将特征化结果与实验结果相比较. 这项工作提出了在三维波导结构中模拟相干量子现象的可行性.

Sansoni 等 [56] 研究了不同的粒子统计 (玻色子和费米子) 对离散量子行走结果的影响. 研究者利用偏振纠缠模拟了非相互作用玻色子和费米子的聚束和反聚束特征. 实验中利用飞秒激光直写技术引入了包含波导电路的新型三维几何结构. 三维结构如图 3(c) 所示, 可实现精确的偏振无关行为, 同时又保证了对相位和平衡性的显著控制.

Poulios 等 [57] 同样使用飞秒激光直写技术构建了光子晶格, 并在图 3(d) 中的“十字”结构中实现了关联光子的准二维量子行走. 关联探测事件展现出高对比度的量子干涉现象和独特的复合行为, 包括量子行走粒子在“十字”结构之间的强关联性

和在结构内部的独立性.

Tang 等 [58] 利用光波导阵列的几何结构实现了超大规模二维连续时间量子行走实验. 研究者利用飞秒激光直写技术构建了一个大规模的三维波导结构, 如图 4 所示, 并在光子芯片中集成了一个二维方形格点, 格点数高达 49×49 . 他们利用预报性单光子和单光子成像技术展示了空间上二维量子行走的演化结果; 通过观察量子行走的弹道演化模式和方差分布分析了量子传输特性, 实验数据与模拟结果相吻合. Tang 等 [58] 进一步解释了二维量子行走相对于一维量子行走独特的瞬态性质. 将这项研究结合缺陷和无序控制, 可能为经典情况下棘手的物理问题提供了新的解决方案.

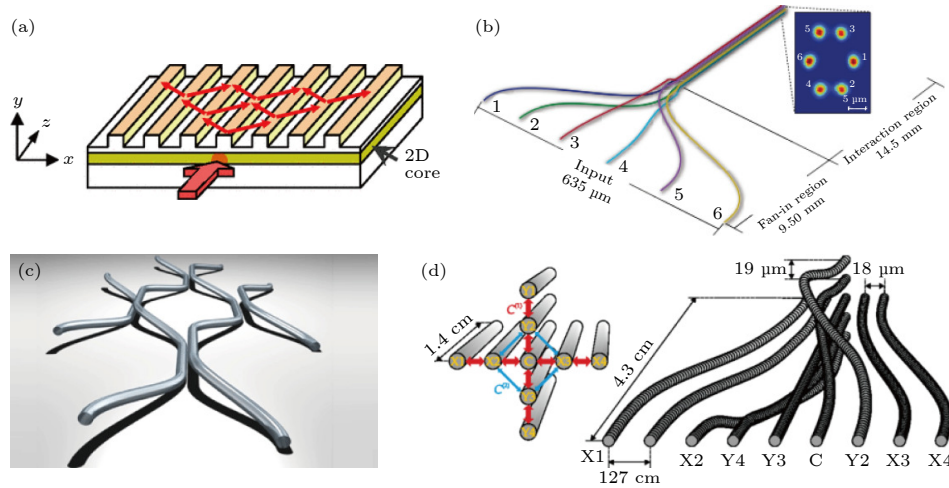


图 3 不同波导结构图 (a) 一维波导阵列, 图来自文献 [53]; (b) 椭圆型波导阵列, 图来自文献 [55]; (c) 三维波导结构, 图来自文献 [56]; (d) “十字”波导阵列, 图来自文献 [57].

Fig. 3. Different waveguide structures: (a) One-dimensional waveguide array, the picture is reproduced from the Ref. [53]; (b) elliptical waveguide array, the picture is reproduced from the Ref. [55]; (c) three-dimensional waveguide structure, the picture is reproduced from the Ref. [56]; (d) “cross” waveguide array, the picture is reproduced from the Ref. [57].

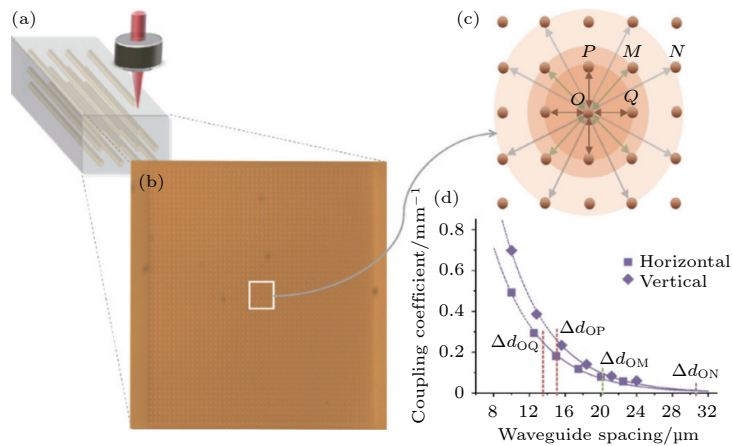


图 4 光子芯片上的二维量子行走. 图来自文献 [58]

Fig. 4. Two-dimensional quantum walks on a photonic chip, the picture is reproduced from the Ref. [58].

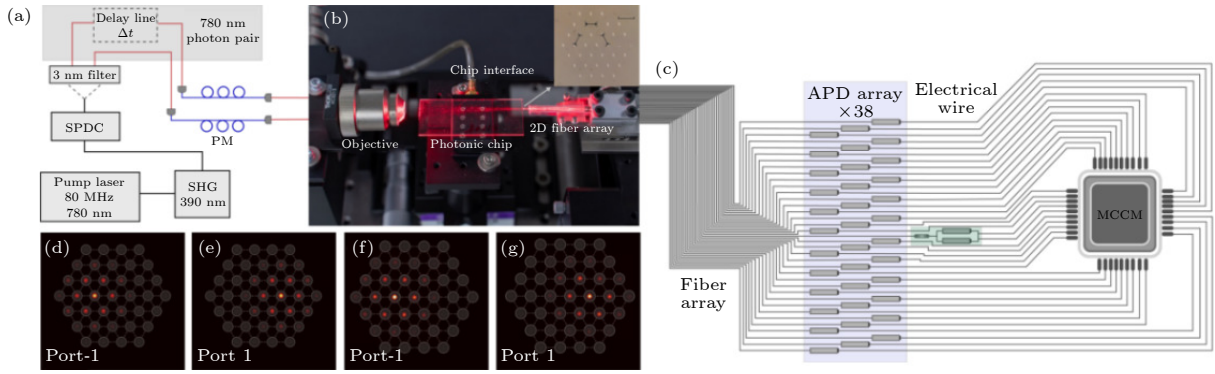


图 5 关联光子对的二维量子行走. 图来自文献 [59]

Fig. 5. Two-dimensional quantum walks of correlated photons, the picture is reproduced from the Ref. [59].

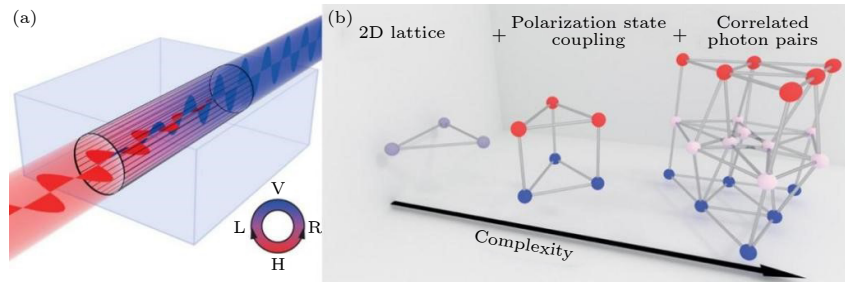


图 6 利用偏振作为额外的合成维度, 图来自文献 [60]

Fig. 6. Using polarization as an additional synthetic dimension. The picture is reproduced from the Ref. [60].

该课题组在 2021 年, 进一步由 Jiao 等 [59] 利用关联光子对, 在三角形格点中实现了二维空间上的双光子量子行走. 研究者将实验对应到了一个 37×37 的高维态空间. 这种双光子二维量子行走突破了单粒子演化的物理限制, 实现了更大态空间中的信息编码和高维图的构建, 有利于量子信息的处理. 如图 5 所示, 通过在芯片和二维光纤阵列之间构建起点对点的寻址, 能够同时探测 600 多个非经典干涉现象, 进而观测到了违背经典关联的量子关联特性, 并且超出了经典关联 57 个标准偏差. 这项工作为大规模二维量子行走提供了新的思路.

除了直接扩展空间维度和引入更多的光子数, 引入合成维度同样有助于在低维度上解决复杂的计算问题. Ehrhardt 等 [60] 将光子的偏振维度引入到量子行走实验中, 如图 6 所示. 通过具有特定双折射的复杂波导电路中光子对的空间自由度和偏振自由度的混合作用以实现合成维度, 从而实现了与三维网络相关的激发动力学. 该实验可被应用在复杂、高度连通的图形上以进行多粒子量子行走的实验探索, 并且为进一步开发费米子动力学在集成量子光子学中的潜在应用铺平了道路.

3 集成光量子计算应用

3.1 基于量子行走的算法和应用

如前文提到的, 量子行走作为一种算法工具, 在生物学、物理学、经济学及计算机学等众多领域都具有广泛的应用前景, 可以实现不同的量子算法和模拟传输过程 [61–64].

Kendon 和 Tamon [65] 介绍了有限图上量子行走中的完美态传输. 研究者利用不需要局部变化动态控制的结构进行传输, 从而简化了传输设计并减少了出现错误的概率. 量子行走也被用于模拟生物学中的光合作用. 如图 7 所示, 光合作用系统的能量转移过程能够显示量子效应, 然而其量子动力学过程与激子 (exciton) 转移效率的相关性在很大程度上是未知的. 为此, Mohseni 等 [66] 提出了一个理论框架用于研究量子干涉效应在与热浴相互作用的分子阵列的能量转移动力学中的作用, 进而模拟了光合作用过程中的能量传输过程. Gamble 等 [67] 则从图同构问题出发, 研究了描述非同构情况下的单粒子和双粒子的量子行走动力学演化的格林函数, 进而证明了存在相互作用的粒子可以区分非同构图, 而非相互作用的粒子则不能区分.

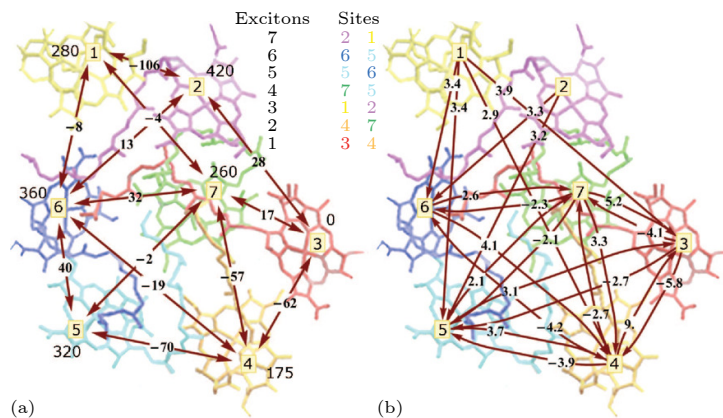


图 7 量子行走用于模拟光合作用中的能量转移过程, 图来自文献 [66]

Fig. 7. Quantum walks in photosynthetic energy transfer, the picture is reproduced from the Ref. [66].

除了模拟量子计算之外, 实现通用量子计算一直是量子计算的最终目标, 在 2009 年, Childs^[68]就展示了通过量子行走来实现通用量子计算的方式. 在量子计算的一些早期工作中, Feynman^[2]展示了如何使用与时间无关的哈密顿量来实现通用量子计算. Childs 则表明即使哈密顿量被限制为低维度图 (graph) 的邻接矩阵, 通用量子计算的实现仍然是可能的. 因此, 量子行走可以作为一种通用计算方式, 任何量子计算都可以被编码在某个图表达中. 而在 2013 年, Childs 等^[69]进一步证明了多粒子量子行走也可以被用于实现通用量子计算. 他们的研究成果表明构建一台可扩展的量子计算机并不需要时间无关的调控.

量子行走和量子快速到达算法 (quantum fast hitting) 在粘合树问题上展示了其比经典随机行走更快的击中速度^[70]. 这体现了量子行走在加速模拟和优化任务方面具有强快的计算速度. 但是由于其节点数量随网络深度指数级增加, 其实验实现非常具有挑战性.

Tang 等^[71]在 2018 年提出了一种具有多项式增加节点数量的替代结构. 他们使用飞秒激光技术以几何可扩展的方式在光量子芯片上制备了这种结构, 并在多达 160 个节点和 8 层深度的图上展示了不同结构的量子行走过程. 实验结果证明了量子加速击中效应, 并且最佳命中时间和网络深度之间成线性关系. Shi 等^[72]在 2020 年利用粘合二叉树的一维等效结构, 制备了层数从二层到十六层, 叉数从二叉到五叉的光量子芯片, 并在芯片上展示了量子快速到达算法. 实验结果同样表明最优量子到达效率相对于经典随机行走而言可实现指数级的

提升. 这表明专用量子算法在快速到达问题上具有指数加速优势.

与非逻辑树问题 (NAND tree) 也是一类具有量子加速优势的问题, 其结构如图 8 所示. Wang 等^[73]通过结合量子滑梯以及与非树, 在集成光子芯片上实现了量子与非逻辑. 与分子系统相比, 激光直写集成芯片系统在集成度和扩展度上有巨大优势. 此外, 这项工作中的平衡树结构可以很容易推广到不平衡的与非算法, 这将可应用于二人对策问题. 此外由于与非门的通用性, 这使得推广量子与非门表示任意的布尔函数成为可能.

3.2 玻色采样及量子霸权

除了标准量子行走以及相关的应用以外, 还有其他一些量子计算任务也是量子计算领域的研究热点, 其中玻色采样 (boson sampling) 就是一类被深度研究的量子计算问题, 玻色采样理论和实验的提出源于对量子优越性的实验实现. 由于通用量子计算的实现目前仍然存在巨大挑战, 为此制定一个中期可实现的里程碑目标是必要的, 这个目标被称为量子优越性 (quantum advantage), 也被称为量子霸权. 玻色采样实验由于其实验上易实现, 具有明确的计算复杂度理论等特点, 是实现量子优越性理想的平台.

玻色采样实验由 Aaronson 和 Arkhipov^[74]在 2011 年提出. 它的实现方法是将 n 个全同玻色子注入到 $n \times m$ 的线性干涉网络中, 经过多光子干涉过程后出射, 并被单光子探测器接收. 玻色采样实验的主体只需要单光子量子光源、线性干涉器件和单光子探测这三个部分, 并且这些器件以当前的实验技术都是可以实现的.

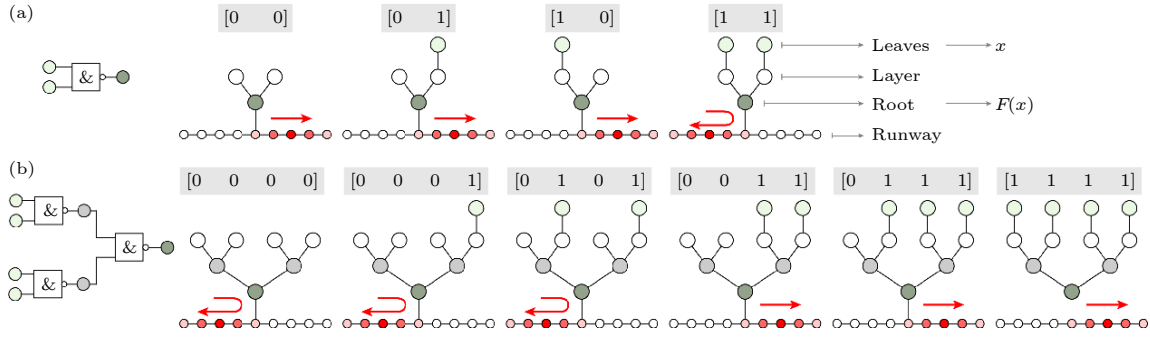


图 8 与非逻辑树问题, 图来自文献 [73]

Fig. 8. Nand tree problem, the picture is reproduced from the Ref. [73].

时至今日, 已经有大量的玻色采样实验及其变体被实现, 例如随机散射玻色采样 (scattershot boson sampling)^[75]、高斯玻色采样 (Gaussian boson sampling)^[76]、时间戳玻色采样 (timestamp boson sampling)^[77] 等, 他们都旨在进一步降低玻色采样实验的难度并提高计算复杂度. 在 2020 年, 九章一号^[11] 通过超低损耗, 集成化的多模干涉仪和外置的高亮度量子光源, 构建了 76 个光子, 100 个模式的量子计算原型机, 宣称通过高斯玻色采样实验实现了量子优越性, 开起了玻色采样实验的新阶段. 随后在此基础上九章二号^[78] 进一步构建了 113 个光子, 144 个模式的量子计算原型机, 并且相比于九章一号实现了相位可编程功能, 使得与高斯玻色采样实验相关的广泛应用成为可能. 除此之外, 通过在实验光源或者是线性干涉网络中构建环路, Gao 等^[79] 以及 Madsen 等^[80] 通过不同的方式展示了基于玻色采样实验的量子优越性.

3.3 拓扑光子学

与此同时, 量子行走本身也是研究其他物理现象的量子模拟平台. 基于光量子行走平台, 拓扑光子学的研究吸引了广泛的关注, 该方向的探索为新物态及新材料的实验研究提供了便利的实现方式.

基于前面提到的飞秒激光技术, 研究者能够实现二维拓扑材料的模拟与实现. 2013 年, Plotnick 等^[81] 利用飞秒激光直写平台构建了光子石墨烯结构, 并成功观察到石墨烯结构的边界态. 同一时期, Rechtsman 等^[82] 同样基于飞秒激光直写波导提出并实验实现了一种无外场和无散射边缘传输的光子拓扑绝缘体, 在晶格边缘观察到了可见光的拓扑保护传输.

随着基于集成光量子技术与拓扑物理结合的

拓扑光子学的发展, 研究者不仅仅局限于探索拓扑物态的方向. 与此同时量子拓扑光子学的概念也被提出, 该方向则是探索量子信息与拓扑光子学的结合, 研究出基于拓扑材料实现的拓扑保护的量子态.

光子稳定、快速、具有远距离传输的能力, 使其成为量子信息的理想载体. 然而, 对于芯片化的应用, 光子不可避免地会与周围的介质相互作用, 并且甚至可能会因为损耗而丢失. 对于纠缠光子来说情况会更加复杂, 光子之间的非经典关联可能会因此消失. 结合拓扑晶格特性, 将拓扑边界的保护机制扩展到量子体系中, 利用拓扑结构直接保护物理演化系统中的量子特性. 同时结合集成光子芯片的集成性和可控性, 片上拓扑边界态有可能提供一种有效保护量子性质的替代方法.

Wang 等^[83–85] 先后实验证明了拓扑晶格可以为单光子、关联光子以及纠缠光子提供保护, 使其免受耗散和无序引起的退相干. 在实验中, 研究者展示拓扑边界态保护单光子对抗环境噪声引起的退相干的能力. 而在对互关联和柯西-施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz inequality) 违背程度的测量则表明, 量子关联双光子态在拓扑非平庸边界态中可以被很好地保持, 在体态中则不能. 此外, 实验还证实了这种拓扑保护对两个光子的波长差异和可分辨性具有鲁棒性.

同一时期, Blanco-Redondo 等^[86] 实验证明了双光子态的拓扑保护, 研究者在具有非平凡拓扑的纳米光子晶格中产生了能够稳定传输的双光子态. 同年, Barik 等^[87] 证明了单个量子发射体和拓扑鲁棒光子边缘态之间的耦合, Tambasco 等^[88] 报道了在单个光子波导阵列中两个单光子拓扑边界态的高可见性量子干涉. Wang 等^[89] 实验证明了空间纠缠双光子态的拓扑保护. Mittal 等^[90] 在二维谐

振器阵列组成的拓扑系统中实现了能够产生不可分辨光子对的可调谐源。

近年来的一系列工作将拓扑相的保护机制扩展到量子体系中, 实现对量子关联保护的方法是一种新的保护量子的途径. 该方向的研究正是在集成光子与拓扑光学紧密结合下实现的新方案. 我们相信随着更多研究方向的交叉探索, 光子量子计算的边界将能够得到进一步的拓展, 交叉学科的探索将推动光子量子计算的稳步前进.

4 总结与展望

在当前的技术条件下, 通用量子计算机可操控的量子比特数目依然有限. 此外在量子线路中往往需要高精度量子门的制备以及额外的量子纠错系统, 这对于目前通用量子计算机的构造依然存在巨大挑战. 发展模拟量子计算是目前量子计算研究中的过渡期. 量子行走就是一类被广泛研究的模拟量子计算问题, 而光子由于操控性高、相干性好及速度快等特点, 是光子量子计算实验中可靠的信息载体. 本文介绍了集成光子技术的发展以及基于当前技术平台实现的集成光子量子计算研究进展. 依托于近年来集成光子平台的快速发展, 光子量子计算迈向了集成化、小型化的阶段, 而其实验规模和光子量子比特的数量也是逐年快速增长. 在未来, 随着集成光子技术的进一步发展, 伴随可操控量子比特数量的增加以及配套的纠错系统的实现, 将能够构建更大规模的多体物理系统, 进一步扩展量子算法可实现的规模, 迈向光子量子计算领域的全新阶段.

参考文献

- [1] Moore G E 1998 *Proceedings of the IEEE* **86** 82
- [2] Feynman R P 1982 *International Journal of Theoretical Physics* **21** 467
- [3] Shor P W 1994 *In Proceedings 35 th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* Santa Fe, NM, USA, November 20-22, 1994 p124
- [4] Grover L K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 325
- [5] Aaronson S, Gottesman D 2004 *Physical Review A* **70** 052328
- [6] Albash T, Lidar D A 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 015002
- [7] Raussendorf R, Briegel H J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5188
- [8] Sarma S, Freedman M, Nayak C 2015 *npj Quantum Inf.* **1** 15001
- [9] Liu Z H, Sun K, Pachos J K, Yang M, Meng Y, Liao Y W, Li Q, Wang J F, Luo Z Y, He Y F, Huang D Y, Ding G R, Xu J S, Han Y J, Li C F, Guo G C 2021 *PRX Quantum* **2** 030323
- [10] DiVincenzo D P 2001 *Quant. Inf. Comp.* **1** 1
- [11] Zhong H S, Wang H, Deng Y H, et al. 2020 *Science* **370** 1460
- [12] Arute F, Arya K, Babbush R, et al. 2019 *Nature* **574** 505
- [13] Preskill J 2018 *Quantum* **2** 79
- [14] Ladd T D, Jelezko F, Laflamme R, Nakamura Y, Monroe C, O'Brien J L 2010 *Nature* **464** 45
- [15] Gisin N, Ribordy G, Tittel W, Zbinden H 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 145
- [16] Kok P, Munro W J, Nemoto K, Ralph T C, Dowling J P, Milburn G J 2007 *Rev. Mod. Phys.* **79** 797
- [17] O'Brien J L, Pryde G J, White A G, Ralph T C, Branning D 2003 *Nature* **426** 264
- [18] Pearson K 1905 *Nature* **72** 294
- [19] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N 1993 *Phys. Rev. A* **48** 1687
- [20] Farhi E, Gutmann S 1998 *Phys. Rev. A* **58** 915
- [21] Childs A M, Cleve R, Deotto E, Farhi E, Gutmann S, Spielman D A 2003 *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, San Diego, USA, June 9-11, 2003 p59
- [22] De Nicola F, Sansoni L, Crespi A, Ramponi R, Osellame R, Giovannetti V, Fazio R, Mataloni P, Sciarrino F 2014 *Phys. Rev. A* **89** 032322
- [23] Peruzzo A, Lobino M, Matthews J C, et al. 2010 *Science* **329** 1500
- [24] Schreiber A, Cassemiro K N, Potoček V, Gábris A, Mosley P J, Andersson E, Jex I, Silberhorn Ch 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 050502
- [25] Defienne H, Barbieri M, Walmsley I A, Smith B J, Gigan S 2016 *Sci. Adv.* **2** e1501054
- [26] Yan Z G, Zhang Y R, Gong M, Wu Y L, Zheng Y, Li S, Wang C, Liang F, Lin J, Xu Y, Guo C, Sun L, Peng C Z, Xia K Y, Deng H, Rong H, You J Q, Nori F, Fan H, Zhu X B, Pan J W 2019 *Science* **364** 753
- [27] Du J F, Li H, Xu X D, Shi M J, Wu J H, Zhou X Y, Han R D 2003 *Phys. Rev. A* **67** 042316
- [28] Karski M, Förster L, Choi J M, Steffen A, Alt W, Meschede D, Wüder A 2009 *Science* **325** 174
- [29] Schmitz H, Matjeschk R, Schneider C, Glueckert J, Enderlein M, Huber T, Schaetz T 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 090504
- [30] Roldán E, Soriano J C 2005 *J. Mod. Opt.* **52** 2649
- [31] Schreiber A, Gábris A, Rohde P P, Laiho K, Štefaňák M, Potoček V, Hamilton C, Jex I, Silberhorn C 2012 *Science* **336** 55
- [32] Politi A, Cryan M J, Rarity J G, Yu S, O'Brien J L 2008 *Science* **320** 646
- [33] Matthews J C, Politi A, Stefanov A, O'Brien J L 2009 *Nat. Photonics* **3** 346
- [34] Shadbolt P J, Verde M R, Peruzzo A, Politi A, Laing A, Lobino M, Matthews J C F, Thompson M G, O'Brien J L 2012 *Nat. Photonics* **6** 45
- [35] Smith B J, Kundys D, Thomas-Peter N, Smith P G R, Walmsley I A 2009 *Opt. Express* **17** 13516
- [36] Corrielli G, Crespi A, Geremia R, Ramponi R, Sansoni L, Santinelli A, Mataloni P, Sciarrino F, Osellame R 2014 *Nat. Commun.* **5** 4249
- [37] Sansoni L, Sciarrino F, Vallone G, Mataloni P, Crespi A, Ramponi R, Osellame R 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 200503
- [38] Crespi A, Ramponi R, Osellame R, Sansoni L, Bongioanni I, Sciarrino F, Vallone G, Mataloni P 2011 *Nat. Commun.* **2** 566
- [39] Carolan J, Harrold C, Sparrow C, et al. 2015 *Science* **349** 711
- [40] Liou J C 2016 *Comput. Mater. Sci.* **122** 30
- [41] Kawachi M 1990 *Opt. Quantum Electron.* **22** 391

- [42] Szameit A, Nolte S 2010 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** 163001
- [43] Kundys D O, Gates J C, Dasgupta S, Gawith C B E, Smith P G R 2009 *IEEE Photonics Technol. Lett.* **21** 947
- [44] Xiong C, Pernice W, Ryu K K, Schuck C, Fong K Y, Palacios T, Tang H X 2011 *Opt. Express* **19** 10462
- [45] Harris N C, Grassani D, Simbula A, Pant M, Galli M, Baehr-Jones T, Hochberg M, Englund D, Bajoni D, Galland C 2014 *Phys. Rev. X* **4** 041047
- [46] Sun J, Timurdogan E, Yaacobi A, Hosseini E S, Watts M R 2013 *Nature* **493** 195
- [47] Davis K M, Miura K, Sugimoto N, Hirao K 1996 *Opt. Lett.* **21** 1729
- [48] Osellame R, Cerullo G, Ramponi R 2012 *Femtosecond Laser Micromachining: Photonic and Microfluidic Devices in Transparent Materials* (Berlin: Springer)
- [49] Jia Y, Wang L, Chen F 2021 *Appl. Phys. Rev.* **8** 011307
- [50] Wei Q H, Dai H L, Shan H R, Li H G, Cao Z Q, Chen X F 2021 *Phys. Rev. B* **104** 235308
- [51] Zhou J, Liang Y, Liu Z, Chu W, Zhang H, Yin D, Fang Z, Wu R, Zhang J, Chen W, Wang Z, Zhou Y, Wang M, Cheng Y 2021 *Laser Photonics Rev.* **15** 2100030
- [52] Kwek L C, Cao L, Luo W, Wang Y X, Sun S H, Wang X B, Liu A Q 2021 *AAPPS Bull.* **31** 15
- [53] Perets H B, Lahini Y, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Silberberg Y 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 170506
- [54] Harris N C, Steinbrecher G R, Prabhu M, Lahini Y, Mower J, Bunandar D, Chen C, Wong F N C, Baehr-Jones B, Hochberg M, Lloyd S, Englund D 2017 *Nat. Photonics* **11** 447
- [55] Owens J O, Broome M A, Biggerstaff D N, Goggin M E, Fedrizzi A, Linjordet T, Ams M, Marshall G D, Twamley J, Withford M J, White A G 2011 *New J. Phys.* **13** 075003
- [56] Sansoni L, Sciarrino F, Vallone G, Mataloni P, Crespi A, Ramponi R, Osellame R 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 010502
- [57] Poullos K, Keil R, Fry D, Meinecke J D, Matthews J C, Politi A, Lobino M, Gräfe M, Heinrich M, Nolte S, Szameit A, O'Brien J L 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143604
- [58] Tang H, Lin X F, Feng Z, Chen J Y, Gao J, Sun K, Wang C Y, Lai P C, Xu X Y, Wang Y, Qiao L F, Yang A L, Jin X M 2018 *Sci. Adv.* **4** aat3174
- [59] Jiao Z Q, Gao J, Zhou W H, Wang X W, Ren R J, Xu X Y, Qiao L F, Wang Y, Jin X M 2021 *Optica* **8** 1129
- [60] Ehrhardt M, Keil R, Maczewsky L J, Dittel C, Heinrich M, Szameit A 2021 *Sci. Adv.* **7** eabc5266
- [61] Childs A M, Goldstone J 2004 *Phys. Rev. A* **70** 022314
- [62] Ambainis A 2003 *Int. J. Quantum Inf.* **1** 507
- [63] Shenvi N, Kempe J, Whaley K B 2003 *Phys. Rev. A* **67** 052307
- [64] Franco C D, Gettrick M M, Busch T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 080502
- [65] Kendon V M, Tamon C 2011 *J. Comput. Theor. Nanosci.* **8** 422
- [66] Mohseni M, Rebentrost P, Lloyd S, Guzik A A 2008 *J. Chem. Phys.* **129** 174106
- [67] Gamble J K, Friesen M, Zhou D, Joynt R, Coppersmith S N 2010 *Phys. Rev. A* **81** 052313
- [68] Childs A M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 180501
- [69] Childs A M, Gosset D, Webb Z 2013 *Science* **339** 791
- [70] Childs A M, Farhi E, Gutmann S 2002 *Quantum Inf Process* **1** 35
- [71] Tang H, Di Franco C, Shi Z Y, He T S, Feng Z, Gao J, Sun K, Li Z M, Jiao Z Q, Wang T Y, Kim M S, Jin X M 2018 *Nat. Photonics* **12** 754
- [72] Shi Z Y, Tang H, Feng Z, Wang Y, Li Z M, Gao J, Chang Y J, Wang T Y, Dou J P, Zhang Z Y, Jiao Z Q, Zhou W H, Jin X M 2020 *Optica* **7** 613
- [73] Wang Y, Cui Z W, Lu Y H, Zhang X M, Gao J, Chang Y J, Yung M H, Jin X M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 160502
- [74] Aaronson S, Arkhipov A 2011 *Proceedings of the Forty-third Annual ACM Symposium on Theory of Computing California, San Jose, USA, June 6-8, 2011* p333
- [75] Bentivegna M, Spagnolo N, Vitelli C, et al. 2015 *Sci. Adv.* **1** e1400255
- [76] Paesani S, Ding Y, Santagati R, Chakhmakchyan L, Vigliar C, Rottwitz K, Oxenl we L K, Wang J W, Thompson M G, Laing A 2019 *Nat. Phys.* **15** 925
- [77] Zhou W H, Gao J, Jiao Z Q, Wang X W, Ren R J, Pang X L, Qiao L F, Zhang C N, Yang T H, Jin X M 2022 *Appl. Phys. Rev.* **9** 031408
- [78] Zhong H S, Deng Y H, Qin J, Wang H, Chen M C, Peng L C, Luo Y H, Wu D, Gong S Q, Su H, Hu Y, Hu P, Yang X Y, Zhang W J, Li H, Li Y X, Jiang X, Gan L, Yang G W, You L X, Wang Z, Li L, Liu N L, Renema J J, Lu C Y, Pan J W 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 180502
- [79] Gao J, Wang X W, Zhou W H, Jiao Z Q, Ren R J, Fu Y X, Qiao L F, Xu X Y, Zhang C N, Pang X L, Li H, Wang Y, Jin X M 2022 *Chip* **1** 100007
- [80] Madsen L S, Laudenbach F, Askarani M F, Rortais F, Vincent T, Bulmer J F, Miatto F M, Neuhaus L, Helt L G, Collins M J, Lita A E, Gerrits T, Nam S W, Vaidya V D, Menotti M, Dhand I, Vernon Z, Quesada N, Lavoie J 2022 *Nature* **606** 75
- [81] Plotnik Y, Rechtsman M C, Song D, Heinrich M, Zeuner J M, Nolte S, Lumer Y, Malkova N, Xu J J, Szameit A, Chen Z G, Segev M 2014 *Nat. Mater.* **13** 57
- [82] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, Lumer Y, Podolsky D, Dreisow F, Nolte S, Segev M, Szameit A 2013 *Nature* **496** 196
- [83] Wang Y, Lu Y H, Mei F, Gao J, Li Z M, Tang H, Zhu S L, Jia S, Jin X M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 193903
- [84] Wang Y, Pang X L, Lu Y H, Gao J, Chang Y J, Qiao L F, Jiao Z Q, Tang H, Jin X M 2019 *Optica* **6** 955
- [85] Wang Y, Lu Y H, Gao J, Chang Y J, Ren R J, Jiao Z Q, Zhang Z Y, Jin X M 2022 *Chip* **1** 100003
- [86] Blanco-Redondo A, Bell B, Oren D, Eggleton B J, Segev M 2018 *Science* **362** 568
- [87] Barik S, Karasahin A, Flower C, Cai T, Miyake H, DeGottardi W, Hafezi M, Waks E 2018 *Science* **359** 666
- [88] Tambasco J L, Corrielli G, Chapman R J, Crespi A, Zilberberg O, Osellame R, Peruzzo A 2018 *Sci. Adv.* **4** eaat3187
- [89] Wang M, Doyle C, Bell B, Collins M J, Magi E, Eggleton B J, Segev M, Blanco-Redondo A 2019 *Nanophotonics* **8** 1327
- [90] Mittal S, Orre V V, Goldschmidt E A, Hafezi M 2021 *Nat. Photonics* **15** 542

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Research progress of integrated optical quantum computing^{*}Zhou Wen-Hao^{1) #} Wang Yao^{1) #} Weng Wen-Kang^{2) †} Jin Xian-Min^{1) 3) ‡}¹⁾ (School of Physics and Astronomy, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)²⁾ (Shenzhen Institute for Quantum Science and Engineering, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China)³⁾ (Chip Hub for Integrated Photonics Xplore (CHIPX), Shanghai Jiao Tong University, Wuxi 214000, China)

(Received 12 September 2022; revised manuscript received 11 October 2022)

Abstract

Quantum computing, based on the inherent superposition and entanglement properties of quantum states, can break through the limits of classical computing power. However, under the present technical conditions, the number of qubits that can be manipulated is still limited. In addition, the preparation of high-precision quantum gates and additional quantum error correction systems requires more auxiliary bits, which leads to extra cost. Therefore, it seems to be a long-term goal to realize a universal fault-tolerant quantum computer.

The development of analog quantum computing is a transition path that can be used to simulate many-body physics problems. Quantum walk, as the quantum counterpart of classical random walks, is a research hotspot in analog quantum computing. Owing to the unique quantum superposition characteristics, quantum walk exhibits the ballistic transport properties of outward diffusion, so quantum walk provides acceleration in computing power for various algorithms. Based on quantum walk, different computing models are derived to deal with practical physical problems in different fields, such as biology, physics, economics, and computer science.

A large number of technical routes are devoted to the experiments on realizing quantum walk, including optical fiber networks, superconducting systems, nuclear magnetic resonance systems, and trapped ion atom systems. Among these routes, photons are considered as the reliable information carriers in the experiments on quantum walking due to their controllability, long coherence time, and fast speed.

Therefore, in this review, we focus on different quantum walk theories and experimental implementations in optical versions, such as traditional optical platforms, optical fiber platforms, and integrated optical quantum platform. In recent years, the rapid development of integrated optical quantum platforms has driven the experiments on quantum walk to move towards the stage of integration and miniaturization, and at the same time, the experimental scale and the number of qubits have gradually increased.

To this end, we summarize the technological progress of integrated optical quantum computing, including various integrated optical quantum experimental platforms and their applications. Secondly, we specifically discuss the experiment on quantum walk and practical applications based on integrated optical quantum platforms. Finally, we briefly describe other quantum algorithms and corresponding experimental implementations.

^{*} Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant Nos. 2019YFA0308700, 2019YFA0706302, 2017YFA0303700), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11904229, 61734005, 11761141014, 11690033), the Science and Technology Commission of Shanghai Municipality, China (Grant Nos. 20JC1416300, 2019SHZDZX01), and the Shanghai Municipal Education Commission, China (Grant No. 2017-01-07-00-02-E00049).

[#] These authors contributed equally.

[†] Corresponding author. E-mail: yung@sustech.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: xianmin.jin@sjtu.edu.cn

These quantum computing schemes provide computational speedups for specific physical problems. In the future, with the further development of integrated optical quantum technology, along with the increase in the number of controllable qubits and the realization of the supporting quantum error correction system, a larger-scale many-body physical system can be constructed to further expand these algorithms and move towards the field of optical quantum computing, a new stage.

Keywords: integrated optical quantum computing, quantum walks, quantum algorithms, quantum advantage

PACS: 03.67.-a, 03.67.Ac, 42.50.-p, 42.82.Et

DOI: [10.7498/aps.71.20221782](https://doi.org/10.7498/aps.71.20221782)

集成光量子计算的研究进展

周文豪 王耀 翁文康 金贤敏

Research progress of integrated optical quantum computing

Zhou Wen-Hao Wang Yao Weng Wen-Kang Jin Xian-Min

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 240302 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20221782

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221782>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

关于采样问题的量子优越性综述

Review on quantum advantages of sampling problems

物理学报. 2021, 70(21): 210201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211428>

硅和锗量子计算材料研究进展

Research progress of silicon and germanium quantum computing materials

物理学报. 2021, 70(21): 217802 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211492>

基于置换群的多粒子环上量子行走的反馈搜索算法

Feedback search algorithm for multi-particle quantum walks over a ring based on permutation groups

物理学报. 2022, 71(3): 030201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211000>

基于量子算法的量子态层析新方案

A novel scheme of quantum state tomography based on quantum algorithms

物理学报. 2019, 68(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190157>

混合量子-经典算法: 基础、设计与应用

Hybrid quantum-classical algorithms: Foundation, design and applications

物理学报. 2021, 70(21): 210302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210985>

机器学习辅助绝热量子算法设计

Machine learning assisted quantum adiabatic algorithm design

物理学报. 2021, 70(14): 140306 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210831>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

非厄米系统的量子模拟新进展*

高雪儿[#] 李代莉[#] 刘志航 郑超[†]

(北方工业大学理学院, 北京 100144)

(2022 年 9 月 19 日收到; 2022 年 10 月 18 日收到修改稿)

量子模拟利用可控性好的量子系统模拟和研究可控性差或尚不能获得的量子系统, 是量子信息科学的主要研究内容之一. 量子模拟可通过量子计算机、量子信息处理器或小型量子设备实现. 非厄米系统近二十年来受到广泛关注, 一方面是因为非厄米量子理论可作为传统厄米量子力学理论的补充和延拓, 且与开放或耗散系统联系紧密. 另一方面, 可构造具有新奇非厄米性质的量子或经典系统, 具有提高精密测量精度等应用价值. 与厄米情况相比, 非厄米量子系统的时间演化不具有么正性, 对其开展量子模拟研究具有一定的挑战. 本文介绍了非厄米系统量子模拟理论与实验新进展. 理论方面主要介绍了基于酉算子线性组合算法, 简单梳理了各个工作的优势和局限性, 并简要介绍了量子随机行走、嵌入式和空间拓展等量子模拟理论; 实验方面简要介绍了利用核磁共振量子系统、量子光学以及利用经典系统模拟非厄米量子系统的实验. 一方面, 这些新进展结合了量子模拟与非厄米领域的研究, 推动了非厄米系统本身的理论、实验和应用发展, 另一方面拓展了量子模拟和量子计算机的可应用范围.

关键词: 非厄米系统, 量子模拟, 酉算子线性组合**PACS:** 03.67.Ac, 03.65.Yz, 03.65.Aa, 11.30.Er**DOI:** 10.7498/aps.71.20221825

1 引言

量子力学的基本假设之一是哈密顿量具有厄米对称性, 保证了系统能量本征值为实数, 具有可观测的物理意义. 厄米性自然地保证了孤立量子系统时间演化的么正性, 从而系统所处量子态的分布概率归一守恒. 然而, 一方面自然界中很少有孤立系统, 普遍存在的是与外部环境存在能量流、粒子流和信息流交换的开放系统, 量子态分布不再守恒, 在处理这类具体问题时, 引入非厄米哈密顿量将带来极大方便^[1–15], 另一方面是厄米性的要求过强, 非厄米哈密顿量在一定条件下仍可保证系统能量本征值为实数^[16–25]. 因此, 发展非厄米量子理论成为必要. 通常情况下, 非厄米系统的能量本征值

是复数, 可作为传统量子力学理论在复数域的拓展. 非厄米系统与开放和耗散系统联系紧密, 它具有诸多新奇性质、现象和应用, 引起了广泛的研究兴趣. 典型的非厄米哈密顿量包括宇称-时间对称哈密顿量和赝厄米对称哈密顿量. 这些哈密顿量以各种各样的特性引起了人们的广泛关注, 如奇异点^[26–30]、新颖的光学性质^[31–37]及对典型非厄米系统熵的动力学和熵的不确定关系的研究^[38–40]等.

量子模拟最早由物理学家费曼^[41]于 1982 年提出, 之后便引起了人们的持续关注. 目前, 量子模拟已成为实践中科学研究的有力工具. 量子模拟不仅可以研究厄米量子力学系统^[42–46], 也为研究和模拟非厄米系统^[38,47–57]及其相关新奇量子现象提供了有效的方法. 特别是对于后者, 量子模拟已经成为量子级实验研究的主要方法, 量子模拟可以

* 国家自然科学基金 (批准号: 12175002, 11705004)、北京市自然科学基金 (批准号: 1222020) 和北京市教委优秀青年人才培养计划资助的课题.

[#] 同等贡献作者.

[†] 通信作者. E-mail: czheng@ncut.edu.cn

在可控量子系统的空间中构造、操作和观察非厄米系统. 迄今为止, 这一热点前沿领域受到了人们的广泛关注, 人们对非厄米量子系统进行了各种研究.

本文简要介绍了近年来非厄米系统的量子模拟理论方案与实验研究新进展.

2 非厄米量子系统的发展

在量子力学中, 为了确保能级是正实数且系统是幺正的, 系统的哈密顿量算符 H 要求是厄米对称的, 即

$$H = H^\dagger, \quad (1)$$

其中, 符号“ $\dagger$ ”为转置共轭算符, 表示矩阵转置与复共轭的组合运算.

20 世纪 40 年代, Pauli^[1] 和 Dirac^[2] 为解决一些物理现象的发散问题分别提出了非厄米理论. 自此, 非厄米量子力学开始出现. 在传统量子力学(厄米的哈密顿量)中, 为保证物理量是可观测的, 要求系统的哈密顿量具有厄米对称性, 这使得系统的时间演化具有幺正性, 系统可能出现的量子态的概率总和是归一化的且不随时间变化. 然而非厄米量子系统不具有这些特点. 并不是所有非厄米哈密顿量的本征值都是虚数, 有一种特殊情况, 即具有宇称-时间 (PT) 对称性的非厄米哈密顿量, 它的本征值可是实数^[16–19]. 这一发现引起了科学界广泛的研究兴趣. Bender 等^[16–19] 和 Mostafazadeh^[20–24] 分别做了系统的研究, 他们构造出了许多实本征值的非厄米哈密顿量模型, 建立了完备的非厄米量子力学理论.

2.1 PT 对称量子力学

PT 对称量子力学领域由圣路易斯华盛顿大学的 Bender 和 Boettcher^[16] 建立于 1998 年. 他们的研究表明, 当哈密顿量满足一定的对称性时, 就可以确保它的本征值是实数, 而不仅限于哈密顿量是厄米的, 因此用非厄米的哈密顿量描述自然界的物理过程成为可能. 前面提到的对称性便是宇称-时间对称性, 其哈密顿量 H 用下式表示:

$$H = (PT)^{-1} H P T, \quad (2)$$

可以简记为 $H = H^{PT}$, 其中 P 是宇称算符, T 是时间演化算符, 二者互相对易. PT 对称理论的主要思想是将哈密顿量的厄米性用约束较小的 PT

对称性替代. 具有 PT 对称性的非厄米哈密顿量本征值依然可以是实数. Bender^[16] 的 PT 对称量子理论是非厄米量子理论的一个重要部分, 为量子力学的发展提供了广阔的空间. 迄今为止, PT 对称的非厄米量子系统在很多领域中都得到了研究者们广泛的关注, 如量子力学基础理论、数学物理、开放的量子系统、无序体系、具有复折射率的光学系统及拓扑绝缘体等^[26,27,58–63].

2.2 赝厄米量子力学

在 PT 对称量子理论建立之后, 仍然还有许多具有实本征值的非厄米系统^[21,64] 没有被囊括, 而且这些哈密顿量并不具有 PT 对称性. 所以, PT 对称性既不是非厄米系统具有实本征值的充分条件, 也不是必要条件. 人们把这类具有实本征值但是并不是厄米对称的系统称作赝厄米系统, 赝厄米性同时也是系统的哈密顿量具有实本征值的充分必要条件. 赝厄米理论最初是由 Pauli^[1] 用不定内积构建的, 其哈密顿量为

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1}, \quad (3)$$

其中, η 通常要求是线性厄米算符. 伊斯坦布尔科奇大学的 Mostafazadeh^[20–24] 于 2002 年利用双正交基解释了赝厄米量子力学体系, 从数学的角度建立了具有一组完备双正交基和分立能谱的 η 赝厄米量子力学理论. 使用双正交基矢赋予系统完备性以及正定内积, 但这里的完备性和正定内积与普通量子力学中的不同, 做内积运算的两组本征函数分别对应于系统的哈密顿量及其厄米共轭算符.

2.3 PT 对称、PT 反对称、P 赝厄米对称和 P 赝厄米反对称二能级量子系统

为了方便对酉算子线性组合量子模拟几个非厄米系统进行介绍, 本节简述 PT 对称、PT 反对称 (APT)、P 赝厄米对称 (PPH) 和 P 赝厄米反对称 (APPH) 二能级量子系统. 选取宇称算符 P 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 时间反演算符 T 作用是取复共轭, 由此可推得 PT 对称二能级量子系统哈密顿量为

$$H_{PT} = \begin{pmatrix} r e^{i\theta} & s + w i \\ s - w i & r e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中, 参量 r, s, w 和 θ 均是实数. 二能级量子系统中, PT 对称哈密顿量的本征值是 $\varepsilon_{\pm} = r \cos \theta \pm \sqrt{w^2 + s^2 - r^2 \sin^2 \theta}$, 系统的能级差为

$$\Delta_{\text{PT}} = 2\sqrt{w^2 + s^2 - r^2 \sin^2 \theta}, \quad (5)$$

Δ_{PT} 只能是实数或者纯虚数. PT 反对称哈密顿量遵循 $\mathbf{H} = -(\mathbf{PT})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{PT}$, 它可以由 PT 对称哈密顿量乘以虚数 i 得到, 使得 PT 反对称量子系统与 PT 对称量子系统有着紧密的联系. 在光学系统中, PT 系统的无损耗传播对应于 APT 系统的无折射传播, 为非厄米系统中调控光和形成互补探针提供了可能^[65]. PT 反对称二能级系统的哈密顿量如下:

$$\mathbf{H}_{\text{APT}} = i\mathbf{H}_{\text{PT}} = i \begin{pmatrix} r e^{i\theta} & s + wi \\ s - wi & r e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

APT 系统的本征值 $\varepsilon_{\pm}$ 与 PT 对称系统的本征值 $i\varepsilon_{\pm}$ 相差一个 i 因子, 所以其能极差也有下列关系:

$$\Delta_{\text{APT}} = i\Delta_{\text{PT}} = 2\sqrt{-w^2 - s^2 + r^2 \sin^2 \theta}. \quad (7)$$

当系统的哈密顿量的本征矢在 PT 对称算符下改变时, PT 对称系统和 PT 反对称量子系统的哈密顿量是自发对称破缺的 (broken). 但是当系统的哈密顿量的本征矢在 PT 对称算符下不变时, PT 对称系统和 PT 反对称量子系统的哈密顿量是未破缺的 (unbroken). PT 对称系统的自发对称破缺相 (非破缺相) 对应于能极差 Δ_{PT} 是纯虚数 (实数) 的情况, 而 APT 系统的自发对称破缺相 (未破缺相) 对应于能极差 Δ_{APT} 是实数 (纯虚数) 的情况. 当系统的能极差为 0 时, 系统处于 PT 对称破缺和未破缺的交界处, 称之为相变点 (EPs), 此时系统的能级发生合并, 在附近出现很多新奇性质. 二能级量子系统中, 把 η 算符用宇称算符 $\mathbf{P}$ 替代时, P 赝厄米对称二能级量子系统的哈密顿量有如下形式:

$$\mathbf{H}_{\text{PPH}} = \begin{pmatrix} r e^{i\theta} & v \\ u & r e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中, u 与 v 是实数, 其余参数同上. 二能级量子系统中 PPH 哈密顿量的本征值是 $\varepsilon'_{\pm} = r \cos \theta \pm \sqrt{vu - r^2 \sin^2 \theta}$, 系统的能级差是

$$\Delta_{\text{PPH}} = 2\sqrt{vu - r^2 \sin^2 \theta}, \quad (9)$$

Δ_{PPH} 只能是实数或者纯虚数. 鉴于 PT 对称、赝厄米对称和 PT 反对称哈密顿量量子系统的发展, 以及考虑到 PT 对称及其反对称哈密顿量的关系, 研究人员自然地延伸到对赝厄米反对称哈密顿量的研究. 同 PT 对称和 APT 哈密顿量的关系类似, 赝厄米反对称哈密顿量是在赝厄米对称哈密顿量上乘虚数 i , 它满足 $\mathbf{H}^{\dagger} = -\eta \mathbf{H} \eta^{-1}$. 将 η 算符取作宇称算符, 那么相应的 APPH 二能级量子系统的

哈密顿量如下:

$$\mathbf{H}_{\text{APPH}} = i\mathbf{H}_{\text{PPH}} = i \begin{pmatrix} r e^{i\theta} & v \\ u & r e^{-i\theta} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

APPH 系统的本征值是 $i\varepsilon'_{\pm}$, 能级差是

$$\Delta_{\text{APPH}} = i\Delta_{\text{PPH}} = 2\sqrt{-vu + r^2 \sin^2 \theta}. \quad (11)$$

在 PPH 和 APPH 量子系统里面也出现了相变点, 即 Δ_{PPH} 和 Δ_{APPH} 等于 0 的情况. 以相变点为边界, 可以把 PPH 系统与 APPH 系统分为实能极差和虚能极差两个相位. 图 1^[38] 和图 2^[38] 给出了 PT 对称、APT、PPH 和 APPH 系统的三个参数的空间, 描述了系统的相变点 EPs、相空间以及参数空间内部的联系.

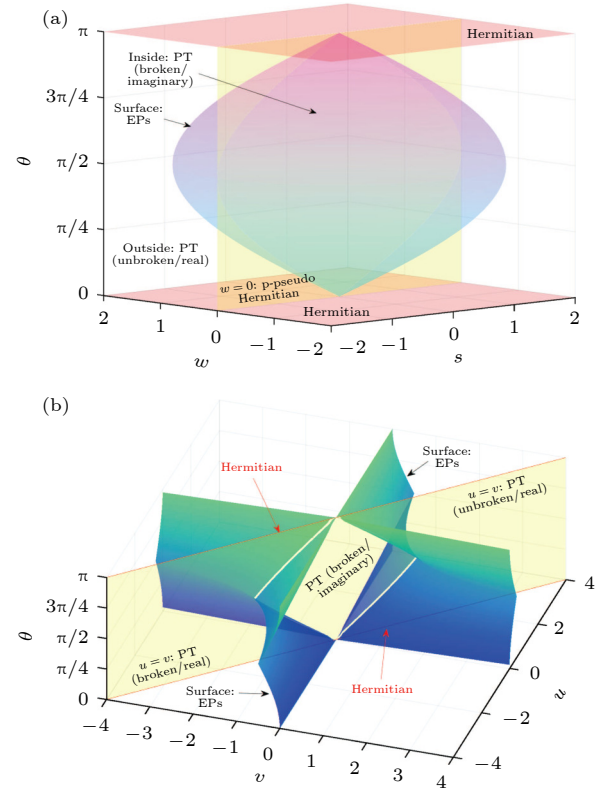


图 1 PT 对称和 PPH 系统的参数空间 (w, s, θ 和 v, u, θ , 设置 $r = 2$) (a) PT 对称系统; (b) PPH 系统^[38]

Fig. 1. Parameter spaces of PT-symmetric and P-pseudo-Hermitian systems (w, s, θ and v, u, θ with setting $r = 2$): (a) PT-symmetric systems; (b) PPH systems^[38].

3 基于 LCU 对非厄米系统的量子模拟理论

量子模拟的概念于 20 世纪 80 年代被首次提出, 致力于用另一个可控系统来模拟量子系统^[41,66]. 从那时起, 量子计算已经成为物理学中最富有成

果的研究领域之一. 量子计算机运用量子叠加态和量子纠缠等量子性质对信息进行处理, 具有的强大的并行功能使得计算速度指数倍提高. 然而, 量子计算的功能需要通过量子算法来体现. Benioff^[66] 于 1980 年提出了量子计算的概念并对其展开了研究, Feynman^[41] 于 1982 年提出用量子计算机模拟量子体系, Deutsch^[25] 于 1985 年完善了量子计算的概念. 但直到 1994 年 Shor^[67] 提出大数分解、1996 年 Grover^[68] 提出量子搜索算法后, 量子计算才得到科学界广泛的关注, 成为持续至今的国际研究前沿^[69]. 传统量子算法都是通过系统么正演化进行信息的处理, 一次计算过程等同于进行了一次封闭系统的动力学演化. 而近些年各种有关非么正时间演化的方法陆续出现^[14,70–78], 包括酉算子的线性组合 (linear combinations of unitaries, LCU)^[14,72,73]、虚时演化法^[74,75]、含时变分法^[76] 和拓展法^[77,78].

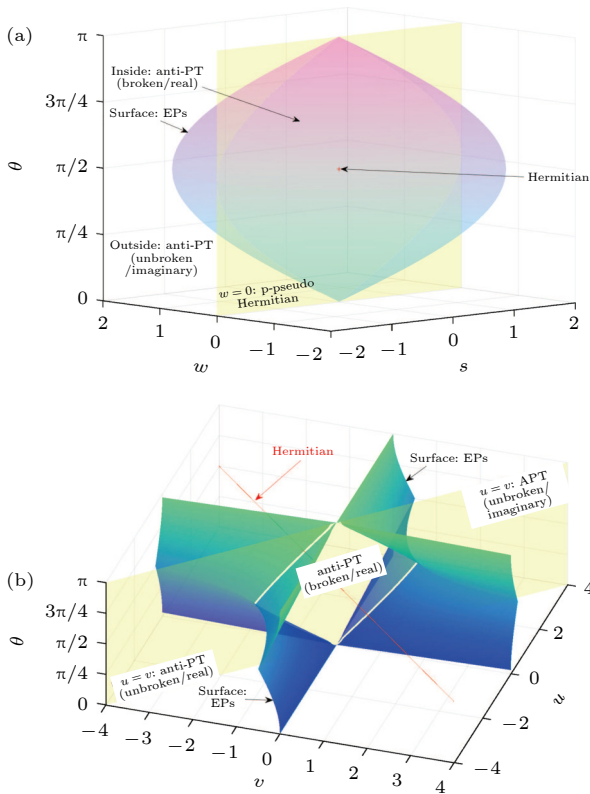


图 2 APT 和 APPH 系统的参数空间 (w, s, θ 和 v, u, θ , 设置 $r = 2$) (a) APT 系统; (b) APPH 系统^[38]

Fig. 2. Parameter spaces of APT-symmetric and anti-Pseudo-Hermitian systems (w, s, θ and v, u, θ with setting $r = 2$): (a) APT-symmetric systems; (b) APPH systems^[38].

3.1 基于 LCU 的量子模拟方法

2006 年, 清华大学的龙桂鲁教授^[72,73] 首次提

出 LCU 算法. 与传统的只能进行么正算子乘除运算的算法不同, LCU 算法可以实现么正算子的加减乘除四则运算, 从而以一定概率实现非么正量子门操作, 进一步拓展构造量子算法的思路和方法. 随后, LCU 算法得到快速发展^[79–88], 目前已经成为设计新量子算法最有力的工具之一, 并得到广泛应用^[89].

3.2 基于 LCU 构造典型非厄米量子系统

3.2.1 广义 PT 对称二能级系统的量子模拟

由于非厄米性, PT 对称量子系统的演化不是单一的. 尽管已经有人提出了一些特殊的 PT 对称量子系统的模拟^[47,49,90], 并在实验中得到实现^[47,49], 但常规量子计算机模拟广义的 PT 对称非厄米量子系统仍然是一个问题. 文献^[51] 从理论上研究了广义的 PT 对称二能级量子系统, 既适用于 PT 对称系统 (非对角元互为复共轭), 也适用于 PPH 对称系统 (非对角元均是实数). 研究人员利用 LCU 的思想, 首次在四维希尔伯特空间中构造 PT 对称哈密顿量系统, 进而模拟其时间演化^[51]. 此实验利用广义 PT 对称哈密顿量以及辅助的 qubit, 推动工作 qubit 的演化, 实现了广义 PT 量子短时间问题的快速演化 (如图 3 所示^[51]). 这一模拟方法为在核磁共振量子系统和量子光学系统中实现广义 PT 对称二能级系统的量子模拟提供了理论支持. 此外, 研究人员还展示了如何分别以 qutrit 和 qudit 作为辅助量子比特实现广义 PT 对称二能级系统 (如图 4(a) 和图 4(b) 所示^[51]), 在某些情况下, 这些系统比以 qubit 作为辅助量子比特的量子计算机具有优势.

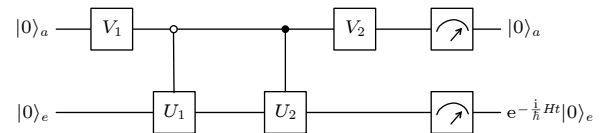


图 3 广义 PT 对称二能级量子系统的量子线路^[51]

Fig. 3. Quantum circuit for a general PT-symmetric two-level system^[51].

3.2.2 广义 PT 反对称二能级系统的量子模拟

除了 PT 对称系统外, PT 反对称系统^[91,92] 也具有新奇性质和潜在应用而受到广泛关注, 如具有平衡正负折射率的 APT 光子结构的材料^[93]、

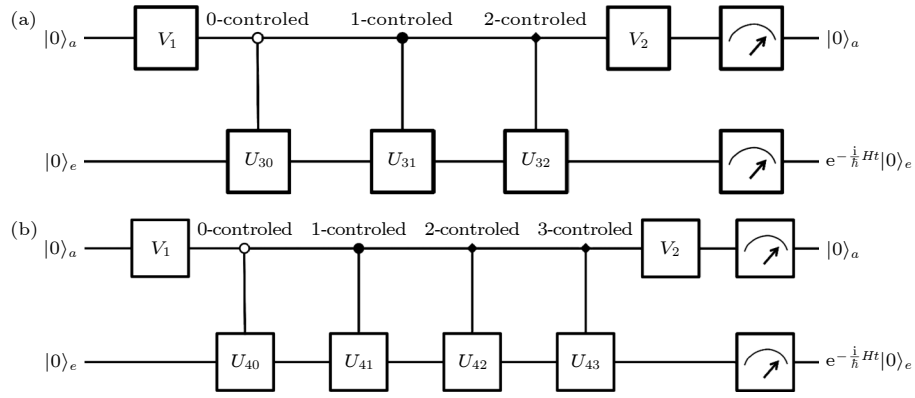


图 4 由辅助 qutrit 和辅助 qudit 构造广义 PT 对称二能级量子系统的电路图 (a) 辅助 qutrit; (b) 辅助 qudit^[51]

Fig. 4. Quantum circuit for a general PT-symmetric two-level system by ancillary qutrit or ancillary qudit: (a) Ancillary qutrit; (b) ancillary qudit^[51].

具有恒定折射的 APT 光学系统^[94]、具有 APT 性的扩散系统^[95]、APT 系统中耦合-诱导的么正和非么正散射^[96]等. 因此, 对于 APT 量子系统的模拟尤为重要. 研究人员首次提出了基于 LCU 量子模拟 APT 二能级系统的理论方案^[55], 提出的量子模拟理论方案, 既适用于 APT 系统 (非对角元互为复共轭), 也适用于 APPH 系统 (非对角元均是实数). 研究发现, 该方案需要的最小希尔伯特空间维度为六维, 可由一个 qutrit 和一个 qubit 组成的量子计算机来完成一般任务. 利用对偶量子算法^[72,73,80,81], 设计了一个 qubit-qutrit 混合系统的量子线路, 它可以实现 LCU. qutrit 作为构建广义 APT 子系统的辅助比特. 当 qutrit 在状态 $|0\rangle_a$ 中被测量时, 广义 PT 反对称哈密顿算符将推动工作比特的演化 (如图 5 所示^[55]). 此外, 研究人员还设计量子比特系统来实现量子模拟过程, 给出了量子比特量子计算机的流程图和量子电路 (如图 6 所示^[55]), 流程图和量子电路都是为三量子位量子计算机设计的, 使得利用现有技术进行实验实现成为可能.

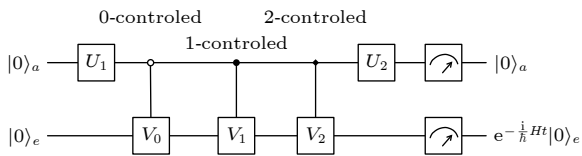


图 5 模拟处于任意相的 PT 反对称二能级系统的量子线路^[55]

Fig. 5. Quantum circuit for a generalized APT-symmetric two-level system in arbitrary phase^[55].

3.2.3 PT 任意相位对称系统的量子模拟

研究人员首次将 PT 对称和 PT 反对称系统

推广到 PT 任意相位 (PT- φ) 对称系统^[97,98]. 对于一个非厄米哈密顿量 H , 研究人员找到了 PT 对称和 PT 反对称哈密顿量 H_{PT} 和 $H_{APT} = iH_{PT}$, 使得 H 可以被视为 H_{PT} 和 H_{APT} 的结合, 如下式所示:

$$PTH - e^{i\varphi} HPT = 0, \quad (12)$$

其中 φ 是与哈密顿量对称性相关的相位, (12) 式等价于 $H = \cos \frac{\varphi}{2} H_{PT} - \sin \frac{\varphi}{2} H_{APT}$, 该式具有和任意子相同的对易形式, 因此称 H 为 PT 任意相位对称或 PT- φ 对称哈密顿量 (也有文章称其为任意子 PT 对称哈密顿量). 与哈密顿量 H 对称性相关的相位 φ 固定为 $2k\pi$ (k 取整数), 系统为 PT 对称情况; 相位固定为 $(2k+1)\pi$ 时, 系统则为 PT 反对称情况 (k 取整数). 这种表示非厄米哈密顿量的方法对任意维度的量子系统都适用. 文献^[99]给出了二维情况下哈密顿量的一般形式, 并讨论了它的基本性质, 如特征值、PT 对称性是否自发破缺的条件等. 同时, 研究人员从理论上研究了用传统厄米系统对 PT 任意相位对称二能级系统时间演化的量子模拟, 基于 LCU 设计了 qubit-qudit 混合 (如图 7 所示^[99]) 和纯量子比特 (如图 8 所示^[99]) 器件的量子线路. 两个方案都由一个工作 qubit 和辅助 qubit (或 qudit) 组成, 经过一系列的量子门操作, 使得工作 qubit 以一定概率按照非厄米哈密顿量进行时间演化. 前一个方案清晰地展示了模拟方法, 而后一个方案更具有实用性和较高的成功概率. 这两个方案有望在小型量子器件, 如核磁共振和量子光学系统中实验实现. 类似于 PT 任意相位对称非厄米系统, 厄米任意相位对称系统的量子模拟理论在文献^[100]中被提出.

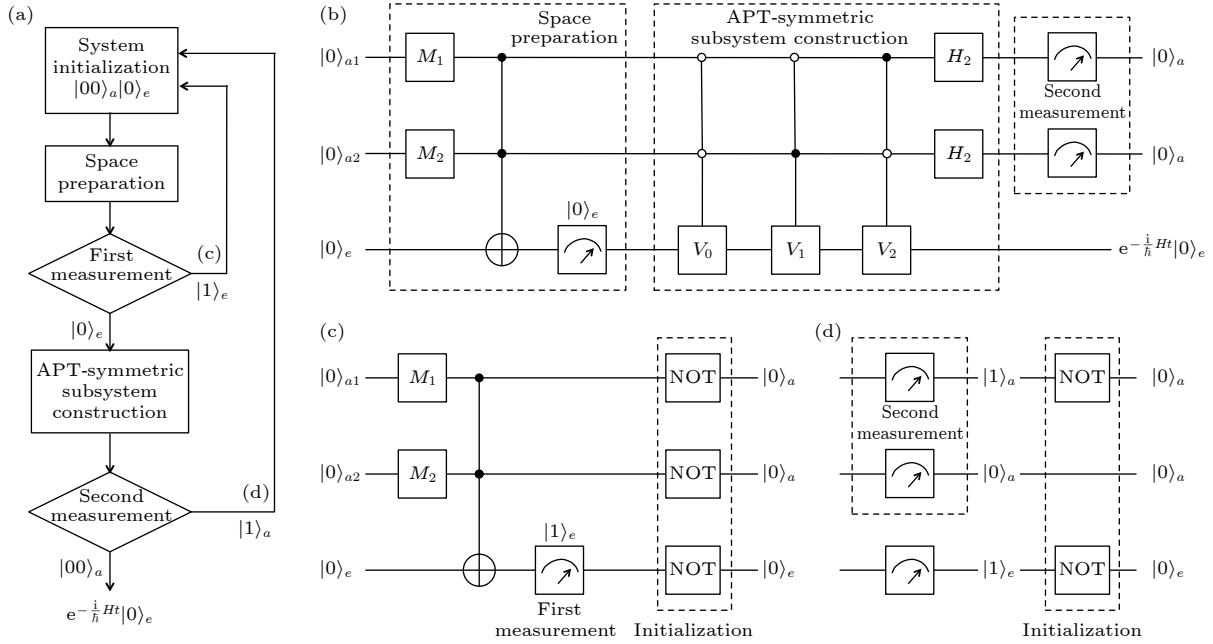


图 6 量子计算机的流程图和量子线路图 (a) 模拟广义 APT 系统的流程图; (b) 模拟广义 APT 系统的线路图; (c) 第一次测量之后的初始化和空间准备的量子线路图; (d) 第二次测量之后的量子线路图^[55]

Fig. 6. Flow chart and quantum circuit for a qubit computer: (a) Flow chart of quantum simulation of the generalized APT-symmetric system; (b) quantum circuit to simulate the evolution of the generalized APT-symmetric system; (c) quantum circuit for space preparation and initialization after the first measurement; (d) quantum circuit for initialization after the second measurement^[55].

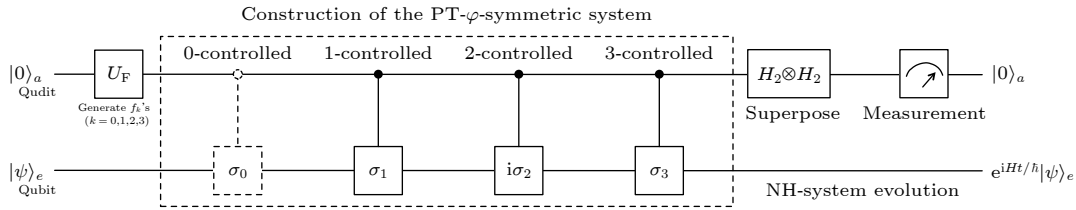


图 7 Qubit-qudit 混合量子线路 (由一个工作量子比特和四维辅助量子比特组成的混合系统)^[99]

Fig. 7. Qubit-qudit hybrid quantum circuit (The hybrid system consists of a work qubit and a four-dimensional ancillary qudit)^[99].

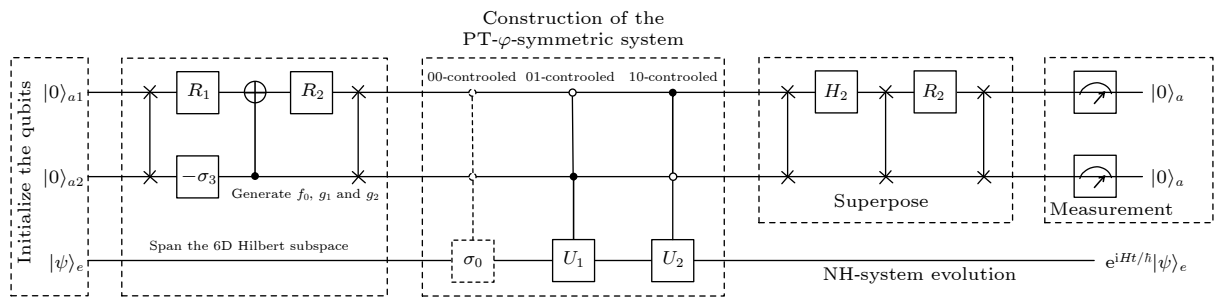


图 8 三量子比特线路 (由一个工作比特和两个辅助量子比特子系统构成)^[99]

Fig. 8. Three-qubit quantum circuit (consists of a work qubit and a two-qubit ancillary subsystems)^[99].

3.2.4 P 赝厄米反对称二能级系统的量子模拟

文献 [101] 对 P 赝厄米反对称二能级系统进行了量子模拟理论研究. 研究人员使用对偶量子计算方法, 有效模拟了系统从任意初始状态到不同

相位的 APPH 系统演化. 要在量子比特计算机中实现对任意 APPH 系统下的量子模拟, 三个量子比特是必不可少的. 研究人员发现六维和八维 (如图 9 和图 10 所示^[101]) 方案都能够实现模拟, 但是分别具有不同的优势. 六维方案的成功概率更高,

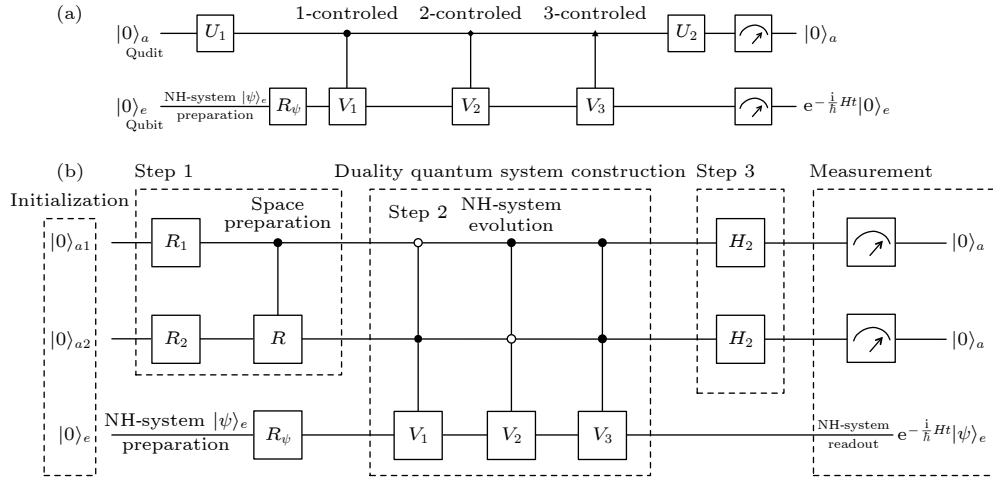

 图 9 (a) qubit-qutrit 混合量子计算机的线路图; (b) 三比特量子计算机的量子线路图^[101]

Fig. 9. (a) Quantum circuit for a qubit-qutrit hybrid computer; (b) quantum circuit designed for a quantum computer of three qubits^[101].

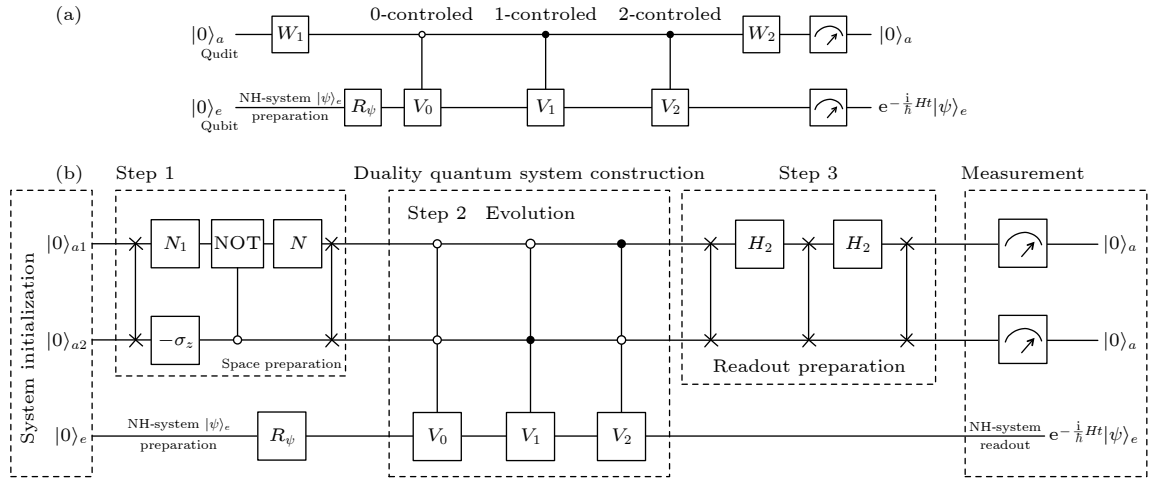

 图 10 (a) qubit-qutrit 混合量子计算机的线路图; (b) 六维子空间中三量子比特量子计算机的线路图^[101]

Fig. 10. (a) Quantum circuit for a qubit-qutrit hybrid computer; (b) quantum circuit designed for a quantum computer of three qubits using the full Hilbert space^[101].

而八维方案则需要较少的量子门操作. 因此, 选择哪种方案取决于实验系统的稳定性和可控性. 当 APPH 系统处于某些特殊相位时, 可以使用更少的量子位来模拟. 如系统哈密顿量参数的非对角元相等时, 只需两个量子比特即可模拟, 并且具有更高的成功概率.

3.2.5 τ -赭厄米反对称二能级系统的量子模拟

除了上文讨论的 PT 对称系统、P 赭厄米对称系统及它们分别对应的反对称系统之外, 2002 年, Mostafazadeh^[22] 定义并研究了一类哈密顿量为 τ -赭厄米反对称 (τ -APH) 的非厄米系统. τ -APH 哈密顿量满足

$$H_\tau = \tau^{-1} H_\tau^\dagger \tau, \quad (13)$$

其中, τ 是反线性反厄米可逆的变换. τ -APH 哈密顿量及其算子 τ 对于深入研究具有实数能谱的非厄米哈密顿量的充分必要条件都具有重要意义. 文献 [57] 研究了基于 LCU^[72] 对 τ -赭厄米反对称二能级系统的量子模拟. 详细提出了将反线性算子 τ 指定为 T 算子或 P 算子后, 如何在一般情况下使用三个量子比特以及特殊情况下使用两个量子比特来模拟 T-APH (如图 11 所示^[57]) 和 PT-APH (如图 12 所示^[57]). 在一般情形下, 使用 LCU 来模拟时间演化需要用到的最小希尔伯特空间是六维. 特殊情形下, 两种方案都可以实现模拟, 但两个量子比特的方案成功概率更高, 这取决于初始状态、

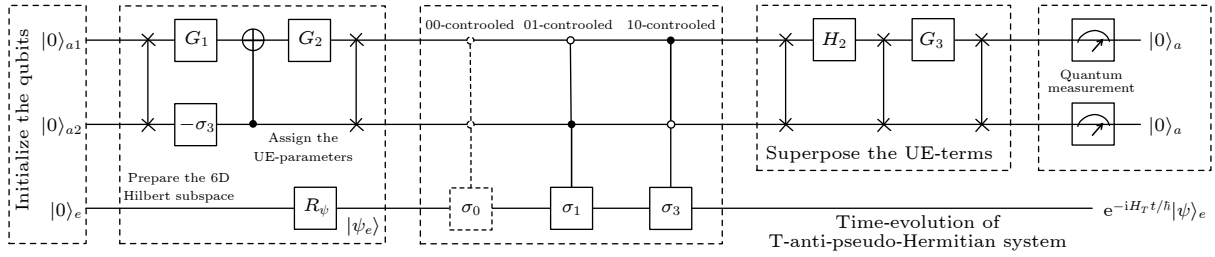

 图 11 模拟 T-APH 二能级系统的三量子比特线路图^[57]

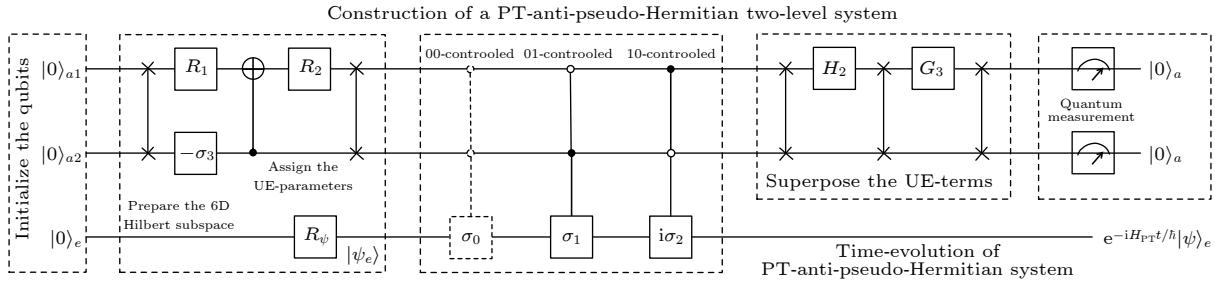
 Fig. 11. Three-qubit quantum circuit to simulate a T-anti-pseudo-Hermitian two-level system^[57].

 图 12 模拟 PT-APH 二能级系统的三量子比特线路图^[57]

 Fig. 12. Three-qubit quantum circuit to simulate a general PT-anti-pseudo-Hermitian two-level system^[57].

哈密顿量和所使用希尔伯特空间的维数. 因此, 将基于 LCU 的么正扩张项以及相位匹配条件相结合对于量子模拟前所需的维数、节省量子比特源以及提高成功概率具有重要意义. 这种模拟方法可以推广到模拟一般的 τ -APH 高能级系统, 未来可以在实验上实现.

4 基于 LCU 对非厄米系统的量子模拟实验

前面介绍了基于 LCU 对非厄米系统的量子模拟理论方案, 现在介绍实验方案. 量子模拟实验可以运用不同的系统, 典型的系统有核磁共振量子系统、量子光学系统、超导量子系统、离子阱系统、超冷原子系统等. 本节介绍在核磁共振量子系统以及量子光学系统中运用 LCU 的方法对非厄米系统的量子进行模拟的实验方案.

4.1 广义 PT 对称系统的数字量子模拟实验演示

数字量子模拟 (DQS) 是一种重要的量子模拟实验方法, 可以用作通用量子计算机^[85]. DQS 算法用于模拟具有电路模型的量子系统, 其量子操作被分解为一般量子门的时间顺序序列. 研究人员基于文献^[51]提出的对广义 PT 对称系统的量子模拟

方法, 展示了一种在量子计算框架中使用电路模型实现广义 PT 对称算符的 DQS 通用方法^[52]. 研究人员在核磁共振平台上实验研究了 PT 对称系统的纠缠特性, 展示了该方案在纠缠恢复中的应用. 需要强调的是, 通过对原始量子线路的适当修改, 可以实现在一般的非厄米算符中的纠缠恢复, 这意味着可以通过实验中演示的协议, 在没有厄米限制的情况下实现一般的二能级系统演化. 这个实验揭示了两体非厄米体系中, 在 PT 对称非破缺相位中两个 qubit 的熵和纠缠的振荡.

4.2 PT 对称破缺下具有非零熵稳定状态的非厄米系统实验演示

4.1 节的研究是关于两体非厄米体系, 系统中的二量子比特 (Alice 和 Bob) 最初纠缠在一起, Alice 在局部 PT 对称哈密顿量下演化. 这样的二量子比特模型会导致在 PT 对称非破缺相位中熵和纠缠的振荡, 这违反了纠缠单调性^[52,86]. 具体来说, 破缺相中两个量子位的熵和纠缠均呈指数衰减至零, 并形成不随时间变化的稳定态. 这种稳定态的动力学过程被称为正常动力学模式 (NDP), 它只与量子相位有关, 而非厄米性的程度无关.

然而, 文献^[87]发现当系统从两体模型扩展到三体模型时, 会出现另一种演化过程, 称为异常动

态模式 (ADP). 从理论和实验的角度研究了具有局域 PT 对称的三量子比特系统中熵和纠缠的演化过程. 在该系统中发现了 ADP 和 NDP 两种动力学模式, 其中熵和纠缠倾向于稳定在 ADP 中与非厄米相关的非零值, 这在两体系统中是不存在的. ADP 中的两体子系统在奇异点处呈现最大纠缠增加, 且互信息可以超过初始值. 此外, 还在具有核自旋的四量子位量子模拟器上实现了具有非零熵和纠缠态的非厄米系统中稳定状态的实验演示. 当 PT 对称系统从两体扩展到三体时, 会出现一些不同的物理性质, 纠缠和互信息的增强具有重要的物理意义.

4.3 利用光子量子位对 PT 对称动力学进行实验模拟

基于经典光学实验技术实现 PT 对称模拟和应用已经成熟. 然而, 实验上利用线性量子光学构造和研究 PT 对称系统仍然存在挑战. 研究人员基于 LCU 非厄米量子模拟理论^[14,72,73], 利用线性量子光学系统, 实现了对广义 PT 对称系统的量子模拟^[102]. 如图 13^[102] 所示, 通过使用辅助量子位放大系统, 并用后选择过程模拟了全厄米系统子系统中

U_{PT} 算子的相位. 结果表明, 当只考虑 PT 对称演化子空间时, 可以高保真地观察到演化过程中的状态. 由于扩展方法的有效操作, 此项工作为进一步利用 PT 对称哈密顿量的奇异特性进行量子模拟和量子信息处理提供了一条途径.

4.4 核自旋 PT 反对称系统中信息流的实验观测

基于文献^[55]提出的理论, 研究人员首次在核磁共振量子计算平台上实验模拟了广义 PT 反对称系统的时间演化, 发现 PT 对称系统中的信息回流也存在于 PT 反对称系统中, 并且实验演示了信息流振荡^[56]. 实验表明在破缺相中, 信息流在环境和系统之间来回振荡并出现信息回流的现象 (如图 14 所示^[56]), 该现象在传统的厄米量子力学中是不存在的. 研究还表明, 当系统参数接近奇异点发生相变之前, 振荡周期和振幅均单调增加; 而在通过临界点后, 环境中的信息将不再流回系统中, 实现了 PT 反对称系统的对称破缺相变过程. 对称破缺相位中的单调对应关系表明, 此结果可以为量子系统提供一种度量非厄米性的方法. 此外, 研究人员还发现了一个有趣的反对应关系: 当 PT 对称

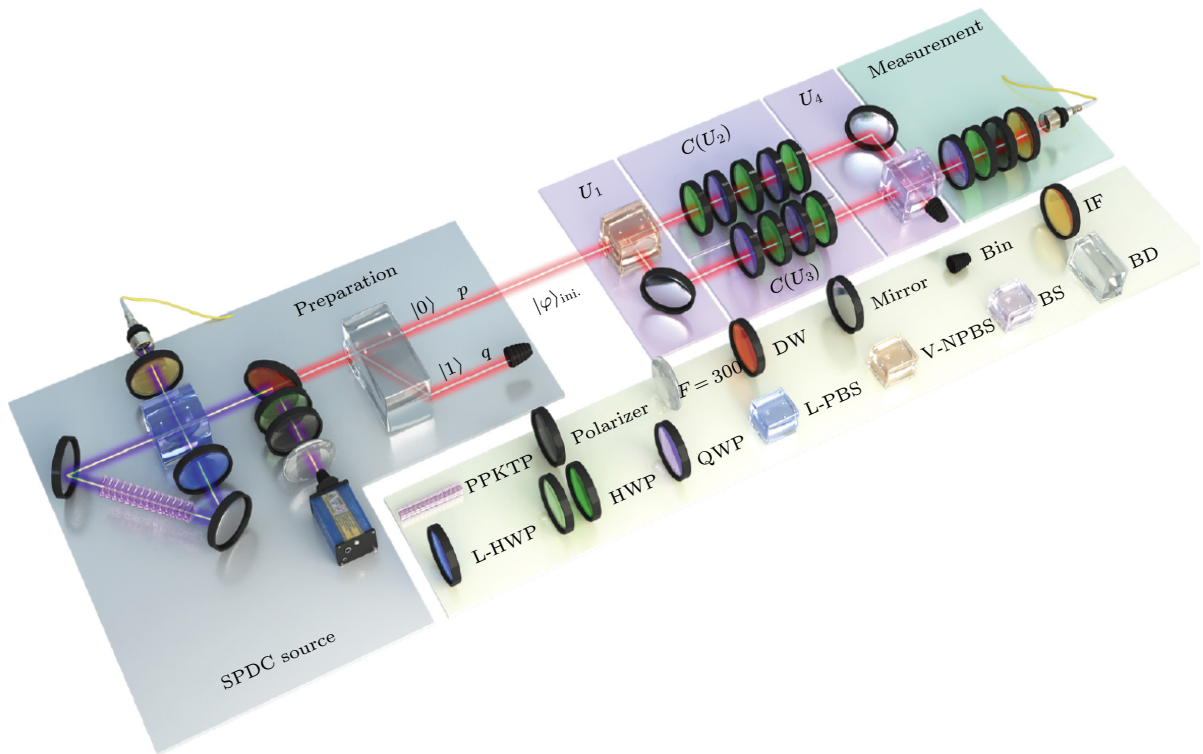


图 13 由制备、演化和检测三个模块组成的实验装置^[102]

Fig. 13. Experimental configuration includes three modules: the preparation module, the evolution and the detection part^[102].

系统处于破缺相时, 不存在信息流振荡或信息回流, 而在 PT 反对称系统的破缺相中, 存在信息回流的现象.

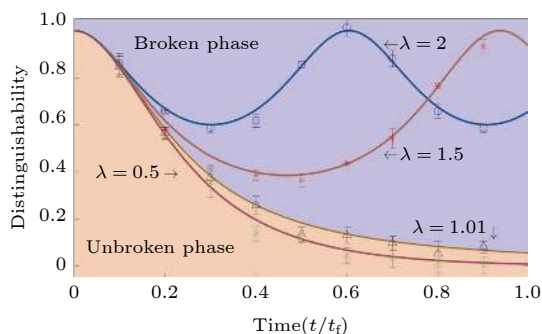


图 14 可区分性测量的信息流实验结果^[56]

Fig. 14. Experimental results of information flow measured by distinguishability^[56].

5 其他量子模拟理论方案

本节简要介绍量子模拟非厄米系统的其他理论方案, 包括量子随机行走、嵌入式量子模拟以及空间拓展等多种对非厄米系统的量子模拟方案.

5.1 量子随机行走

1993 年, Aharonov 等^[103]首次提出量子随机行走的概念, 量子随机行走是经典随机行走在量子世界的对照. 目前有两种形式的量子随机行走: 离散量子行走 (discrete time quantum walk, DTQW) 和连续量子行走 (continuous time quantum walk, CTQW). 这两种形式的主要区别是: 使用演化算符时消耗的时间不同. 在 DTQW 中, 该系统相应的演化算符仅作用于离散时间步长; 而在 CTQW 中, 演化算符可以在任何时间所用. 其中连续量子随机行走由 Farhi 和 Gutmann^[104]于 1998 年首次提出, 而离散量子随机行走由 Watrous^[105]于 2001 年提出.

量子随机行走在量子信息中有着广泛的应用, 如利用量子随机行走开发的对于无序数据库的搜寻算法. 正是因为量子随机行走优于经典随机行走的特性, 使得携带信息量子态的扩散速度与经典相比有二次方式的增长. 过去, 研究人员普遍认为弹道式扩散是量子随机行走的特性并对其加以利用. 但在 2015 年薛鹏教授课题组^[106]首次观测到量子随机行走中光信息的传播扩散与恢复, 这一项关于光在量子随机行走中的动力学演化研究中提出的

理论及实验的验证颠覆了人们对量子随机行走的认识, 并为量子随机行走在量子信息中的应用提供了新的方向, 为理解基于量子力学的动力学演化的基本现象提供了新的视角, 同时也为研究量子扩散及对拓扑现象的量子模拟提供了新的思路. 接着在 2017 年, 薛鹏教授课题组^[91]首次在开放系统中实验实现了 PT 对称的量子随机行走并观测到新型一维拓扑保护边界态, 为基于量子随机行走平台实现量子计算提供了新的依据. 该课题组设计了开放系统量子行走模型, 以行走者的概率交替损耗-不损耗的方式取代难以实现的损耗-增益, 证明其同样满足 PT 对称性. 并利用单光子在线性光学体系中实现了 PT 对称的量子行走, 分别演示了 PT 对称性保持、破缺以及临界点的量子特性. 首次实现了真正意义上的 PT 对称的量子系统的动力学演化过程.

5.2 嵌入式量子模拟

西班牙巴斯克大学 Solano 课题组^[107–109]首次引入了嵌入式量子模拟的概念. 嵌入式量子模拟是指通过引入辅助量子比特, 将原空间中的力学量及 Schrödinger 方程编译至放大的希尔伯特空间中, 将其对应至目前可高度操控的量子模拟平台, 经过时间演化后, 再反投影回原空间, 实现违反因果律的非物理操作观测. 嵌入式量子模拟器使得量子模拟的内容更加丰富, 实现了原本无法在自然中观测到的现象. 目前, 嵌入式量子模拟器已经被应用于模拟波函数的复共轭、反线性和反么正操作^[107]及其在囚禁离子平台与光学平台实验观测^[110,111]、研究量子计算中的纠缠单调性^[109]及其利用 Mølmer-Sørensen 量子门与局部旋转门在囚禁离子平台实验的验证方案^[112]. 近年来使用嵌入式方法对 PT 对称系统的模拟得以实现^[113–115]. 这种嵌入式模拟方法基于 Naimark 放大理论, 通过放大非厄米的 PT 对称哈密顿量以实现更高维度的厄米哈密顿量, 并且在后选择的辅助比特上实现固定投影算符. 然而, 这类嵌入式模拟 PT 对称系统方法的成功概率还可以提高. 研究人员提出了一种局部算符和经典交流 (LOCC) 协议嵌入式模拟 PT 对称系统的动力学演化^[88], 只需要用到一个辅助比特. 一般情况下的成功概率被提升到原来嵌入方式的一倍以上, 特殊情况下成功概率甚至可以趋于 100%. 并且, 这种 LOCC 协议更加灵活, 对度量算符的

依赖更小, 更适合用于粒子的应用. 相比于利用至少需要一个辅助量子比特的 LCU 模拟非厄米系统, LOCC 嵌入式量子模拟只需要一个辅助量子比特便可以实现 PT 对称系统.

5.3 空间拓展

德国鲁尔大学 Günther 和 Samsonov^[90] 于 2008 年提出了对具有 PT 对称哈密顿量的短时量子系统进行奈马克拓展 (Naimark dilation), 将其重新解释为高维希尔伯特空间中厄米系统的一个子系统. 这为在纠缠双自旋系统中直接实验实现 Bender 等^[116] 提出的 PT 对称超快短时问题开辟了道路. 它解决了 PT 对称哈密顿量的量子力学与传统的厄米量子力学模式之间的切换问题. 核心思想在于将最速降线重新解释为在高维希尔伯特空间中的更大厄米量子力学系统的适当对称子系统. 基于奈马克拓展技术^[117] 产生的大系统将具有纠缠双自旋 (二量子比特) 系统的结构, 因此短时效应的实验实现是可行的.

6 其他量子模拟实验系统

迄今为止, 核磁共振量子系统、量子光学系统、超导量子系统、离子阱系统、超冷原子等系统因各自不同的优点, 成为构造通用量子处理器的热门备选方案. 本节将介绍核磁共振系统、量子光学及光子学中的量子模拟实验.

6.1 核磁共振系统

核磁共振具有相干时间长、脉冲操控精确以及保真度高等优点, 在量子信息相关研究中起着至关重要的作用^[118]. 核磁共振系统作为一个量子模拟器, 可以用于模拟基本量子力学模型、量子延迟选择^[119,120]、量子相变^[121,122]、量子隧道效应^[47,123] 和其他不易操控的量子系统等. 下面介绍使用核磁共振系统进行量子模拟的几个具体应用.

6.1.1 PT 对称系统快速演化的观察

最速降线问题描述的是两个状态之间的最短时间演化. 在量子力学中, 两个状态之间的最速降线是由哈密顿量本征值的最大差值限定的, 它可以应用于量子算法复杂性的时间最优方法. Bender 等^[116] 已经证明 PT 对称哈密顿量比厄米量子力学

具有更快的演化最短时间. 在核磁共振 (NMR) 量子系统中, 模拟 PT 对称哈密顿量的时间演化的实验已经得到设计和实现^[47]. 实验结果表明, PT 对称哈密顿量系统的演化速度确实比厄米量子系统的更快, 并且演化时间可以接近于零. 在厄米量子力学中, 当厄米二能级量子系统的本征值之差固定不变时, 自旋翻转的最快演化时间不变. 而对于 PT 对称量子系统, 则可以通过改变哈密顿量中的参数来改变最速降线时间. 正如 Bender 等^[116] 所预测并在工作中所证明的那样, 哈密顿量参数的改变不仅可以加速演化, 还可以减慢演化^[124].

6.1.2 核磁共振系统中鸟类罗盘的量子模拟实验

量子生物学是量子科学与生物学相结合的新兴领域. 它研究生命系统中的量子效应, 并探究量子效应在生物学中的作用. 鸟类磁感应现象在 20 世纪 60 年代首次获得实验支持^[125], 它是鸟类通过量子罗盘在地球磁场中定向的能力. 在对欧洲知更鸟进行实验后, 有人提出罗盘可能依赖于自由基对中的一对电子自旋, 通过塞曼相互作用与地球磁场交互. 其他实验表明, 化学罗盘不受极性反转的影响^[126], 但是会被频率处于电子对的共振频率附近的射频场破坏^[127,128], 并且只有在周围有阳光且磁场强度在 $\pm 30\%$ 范围内的内部磁场的情况下才能正常工作^[129,130].

有一类量子模拟系统的实现是基于某些化合物中自旋的核磁共振, 每种化学物质通常都有固定数量的核自旋, 研究人员使用核磁共振光谱仪内的自然哈密顿量并通过应用精心定制的射频脉冲序列对其进行操作. 其中, 自然哈密顿量源于化学物质中的静态磁场和自旋耦合^[131]. 该工作研究的是系统和外部环境耦合的开放系统, 因此系统的哈密顿量是非厄米的. 射频脉冲与化合物中原子核的拉莫尔频率匹配或接近匹配. 在这种情况下, 原子核很容易吸收和发射入射射频脉冲所赋予的能量, 从而有助于精确控制核自旋. 因此使用此类量子模拟系统可以实现鸟类罗盘的模拟.

文献^[44] 描述了在核磁共振量子信息处理器中进行了鸟类磁感应的实验演示. 首先在核磁共振系统中准备一个 $|00\rangle$ 态, 然后应用一系列量子逻辑门来创建一个单重态. 将鸟类罗盘的时间演化算符应用于单重态. 最后, 同样序列的量子逻辑门将系

统返回到 $|00\rangle$ 态, 研究人员在此量子态下读取数据. 逻辑门序列和时间演化算子都可以使用梯度上升优化算法 (GRAPE) 实现. 实验表明, 参考和探测罗盘模型在核磁共振系统中得到了成功的模拟, 并与理论符合良好, 因此核磁共振量子模拟具有广泛适用性.

6.1.3 量子模拟器上的量子时空

量子引力旨在将爱因斯坦引力与量子力学统一起来, 使人们对引力的理解可以扩展到普朗克尺度 1.22×10^{19} GeV. 在普朗克尺度层面, 爱因斯坦引力和时空连续体被量子时空分解并取代. 目前许多研究量子时空的方法都植根于自旋网络, 它是一种重要的、非微扰的量子引力框架. 自旋网络是彭罗斯^[86]受扭量理论的启发提出的, 后来被广泛应用于圈量子引力论 (LQG)^[132]. 在 LQG 中, 自旋网络在普朗克尺度上代表空间基本离散量子几何的量子态, 用作某些 $3+1$ 维量子时空的边界数据. 量子时空可以具有开放系统结构, 因此与非厄米系统关系紧密.

如图 15 所示^[133], 一个以自旋网络为边界的 $3+1$ 维量子时空是一个自旋泡沫, 一个由许多三维世界图 (曲面) 及其交点组成的“网络”, 其中世界图是由自旋一半着色的. 就像经典空间的时间演化形成的经典时空一样, 自旋网络的时间演化形成了量子时空^[134,135].

研究人员使用量子模拟器探索自旋网络态和自旋泡沫振幅, 为研究 LQG 提供了有效的实验演示^[133]. 通过在核磁共振系统中使用四量子位量子寄存器, 创建了图 16^[133] 中 10 个代表量子四面体的不变张量态, 保真度超过 95%. 然后, 利用这些量子四面体, 模拟了 Ooguri 模型中一个自旋 $-1/2$ 的自旋泡沫顶点振幅. 由于顶点振幅决定了自旋泡沫振幅并显示了局域动力学, 因此结果显示了 5 个

胶合量子四面体的相互作用振幅或 m 到 $(5-m)$ 量子四面体的跃迁.

6.2 量子光学系统

量子力学出现开始, 光学就在量子物理中担任了非常重要的角色, 与量子发展息息相关. 因此, 量子光学系统成为了量子计算和量子信息处理的关键备选方案之一.

6.2.1 Yang-Baxter 方程的直接实验模拟

由于 Yang-Baxter 方程 (YBE) 的重要性, 其实验验证一直是人们追求的目标. 值得注意的是 Tennant 等^[136,137] 对其进行的实验验证, 他们测量了海森伯半自旋链的光谱, 实验结果与 YBE 的计算结果相符合. 文献^[138] 对一维导线的密度分布进行测量的结果与基于杨氏可解模型的理论计算结果符合良好. 然而, 这些实验都只是对 YBE 的间接验证. 根本原因在于 YBE 仅为光谱或观测剖面提供了充分条件, 即观测剖面只是 YBE 的必要条件, 并不能保证 YBE 的有效性, 也无法证明光谱参数的类洛伦兹变换.

研究人员于 2013 年首次报道了使用线性量子光学对 YBE 进行直接实验模拟^[139]. 此模拟的基本原理由 Hu 等^[140] 于 2008 年确立, 他们通过使用 Temperley-Lieb 代数, 进行了一次显著的约化, 得到了一个维数为 2 的 YBE, 这使得利用当前技术在量子光学中实现 YBE 成为可能. 在 2013 年的实验模拟中, 研究人员用分束器、半波片、四分之一波片等线性量子光学元件实现了 Hu-Xue-Ge 方案^[140], 并证明了 YBE 的有效性, 还直接验证了厄米对称的 YBE 两边的相等性. 并且, 研究人员首次通过实验证明了 YBE 光谱参数的类洛伦兹变换. 然而, 研究人员提及的模拟并没有涉及 YBE 中的量子纠缠问题, 并且实现的 YBE 是厄米对称

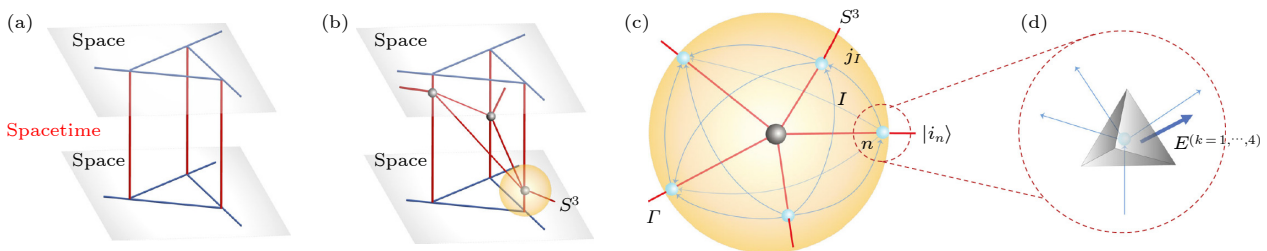
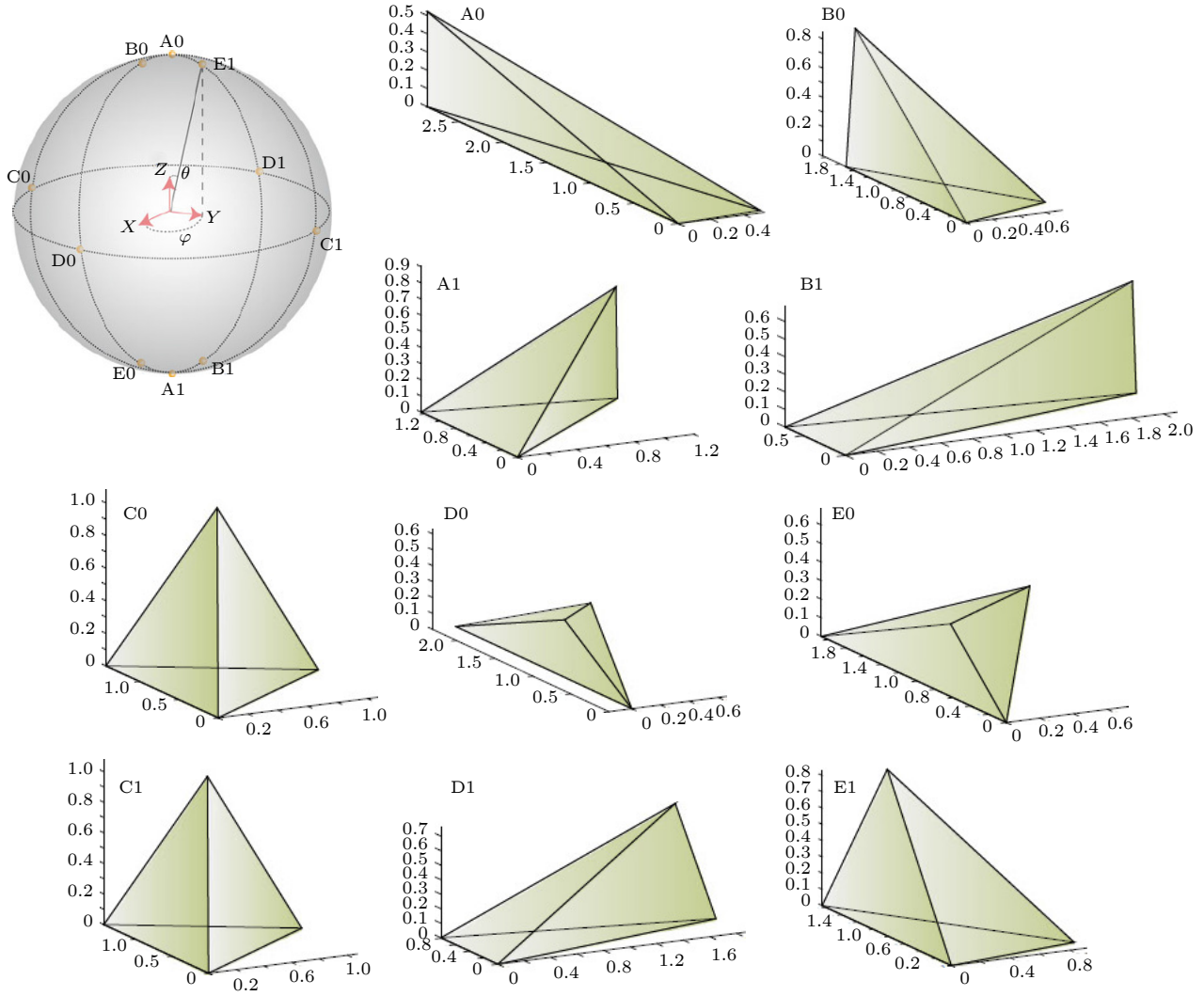


图 15 量子时空和四面体 (a) 静态四维 (4D) 量子时空; (b) 五价点的动态量子时空; (c) S^3 的局域结构; (d) 量子几何四面体^[133]

Fig. 15. Quantum spacetime and tetrahedra: (a) A static 4D quantum spacetime; (b) a dynamical quantum spacetime with a number of five valent vertices; (c) the local structure of S^3 ; (d) quantum geometrical tetrahedra^[133].

图 16 实验制备量子态在 Bloch 球上的对应和相关经典四面体^[133]Fig. 16. Experimentally prepared states on the Bloch sphere and their corresponding classical tetrahedra^[133].

的. 下面介绍非厄米的 YBE 的模拟, 为实现 YBE 的量子纠缠提供了新的思路. 文献 [49] 首次基于 LCU 实现了非厄米 YBE 的量子模拟. 该模拟系统包含 Yang-Baxter 子系统和一个辅助量子比特. Yang-Baxter 子系统将会随着 YBE 两边的部分演化, 而辅助系统用于保持 YBE 模拟的统一性, 还是检验其正确性的必要条件. 在传统的量子模拟中, YBE 方程等号两边被分别模拟, 再对整个 Yang-Baxter 系统的两个输出态进行本质上的重构和比较, 以检查 YBE 模拟的正确性. 在这一过程中, YBE 的整体性被破坏. 相反, 基于 LCU 的模拟下, 由于辅助比特的作用使得 YBE 的两侧可以作为一个整体被同时模拟, 因此 YBE 会保持整体性不受破坏. 所以, 在 YBE 两侧的量子纠缠或多个 YBE 系统的量子纠缠有望实现. 并且, 辅助量子比特可以被用

于探测 YBE 模拟过程当中的缺陷. 这一过程不需要使 YBE 子系统的量子态塌缩, 所以最后 YBE 的状态可以被保留. 研究人员除了提出理论之外, 还提出了量子光学系统和核磁共振量子系统上实现 YBE 的实验方案 (如图 17^[49] 所示). 此方案既可以模拟非厄米 YBE 系统, 也可以高效模拟厄米 YBE 系统.

6.2.2 量子热机的光学模拟

热机在人类社会发展进程和生活中发挥着重要作用, 如何提高热机效率一直是热力学的核心科学问题. 量子热机 (QTE) 顾名思义就是以量子系统为工作物质对外做功的热机. 由于 QTE 会向外界做功并且系统与外界相互作用的参数是可控的, 因而它是一个开放系统, 可由非厄米哈密顿量描述. 为了提高 QTE 效率, 研究人员对工作物质的量

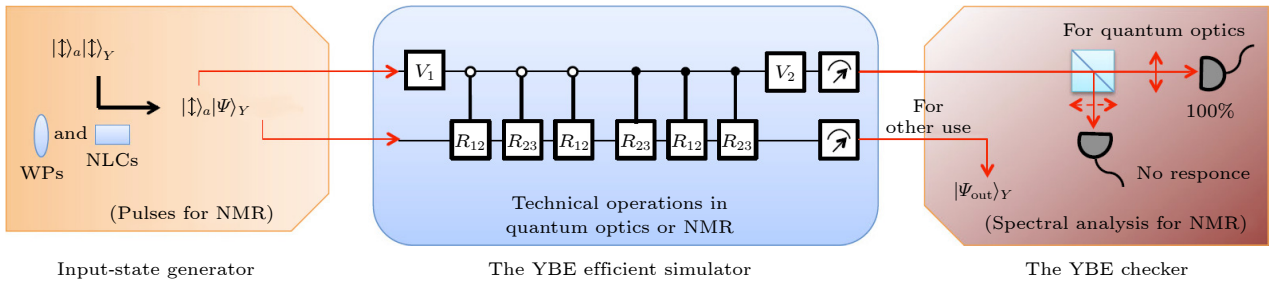
图 17 LCU 模拟 YBE 的简图^[49]

Fig. 17. Schematic illustration of the LCU simulation of the YBE by quantum optics system and a nuclear magnetic resonance quantum system^[49].

子性质进行探索, 取得了很多有效成果. 最近, 通过核磁共振 (NMR)^[141] 和金刚石中的氮空位中心^[142] 操纵的核自旋系统, 研究人员对 QTE 的性能进行了实验验证. 一般来说, 在物理系统中实现 QTE 的一个主要困难是为了实现对退相干的鲁棒性而所需的高度可控性. 因此, 在可以有效控制储层的体系中设计 QTE 显得尤为重要. 另外, 退相干可由非么正算符实现, QTE 与非厄米哈密顿量相联系.

为了模拟可控储层, 必须考虑量子通道对量子信息的影响^[143]. 在这种情况下, 研究人员考虑相关量子通道的光学实现是至关重要的, 如振幅阻尼、相位阻尼和位翻转通道, 以及其他使用单光子执行的通道^[144]. 文献^[145] 介绍了一种通过光学方法模拟量子热机的理论和实验方案, 工作物质和热库的行为通过单个光子的内部自由度实现. 通过使用偏振和传播路径, 研究人员对两个量子比特进行编码, 然后实现奥托循环的热力学步骤. 为了说明方案的可行性, 研究人员通过强激光束实验实现了这种模拟, 并评估了热力学循环每一步的热量和功.

6.3 光子系统

由于具有最快的传播速度, 很强的稳定性及良好的抗环境干扰能力, 光子系统早已成为实现量子信息处理的最理想和最热门的物理系统之一.

6.3.1 PT 对称量子动力学中临界现象的观察

PT 对称非厄米系统在合成系统 (经典光学、微波腔、量子气体和单光子系统) 中具有新奇性. 在这些系统中, 光谱在 PT 对称非破缺相位中完全是实的, 这与 PT 对称自发破缺相位的情况相反. 因此, 两个相位中的动力学是截然不同的, 并且在两个区域之间的边界上出现了动力学临界性. 开放

量子系统中的 PT 对称非么正动力学的一个范例是系统及其环境之间信息流的可逆-不可逆临界性^[132]. 在这里, 当系统处于 PT 对称非破缺区域时, 由于在 PT 对称保护的环境中存在有限维纠缠部分, 因此丢失到环境中的信息可以被完全恢复. 相反, 当 PT 对称系统自发破缺时, 信息流是不可逆的. 而在奇异点附近, 物理量表现出幂律行为. 大量实验在经典的增益和损耗平衡的 PT 对称系统中观察到了此类新奇动力学特性以及 PT 过渡点或奇异点的特征^[31–36].

文献^[146] 描述了利用单光子干涉网络对 PT 对称非么正量子动力学进行的实验模拟, 并通过实验研究了 PT 非破缺和破缺区域的奇异点附近信息流中的临界现象. 研究人员通过对光子实施非么正门运算并执行量子态层析成像, 重建了任意时刻 PT 动力学随时间变化的密度矩阵, 这使得能够表征 PT 奇异点附近的临界现象, 并在关键量 (如可区分性和重现时间) 中证明了幂律行为. 对称性和初始条件都会对临界现象产生影响. 引入辅助自由度作为环境并探测系统和环境之间的量子纠缠, 研究人员证实了观测到的信息恢复是由环境中的有限维纠缠部分引起的. 该工作是第一个描述 PT 对称非么正量子动力学中临界现象的实验, 并为模拟合成量子系统中的 PT 对称动力学开辟了一条途径.

6.3.2 光学微腔中模拟 PT 任意相位对称系统

3.2.3 节已经介绍了 PT 任意相位对称系统, 并且给出了其基于 LCU 的模拟理论, 本节介绍二元光学微腔中模拟 PT 任意相位对称系统. PT 任意相位对称系统的哈密顿量满足 (12) 式, 当与系统哈密顿量有关的相位 φ 处于不同的值时, 可以

得到 PT 或者 APT 对称的系统. 文献 [97] 研究了 PT 任意相位对称系统的演化, 可以在二元耦合系统中实现这种对称性. 研究人员实验上选择两个具有相同共振频率的光学微型谐振器进行模拟, 发现 PT 任意相位对称系统的能级简并只能在 PT 对称和 PT 反对称情况下实现. 研究人员提出了实验上可实现的系统, 展示了在 PT 任意相位的对称保护性. 这类系统有望被用于超敏传感、光学手性和非互易传输.

6.3.3 使用光子高斯模式模拟三能级系统中的量子跃迁

量子光学系统被证明是量子力学基础测试和量子信息协议实施的有效选择. 某些光学系统在光子横向动量中进行信息编码, 这些信息可以使用狭缝 [147] 或不同的光子路径 [148] 来离散, 以便在狭缝模式或高斯模式下制备单光子、双光子或四光子量子态 [149,150]. 由于高斯形状在顺序运算中保持不变, 因此高斯模式可用于广义量子运算. 此外, 这种状态很容易耦合到带透镜的光纤和光子电路, 从而使得研究人员在不同的平台和不同的应用中探索它们. 另一个有趣的可能性是使用空间光调制器 (SLM) 作为光学系统的一部分来转换光子状态, 保持相同的高斯编码, 以实现广泛的量子操作 [150,151].

这种光学结构的一个重要优势是它们能够模拟复杂的量子系统.

研究人员提出并实现了一种使用三模光子系统在量子跃迁下实验模拟非厄米三能级系统的方法 (如图 18^[152] 所示), 分别在三能级原子系统中模拟了三种不同的自发衰变动力学: 级联衰变, Λ 衰变和 V 衰变. 研究人员利用光子级的衰减光相干源, 制备了三路叠加态的光子, 该光子以并行高斯模式编码, 通过对光子路径进行精确的周期性相位调制, 能够实现大量操作并模拟三能级系统中不同的衰减动力学. 这一模拟让我们更好地理解量子跃迁如何影响三能级系统的相干性. 此外, 这种实现可用于理解高维系统中的量子跃迁如何因状态退相干而影响量子协议, 而退相干可由非厄米么正算符实现, 从而与非厄米系统相联系. 该方法具有通用性, 它可以推广到三级以上的多级系统.

6.3.4 耦合 PT 对称哈密顿量的光子量子模拟

文献 [153] 提出了适用于直接实现么正变换技术平台的 PT 对称哈密顿量量子模拟的框架. 研究人员使用设备将非么正算子, 以及与第一算子具有相反的时间演化算子的第二算子嵌入到全局么正变换之中. 该模型中的整体演化允许单粒子或多粒

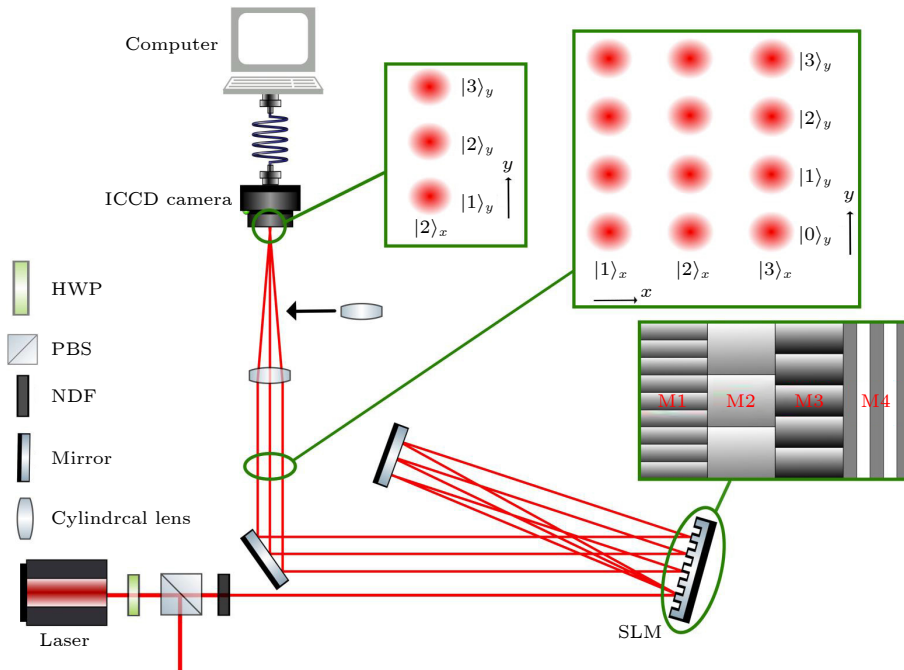


图 18 用于准备和实现在三模平行高斯光束状态下的算符的实验装置^[152]

Fig. 18. Experimental setup used to prepare and to implement the operations on a three-path parallel Gaussian beam state^[152].

子激发在耦合系统之间隧穿, 其概率与模拟哈密顿量的非厄米性成比例. 这种构造允许在非厄米哈密顿量的情况下, 对在相反时间方向上叠加的状态进行实验研究. 研究人员使用可编程集成光子芯片以及单光子、双光子和三光子输入态的集合, 在双模和三模 PT 对称哈密顿量中实验模拟了多粒子动力学. 此实验再现了 PT 对称未破缺区域和跨越奇异点到 PT 对称破缺区域的动力学, 包括时间正向子系统和时间反向子系统之间的相互相干效应和干涉效应. 这一工作展现了使用可编程量子模拟器研究量子力学中的基本问题的可能性.

7 经典系统中的非厄米系统模拟实验

除了量子系统, 经典系统也可模拟非厄米系统. 经典物理实验系统更成熟稳定, 相比于量子系统更易于操控, 更容易完成实验实现, 同时也可以很好地演示非厄米系统特性. 下面分别简介利用 LRC 回路、激光器和经典电路模拟 PT 对称非厄米系统.

7.1 LRC 回路中模拟 PT 对称的量子系统

具有 PT 对称性的 LRC 回路实验上最早是由 Schindler 等^[154]于 2011 年提出的, 它由一对振荡耦合器构成, 其中一个具有放大功能, 另一个则具有等效的衰减量. 正是由于这对振荡耦合器 (又称作二聚体) 中的增益损失机制, 使得这一回路可以在保持 PT 对称性的同时打破厄米性. 这种“有源”二聚体可以使用简单的电子学实现, 由于其在经典系统中模拟 PT 对称的量子系统, 所以它从实本征谱到复本征谱的“相变”可以被直接观察. 在具有新奇性的相变点附近, 其一般的模式合并, 组件相对相位差的确定值由电感耦合确定. 这一实验的实现引导了后续一系列使用经典系统对量子系统的模拟的实验. 2012 年, Lin 等^[155]在实验上通过在传输导线的感应耦合中应用 LRC 电路, 研究了 PT 对称的散射, 并且提供了 PT 对称散射的奇异性质的实验依据. LRC 电路作为一种易于实现的系统, 可以研究许多其他理论思想. 其简单性和对动态变量的可访问性使我们能够深入且更透彻地理解 PT 对称散射. 2018 年 Choi 等^[92]通过实验演示了一种模拟通用 APT 系统的电路. 他们使用电阻耦合放大 LRC 谐振器电路研究了稳态和动态特

性, 实现了精确的参数控制和时间分辨测量. 在该实验中, 他们观察到了相变点、发生 PT 对称破缺的逆过程以及能极差守恒的时间演化等结果, 通过实验证实了 APT 量子系统的独特性质, 为其他领域的发展提供了新的光波操作技术和创新的设备操作原理.

7.2 激光器中的 PT 对称

由于半导体激光器系统中, 不仅存在折射率的高低分布, 而且存在增益和损耗分布, 因而它可作为一个非厄米的光学系统^[156]. 2007 年 El-Ganainy 等^[157]提出了适用于 PT 对称光学元件的耦合模理论 (CMT), 其中每个单独元件和整个系统都遵循 PT 对称性. 基于 PT 对称光学的 CMT, 产生且发展了许多相关光学实验. 其中的一类代表是具有侧向和纵向 PT 对称性结构的激光器. 具有侧向和纵向 PT 对称性结构的激光器可以调控自身的模式特性. 2012 年 Miri 等^[158]提出利用 PT 对称结构的侧向模式制备单侧模激光器, 实现单向模场大面积激光的放大. 这种 PT 对称结构可以通过耦合两个多模场的波导来实现, 其中一个模场显示的是增益, 另一个是等量的损耗. 研究人员利用 PT 对称破缺跃迁实现单侧模激光器, 这种跃迁在保持高阶模场中性的情况下, 允许基本模场获得增益. 这种单侧模激光器得以实现的本质原因是波导基模间的耦合系数小于高阶模间的耦合系数, 基模会更先进入 PT 对称破缺相, 进而实现单侧模的激光输出. Hodaei 等^[159]在 2014 年利用光泵浦的侧向双环耦合的 PT 对称环形激光器实现了单模激光的输出, 实现了纵模的筛选. 2018 年 Yao 等^[37]通过固定一个波导的电流, 调节另一个波导的电流大小以实现一个波导固定增益和另一个波导变化的损耗, 进而实现模式选择性 PT 对称破缺和单模操作.

Feng 等^[160]在 2014 年提出了利用纯增益损耗调制的单微环纵向 PT 对称结构的激光器, 可以利用 PT 对称相变来实现对固有的单模激光的选择. Gu 等^[161]在所制备的纵向 PT 对称条形激光器中, 发现了模式间隔更大的光谱. 这是由于该激光器具有非对称的泵浦区域与非泵浦区域, 进入 PT 对称破缺相导致模式间隔增大. 除了利用 PT 对称性的模场分离调控激光器, 还可以利用处于 PT 对称相变点处的光的不可见性实现轨道角动量微腔激光器^[162,163]. 由于光在纵向 PT 对称的复折射率光栅

处的反射率为 0, 因而可以使得微环上只保留一个方向上的光束输出. 利用单向破坏性干涉展现出的独特非对称结构也能设计不依赖入射方向的波传播以及单向激光发射^[164,165].

7.3 经典电路模拟非厄米系统

相比传统的量子平台, 经典电路系统因不受限的网络形式和高度的调控自由度, 原则上可以模拟任意维度、任意格点间跃迁、任意边界条件下的量子紧束缚模型, 已经成为模拟量子物态的有力平台. 研究人员利用经典电路通过仿真电路模拟器 (SPICE) 成功模拟了一个重要的非厄米量子模型^[166], 即非互易 Aubry-André 模型 (AA 模型) 的稳态性质, 包括周期边界条件下体现系统非厄米拓扑性质的复能谱和能谱缠绕数, 以及开边界下非厄米趋肤效应与准无序局域化的竞争. 研究人员详细介绍了如何建立经典电路的拉普拉斯形式与量子紧束缚模型哈密顿矩阵在不同边界条件下的映射, 并具体给出了实现不同边界条件下非互易 AA 模型的电路设计方案. 由于方案的普适性, 这一工作所讨论的设计原则和理论可以直接应用于其他非厄米量子模型的电路模拟.

8 总结与展望

量子模拟一直以来作为量子信息研究的重要驱动力和主要研究方向, 其理论与实验研究均发展迅速. 非厄米系统作为传统量子力学理论拓展, 因其与开放和耗散系统联系紧密, 同时具有潜在应用价值, 近二十年来发展迅速, 成为研究热点. 本文关注二者的结合, 简要综述了非厄米系统量子模拟的新进展, 着重介绍了基于 LCU 对非厄米系统的量子模拟理论和实验研究, 包括 PT 对称与反对称系统、PT 任意相位对称系统、P 厄米对称与 P 厄米反对称、厄米任意相位对称系统、 τ -反厄米对称系统等的量子模拟研究. 同时, 简要介绍了其他量子模拟非厄米系统的研究方法, 包括随机行走、嵌入式和空间拓展等. 实验方面, 介绍了基于核磁共振、量子光学与光子学等平台的几个典型的非厄米量子模拟研究实例, 以及利用经典物理系统开展对非厄米系统模拟的实验研究.

目前对非厄米系的量子模拟研究, 理论方面集中于 PT 对称与反对称, 对于其他非厄米系统尤其

是厄米系统的理论研究逐步增多. 实验方面主要集中于 PT 对称与反对称系统, 对于包括厄米系统在内的其他非厄米系统的量子模拟实验研究较少, 是今后开展非厄米实验研究的发展方向. 然而, 非厄米系统不仅局限于具有 PT 对称性或厄米性的哈密顿量, 还有更多具有不同形式非厄米哈密顿量有待发现、研究和应用. 另一方面, 多数非厄米量子模拟研究集中于二能级系统, 以展示非厄米系统新奇特性为主. 随着研究深入, 高维一般情况的非厄米哈密顿量的数学形式和高效的量子模拟有待进一步研究.

参考文献

- [1] Pauli W 1943 *Rev. Mod. Phys.* **15** 175
- [2] Dirac P A M 1942 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **180** 980
- [3] Lee T D, Wick G C 1969 *Nucl. Phys. B* **9** 209
- [4] Ding P Z, Yi W 2022 *Chin. Phys. B* **31** 010309
- [5] Gamow G 1928 *Zeitschrift für Physik* **51** 204
- [6] Moiseyev N 2011 *Non-Hermitian Quantum Mechanics* (Cambridge: Cambridge University Press) pp211–247
- [7] Breuer H P, Petruccione F 2002 *The Theory of Open Quantum Systems* (10th Anniversary Ed.) (Oxford: Oxford University Press) pp421–431
- [8] Barreiro J T, Müller M, Schindler P, Nigg D, Monz T, Chwalla M, Hennrich M, Roos C F, Zoller P, Blatt R 2011 *Nature* **470** 486
- [9] Hu Z, Xia R, Kais S A 2020 *Sci. Rep.* **10** 3301
- [10] Del Re L, Rost B, Kemper A F, Freericks J K 2020 *Phys. Rev. B* **102** 125112
- [11] Viyuela O, Rivas A, Gasparinetti S, Wallraff A, Filipp S, Martin-Delgado M A 2018 *npj Quantum Inf.* **4** 10
- [12] Schlingens A W, Head-Marsden K, Sager L M, Narang P, Mazziotti D A 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 270503
- [13] Del Re L, Rost B, Foss-Feig M, Kemper A F, Freericks J K 2022 *arXiv: 2204.12400[quant-ph]*
- [14] Zheng C 2021 *Sci. Rep.* **11** 3960
- [15] Chen Z J, Ning X J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2683 (in Chinese) [陈曾军, 宁西京 2003 物理学报 **52** 2683]
- [16] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [17] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2004 *Phys. Rev. D* **70** 025001
- [18] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401
- [19] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [20] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 205
- [21] Mostafazadeh A 1998 *J. Math. Phys.* **39** 4499
- [22] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 2814
- [23] Mostafazadeh A 2002 *Nucl. Phys. B* **640** 419
- [24] Mostafazadeh A 2004 *J. Math. Phys.* **45** 932
- [25] Deutsch M 1985 *Proc. R. Soc. London Ser. A* **400** 97
- [26] Jin L, Song Z 2009 *Phys. Rev. A* **80** 052107
- [27] Tang Y J, Liang C, Liu Y C 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 171101 (in Chinese) [唐原江, 梁超, 刘永椿 2022 物理学报 **71** 171101]
- [28] Zhang X Z, Wang P, Zhang K L, Yang X M, Song Z 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 174501 (in Chinese) [张禧征, 王鹏, 张坤亮, 杨学敏, 宋智 2022 物理学报 **71** 174501]

- [29] Kato T 1966 *Perturbation Theory for Linear Operators* (Berlin: Springer-Verlag) pp64–516
- [30] Heiss W D 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 444016
- [31] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* **488** 167
- [32] Hodaie H, Hassan A U, Wittek S, Garcia-Gracia H, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2017 *Nature* **548** 187
- [33] Ritter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
- [34] Wimmer M, Miri M A, Christodoulides D N, Peschel U 2015 *Sci. Rep.* **5** 17760
- [35] Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, Lu M H, Oliveira J E B, Almeida V R, Chen Y F, Scherer A 2013 *Nat. Mater.* **12** 108
- [36] Xu H, Mason D, Jiang L, Harris J G E 2016 *Nature* **537** 80
- [37] Yao R Z, Lee C, Podolskiy V, Guo W 2018 *Laser Photonics Rev.* **13** 1800154
- [38] Zheng C, Li D 2022 *Sci. Rep.* **12** 2824
- [39] Li D, Zheng C 2022 *Entropy* **2** 4
- [40] Li L J, Ming F, Song X K, Wang D 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 070302 (in Chinese) [李丽娟, 明飞, 宋学科, 叶柳, 王栋 2022 物理学报 **71** 070302]
- [41] Feynman R P 1982 *Int. J. Theor. Phys.* **21** 467
- [42] Greiner M, Mandel O, Esslinger T, Hansch T W, Bloch I 2002 *Nature* **415** 39
- [43] Gerritsma R, Kirchmair G, Zahringer F, Solano E, Blatt R, Roos C F 2010 *Nature* **463** 68
- [44] Pearson J, Feng G R, Zheng C, Long G L 2016 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **59** 120312
- [45] Sheng Y B, Zhou L 2017 *Sci. Bull.* **62** 1025
- [46] Georgescu I M, Ashhab S, Nori F 2014 *Nature* **86** 153
- [47] Zheng C, Hao L, Long G L 2013 *Philol. Trans. R. Soc. A* **371** 20120053
- [48] Gao T, Estrecho E, Bliokh K Y, Liew T C H, Fraser M D, Brodbeck S, Kamp M, Schneider C, Hofling S, Yamamoto Y 2015 *Nature* **526** 554
- [49] Zheng C, Wei S 2018 *Int. J. Theor. Phys.* **57** 2203
- [50] Wang H, Wei S, Zheng C, Kong X, Wen J, Nie X, Li J, Lu D, Xin T 2020 *Phys. Rev. A* **102** 012610
- [51] Zheng C 2018 *EPL* **123** 40002
- [52] Wen J, Zheng C, Kong X, Wei S, Xin T, Long G 2019 *Phys. Rev. A* **99** 062122
- [53] Li C, Wang P, Jin L, Song Z 2021 *J. Phys. Commun.* **5** 105011
- [54] Jin L 2022 *Chin. Phys. Lett.* **39** 037302
- [55] Zheng C 2019 *EPL* **126** 30005
- [56] Wen J, Qin G, Zheng C, Wei S, Kong X, Xin T, Long G 2020 *npj Quantum Inf.* **6** 28
- [57] Zheng C 2022 *Chin. Phys. B* **31** 100301
- [58] Joglekar Y N, Saxena A 2011 *Phys. Rev. A* **83** 050101
- [59] Valle G D, Longhi S 2013 *Phys. Rev. A* **87** 022119
- [60] Faisal F H M, Moloney J V 1981 *J. Phys. B* **14** 3603
- [61] Zhang S, Jin L, Song Z 2022 *Chin. Phys. B* **31** 010312
- [62] Jin L, Song Z 2010 *Phys. Rev. A* **81** 032109
- [63] Hu Z, Zeng Z Y, Tang J, Luo X B 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 074207 (in Chinese) [胡洲, 曾招云, 唐佳, 罗小兵 2022 物理学报 **71** 074207]
- [64] Cannata F, Junker G, Trost J 1998 *Phys. Lett. A* **246** 219
- [65] Chuang Y L, Ziauddin, Lee R K 2018 *Opt. Express* **26** 17
- [66] Benioff P 1980 *J. Stat. Phys.* **22** 563
- [67] Shor P W 1994 *Proceeding of the 35th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* Santa Fe, New Mexico, USA, November 20–22, 1994 p124
- [68] Grover L K 1996 *Proceedings of the Twenty-eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing* Philadelphia, USA, July 1, 1996 p212
- [69] Fan H 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 120301 (in Chinese) [范桁 2018 物理学报 **67** 120301]
- [70] Garcia-Perez G, Rossi M A C, Maniscalco S 2020 *npj Quantum Inf.* **6** 1
- [71] Wei S J, Ruan D, Long G L 2016 *Sci. Rep.* **6** 30727
- [72] Long G L 2006 *Commun. Theor. Phys.* **45** 825
- [73] Long G L 2011 *Int. J. Theor. Phys.* **50** 1305
- [74] Motta M, Sun C, Tan A T K, O'Rourke M J, Ye E, Minnich A J, Brandao F G S L, Chan G K L 2020 *Nat. Phys.* **16** 205
- [75] Kamakari H, Sun S N, Motta M, Minnich A J 2022 *PRX Quantum* **3** 010320
- [76] Endo S, Sun J, Li Y, Benjamin S C, Yuan X 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 010501
- [77] Head-Marsden K, Krastanov S, Mazziotti D A, Narang P 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 013182
- [78] Hu Z, Head-Marsden K, Mazziotti D A, Narang P, Kais S 2022 *Quantum* **6** 726
- [79] Gudder S 2007 *Quantum Inf. Process.* **6** 37
- [80] Long G L, Liu Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **50** 1303
- [81] Long G L, Liu Y, Wang C 2009 *Commun. Theor. Phys.* **51** 65
- [82] Long G L 2007 *Quantum Inf. Process.* **6** 49
- [83] Cao H X, Long G L, Guo Z H 2013 *Int. J. Theor. Phys.* **52** 1
- [84] Cui J X, Zhou T, Long G L 2012 *Quantum Inf. Process.* **11** 317
- [85] Nielsen M A, Chuang I L 2002 *Am. J. Phys.* **70** 558
- [86] Penrose R 1971 *Quantum Theory and Beyond* (Cambridge: Cambridge University Press) pp151–180
- [87] Wen J W, Zheng C, Ye Z D, Xin T, Long G L 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 013256
- [88] Li X G, Zheng C, Gao J C, Long G L 2022 *Phys. Rev. A* **105** 032405
- [89] Shao C, Li Y, Li H 2019 *J. Syst. Sci. Complex* **32** 375
- [90] Günther N, Samsonov B F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 230404
- [91] Xiao L, Zhan X, Bian Z H, Wang K K, Zhang X, Wang X P, Li J, Mochizuki K, Kim D, Kawakami N, Yi W, Obuse H, Sanders B C, Xue P 2017 *Nat. Phys.* **13** 1117
- [92] Choi Y, Hahn C, Yoon J, Song S 2018 *Nat. Commun.* **9** 2182
- [93] Ge L, Tureci H E 2013 *Phys. Rev. A* **88** 053810
- [94] Yang F, Liu Y C, You L 2017 *Phys. Rev. A* **96** 053845
- [95] Li Y, Peng Y G, Han L, Miri M A, Li W, Xiao M, Zhu X F, Zhao J, Alu A, Fan S, Qiu C W 2019 *Science* **364** 170
- [96] Xu H S, Jin L 2021 *Phys. Rev. A* **104** 012218
- [97] Gao P, Sun Y, Liu X, Wang T, Wang C 2019 *IEEE Access* **7** 107874
- [98] Longhi S, Pinotti E 2019 *EPL* **125** 10006
- [99] Zheng C 2021 *EPL* **136** 30002
- [100] Zheng C 2022 *Entropy* **24** 867
- [101] Zheng C, Tian J, Li D L, Wen J W, Wei S J, Li Y S 2020 *Entropy* **22** 812
- [102] Gao W C, Zheng C, Liu L, Wang T J, Wang C 2021 *Opt. Express* **29** 517
- [103] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N 1993 *Phys. Rev. A* **48** 1687
- [104] Farhi E, Gutmann S 1998 *Phys. Rev. A* **58** 915
- [105] Watrous J 2001 *J. Comput. Syst. Sci.* **62** 376
- [106] Xue P, Zhang R, Qin H, Zhan X, Bian Z H, Li J, Sanders B C 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 140502
- [107] Casanova J, Sabín C, León J, Egusquiza I L, Gerritsma R, Roos C F, García-Ripoll J J, Solano E 2011 *Phys. Rev. X* **1**

- 021018
- [108] Candia R D, Mejia B, Castillo H, Pedernales J S, Casanova J, Solano E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 240502
- [109] Alvarez-Rodriguez U, Casanova J, Lamata L, Solano E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 090503
- [110] Zhang X, Shen Y, Zhang J, Casanova J, Lamata L, Solano E, Yung M H, Zhang J N, Kim K 2015 *Nat. Commun.* **6** 7917
- [111] Keil R, Noh C, Rai A, Stüttgen S, Nolte S, Angelakis D G, Szameit A 2015 *Optica* **2** 454
- [112] Pedernales J S, Candia R D, Schindler P, Monz T, Hennrich M, Casanova J, Solano E 2014 *Phys. Rev. A* **90** 012327
- [113] Huang M, Kumar A, Wu J 2018 *Phys. Lett. A* **382** 2578
- [114] Huang M 2018 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [黄旻怡 2018 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]
- [115] Beneduci R 2020 *J. Phys.: Conf. Ser.* **1638** 012006
- [116] Bender C M, Brody D C, Jones H F, Meister B K 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 040403
- [117] Holevo A S 1982 *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (Amsterdam: North-Holland) pp127–140
- [118] Kong X Y, Zhu Y Y, Wen J W, Xin T, Li K R, Long G L 2018 *Acta Opt. Sin.* **68** 220301 (in Chinese) [孔祥宇, 朱垣晔, 闻经纬, 辛涛, 李可仁, 龙桂鲁 2018 物理学报 **68** 220301]
- [119] Long G L, Qin W, Yang Z, Li J L 2018 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **61** 030311
- [120] Xin T, Li H, Wang B X, Long G L 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022126
- [121] Peng X, Du J, Suter D 2005 *Phys. Rev. A* **71** 012307
- [122] Zhang J, Peng X, Rajendran N, Suter D 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 100501
- [123] Feng G R, Lu Y, Hao L, Zhang F H, Long G L 2013 *Sci. Rep.* **3** 2232
- [124] Gunther N, Samsonov B F 2008 *Phys. Rev. A* **78** 042115
- [125] O'Neill P 2013 *Dev. Growth Differ.* **55** 188
- [126] Witschko W, Witschko R 1972 *Science* **176** 62
- [127] Ritz T, Thalau P, Phillips J B, Witschko R, Witschko W 2004 *Nature* **429** 177
- [128] Thalau P, Ritz T, Stapput K, Witschko R, Witschko W 2005 *Naturwissenschaften* **92** 86
- [129] Biskup T, Schleicher E, Okafuji A, Link G, Hitomi K, Getzoff E D, Weber S 2009 *Angew. Chem. Int. Ed.* **48** 404
- [130] Witschko W, Stapput K, Thalau P, Witschko R 2006 *Naturwissenschaften* **93** 300
- [131] Vandersypen L M K, Chuang I L 2005 *Rev. Mod. Phys.* **76** 1037
- [132] Han M, Huang W, Ma Y 2007 *Int. J. Mod. Phys. D* **16** 1397
- [133] Li K, Li Y N, Han M X, Lu S R, Zhou J, Ruan D, Long G L, Wan Y D, Lu D W, Zeng B, Laflamme R 2019 *Commun. Phys.* **2** 122
- [134] Rovelli C, Vidotto F 2014 *Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory. Cambridge Monographs on Mathematical Physics* (Cambridge: Cambridge University Press) pp3–27
- [135] Perez A 2013 *Living Rev. Rel.* **16** 3
- [136] Tennant D A, Perring T G, Cowley R A, Nagler S E 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 4003
- [137] Tennant D A, Cowley R A, Nagler S E, Tselik A M 1995 *Phys. Rev. B* **52** 13368
- [138] Liao Y A, Rittner A S C, Paprotta T, Li W, Partridge G B, Hulet R F, Baur S K, Mueller E J 2010 *Nature* **467** 567
- [139] Zheng C, Song S Y, Li J L, Long G L 2013 *J. Opt. Soc. Am. B* **30** 1688
- [140] Hu S W, Xue K, Ge M L 2008 *Phys. Rev. A* **78** 022319
- [141] Peterson J P S, Batalhão T B, Herrera M, Souza A M, Sarthour R S, Oliveira I S, Serra R M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 240601
- [142] Klatzow J, Becker J N, Ledingham P M, Weinzel C, Kaczmarek K T, Saunders D J, Nunn J, Walmsley I A, Uzdin R, Poem E 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 110601
- [143] Nielsen M A, Chuang I L 2011 *Quantum Computation and Quantum Information* (10th Ed.) (New York: Cambridge University Press) pp416–561
- [144] Salles A, de Melo F, Almeida M P, Hor-Meyll M, Walborn S P, Souto Ribeiro P H, Davidovich L 2008 *Phys. Rev. A* **78** 022322
- [145] Passos M H M, Santos Alan C, Sarandy Marcelo S, Huguenin J A O 2019 *Phys. Rev. A* **100** 022113
- [146] Xiao L, Wang K K, Zhan X, Bian Z H, Kawabata K, Ueda M, Yi W, Xue P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 230401
- [147] Lima G, Vargas A, Neves L, Guzmán R, Saavedra C 2009 *Opt. Express* **17** 10688
- [148] Machado P, Matoso A A, Barros M R, Neves L, Pádua S 2019 *Phys. Rev. A* **99** 063839
- [149] de Assis P L, Carvalho M A D, Berrueto L P, Ferraz J, Santos I F, Sciarrino F, Pádua S 2011 *Opt. Express* **19** 3715
- [150] Baldijão R D, Borges G F, Marques B, Solís-Prosser M A, Neves L, Pádua S 2017 *Phys. Rev. A* **96** 032329
- [151] Borges G F, Baldijão R D, Condá J G L, Cabral J S, Marques B, Terra Cunha M, Cabello A, Pádua S 2018 *Phys. Rev. A* **97** 022301
- [152] Cardoso A C, Condé J G L, Marques B, Cabral J S, Pádua S 2021 *Phys. Rev. A* **103** 013722
- [153] Maraviglia N, Yard P, Wakefield R, Carolan J, Sparrow C, Chakhmakhchyan L, Harrold C, Hashimoto T, Matsuda N, Harter A K, Joglekar Y N, Laing A 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** 013051
- [154] Schindler J, Li A, Zheng M C, Ellis F M, Kottos T 2011 *Phys. Rev. A* **84** 040101
- [155] Lin Z, Schindler J, Ellis F M, Kottos T 2012 *Phys. Rev. A* **85** 050101
- [156] Fu T, Wang Y F, Wang X Y, Chen J X, Zhou X Y, Zheng W H 2021 *Chinese Journal of Lasers* **48** 1201005 (in Chinese) [傅廷, 王宇飞, 王学友, 陈静瑄, 周旭彦, 郑婉华 2021 中国激光 **48** 1201005]
- [157] El-Ganainy R, Makris K G, Christodoulides D N, Musslimani Z H 2007 *Opt. Lett.* **32** 002632
- [158] Miri M, LiKamWa P, Christodoulides D N 2012 *Opt. Lett.* **37** 000764
- [159] Hodaie H, Miri M, Heinrich M, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2014 *SPIE Process.* **9162** 91621Q
- [160] Feng L, Wong Z J, Ma R M, Wang Y, Zhang X 2014 *Science* **346** 972
- [161] Gu Z Y, Zhang N, Lyu Q, Li M, Xiao S M, Song Q H 2016 *Laser Photonics Rev.* **10** 588
- [162] Miao P, Zhang Z, Sun J, Walasik W, Longhi S, Litchinitser N M, Feng L 2016 *Science* **353** 464
- [163] Zhang Z F, Qiao X D, Midya B, Liu K, Sun J B, Wu T W, Liu W J, Agarwal R, Jorner J M, Longhi S, Litchinitser N M, Feng L 2020 *Science* **368** 760
- [164] Xu H S, Jin L 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** L032015
- [165] Jin L, Song Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 073901
- [166] Chen E H, Lang L J 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 160301 (in Chinese) [成恩宏, 郎利君 2022 物理学报 **71** 160301]

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Recent progress of quantum simulation of non-Hermitian systems^{*}

Gao Xue-Er[#] Li Dai-Li[#] Liu Zhi-Hang Zheng Chao[†]

(*College of Science, North China University of Technology, Beijing 100144, China*)

(Received 19 September 2022; revised manuscript received 18 October 2022)

Abstract

Quantum simulation is one of the main contents of quantum information science, aiming to simulate and investigate poorly controllable or unobtainable quantum systems by using controllable quantum systems. Quantum simulation can be implemented in quantum computers, quantum simulators, and small quantum devices. Non-Hermitian systems have aroused research interest increasingly in recent two decades. On one hand, non-Hermitian quantum theories can be seen as the complex extensions of the conventional quantum mechanics, and are closely related to open systems and dissipative systems. On the other hand, both quantum systems and classical systems can be constructed as non-Hermitian systems with novel properties, which can be used to improve the precision of precise measurements. However, a non-Hermitian system is more difficult to simulate than a Hermitian system in that the time evolution of it is no longer unitary. In this review, we introduce recent research progress of quantum simulations of non-Hermitian systems. We mainly introduce theoretical researches to simulate typical non-Hermitian quantum systems by using the linear combinations of unitaries, briefly showing the advantages and limitations of each proposal, and we briefly mention other theoretical simulation methods, such as quantum random walk, space embedded and dilation. Moreover, we briefly introduce the experimental quantum simulations of non-Hermitian systems and novel phenomena in nuclear magnetic resonance, quantum optics and photonics, classical systems, etc. The recent progress of the combinations of quantum simulation and non-Hermitian physics has promoted the development of the non-Hermitian theories, experiments and applications, and expand the scope of application of quantum simulations and quantum computers.

Keywords: non-Hermitian systems, quantum simulation, linear combinations of unitaries

PACS: 03.67.Ac, 03.65.Yz, 03.65.Aa, 11.30.Er

DOI: 10.7498/aps.71.20221825

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12175002, 11705004), the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 1222020), and the Development of Talents Project for Outstanding Young Scholars of Beijing Municipal Institutions, China.

[#] These authors contributed equally.

[†] Corresponding author. E-mail: czheng@ncut.edu.cn

非厄米系统的量子模拟新进展

高雪儿 李代莉 刘志航 郑超

Recent progress of quantum simulation of non-Hermitian systems

Gao Xue-Er Li Dai-Li Liu Zhi-Hang Zheng Chao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 240303 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20221825

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221825>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非厄米临界动力学及其在量子多体系统中的应用

Non-Hermitian critical dynamics and its application to quantum many-body systems

物理学报. 2022, 71(17): 174501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220914>

实验观测非厄米系统奇异点的手性翻转现象

Experimental observation of chiral inversion at exceptional points of non-Hermitian systems

物理学报. 2022, 71(13): 131101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220842>

非厄米镶嵌型二聚化晶格

Non-Hermitian mosaic dimerized lattices

物理学报. 2022, 71(13): 130302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220890>

量子计算与量子模拟

Quantum computation and quantum simulation

物理学报. 2018, 67(12): 120301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180710>

非互易Aubry-André模型的经典电路模拟

Electrical circuit simulation of nonreciprocal Aubry-André models

物理学报. 2022, 71(16): 160301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220219>

核磁共振量子信息处理研究的新进展

New research progress of nuclear magnetic resonance quantum information processing

物理学报. 2018, 67(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180754>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

基于超导量子系统的量子纠错研究进展*

陈子杰¹⁾ 潘啸轩²⁾ 华子越²⁾ 王伟婷²⁾ 马雨玮²⁾李明¹⁾ 邹旭波¹⁾ 孙麓岩^{2)†} 邹长铃^{1)‡}

1) (中国科学技术大学, 中国科学院量子信息重点实验室, 合肥 230026)

2) (清华大学, 交叉信息研究院, 量子信息中心, 北京 100084)

(2022 年 9 月 19 日收到; 2022 年 10 月 10 日收到修改稿)

基于量子力学基本原理的信息处理技术, 在计算、传感等领域具有远超经典技术的巨大潜力. 随着实验技术的进步, 量子调控技术得到突飞猛进的发展. 在所有的量子信息处理平台中, 基于固体材料的超导系统, 具有精确的量子调控能力、优异的量子相干性以及适合大规模集成化等优点. 因此, 超导量子系统成为当前最有潜力的量子信息处理平台之一. 目前的超导芯片能集成约一百个量子比特, 已经可以展示量子系统的优势, 但进一步的发展受到系统噪声的制约. 为了突破这一瓶颈, 借鉴经典信息中的纠错技术发展而来的量子纠错技术受到广泛的关注. 本文介绍了超导量子系统中量子纠错的研究进展, 主要包括超导量子系统的基本原理、常用的量子纠错编码方案、纠错相关的控制技术以及近期超导量子纠错的应用. 最后, 总结了超导量子纠错领域面临的七个关键问题.

关键词: 量子纠错, 超导线路, 容错量子计算, 玻色编码**PACS:** 03.67.Pp, 85.25.-j, 03.67.Lx, 89.70.Kn**DOI:** 10.7498/aps.71.20221824

1 引言

自 1994 年彼得·肖尔 (Peter Shor)^[1] 提出大数因子分解算法以来, 量子信息处理领域就受到了广泛关注. 后续的研究证明, 量子技术在计算、传感、模拟等领域相较于经典技术具有巨大的优越性, 科研人员将其视作下一代信息革命的重要战略方向. 良好的叠加性和相干性是量子技术展示其优越性的前提, 但现实的物理系统会不可避免地与环境发生耦合, 从而引入各种噪声, 使得量子系统的性能急剧下降, 这成为限制当前量子技术发展的最大瓶颈. 针对这一问题, 彼得·肖尔^[2] 借鉴经典纠错码的思想提出了量子纠错的概念, 其核心思想是通过使

用多个物理比特编码逻辑比特的方式增加信息编码空间的冗余度, 使受到噪声影响的量子态可以得到区分, 且能通过实时反馈进行纠错, 从而恢复原始量子态以及其中存储的量子信息.

目前各种物理平台都在进行量子信息相关的研究, 其中包括了离子阱、冷原子、NV 色心 (Nitrogen-Vacancy center)、超导、光学等平台. 在这些物理平台中, 超导量子系统具有以下优势: 首先, 超导系统是固态量子系统. 基于目前先进微纳加工技术, 超导芯片具有较好的稳定性和可拓展性, 且其工作频率、能级间距以及耦合强度等参数都可以自由设计, 相对于其他平台更具有灵活性. 其次, 超导比特具有较好的相干性能. 超导量子比特的门操作时间一般只需 10—100 ns, 与之对应, 常用的

* 国家重点研发计划 (批准号: 2017YFA0304303)、国家自然科学基金 (批准号: 92165209, 11925404, 11874342, 11922411, 12061131011) 和中国博士后科学基金 (批准号: BX2021167) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: luyansun@mail.tsinghua.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: clzou321@ustc.edu.cn

基于纯铝材质的 transmon 量子比特的相干时间可达 10—100 μs 量级, 而三维超导谐振腔的寿命更是突破 1 ms^[3,4], 甚至可以达到秒量级^[5]. 最后, 超导系统具有较高的连通性. 固态超导量子比特可以与微波光子飞行比特相互耦合实现米量级的超导比特之间的信息传输^[6]. 除此之外, 微波光子也可以进一步与声子、可见光光子等进行耦合, 实现多个不同物理体系之间的信息传输^[7].

目前超导量子芯片集成的量子比特数量正在迅速提升. 在公开学术论文报道中, 国外单位谷歌 (Google)、国际商用机器公司 (IBM) 已经率先实现了 72 量子比特^[8] 和 27 量子比特^[9] 的超导芯片. 国内相关研究也处于领先地位, 中国科学技术大学^[10]、浙江大学^[11]、中国科学院物理研究所^[12]、北京量子院^[13] 等研究单位都具有 50 量子比特左右的超导芯片的自主制备与表征能力.

基于当前的超导量子芯片的规模, 相关科研单位已经进行了带噪声的中等规模量子 (noisy intermediate-scale quantum, NISQ) 问题相关的探索, 展示出了量子优势^[14,15], 并在这一过程中进一步发展了量子近似优化算法 (quantum approximate optimization algorithm, QAOA)、变分量子本征求解器 (variational quantum eigensolver) 等新型算法^[16,17]. 另一方面, 为了进一步提升超导芯片的整体性能以及最终实现普适量子计算机, 量子纠错方面的研究也得到前所未有的重视. 本文以超导量子系统为依托, 重点介绍了量子纠错的研究进展. 第 2 节介绍了超导系统的基本原理, 即超导量子系统核心的物理器件以及进行量子调控的方式. 第 3 节讲述了超导系统中常用的纠错码, 包括表面码 (surface code) 在内的二能级编码以及基于谐振子的玻色编码, 并简述了容错量子计算的相关概念. 第 4 节简述了近年来针对量子纠错开发的关键控制技术. 第 5 节讨论了近期量子纠错在度量学、量子通信以及错误缓解等领域的应用和潜力. 最后, 总结了超导量子纠错领域所面临的 7 个关键问题.

2 超导量子系统的基本原理

目前超导量子芯片最核心的器件是约瑟夫森结 (Josephson junction), 其带来的非线性使得超导谐振电路具有非简谐的能级分布, 可以单独控制能级之间的跃迁. 这为量子比特的编码、调控以及

不同量子比特之间的相互作用提供了基础.

约瑟夫森结由两层超导体中间夹一薄绝缘层构成, 一般由超导铝及绝缘氧化铝堆叠组成. 在超导转变温度下, 超导电路中电子两两组合为库伯对形成超导电流, 其在约瑟夫森结内的流动是无损耗的. 此时电路等价于一个电容并联一个非线性电感的量子 LC 电路, 从而实现了非等间距能级分布. 超导量子比特可以编码在其中最低的两个能级上, 通过合理的设计可以使这两个能级与第二激发能级的两组能级差别巨大, 从而实现编码空间与其他子空间之间的隔离. 目前, 大部分超导量子电路的谐振频率都设计在 GHz 量级. 为了实现超导态和约瑟夫森效应, 并抑制 GHz 频段的热激发, 一般还需要通过稀释制冷机将超导芯片冷却到低至 10 mK 的超低温.

通过设计约瑟夫森结与外加并联电容以及电感可以得到不同构型的量子比特, 如电荷量子比特、相位量子比特以及磁通量子比特等^[18,19]. 目前, 由电荷量子比特改进而来的 transmon 比特在国际上被广泛使用, 其由约瑟夫森结两端并联一个大旁路电容组成, 如图 1(a)^[15] 所示. 此构型使得约瑟夫森结的能级对环境电荷涨落不敏感, 从而具有较长的相干时间. 目前, 国内外科研单位, 如中国科学技术大学^[10]、北京量子院^[13]、清华大学^[20,21]、中科院物理所^[12]、浙江大学^[11]、南京大学^[22]、深圳量子院^[23]、谷歌公司^[8]、国际商用机器公司^[9]、苏黎世联邦理工学院^[24]、代尔夫特理工大学^[25] 等均是基于 transmon 比特进行研究.

借助成熟的微波电子学设备可以实现对超导系统的精准调控. 通过对超导线路施加不同频率和相位的微波脉冲可以实现对单个 transmon 比特的任意单比特门操作. 相对而言, 两比特门的实现较为复杂, 需要两个比特之间有相互耦合, 而且由于固定的耦合强度会导致比特状态持续相互影响, 引入不可纠正的串扰错误, 因此大规模应用时必须保证可以实时调节耦合强度. 从线路连接的角度上, 其中一种方式是通过两个超导比特之间的电容或电感实现直接耦合, 并引入超导量子干涉仪 (superconducting quantum interference device, SQUID) 实现比特的频率可调或作为可调电感, 即通过调节超导量子干涉仪的磁通来调节两个比特之间的失谐或者耦合系数, 进而实现两比特耦合的调节. 这种方式调节应用范围广、速度快, 但容易受到环境磁

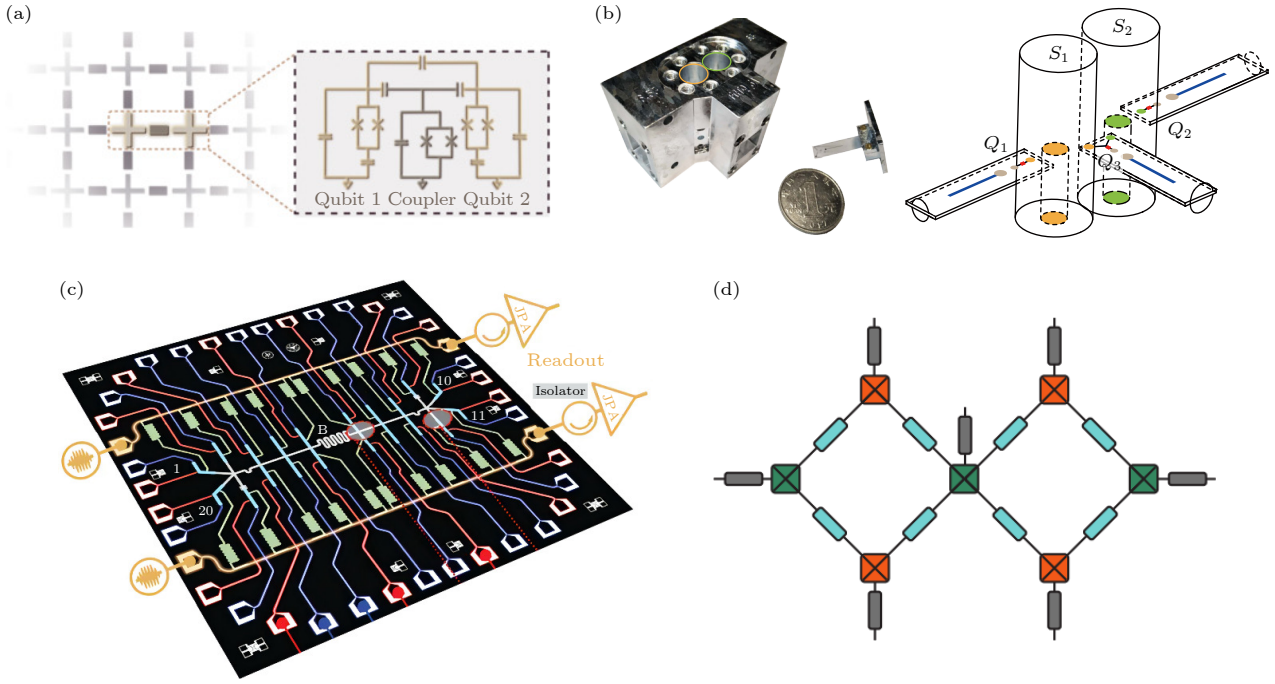


图 1 (a) 二维 transmon 量子比特结构示意图 (图片来自文献 [15]). 左右两边黄色电路分别表示一个 transmon 量子比特, 其中交叉表示约瑟夫森结, 其两端并联大旁路电容, 而中间的黑色电路表示辅助模式, 用于两个量子比特之间的可调耦合. (b) 三维超导谐振腔与 transmon 量子比特耦合结构示意图 (图片来自文献 [45]). 橙色和绿色区域为高纯铝制备的三维超导谐振腔, 两腔通过铝块侧面开孔与辅助超导量子比特进行耦合. (c) 基于二维 transmon 量子比特的架构 (图片修改自文献 [30]). 图中黄色线路为读取用微波传输线, 末端接隔离器和约瑟夫森参量放大器, 用于读取信号的单向传输和放大; 绿色区域为读取谐振腔; 浅蓝色区域为可调频 transmon 量子比特, 量子比特之间通过一个共同的辅助模式 B 耦合; 红色线路为 transmon 量子比特的微波驱动线, 蓝色线路为 transmon 量子比特的磁通驱动线. (d) 三维谐振腔架构拓展示意图 [53]. 红色和绿色方块为 transmon 量子比特, 浅绿色部分为高 Q 超导谐振腔 (用于存储量子信息), 灰色部分为低 Q 超导谐振腔 (用于 transmon 量子比特的读取). 谐振腔与 transmon 量子比特通过电容直接耦合

Fig. 1. (a) Structure of coupled two dimensional (2D) transmon qubits (Reprinted with permission from Ref. [15]). The left and right circuits (yellow) represent two transmon qubits, where each cross represents a Josephson junction and its two ends are coupled with a large capacitor. The middle black circuit represents the auxiliary mode for adjustable coupling between the two qubits. (b) Structure of 3D superconducting cavities coupled with transmon qubits (Reprinted with permission from Ref. [45]). The orange and green parts are the three dimensional (3D) superconducting cavities made of high-purity aluminum, and the two cavities are coupled to the auxiliary superconducting qubits through trenches on the sides of the aluminum block. (c) Architecture based on 2D transmon qubits (Reprinted with permission from Ref. [30]). The yellow lines in the figure are the microwave transmission lines for readout, and are connected with an isolator and a Josephson parametric amplifier, which are used for one-way transmission and amplification of the readout signal. The green parts are the readout resonators. The light blue parts are the tunable transmon qubits, which are coupled by a common auxiliary mode B. The red and the blue lines are the microwave drive and the flux drive lines for the transmon qubits respectively. (d) Architecture based on 3D superconducting resonators [53]. The red and green squares are transmon qubits, the light green parts are the high- Q superconducting resonators (for storing quantum information), and the gray parts are the low- Q superconducting resonators (for readout of transmon qubits). The resonator is directly coupled to the transmon qubit through a capacitor.

通噪声的影响 [18,19]. 另一种方式是通过辅助模式间接耦合, 其中辅助模式本身频率可调且具有一定非线性, 故可以通过调节辅助模式频率来实现两比特耦合的调谐 [26–29]. 值得注意的是, 一个辅助模式可以连接多个比特, 进而实现多个比特的同时耦合 [30].

目前, 超导系统的单比特门误差已经低至 0.092% [31], 而在单一芯片上特定两 transmon 量子比特间的双比特门最高保真度都可以超过 99%. 从

物理实现的角度, 双比特门可以笼统地分成两类, 其中有代表性的一类是在两个比特之间存在直接或间接耦合的情况下, 利用快速类方波电压信号调节比特能级, 这种方法实现的 CZ 门保真度可以达到 99.7%–99.9% [28,32,33], 另一类则是不调节比特能级, 直接利用高频微波驱动, 如通过交叉共振 (cross resonance) 效应实现的两比特 CNOT 门, 其保真度可以达到 99.4%–99.7% [9,34].

目前超导量子比特的读取一般采用色散读取 (dispersive readout) 方式^[35,36]. 将 transmon 量子比特与一个读取谐振腔进行色散耦合, 当比特处在不同状态时, 读取腔的频率发生偏移, 此时探测读取腔的频移即可判断比特状态, 实现对量子比特量子态的投影测量. 由于对读取腔的探测不与比特发生直接能量交换, 量子比特的状态可以在测量完成后得到保持, 这种读取方式比较容易实现量子非破坏性测量 (quantum non-demolition measurement, QND). 为了提高读取速度, 需要读取腔与测量电路的耦合比较强, 此时 transmon 量子比特的寿命会受到读取腔珀塞尔 (Purcell) 效应的限制^[37], 因此还需要增加珀塞尔滤波器来保护比特, 使比特的能量不容易通过读取腔泄漏到测量电路中^[38,39]. 为提高读取保真度, 一般还需要使用约瑟夫森参量放大器 (Josephson parametric amplifier, JPA)^[40] 对读取信号进行放大. 此类放大器利用约瑟夫森结的非线性效应, 可实现 20 dB 的放大效果和接近量子极限的信噪比^[41,42]. 在合适的信号放大链路的辅助下, 目前可以实现单发测量 (single shot) 保真度大于 99%, 读取时间小于 100 ns^[43], 仅相当于数个单比特门的时间, 因此易于实现基于测量的反馈纠错、比特重置等操作.

如前文所述, 量子比特可以直接编码在 transmon 等非线性结构的能级上, 此外, 还可以在此基础上将 transmon 量子比特与高品质因子的线性超导腔进行色散耦合, 利用超导腔来编码和存储量子信息, 而 transmon 量子比特作为辅助比特对超导腔进行控制. 由于超导谐振腔的结构简单, 可以很好地束缚腔内电磁场, 且外围线路较少从而减少电磁环境噪声的干扰, 因而超导腔一般具有很高的相干时间. 采用纯度高的铝材 (纯度 5N5, 99.9995%), 经过适当的机械加工和化学刻蚀工艺制成的超导腔的 Q 值可以达 10^9 ^[44]. 图 1(b)^[45] 是 transmon 比特与两个三维超导腔耦合的结构示意图, 其中 Q 值较高的腔相干时间较长, 用于量子态的存储, 而 Q 值较低的腔用于系统状态的测量. 目前耶鲁大学以及清华大学超导课题组均采用这一架构, 此外, 亚马逊公司 (Amazon Web Services) 也计划使用这一架构进行相关纠错研究^[46], 苏黎世联邦理工学院也计划将这一架构拓展至声子^[47].

超导量子系统的主要非相干噪声来自于外界电磁场的涨落、比特与外界真空场以及与基底材料

中杂质之间的耦合. 这些噪声会导致比特的热激发、自发辐射以及退相位. 相关的物理过程表示成主方程形式即为

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}_{\sqrt{\gamma(1+n_{\text{th}})}a}(\rho) + \mathcal{L}_{\sqrt{\gamma n_{\text{th}}}a^\dagger}(\rho) + \mathcal{L}_{\sqrt{\gamma_p}a^\dagger a}(\rho),$$

其中超算符 $\mathcal{L}_A(\rho) = A\rho A^\dagger - \frac{1}{2}A^\dagger A\rho - \frac{1}{2}\rho A^\dagger A$, a 和 $a^\dagger$ 分别为湮灭和产生算符, γ 为比特能量自发辐射速率, γ_p 为比特退相位速率, n_{th} 为比特的平均热激发数. 此外, 量子门操作的控制偏差和比特串扰等可能会引起一些相干噪声, 可通过相应的哈密顿量进行描述.

提升超导量子比特的相干时间和量子操作保真度是未来实现量子纠错并达到容错量子计算的前提. 为了实现这一目标, 在硬件上一方面可以通过改良超导比特的材质和制造工艺, 如普林斯顿大学^[48] 和北京量子院^[49] 使用金属钽替代铝制备超导电路, 使得 transmon 量子比特最长相干时间提升至 500 μs ^[49]; 另一方面可以尝试改变比特的电路架构, 制备不同类型的比特, 从比特哈密顿量设计层面降低噪声源对比特性质的影响, 如约瑟夫森结并联一个较大电感的 fluxonium 架构等^[50]. 此外, 对于多量子比特系统, 还需要考虑比特之间微波信号串扰和残余耦合等带来的关联噪声, 可以通过优化微波线路和操控方式^[51]、增加可调耦合器^[52] 等方式抑制关联噪声.

3 量子纠错编码方案

由于与环境的耦合, 实际物理体系中存在着各种噪声, 环境噪声会导致系统的退相干并破坏量子态中的信息, 且计算过程中控制偏差会不断地积累. 这些因素使得量子计算的精度随着线路深度的增加而急剧下降, 这是当前量子信息领域的挑战.

为了对抗噪声, 彼得·肖尔^[2] 在 1995 年对经典计算机系统纠错码思想进行了推广, 提出了最简单的量子纠错码——三量子比特的重复码 (repetition code) 用来纠正比特的位翻转错误. 随后发现的阈值定理告诉我们, 当门操作的噪声低于某个阈值的时候, 人们总是能够在可接受的资源需求下通过多级纠错码级联的方式扩大编码距离, 增加更多的信息冗余, 实现任意精度的量子计算, 即所谓的容错量子计算^[54,55].

相对于经典纠错码, 量子纠错码的构建更加复杂. 这是因为量子系统会受到量子定律的限制, 例如量子不可克隆定律会限制非正交的未知量子态的精确复制, 因此量子纠错码无法通过简单的复制来增加冗余. 幸运的是, 1997 年尼尔 (Knill) 和拉夫勒蒙 (Laflamme)^[56] 证明了著名的 K-L 纠错条件, 其可进一步概括成以下形式^[57]: 对于量子编码 $\mathcal{C}$ 及其投影算符 $\mathcal{P}$, 在噪声信道 $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i \mathbf{E}_i \rho \mathbf{E}_i^\dagger$ 作用下以 $\mathcal{C}$ 为编码的量子态可以被恢复的充要条件是

$$\mathcal{P} \mathbf{E}_i^\dagger \mathbf{E}_j \mathcal{P} = \alpha_{ij} \mathcal{P},$$

其中 α 为厄密矩阵, $\mathbf{E}_i$ 为信道对应的克劳斯 (Kraus) 算符.

如图 2 所示, 从希尔伯特 (Hilbert) 空间来看, 编码操作将待保护比特上的量子态 (图中黄色箭头) 映射至编码空间中 (图中蓝色圆圈), 而满足上述 K-L 条件的噪声将逻辑编码空间投影到不同的正交子空间中, 并且这些子空间内部不发生形变, 后续的错误诊断通过对投影算符的测量, 得知量子态所在的子空间 (如图中绿色圆圈), 从而推断出量子态所遭受的噪声并进行反馈纠错操作, 编码空间中的量子态就得以恢复. 这一点可以从以下过程看出: 由于 α 为厄密矩阵, 故存在一个幺正矩阵 U 可以对 α 进行对角化, 即 $\alpha = U^\dagger d U$, 其中 d 为对角矩阵. 定义 $\mathbf{F}_k = \sum_i U_{ik} \mathbf{E}_i$, 由于克劳斯算符和表示具有酉自由度, 即由幺正演化联系的 $\{\mathbf{E}_i\}$ 和 $\{\mathbf{F}_k\}$ 都表示同一噪声信道, $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i \mathbf{E}_i \rho \mathbf{E}_i^\dagger = \sum_k \mathbf{F}_k \rho \mathbf{F}_k^\dagger$. 通过这样定义的 $\{\mathbf{F}_k\}$, K-L 条件可以表示为

$$\mathcal{P} \mathbf{F}_k^\dagger \mathbf{F}_l \mathcal{P} = d_{kl} \mathcal{P}.$$

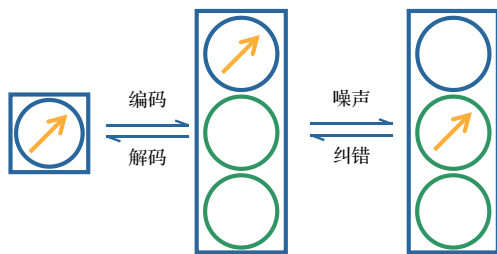


图 2 纠错流程图. 蓝色的圆圈表示编码空间, 绿色的圆圈表示错误空间, 黄色的箭头表示要保护的量子态

Fig. 2. Diagram of quantum error correction. The blue circles represent the code space, the green circles represent the error space, and the yellow arrows represent the quantum states to be protected.

即 $\mathbf{F}_k$ 将编码空间 $\mathcal{P}$ 旋转至子空间 $\mathcal{P}_k = \mathbf{F}_k \mathcal{P} \mathbf{F}_k^\dagger / d_{kk}$ 中, 且不同的 $\mathcal{P}_k$ 之间相互正交, 因此可以用投影算符的测量结果表征错误症状. 由极分解定理可知, 存在幺正矩阵 U'_k 使得 $\mathbf{F}_k \mathcal{P} = U'_k \sqrt{\mathcal{P} \mathbf{F}_k^\dagger \mathbf{F}_k \mathcal{P}} = \sqrt{d_{kk}} U'_k \mathcal{P}$, 则 $U_k'^\dagger$ 就是此错误症状对应的纠错操作, 即 $\mathcal{R}(\rho) = \sum_k U_k'^\dagger \mathcal{P}_k \rho \mathcal{P}_k U'_k$. 综上所述, 在噪声以及纠错作用下编码空间中量子态的演化为 $\mathcal{R} \circ \mathcal{E}(\rho) = \rho$.

在实际物理系统中的噪声形式是多种多样的, 但是当噪声很弱且独立地作用于不同物理比特的时候, 只要能纠正编码中任意单比特上的相位翻转噪声、位翻转噪声以及两者同时发生的情况, 即 $\{\hat{X}_i, \hat{Z}_i, \hat{X}_i \hat{Z}_i\}$, 就可以纠正任意单个比特上的任意独立噪声.

自量子纠错概念提出以来, 已经有相当多的基于不同思想构造出来的量子纠错码. 其中 1996 年由戈特斯曼 (Gottesman)^[58] 总结的稳定子码是非常重要的量子码, 其涵盖了表面码、颜色码等多种类型的编码. 如果一种纠错码的逻辑态空间是一组互相对易的算符 $\{\mathcal{O}_s\}$ 的 +1 本征空间, 则称这种编码为稳定子码, 而 $\mathcal{O}_s$ 是这种编码的稳定子. 一般而言, 选择泡利群的子群 S 来作为编码的稳定子会较为方便, 这是因为泡利群的群元素只有对易和反对易两种对易关系, 而且位翻转噪声和相位翻转噪声都在此群中. 若 S 被其生成元 $\{g_1, \dots, g_{n-k}\}$ 所描述, 可以证明 n 个物理比特在 S 群的稳定下可以编码 2^k 维的子空间, 即 k 个逻辑比特. 对错误的诊断过程只需要对所有的生成元进行测量即可: 当发生错误且错误满足 K-L 条件的时候, 生成元算符的测量结果会发生改变, 从而能检测出对应的错误类型并随后可以加以纠正.

具体到超导系统, 量子信息编码主要可以分成两种类型. 一种是二能级类型, 适用于 transmon 量子比特的架构, 只使用其最低能量的两个量子态作为物理比特的编码空间, 因此需要通过增加比特数量来增大希尔伯特空间冗余度来实现纠错. 另一种是玻色模式类型, 适用于超导辅助比特与谐振腔耦合的架构, 利用腔的多个能级进行编码. 由于单个腔就支持无穷大的希尔伯特空间, 故其具有多种编码方式, 既可以截断希尔伯特空间至有限的维度进行编码, 如二项式编码 (binomial code)^[59], 也可以使用整个希尔伯特空间进行连续变量类型

的编码, 如猫态编码 (cat code)^[60,61] 和 GKP 编码 (Gottesman-Kitaev-Preskill code)^[62]. 注意, 各种编码之间的区分并不是非常严格, 而且是可以相互级联的, 如可以使用玻色编码作为底层二能级系统, 然后再级联二能级编码可以增加编码的纠错能力^[63-66].

3.1 二能级类型纠错码

二能级类型编码的思想是以二能级的量子比特为基础, 通过增加物理比特数目来增强纠错码的纠错能力. 按照实现方式的差异, 底层物理比特又可以分成两种类型, 一种是无源量子比特, 通过构造超导系统的结构, 使得系统的两个基态能级与其他能级之间的跃迁能量较大, 则可以利用这两个能级实现相对隔离的二维空间来进行量子比特编码. 超导 transmon 量子比特最简单的编码方式就是使用能量最低的两个能级进行编码. 由于约瑟夫森结的非简谐性, 在驱动过程中系统跃迁至第三及以上能级的概率可以忽略不计, 从而使系统基本处于编码空间内. 另一种是有源量子比特, 通过外加连续的驱动或者构造某种形式的耗散来调节系统与环境的耦合形式并构造新的基态能级, 从而实现更好相干性能的二维空间^[67], 例如后文所述的耗散型猫态编码 (dissipative cat code).

为了描述以二能级量子比特为基础的编码的纠错能力, 一般用 $[[n, k, d]]$ 表示 n 个物理比特编码 k 个逻辑比特且码距为 d 的编码方案, 其可以对任意 $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ 个物理比特上的噪声. 此外, 上述的参数可以进一步推广至以任意 d 个能级为基础的编码, 即 qudit.

基于二能级物理比特的纠错码包括多种类型的编码, 其中超导系统相关实验中比较常见的是重复码 (repetition code) 及表面码 (surface code) 等.

3.1.1 重复码

重复码是最早提出的量子纠错码, 其能对抗物理比特上的位翻转噪声, 即 $\{\hat{X}_i\}$. 重复码的编码方式也最为简单, n 个比特 (n 须为奇数) 重复码的逻辑态为 $|0_L\rangle = |0\rangle^{\otimes n}$, $|1_L\rangle = |1\rangle^{\otimes n}$, 码距 $d = n$. 从稳定子的角度来看, 其对应的稳定子只涉及到邻近的两个比特, 即 $\{\hat{Z}_i \hat{Z}_{i+1}\} (i = 1, 2, \dots, n-1)$, 因此重复码的错误诊断以及纠错操作均可容易地在实验中实现^[25,68-73]. 但是由于其无法纠正单比特上

的相位翻转 ($\{\hat{Z}_i\}$) 噪声, 故实际效果受限. 前文所述的这种重复码一般也称为位翻转编码. 此外, 借鉴其思想可以将逻辑比特编码为 $|0_L\rangle = |+\rangle^{\otimes n}$, $|1_L\rangle = |-\rangle^{\otimes n}$, 则能纠正物理比特上的相位翻转噪声, 即 $\{\hat{Z}_i\}$, 这种重复码一般称为相位翻转编码.

3.1.2 表面码

量子纠错编码不仅需要同时抵抗单个物理比特上的位翻转和相位翻转噪声 $\{\hat{X}_i, \hat{Z}_i, \hat{X}_i \hat{Z}_i\}$, 也要考虑到实际物理系统的限制. 一般而言, 要尽可能地使用物理比特的局域操作实现逻辑比特的操作, 尽量避免使用物理比特间多体的和长程的相互作用, 尽可能在二维平面上排列比特以及具有较高的容错阈值. 表面码是能较好地满足上述限制的编码之一, 因而得到广泛的关注.

表面码的概念源于基塔耶夫 (Kitaev)^[74] 在 1997 年提出的环面码 (toric code). 环面码中物理比特之间的相互作用形式等价于将每个物理比特放置于环面之上, 且只与其近邻的比特相互作用. 随后环面码被推广至平面^[75], 即为表面码^[76]. 表面码利用拓扑物质不受局域操作影响的思想, 将量子信息编码在整个区域中, 即使局部的少数几个物理比特发生错误也不会影响整体的信息. 图 3(a) 所示的是码距 $d = 8$ 的表面码, 其主要由两种比特构建而成. 一种是数据量子比特, 用于储存系统的逻辑量子态, 在图中用每条网格线边上的白点表示, 共有 $d^2 + (d-1)^2$ 个. 另一种是辅助量子比特, 用于对其近邻的数据量子比特不断地进行错误诊断, 即对稳定子算符进行测量. 稳定子算符也可以分成两种, 第一种是以图中的黄色菱形为例的 **A** 类型稳定子算符, 其由菱形的四个顶点对应的数据量子比特的 $\hat{X}$ 算符组成, 即 $A = \hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d$. 这种稳定子算符一共有 $d(d-1)$ 个, 每个都可以对应一个放置于网格线交点处的黄色菱形 (左右边界上的 **A** 型稳定子由三个物理比特的 $\hat{X}$ 算符组成). 第二种是以图中的蓝色圆形为例的 **B** 类型稳定子算符, 其由圆形周围四个数据量子比特的 $\hat{Z}$ 算符组成, 即 $B = \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d$. 这种稳定子算符一共也有 $d(d-1)$ 个, 同理, 每个也都可以对应一个放置于网格中的蓝色圆形 (上下边界中的 **B** 型稳定子由三个物理比特的 $\hat{Z}$ 算符组成).

对于码距为 d 的表面码, 逻辑 $\hat{X}_L$ 的实现至少需要对其中任意一行 d 个数据比特都做局域 $\hat{X}$ 操

作, 如图 3(a) 中的红色阴影线, 而逻辑 $\hat{Z}_L$ 操作至少需要任意一列 d 个数据比特都做局域 $\hat{Z}$ 操作, 如图 3(a) 中蓝色阴影线. 由于相差若干个稳定子不会改变逻辑算符的作用, 所以可以在蓝色阴影线的基础上不断作用 B 类型稳定子算符, 从而得到其他等价的逻辑 $\hat{Z}_L$, 如绿色阴影线. 这些逻辑算符都连接了表面码的上下边界, 同理所有的逻辑 $\hat{X}_L$ 都连接了左右边界. 由于等价逻辑操作的存在, 只有当一行或者一列中一半及以上的数据比特发生比

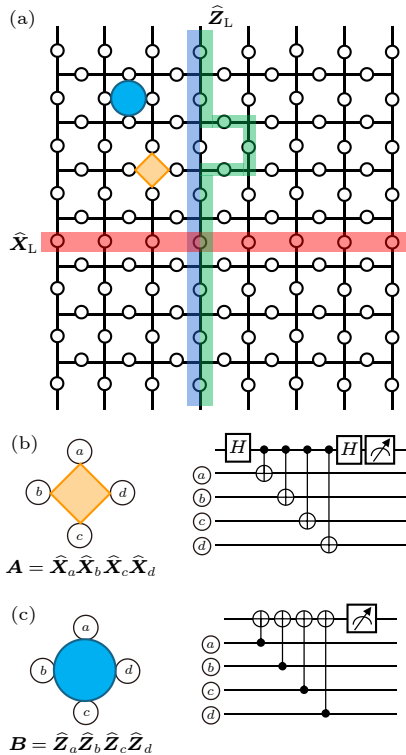


图 3 (a) $d=8$ 的表面码及其逻辑算符 $\hat{Z}_L$ 与 $\hat{X}_L$ 的示意图. 图中网格的每条边上都有一个白点表示一个数据量子比特. 黄色菱形以及蓝色圆形分别表示其中一个 A 和 B 类型的稳定子. 蓝色和红色阴影线分别表示逻辑编码的 $\hat{Z}_L$ 和 $\hat{X}_L$ 算符. 绿色阴影线表示蓝色阴影线对应的算符乘上一个稳定算符, 其也是逻辑 $\hat{Z}_L$ 算符. (b) 和 (c) 分别是 A , B 类型稳定子算符测量的量子线路图. 此图由文献 [76] 改编

Fig. 3. (a) Schematic of $d=8$ surface code and the corresponding logical operators $\hat{Z}_L$ and $\hat{X}_L$. The white dots on each edge of the grid represent data qubits. The yellow diamonds and the blue circles represent A and B types of stabilizers, respectively. The blue and red shaded lines represent the logical $\hat{Z}_L$ and $\hat{X}_L$ operators, respectively. The green shaded line represents the operator corresponding to the blue shaded line multiplied by a stabilizer operator, which is also the logical $\hat{Z}_L$ operator. (b) and (c) are quantum circuits that measure the stabilizer operators of type A and B , respectively. This figure is adapted from Ref. [76].

特位翻转或者相位翻转才会导致逻辑错误, 因此表面码对于局域噪声有着很强的抵抗能力. 劳森多夫 (Raussendorf) 及其合作者 [77–79] 证明, 在只使用单比特门以及近邻两比特门的前提下, 表面码的容错阈值可以达到 0.75%.

错误诊断是表面码纠错的基础. 从物理架构来看, 可以在每个黄色菱形以及蓝色圆形中心放置一个辅助比特, 这样只需要通过辅助比特与数据比特之间的邻近相互作用就可以进行错误诊断, 对应的量子线路如图 3(b) 和图 3(c) 所示. 具体来说, 当由生成元集合 $\{g_i\}$ 所稳定的状态经历么正演化 U 之后, 新的状态会被 $\{Ug_iU^\dagger\}$ 所稳定. 由 $\hat{X}_a \hat{Z}_a \hat{X}_a = -\hat{Z}_a$ 可知, 如图 4(a) 所示, 当 a 比特上 (图中红色交叉所示) 发生比特位翻转噪声时, 以此比特为顶点的两个 B 类型的稳定子 (图 4(a) 中的两个蓝色圆圈) 的测量结果均出现翻转, 而 A 类型稳定子的结果不翻转, 从而可以实现对单个比特位翻转噪声的错误诊断. 一般来说, 测量结果出现翻转的稳定子对应的位置称为缺陷. 如图 4(b) 中连续的多比特位翻转噪声导致一条错误链, 链的两端各有一个缺陷. 如图 4(c), 对于左右边界上的比特发生位翻转只会在网格中引起一个缺陷, 另一个缺陷可以视作处于左右边界外. 上下边界发生相位翻转噪声同理.

多种噪声也可能会对对应同一个错误症状, 如图 4(b) 的绿色和蓝色阴影线上的比特位翻转都会导致同样的错误症状 (对于图 4(c) 中的黄色线和浅绿色线同理), 但是只要实际的噪声 E 与纠错操作 E' 之间只相差若干个稳定子算符, 那么都可以纠正错误. 由此可见, 只要 $E'E$ 在网格中形成一条完整的“闭合曲线”且曲线不同时连接表面码的左右边界, 就可以纠正错误. 具体来说, 图 4(c) 中黄色线和浅绿色线在左边界与网格上缺陷形成了闭合曲线, 所以也可以纠正错误, 但是图 4(d) 部分所示的 $E'E$ 同时连接了左右边界, 因而导致了逻辑错误. 在实际过程中错误诊断对应的情况远比图示复杂, 需要借助算法对错误症状进行自动识别, 如最小权重算法 [80] 和最大似然算法 [81]. 在实际纠错过程中, 错误的纠正可不执行相应的门操作, 只需要加以标记, 采用所谓的泡利框架 (Pauli frame) [82] 的方式, 先记录发生的噪声, 在后续的门操作中再做纠正处理, 此时系统的量子态是新的稳定子 $-A$ 的本征态.

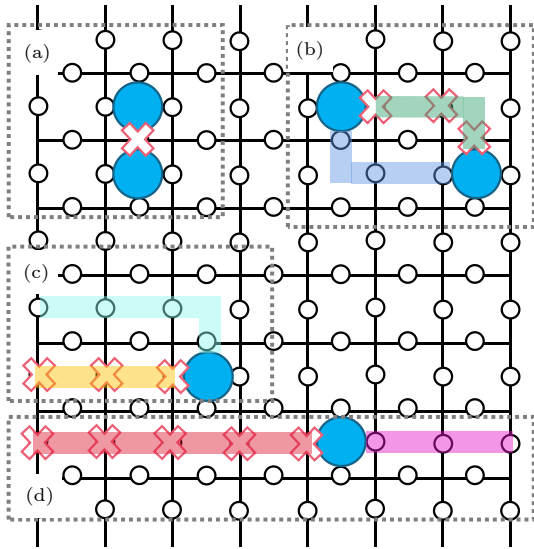


图4 表面码的错误症状及纠错操作示意图. 图中红色交叉表示对应物理比特发生了位翻转噪声, 蓝色圆形表示测量结果异常的 B 类型稳定子的位置, 即缺陷的位置, 阴影线均表示对线上的物理比特执行的 $\hat{X}$ 操作. 四个区域分别对应以下情况: (a) 网格中单个比特发生噪声产生了两个相邻的缺陷; (b) 网格中的连续的几个比特发生噪声产生了位于错误链两端的缺陷, 而蓝色和绿色阴影线对应的操作均能纠正逻辑错误; (c) 含有网格左边界的比特的错误链导致单个缺陷的产生, 浅绿色和黄色的阴影线对应的操作均能纠正逻辑错误; (d) 含有网格左边界的比特的错误链导致单个缺陷的产生, 红色阴影线对应的操作能纠正逻辑错误, 但是紫色阴影线的操作会导致无法被错误诊断识别的逻辑错误

Fig. 4. Schematic of error syndromes and error correction operations of surface codes. The red cross in the figure indicates a bit-flip error occurring in the corresponding physical qubit, while the blue circle indicates the position of the B type stabilizer with abnormal measurement results, i.e., the position of the defect, and the shaded lines indicate an $\hat{X}$ operation performed on each of the physical qubit on the line. The four areas correspond to the following situations: (a) A single bit-flip error in the grid results in two adjacent defects. (b) Several consecutive bit-flip errors in the grid result in two defects located at the two ends of the error chain. Both the blue and green shaded lines can correct these errors. (c) The error chain containing a qubit on the left boundary of the grid results in a single defect, and the operations corresponding to either the light green or the yellow shaded line can correct these errors. (d) The error chain containing a qubit on the left boundary of the grid results in a single defect. The operation corresponding to the red shaded line can correct these errors, but the operation corresponding to the purple shaded line causes a logic error that cannot be identified by the error syndrome.

表面码的逻辑编码空间由哈密顿量 $H = -\sum_s A_s - \sum_p B_p$ 的两个简并基态能级构成, 这一物理体系具有许多拓扑性质, 成功地建立了纠错码研究与拓扑物态研究的关联^[83]. 具体来说, 表

面码的逻辑态可以用稳定子算符表示为 $|0_L\rangle \propto \prod_s (I + A_s) |0\rangle^{\otimes n}$, 其对应的初态制备的方式有两种: 第一种方式需要先制备 $|0\rangle^{\otimes n}$, 注意到此量子态是所有稳定子 B_p 以及逻辑算符 $\hat{Z}_L$ 的 $+1$ 本征态; 然后需要对所有的稳定子 A_s 进行测量. 经过测量后系统随机塌缩在一个所有 A_s 算符都具有确定本征值的子空间中. 从错误症状的角度来看, 某个 A 型稳定子得到 -1 的测量结果相当于编码中若干物理比特“发生”相位翻转噪声 (由于对易关系, 此时的量子态仍是稳定子 B_p 的 $+1$ 本征态, 即不会“发生”比特位翻转噪声), 此时执行相应的“纠错”操作即可制备逻辑态 $|0_L\rangle$. 此外, 也可以如前文所述暂时不进行这一步纠错操作. 对于逻辑态 $|1_L\rangle$ 以及 $|\pm 1_L\rangle$ 的制备也是类似的, 只需要制备 $|1\rangle^{\otimes n}$, $|\pm\rangle^{\otimes n}$ 再作用类似的操作即可.

另一种方式是直接使用相应量子线路实现. 具体的步骤如图 5^[84] 所示, 先制备 $|0\rangle^{\otimes n}$, 然后对每个 A_s 算符所围的正方形的顶点比特中作用 H 门操作, 最后以边上其他的比特为受控比特按照图中的顺序分别作用 CNOT 门即可. 具体的原理可以参考文献^[85].

根据前文所述, 想要利用表面码实现量子纠错至少需要满足以下条件: 一是要有足够的物理比特编码一个逻辑比特; 二是不仅要能快速且高度并行地执行错误诊断, 而且还要减少这一过程中辅助比特对数据比特的干扰; 三是要求能根据错误症状快速进行错误寻址以及能通过反馈在后续门操作中纠正错误. 因此, 表面码的实现物理比特数量、单个物理比特的性能和门操作的保真度都有着很高的要求, 需要材料、极低温和电子学等各个领域的技术进步.

除了重复码和表面码之外, 出于提高编码效率或者实现容错架构等考虑, 人们一方面对表面码进行了优化, 如通过对表面码网格的旋转和修剪^[86], 使得在码距 d 不变的情况下只需要 d^2 个数据比特就可以编码一个逻辑比特; 另一方面提出了许多其他类型的编码, 如 XZZX 编码^[87]、颜色码 (color code)^[88,89] 等.

表 1 列出了近年来各个实验组对表面码、重复码以及其他类型编码的研究, 包括谷歌公司、中国科学技术大学、苏黎世联邦理工学院、代尔夫特理工大学等. 这些研究单位实现了不同码距的表面码的初态制备、错误诊断以及错误纠正等操作.

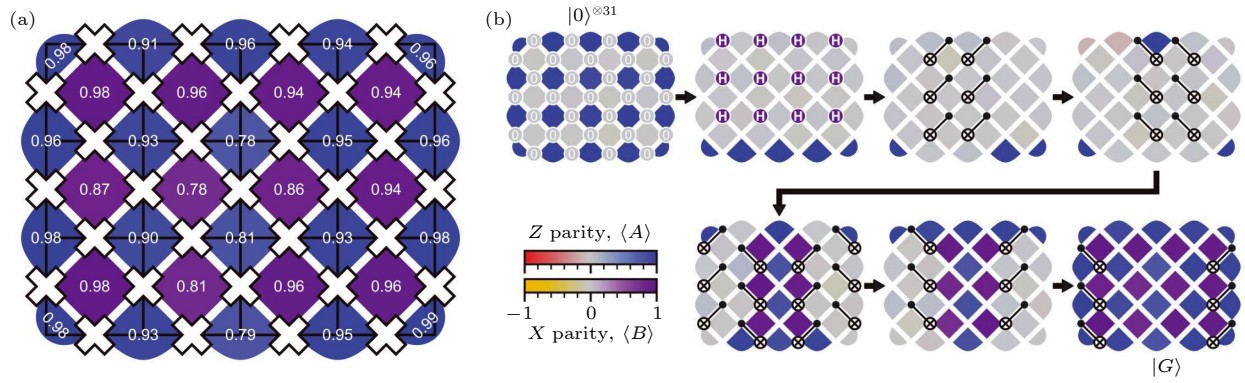


图 5 (a) 谷歌公司实验^[84]中制备表面码初态所用超导芯片的架构以及对应稳定子测量结果. 图中白色的十字为数据比特, 紫色和蓝色的图形分别代表 B_p 类型和 A_s 类型的稳定子测量, 图中的数值是初态对应的稳定子测量结果的平均值. (b) 表面码初态制备对应的门操作线路

Fig. 5. (a) Architecture of the superconducting circuit used to prepare the initial state of the surface code in Google's experiment^[84] and the corresponding stabilizer measurement results. The white crosses are data qubits, the purple and blue regions represent stabilizer measurement results of type B_p and A_s , respectively. The values in the figure are the average values of the stabilizer measurement results corresponding to the initial state. (b) Operation circuit to prepare the initial state of the surface code.

表 1 超导系统中二能级编码的纠错实验进展. 带*号的是物理比特中最优的数据, /表示文献中没有直接给出相关数据. 其中, 文献 [72, 90, 91] 的实验均在国际商用机器公司的 IBMQ 平台上进行

Table 1. Experimental progress on quantum error correction with two-level codes in superconducting systems. Datas with * refer to the optimal datas among the physical qubits. / indicate that the relevant datas are not directly given in the documents. The experiments in the Refs. [72, 90, 91] were implemented on IBMQ.

时间	文献	编码	逻辑 T_1 (物理 T_1) / μs	逻辑 T_2 (物理 T_2) / μs
2012	耶鲁大学 ^[68]	[3, 1, 3] 重复码	/	/
2014	加州大学圣芭芭拉分校 ^[69]	[3, 1, 3], [5, 1, 5] 重复码	/	/
2015	代尔夫特理工大学 ^[25]	[3, 1, 3] 重复码	/	/
2017	IBMQ ^[71]	4 比特颜色码	/	/
2018	巴塞尔大学 (University of Basel) ^[72]	[8, 1, 8] 重复码	/	/
2018	德国于利希研究中心 (Forschungszentrum Jülich) ^[90]	4 比特颜色码	/	/
2019	悉尼大学 ^[91]	[4, 2, 2] 错误检测码	/	/
2019	中国科学技术大学 ^[92]	[[5, 1, 3]] 编码	/	/
2020	苏黎世联邦理工学院 ^[93]	[[4, 1, 2]] 表面码	62.7 ± 9.4 (16.8*)	72.5 ± 32.9 (21.5*)
2021	谷歌公司 ^[84]	实现表面码的基态	/	/
2021	中国科学技术大学 ^[31]	[[9, 1, 3]] 表面码	137.8 (36.6*)	/
2021	苏黎世联邦理工学院 ^[94]	[[9, 1, 3]] 表面码	16.4 (32.5)	18.2 (37.5)
2021	谷歌公司 ^[73]	[[11, 1, 11]] 重复码以及 [[4, 1, 2]] 表面码	/	/
2022	苏黎世联邦理工学院 ^[24]	[[4, 1, 2]] 表面码	/	/
2022	IBMQ ^[95]	[[9, 1, 3]] Heavy-hexagon 编码	/	/
2022	谷歌公司 ^[8]	[[25, 1, 5]] 表面码以及 [25, 1, 25] 重复码	/	/

如中国科学技术大学的研究小组在超导芯片中实现了 17 比特的 [[9, 1, 3]] 表面码的初态制备, 并进行了 11 轮次的错误诊断, 在后选择的基础上将逻辑编码 $|0_L\rangle$ 的寿命 (T_1) 大幅度提升至 137.8 μs , 与之相比, 其芯片上最好的物理比特寿命只有 36.6 μs . 而谷歌

公司在近期的实验中分别制备且表征了 $d = 5$ 以及 $d = 3$ 的表面码, 并证明了前者在 25 轮次的纠错中具有更低的逻辑错误率, 这首次展示了纠错效果随着编码规模增加而得到提高. 这些实验都表明了量子纠错的巨大潜力. 然而, 受限于物理比特的数量、

寿命、超导线路的串扰以及门操作过程中的噪声等因素, 目前这些编码仍未能有效提高逻辑态寿命, 即未达到盈亏平衡点, 只能利用错误诊断的信息在后选择的基础上进行量子纠错的原理性展示和相关应用的探索. 但是, 随着控制技术、硬件基础以及纠错编码理论的完善, 量子纠错的未来可期.

3.2 玻色类型纠错码

目前超导系统中另一种常用的架构就是将超导辅助比特与超导谐振腔进行色散耦合. 在此架构中, 谐振腔一般被用于编码逻辑比特, 而超导辅助比特则用于为谐振腔的量子操控提供必要的非线性. 由于谐振腔模式本身就是一个具有无穷多个能级的玻色模式, 因而本身就具有巨大的冗余空间, 为量子态的编码提供了多种方案. 一方面, 可以只利用其中有限个能级进行编码; 另一方面, 也可以利用其无穷个能级进行连续变量类型的编码. 前者典型的例子是二项式编码 (binomial code), 而后者典型的例子是猫态编码 (cat code) 以及 GKP 编码 (Gottesman-Kitaev-Preskill code). 值得一提的是, 玻色编码除了适用于超导系统外还适用于离子阱以及光学等物理平台.

3.2.1 二项式编码

二项式编码最早在 2016 年由耶鲁大学格文 (Girvin) 课题组^[59]提出, 其逻辑态由有限个福克 (Fock) 能级加权叠加而成, 因权重系数为二项式系数而得名. 相较于其他玻色编码, 二项式编码在相同的纠错能力下具有更小的平均光子数, 此外, 其还具有严格正交的逻辑态以及么正的纠错操作等特点. 二项式编码可以在多项式展开下完美地纠正热激发、自发辐射以及退相位噪声, 即可以完美纠正噪声集合:

$$\varepsilon = \left\{ \hat{I}, \hat{a}, \hat{a}^2, \dots, \hat{a}^L, \hat{a}^\dagger, (\hat{a}^\dagger)^2, \dots, (\hat{a}^\dagger)^G, \hat{n}, \hat{n}^2, \dots, \hat{n}^D \right\},$$

其中 $\hat{I}$ 和 $\hat{a}$ 分别是系统的单位矩阵以及湮灭算符, 而 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. 与此对应的二项式编码是

$$|0_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{p=\text{even}}^{[0, N+1]} \sqrt{C_{N+1}^p} |p(S+1)\rangle,$$

$$|1_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{p=\text{odd}}^{[0, N+1]} \sqrt{C_{N+1}^p} |p(S+1)\rangle,$$

其中 $S = L + G$, $N = \max\{L, G, 2D\}$, 而 C_{N+1}^p 为二项式系数. 从上述表达式可以看出二项式编码具有特殊的宇称, 即只占据子空间 $\hat{H}_0$, 其中 $\hat{H}_k = \sum_{k=n \bmod S+1} |n\rangle\langle n|$. 图 6 即为二项式编码 $|0_L\rangle = (|0\rangle + \sqrt{3}|4\rangle)/2$, $|1_L\rangle = (\sqrt{3}|2\rangle + |6\rangle)/2$ 的维格纳 (Wigner) 函数图.

由于热激发和自发辐射噪声都会改变系统的宇称, 因此对应的错误诊断可以通过引入玻色模式与辅助比特之间的交叉克尔 (cross Kerr) 效应 $H = \chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{Z}$ 来实现. 比如, 最低阶的二项式编码 $|0_L\rangle = (|0\rangle + |4\rangle)/\sqrt{2}$, $|1_L\rangle = |2\rangle$ 可以纠正超导谐振腔系统的最主要噪声来源——单光子的自发辐射噪声. 这种噪声的错误诊断过程为: 先将辅助比特制备在 $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, 然后实现么正演化 $U = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{Z}\right)$, 最后对比特进行 X 方向的测量. 如果测量得知辅助比特处于 $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$, 则说明玻色模式发生单光子自发辐射噪声.

而对退相干噪声对应的错误诊断则需要使用基于梯度上升波形优化 (gradient ascent pulse engineering, GRAPE)^[96,97]或其他类似的方法设计辅助量子比特与二项式编码之间的逻辑门操作, 将逻辑态的错误信息投影在辅助量子比特上. 例如, 对于高阶二项式编码 $|0_L\rangle = (|0\rangle + \sqrt{3}|6\rangle)/2$, $|1_L\rangle = (\sqrt{3}|3\rangle + |9\rangle)/2$ 可以纠正错误集合 $\varepsilon = \{\hat{I}, \hat{a}, \hat{a}^2, \hat{n}\}$. 当发生退相位噪声 $\hat{n}$ 之后, 量子态从 $|\psi\rangle = u|0_L\rangle + v|1_L\rangle$ 变成了:

$$|\psi'\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} (u|0_L\rangle + v|1_L\rangle) - \frac{1}{2} (u|0'_L\rangle + v|1'_L\rangle),$$

其中 $|0'_L\rangle = (\sqrt{3}|0\rangle - |6\rangle)/2$, 而 $|1'_L\rangle = (|3\rangle - \sqrt{3}|9\rangle)/2$, 这两个基矢构建了与编码空间正交的子空间. 这种二项式编码对于退相位噪声的错误诊断过程可设计为: 将辅助量子比特量子态制备在 $|g\rangle$ 并与逻辑态之间实现门操作 $U_{\text{syn}} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{P}' \otimes (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) + U_{\text{res}}$, 其中, $\mathbf{P} = |0_L\rangle\langle 0_L| + |1_L\rangle\langle 1_L|$, $\mathbf{P}' = |0'_L\rangle\langle 0'_L| + |1'_L\rangle\langle 1'_L|$ 分别是逻辑空间和错误空间的投影算符, 而 U_{res} 为其他子空间中任意的么正算符, 然后如果测量得知辅助量子比特处于 $|e\rangle$ 则说明玻色模式发生了退相位噪声.

实验进展方面, 在高品质的三维谐振腔的平台中, 借助 transmon 量子比特提供的非线性以及微波线路提供的相干驱动, 最低阶的二项式编码以及基于梯度上升波形优化方法设计的任意单比特操作已被验证^[98], 两个二项式编码量子比特之间的

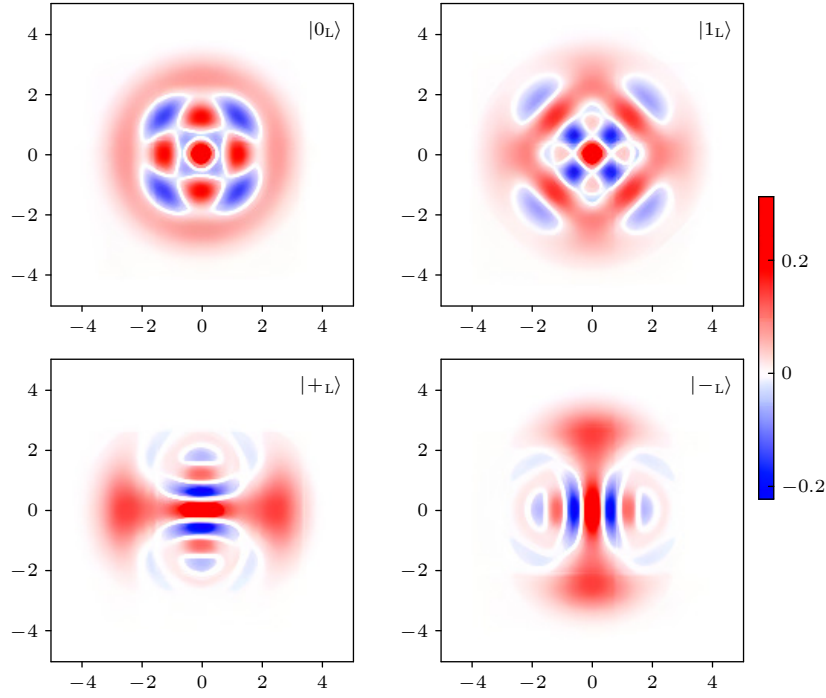


图 6 一种二项式编码逻辑态的维格纳函数图像. 左上: 逻辑态 $|0_L\rangle = (|0\rangle + \sqrt{3}|4\rangle)/2$; 右上: $|1_L\rangle = (\sqrt{3}|2\rangle + |6\rangle)/2$; 左下: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; 右下: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$. 这是平均光子数最小的且能纠正错误集合 $\{\hat{I}, \hat{a}, \hat{a}^\dagger\hat{a}\}$ 的二项式编码, 可以看到其 $|0/1_L\rangle$ 本身具有 $\pi/4$ 的旋转对称性, 而 $|+/-_L\rangle$ 在相空间中接近正交

Fig. 6. Wigner functions of the logical states of one binomial code. Upper left: Logical state $|0_L\rangle = (|0\rangle + \sqrt{3}|4\rangle)/2$; Upper right: Logical state $|1_L\rangle = (\sqrt{3}|2\rangle + |6\rangle)/2$; Lower left: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; Lower right: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$. This is the binomial code that has the minimal average photon number and can correct the error set $\{\hat{I}, \hat{a}, \hat{a}^\dagger\hat{a}\}$. The logical state $|0/1_L\rangle$ has a rotational symmetry of $\pi/4$ and $|+/-_L\rangle$ are almost orthogonal in phase space.

Cphase 门^[45]、eSWAP 门^[99]、传送 CNOT 门^[100]等均被实现, 而基于二项式编码的错误透明 (error transparent) 逻辑门也被验证^[101].

3.2.2 猫态编码

2013 年, 莱格塔斯 (Leghtas) 等^[60]最早提出四分量猫态编码的构想, 用于对抗单光子自发辐射噪声. 其编码形式为

$$\begin{aligned} |0_L\rangle &\propto (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle + |i\alpha\rangle + |-i\alpha\rangle), \\ |1_L\rangle &\propto (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle - |i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle). \end{aligned}$$

这种编码可以推广至抵抗更高阶的自发辐射噪声, 其编码为^[102]

$$|0_L\rangle \propto \sum_{k=1}^n \left| \alpha e^{i2k\pi/n} \right\rangle, \quad |1_L\rangle \propto \sum_{k=1}^n e^{i4k\pi/n} \left| \alpha e^{i2k\pi/n} \right\rangle.$$

从上式可以看出, $|0/1_L\rangle$ 都是不同相位的相干态的线性叠加的形式. 此编码可以抵抗至多 $n/2 - 1$ 个光子自发辐射噪声. 与二项式编码类似, 这种猫态编码也具有特殊的宇称, 但是其分布在无穷个福克能级上. 当自发辐射的光子数小于 $n/2 - 1$ 时, 逻辑态中的相干态成分前面会多出一个相位,

且福克空间的宇称会发生改变, 但不会影响到编码的信息. 因此可以通过宇称测量进行错误诊断, 并通过反馈执行纠错操作来抵抗自发辐射噪声. 然而, 光子的自发辐射会不断地使相干态的平均光子数衰减至真空态, 所以猫态编码需要不断地输入能量, 即需要实现稳定操作使得系统状态被限制在编码空间中.

有两种方式可以实现这种稳定操作, 一种是使用耗散控制的方式, 即构建耗散信道 $\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}[\sqrt{\kappa}(\hat{a}^n - \alpha^n)]\rho$, 其中 κ 为耗散强度. 此信道表现为构建多光子耗散和多光子驱动, 其稳态为猫态编码的逻辑态. 所需的耗散信道可以通过引入与低品质因子谐振腔 $\hat{b}$ 之间的非线性相互作用 $g_n^* \hat{a}^n \hat{b}^\dagger + \text{h.c.}$ 以及低品质因子谐振腔本身的相干驱动 $\mathcal{E}_d^* \hat{b} e^{-i\omega_b t} + \text{h.c.}$ 共同作用产生. 当驱动达到共振时, 相关物理过程可以由主方程表示为

$$\frac{d}{dt}\rho = -i \left[g_n^* (\hat{a}^n - \alpha^n) \hat{b}^\dagger + \text{h.c.}, \rho \right] + \kappa_b \mathcal{L}_{\hat{b}}(\rho).$$

此时相干态 $|\alpha e^{i2k\pi/n}\rangle$, $k = 1, 2, \dots, n$, 其中 $\alpha^n = -\mathcal{E}_d/g_n^*$, 均是此耗散信道的稳态. 另一种是构建特

殊的哈密顿量 $\hat{H} = -K\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^n + (\mathcal{E}_p\hat{a}^{\dagger n} + \mathcal{E}_p^*\hat{a}^n)$ [103]. 此时相干态 $|\alpha e^{i2k\pi/n}\rangle$, $k = 1, 2, \dots, n$, 其中 $\alpha^n = \mathcal{E}_p/K$, 均是系统的简并本征态, 由于绝热定理系统会被束缚在编码空间中. 前者一般称为耗散型 (dissipative) 猫态编码, 后者一般称为克尔型 (Kerr) 猫态编码.

除了使用梯度上升波形优化等方式直接设计么正演化进行制备外, 猫态编码的初态制备还有两种方式. 一种是绝热制备 [104], 可以将初态制备在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 的福克能级, 然后缓慢地增强多光子驱动强度, 系统的状态将绝热地演化到对应的逻辑态上, 此过程中驱动强度的变化需要足够平滑以满足绝热条件. 另一种是无跃迁 (transitionless) 制备 [103], 通过引入辅助哈密顿量 $\mathbf{H}' = i[|\dot{\psi}(t)\rangle\langle\psi(t)| - |\psi(t)\rangle\langle\dot{\psi}(t)|]$ 使得系统每一时刻的状态 $|\psi(t)\rangle$ 都是 $\hat{H}(t)$ 的本征态, 从而可以快速实现初态制备, 减少噪声的影响.

方便起见, 对于最低阶 $n = 2$ 的编码我们一般使用计算基矢 $|0_L\rangle = |\alpha\rangle + O[\exp(-2|\alpha|^2)]$, $|1_L\rangle = |-\alpha\rangle + O[\exp(-2|\alpha|^2)]$. 因为其编码空间只有两维, 没有足够的信息冗余来进行纠错. 对于这种编码, 单光子的自发辐射噪声仅仅引起编码空间的比特

相位翻转错误, 其错误率会随着 $|\alpha|^2$ 的增大呈线性增长, 但退相位噪声导致的位翻转错误则得到指数的抑制. 这种特殊的噪声偏置特性使得猫态编码能够与重复码这种类型的简单的二能级编码进行级联, 实现容错量子计算.

从相空间的角度看, 二项式编码 (图 6) 和猫态编码 (图 7) 的维格纳函数都具有旋转对称性, 都属于旋转对称玻色编码 (rotation-symmetric bosonic code) 的特殊例子 [105]. 量子态相空间中的旋转对称性导致了其在福克态空间有一定的宇称, 因而猫态编码和二项式编码都可以纠正自发辐射噪声和热激发噪声. 在平均能量很大时, 两种编码的对偶态 $|+/-_L\rangle$ 在相空间中较好地分开, 所以可以简单地进行零差 (homodyne) 测量或者是外差 (heterodyne) 测量就可以实现逻辑 X_L 基矢的测量. 旋转对称玻色编码在纠错方面具有巨大的潜力, 但目前其容错相关的特性仍需要进一步研究, 包括容错通用门操作的实现、容错阈值以及相关资源消耗等.

实验进展方面, $n = 4$ 的猫态编码是第一个也是目前唯一一个在实验上正式使用纠错技术超越盈亏平衡点 (break-even point) 的编码 [106], 即使用编码得到的相干时间要优于单纯使用 $|0/1\rangle$ 的福克

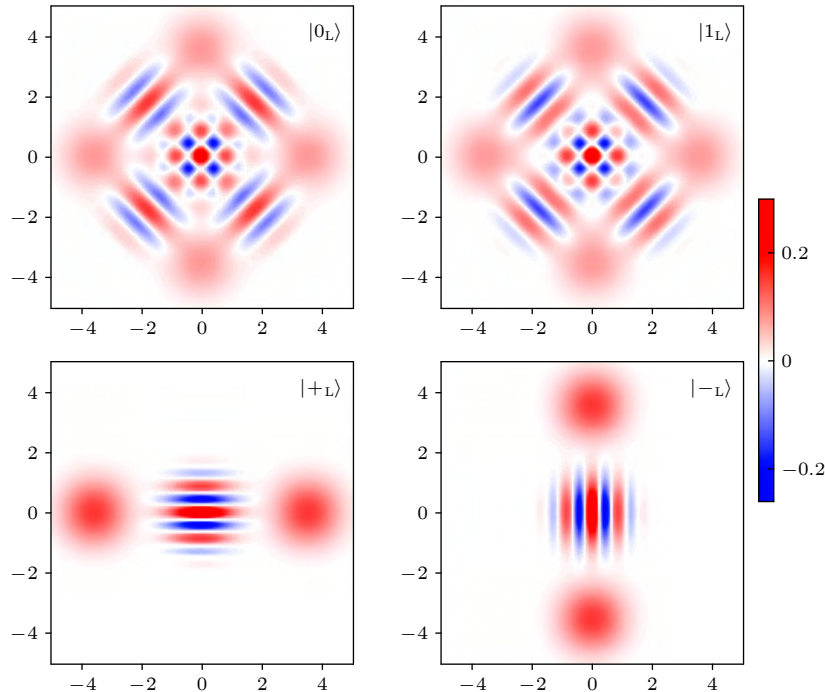


图 7 猫态编码逻辑态的维格纳函数图像, 其中 $\alpha = 2.5$, $n = 4$. 左上: 逻辑态 $|0_L\rangle$; 右上: $|1_L\rangle$; 左下: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; 右下: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$.

Fig. 7. Wigner functions of the logical states of the cat code with $\alpha = 2.5$, $n = 4$. Upper left: Logical state $|0_L\rangle$; Upper right: Logical state $|1_L\rangle$; Lower left: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; Lower right: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$.

态叠加的情况. 此外, 针对这一编码, 基于数值优化的通用逻辑门操作也得以验证^[107], 而在福克空间维度截断的情况下, 通过耗散控制的方式实现了对逻辑态的自动纠错^[108]. 对于 $n = 2$ 的猫态比特也有相关实验实现了其初态制备及稳定、噪音偏置性质观察 (耗散-猫态^[109,110]), 及其相应的单比特量子门操作 (克尔-猫态^[111]).

3.2.3 GKP 编码

2001 年, 戈特斯曼 (Gottesman) 等^[62] 提出了 GKP 编码, 将量子信息编码到简谐振子上, 用于对抗位置和动量的小位移噪声. 而随后的研究^[112] 表明此编码对包括自发辐射、热激发和退相位在内的多种噪声均有抵抗作用. 从相空间的角度来看, 位移噪声的作用是沿着某个方向将量子态平移一段距离, 而 GKP 编码的核心思想是使用在相空间中具有平移对称性的量子态, 其属于平移对称玻色编码 (translation-symmetric bosonic code) 的一种, 其具体的编码如下:

$$|0_L\rangle \propto \sum_{s=-\infty}^{\infty} |2s\sqrt{\pi}\rangle_{\hat{q}}, \quad |1_L\rangle \propto \sum_{s=-\infty}^{\infty} |(2s+1)\sqrt{\pi}\rangle_{\hat{q}},$$

其中 $\hat{q} = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}}$, $\hat{p} = \frac{a - a^\dagger}{\sqrt{2}i}$ 分别是正则位置与正则动量算符, 而 $|x\rangle_{\hat{q}}$ 即是位置算符本征值为 x 的本征态. 图 8 是 GKP 编码逻辑态 $|0_L\rangle$ 和 $|1_L\rangle$ 的维格纳函数图像. 由此可见, GKP 态在相空间中对应对称周期结构, $|0_L\rangle$ 和 $|1_L\rangle$ 之间位置相距 $\sqrt{\pi}$, 故小于 $\sqrt{\pi}/2$ 的平移操作不会降低逻辑态之间的可区分性. 这一点也可以从 GKP 编码的相干态表示看出:

$$|0_L\rangle \propto \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi mn} \left| 2m\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}n \right\rangle,$$

$$|1_L\rangle \propto \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(mn+m/2)} \left| (2m+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}n \right\rangle.$$

从稳定子的角度来看, 这一具有平移对称性的编码所对应的稳定子为

$$\hat{S}_q = \hat{D}(i\sqrt{2\pi}) = e^{i2\sqrt{\pi}\hat{q}},$$

$$\hat{S}_p = \hat{D}(\sqrt{2\pi}) = e^{-i2\sqrt{\pi}\hat{p}},$$

其中 $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ 为位移算符. 而 GKP 编码对应的泡利门操作为

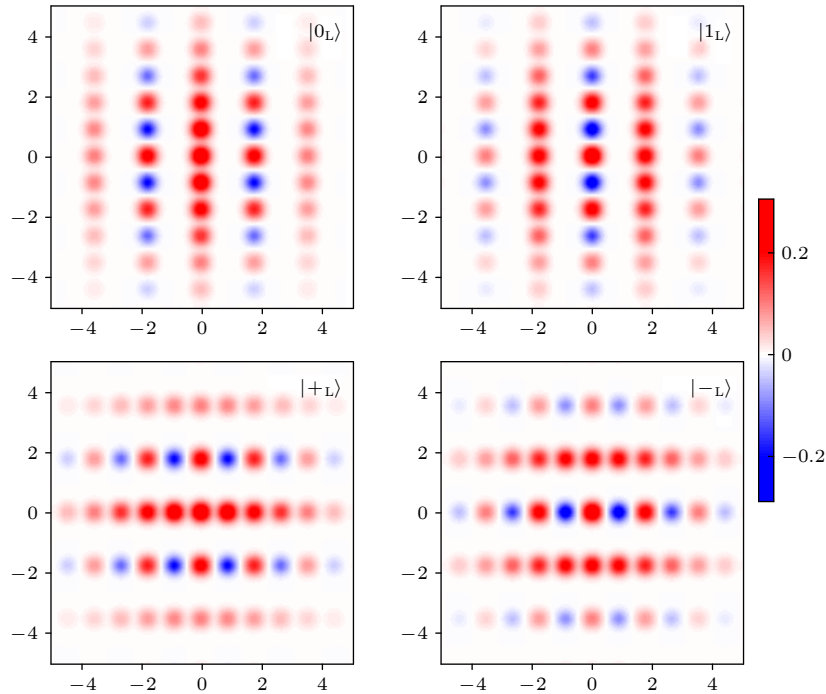


图 8 近似 GKP 编码逻辑态的维格纳函数图像, 其中 $\Delta = 0.3$. 左上: 逻辑态 $|0_L\rangle$; 右上: $|1_L\rangle$; 左下: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; 右下: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$

Fig. 8. Wigner functions of the logical states of an approximate GKP code with $\Delta = 0.3$. Upper left: Logical state $|0_L\rangle$; Upper right: $|1_L\rangle$; Lower left: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; Lower right: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} X &= \hat{D}\left(\sqrt{\pi/2}\right) = e^{-i\sqrt{\pi}\hat{p}}, \\ Y &= \hat{D}\left(\sqrt{\pi/2} + i\sqrt{\pi/2}\right), \\ Z &= \hat{D}\left(i\sqrt{\pi/2}\right) = e^{i\sqrt{\pi}\hat{q}}. \end{aligned}$$

但是, 由于理想的 GKP 编码的平均光子数是无穷大的, 因此在物理实现方面需要对理想 GKP 编码加以近似. 一种常见的近似方法是给逻辑态加以高斯包络, 即

$$\begin{aligned} |0_L\rangle_{\text{approx}} &\propto e^{-\Delta^2 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}} |0_L\rangle, \\ |1_L\rangle_{\text{approx}} &\propto e^{-\Delta^2 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}} |1_L\rangle. \end{aligned}$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 的时候则逐渐变成理想 GKP 态.

GKP 编码拥有良好的纠错容错特性, 因为其对应的所有克利福德 (Clifford) 门操作所需要的相互作用都可以用产生湮灭算符的二次项组合得到. 这意味着, 在执行克利福德门操作的时候任意一个 GKP 编码的玻色模式中的噪声最多只会传递到另一个模式中, 这便满足容错量子操作的要求. 此外, GKP 编码对多种噪声都有较强的抵抗作用. 如前文所示, GKP 编码在相空间中是正方形的格点, 可以对其进行推广得到所谓六边形 GKP 编码. 数值计算表明, 在给定任意初始编码的情况下针对光子湮灭噪声以及高斯热噪声进行优化最后都收敛于六边形 GKP 编码^[113]. 目前 GKP 编码仍有一些问题需要进一步探讨, 包括近似 GKP 编码的 Δ 如何能进一步减小, 以及如何增加对系统中的退相位噪声和高阶非线性效应的抵抗能力等.

GKP 编码虽然早在 2001 年就被提出, 但直到近年来才先后在离子阱平台^[111,114,115]及超导平台^[116]上实现相关的编码以及纠错操作. 因为位移算符所对应的本征值是 $e^{i\theta}$, 其中 θ 可以在区间 $[0, 2\pi)$, 在初态制备中我们需要保证制备得到的是稳定子算符 +1 的本征态 (即 $\theta = 0$), 故需要引入复杂的反馈控制方法. 超导系统正是利用相位测量以及反馈的方式^[117]成功地实现了正方形和六边形 GKP 编码的初态制备^[116]. 后续可望有相关实验能够实现对应的自动稳定信道^[118].

3.3 级联纠错码和容错量子计算

量子纠错码减少了环境噪声对量子态的干扰, 可以用于增加量子线路的深度和精度. 在此基础上, 想进一步提升纠错性能需要从以下两个方面入

手: 1) 扩大编码距离, 使得纠错码能够抵抗更多的噪声, 其中比较有效的方式是进行级联编码; 2) 合理地设计量子线路中的操作, 抑制计算过程中噪声的扩散.

3.3.1 级联编码

对于常见的二能级编码如表面码、颜色码、重复码等, 他们本身就非常容易进行拓展, 即可以用同样的构造方式引入更多的物理比特增强纠错能力, 而前文所述的三种玻色编码也都可以通过增加平均能量来增强对噪声的抵抗能力. 除了对编码进行直接拓展外, 还可以通过级联编码的方式来进行拓展, 即先将一种编码方式得到的逻辑比特作为底层比特, 然后再进行另一种方式的编码. 通过将多种编码级联在一起的方式可以发挥各种编码的优势, 取得更好的纠错效果.

一个最简单的例子就是肖尔编码 (Shor code), 该编码将可以纠正相位翻转的三比特重复码作为底层逻辑码, 上层级联可以纠正位翻转噪声的三比特重复码作为最终编码. 结合两种编码的纠错能力, 肖尔编码可以纠正单个物理比特上的任意噪声. 另一个例子是玻色编码与二能级型编码的级联. 玻色编码对资源的需求较少, 单个模式就可以纠正一些低阶错误, 实现较高保真度的逻辑门操作, 但是其编码受高阶非线性效应的限制而不能无限扩展. 二能级型的编码受到物理比特的门保真度的限制, 当物理比特操作的保真度较低时, 纠错需要的资源会急剧增加. 因此, 以玻色编码作为底层编码与二能级编码级联就可以较好地解决上述问题, 底层玻色编码的操作保真度比较高, 上层二能级编码的资源消耗就可以减少. 目前可能的级联编码方案有环面/表面-GKP 编码 (toric/surface-GKP code)^[63,64]、重复-猫态编码 (repetition-cat code)^[65]、XZZX-猫态编码 (XZZX-cat code)^[46,66]等.

级联编码还可以利用底层编码的特点来简化顶层编码的操作. 如在重复-猫态编码中^[65], 最低阶 $n = 2$ 的猫态编码作为底层编码, 其可以实现保持噪声偏置特性的 X 门、CNOT 门和托弗里 (Toffoli) 门 (指数级抑制的位翻转错误和线性增加的相位翻转错误). 在使用上述门操作的基础上进行顶层编码时, 编码和逻辑门操作过程中额外的位翻转错误可以被底层猫态编码所抑制, 而相位翻转错误则可以被顶层的重复码纠正. 按照这种方式就可实现任意容错逻辑门操作, 而不需要花费大量资源进行妙

态 (magic state) 制备、提纯和注入等复杂操作^[65].

3.3.2 容错量子计算

在实际的量子纠错过程中, 包括错误诊断以及纠错操作在内的所有过程都会受到噪声的影响, 不合理的门操作会把噪声扩散至其他的物理比特, 从而导致逻辑错误. 但是, 如果当一个过程中的某个操作发生噪声的情况下, 过程最后输出的每一个逻辑比特中至多只有一个物理比特发生错误, 这样的过程被称为是容错的^[57]. 简单来说, 容错的量子过程抑制了错误的扩散, 使得某个操作过程中发生的噪声不会在后续的门操作的作用下扩散至多个物理比特上, 成为不可纠正的错误. 而且, 当噪声非常弱的时候, 这些错误在随后的纠错操作中大概率会得到纠正. 可以证明当噪声的强度小于一定的阈值 (即容错阈值) 的时候, 一个具有 $p(n)$ 个逻辑门的量子线路可以被一个包含 $O(\text{poly}(\log p(n)/\varepsilon)p(n))$ 的量子线路以至多 ε 的整体失败概率实现, 这就是著名的阈值定理.

实现容错逻辑门操作需要巧妙的设计来抑制错误的扩散, 目前最有效的方式是使用横向 (transversal) 门. 如图 9(a) 所示, 这类型的逻辑门操作可以通过物理比特上的单量子比特操作实现, 或者对于涉及到多个逻辑量子比特的门操作, 可以通过逻辑比特中对应物理比特的操作实现. 使用这种方式实现门操作天然地具有容错特性. 但是, 随后伊斯汀和尼尔 (Eastin-Knill) 证明^[119], 对于所有非平凡的量子纠错码而言, 横向门不能构成通用门操作集合. 幸运的是, 对于所有自对偶的 CSS 编码 (Calderbank-Shor-Steane code) 而言, 所有属于克利福德 (Clifford) 群的逻辑门操作都可以通过这个方式实现, 其中就包括了 CNOT 门和 H 门. 克利福德群是泡利群的正规化子, 即 $\{C|CP_nC^\dagger = P_n\}$, 其中 C 为克利福德门, P_n 为泡利门.

在实现容错克利福德门的基础上还需要能容错地实现至少一个非克利福德门才能实现容错的通用逻辑门操作集合, 比方说 T 门. 通过在戈特斯曼 (Gottesman) 和庄 (Chuang)^[120] 的方案基础上改进而来的单比特隐形传态 (one-bit teleportation) 的方式可以容错地实现 T 门^[121], 即如图 9(b) 所示: 可以引入一个与系统编码相同的辅助比特, 并将其制备在初态 $|\Theta\rangle = TH|0_L\rangle$ 上, 然后只需要横向地作用 CNOT 门以及对系统态进行测量, 最后

根据测量结果反馈给辅助比特决定是否横向地实现 SX 门就可以在辅助比特上实现量子态 $T|\psi_L\rangle$. 整个方案最大的困难点在于高保真度的初态 $|\Theta\rangle$ 的制备, 而且这一初态制备过程与系统演化无关, 所以可以使用后选择、蒸馏等方式. 布拉维 (Bravyi) 和基塔耶夫等^[122] 就最先提出了妙态蒸馏 (magic state distillation) 的方式得到高保真度的初态. 随后, 这一方案得到了更加深入研究和优化^[123,124]. 一般来说妙态制备的方式需要较多的资源, 比如对于初始态错误率为 5×10^{-5} 的表面码通过妙态蒸馏的方式实现逻辑错误率约 10^{-15} 的 T 门就需要将近 10^4 个物理比特^[125]. 因此, 如何进一步减少妙态制备的资源消耗是当前基于隐形传态的容错方案的研究重点之一^[126].

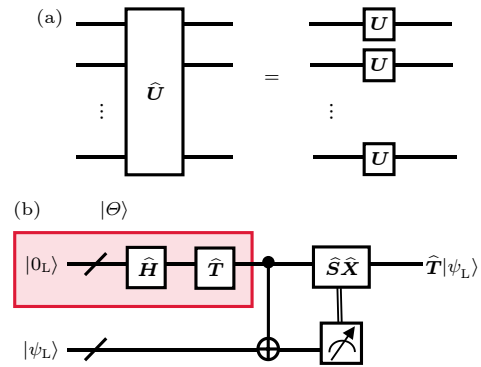


图 9 (a) 横向逻辑门操作示意图; (b) 单比特态传输的方式实现逻辑 T 门. 图中斜线表示此逻辑比特包括多个物理比特, 而图中红色阴影区域的线路等价于将辅助比特初态制备成 $|\Theta\rangle$, 红色区域外的门操作全是横向逻辑门

Fig. 9. (a) Schematic of the transversal logical operation; (b) logical T gate implemented through one-bit teleportation. The slash in the figure indicates that the logical qubit is encoded with several physical qubits, and the red shaded area is equivalent to initializing the auxiliary qubit as $|\Theta\rangle$. All logical gates outside the red shaded area are transversal.

4 纠错相关的量子控制技术

近年来, 为了在超导系统中实现各种纠错编码, 纠错相关的控制技术也得到了深入的研究与验证, 其中包括自动纠错 (autonomous QEC)、容错控制、任意么正演化以及任意量子信道模拟等.

首先是自动纠错技术. 一般而言, 基于测量的纠错 (measurement-based QEC) 方式需要先进行错误诊断, 即通过辅助比特实现对系统状态的测量, 并根据诊断结果, 再对系统执行相应的纠错操作. 以超导腔为例, 错误诊断的实现需要外围 FPGA

电路 (field programmable gate array circuit) 输入脉冲序列控制 transmon 比特与超导腔的相互作用, 然后对 transmon 状态进行测量并将测量结果反馈至 FPGA 电路进行逻辑判断, 之后才会对超导腔输入控制脉冲实现纠错操作. 从错误诊断到纠错操作期间, 系统会经历短时间的延迟, 因而增加了纠错操作的错误率. 而自动纠错过程在引入一个辅助比特的情况下只需要一步纠错操作即可完成, 即

$$\hat{U} |\psi_E\rangle |g\rangle = |\psi_L\rangle |e\rangle,$$

$$\hat{U} |\psi_L\rangle |g\rangle = |\psi_L\rangle |g\rangle,$$

其中 $|\psi_L\rangle, |\psi_E\rangle$ 分别是无噪声以及发生噪声之后的逻辑量子态, $|g\rangle, |e\rangle$ 分别是辅助比特的基态和激发态, 而 $\hat{U}$ 是对应的么正纠错操作, 等价于将系统的错误转移到辅助比特上, 只要在后续操作中将辅助比特复位, 纠错就可以重复进行. 使用这样的自动纠错技术有以下两个优点: 1) 可以将系统的错误诊断以及纠错操作进行结合, 避免系统经历较长时间的延迟; 2) 降低了反馈操作对硬件要求. 实验方面, 基于二项式编码的自动纠错技术已被验证^[101].

其次是容错控制技术. 容错控制技术的核心思想是通过系统哈密顿量的设计从物理层面实现对噪声的容忍. 例如, 最近在超导平台上展示的容错测量^[127]就是通过构造超导谐振腔与三能级辅助比特 ($|g\rangle, |e\rangle, |f\rangle$ 能级) 之间的相互作用 $H_{\text{int}} = \chi \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} (|e\rangle\langle e| + |f\rangle\langle f|)$ 实现的. 从该式可以看出, $|e\rangle, |f\rangle$ 能级与超导腔之间的耦合强度一致, 故在门操作或者在测量过程中辅助比特从 $|f\rangle$ 到 $|e\rangle$ 的噪声只会给腔带来至多一个全局相位的影响, 而从 $|e\rangle$ 到 $|g\rangle$ 的衰减属于高阶效应, 可以忽略, 因此可以实现对辅助比特中噪声的容忍. 而错误透明门则是通过交流斯塔克 (AC Stark shift) 效应构造使得逻辑和错误编码空间有相同的相位门演化的哈密顿量, 这样在发生错误并且错误被纠正之后, 相位门不受影响^[101]. 由于这些逻辑门操作的适用条件比较苛刻, 目前所能实现的容错逻辑门操作仍限于一些相位门操作, 是否能推广至通用逻辑门集合仍是一个开放问题.

然后是任意么正演化的实现. 从索洛韦-基塔耶夫 (Solovay-Kitaev) 定理可知, 任意的么正演化都可以被有限的门操作集合以任意的精度近似实现, 如 $\{H, S, \text{CNOT}, T\}$. 目前, 在超导量子系统中

也有两种方式可以较好地实现任意么正演化, 一种是通过位移操作加上 SNAP (selective number-dependent arbitrary phase) 门^[128–130], 另一种是梯度上升波形优化方法^[96,97]. 这两种方式避免了对门操作进行大量分解, 减少了电路的深度, 并且允许通过最优控制的方式在考虑噪声的情况下进行优化, 从而增加门操作保真度. SNAP 门是 $\hat{S}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\theta_n} |n\rangle\langle n|$, 而任意的么正演化可以被 SNAP 门和位移操作的交替序列很好地近似, 即 $U \approx D(\alpha_1) \hat{S}(\theta_1) \cdots D(\alpha_N) \hat{S}(\theta_N)$. 其中参数 α_n, θ_n 可以通过数值优化得到. 但 SNAP 门方法的门操作时间较长, 一定程度上限制了其保真度, 而梯度上升波形优化方法可以克服这一限制, 使得门操作时间尽可能少. 其本质原理是通过梯度下降算法直接数值优化哈密顿量 $H(t) = H_0 + \sum_n u_n(t) H_n$ 中的可控参数 $u_n(t)$, 使得优化得到的门操作与目标门操作之间的保真度接近 1.

最后是任意量子信道模拟. 对任意量子信道的模拟, 尤其是对开放系统的模拟在量子信息处理中具有非常重要的意义, 一方面, 许多量子操作, 如量子纠错、量子态制备等, 本身就需要使用开放系统相关的操作; 另一方面, 通过对噪声信道的模拟我们能够更好地理解系统的噪声. 具体来说, 就是任意的信道均可以表示成克劳斯形式 $\mathcal{E}(\rho) = \sum_{n=1}^N E_n \rho E_n^\dagger$, 其中 $\{E_n\}$ 需要满足 $\sum_{n=1}^N E_n^\dagger E_n = I$. 同一信道的不同的克劳斯算符之间可以相差一个么正变换 U , 即当 $\{F_n\}$ 满足 $F_n = \sum_j U_{nj} E_j$ 时, 其信道与 $\{E_n\}$ 所表示的信道一致. 不同的表示中最小的克劳斯算符的数量 r 被称为克劳斯信道的阶 (rank). 系统中任意的 r 阶的完全正定保迹 (completely positive and trace preserving, CPTP) 信道都可以引入系统与 r 维的辅助系统 (初态为 $|0_A\rangle\langle 0_A|$) 的联合么正演化 U , 并且对辅助系统进行 $|n_A\rangle\langle n_A|$ 测量来实现^[131–134], 也就是 $\mathcal{E}(\rho) = \sum_{n=1}^r E_n \rho E_n^\dagger = \sum_{n=1}^r \langle n_A| U \rho \otimes |0_A\rangle\langle 0_A| U^\dagger |n_A\rangle, E_n = \langle n_A| U |0_A\rangle$. 该过程也可以通过重复使用一个二维的辅助比特 m 次来实现, 其中 $m = \lceil \log_2 r \rceil$, 即

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_m} E_{m, r_m}^{(r_{m-1}, \dots, r_1)}, \dots,$$

$$E_{1, r_1} \rho E_{1, r_1}^\dagger, \dots, E_{m, r_m}^{(r_{m-1}, \dots, r_1)},$$

其中 $r_n \in \{0, 1\}$ 是第 n 步对辅助比特测量的结果,

$E_{n,r_n}^{(r_{n-1}, \dots, r_1)} = \langle r_n | U_n^{(r_{n-1}, \dots, r_1)} | 0 \rangle$ 是第 n 步演化的克劳森算符, 而 $U_n^{(r_{n-1}, \dots, r_1)}$ 是根据前面 $n-1$ 步辅助比特测量结果执行的么正演化. 实验上利用一个二能级量子比特的辅助在 $2\log_2 d$ 规模的电路深度下已成功地演示了 d 维量子系统的任意量子操作^[134].

5 近期超导系统量子纠错的应用

当前, 超导量子系统已经可以集成相当数量的物理比特并进行简单的逻辑编码, 但是纠错效果仍受限于比特数量、比特间的串扰以及控制精度. 现阶段量子纠错实验的主要目标仍是实现并超越盈亏平衡点, 为实现容错量子计算这一长远目标奠定基础. 除此之外, 我们也应积极探索量子纠错技术的应用潜力, 包括但不限于在量子度量学以及量子通信等方面的应用.

量子度量学是量子信息最重要的应用场景之一. 在散粒噪声作用下, 物理系统的探测精度只能达到散粒噪声极限, 即 $\propto 1/\sqrt{NT}$, 其中 N 是探测系统中平均粒子数, T 是探测的时间. 但是, 利用量子纠错技术可以保持量子态的相干特性从而提升探测的精度, 并可以达到海森伯 (Heisenberg) 极限^[135], 即精度 $\propto 1/(NT)$. 超导系统在实现高精度量子精密测量方面有着独特的优势: 一方面, 超导系统有着较强的量子调控能力, 可以对用于探测的量子态进行高保真度的制备、控制以及测量, 从而提升探测的精度. 另一方面, 超导系统自身就可以有效探测微波、磁场等物理信号. 更重要的是超导系统还能与其他物理系统进行较为高效的耦合, 包括光子、声子、轴子 (Axion)^[136] 等, 进而可用于多种物理信号的探测. 但是, 超导系统的探测精度对噪声十分敏感, 例如微波光子的自发辐射以及退相位等噪声, 因此如何克服系统噪声、提高测量精度是当前阶段最主要的挑战. 主要有以下两种解决方式: 1) 针对所测量的相互作用形式以及系统噪声类型选用特定编码的初态, 借助高维希尔伯特空间中对信号较敏感但是对噪声相对不敏感的子空间来提高测量精度. 2) 使用纠错技术, 借助高维度希尔伯特空间的冗余, 使得传感过程中的噪声得到及时纠正^[137–139]. 此外, 量子纠错方法还可以进一步拓展至多参数估计的量子度量学问题^[140].

量子网络、分布式量子计算等技术均依赖于量子信息在网络中各个节点之间的传输, 即需要实现

量子通信. 但是, 远距离的量子通信极易受到噪声的干扰, 导致信号随着距离的增加发生指数的衰减, 尤其是对于微波光子, 其在常温下受热激发噪声干扰严重, 因而在电缆中传输损耗极大. 因此, 需要使用量子中继 (quantum repeater) 来克服传输损耗, 即发送端和接收端只需要分别与中继端建立纠缠, 再利用中继端的局域操作就可以建立纠缠. 这一方案可以避免远距离的直接量子态传输, 但是需要大量的资源来进行纠缠态提纯 (purification), 此外还需要频繁的经典信息传输. 针对这一问题, 相关研究提出了两种改进方案: 1) 使用微波光波转换. 通信波段光子是远距离传输量子信息最好的载体, 其传输损耗低、抗干扰能力强, 故借助量子频率转换能充分利用两种光子的优点^[7]. 目前已经有相关实验对此进行验证^[141]. 2) 使用量子纠错技术. 当进行量子态传输的时候, 使用带有编码的逻辑比特 (如猫态编码^[102]) 进行传输, 接收端接收到之后, 只需要进行错误诊断以及纠错操作就可以得到高保真度的目标态. 这一方案避免了大量的纠缠态提纯以及频繁的经典通信, 因而具有较高的传输速率, 这也被称为第三代量子中继^[102,142].

纠错相关的技术可以作为量子错误缓解 (quantum error mitigation, QEM) 技术用于提高近期量子算法的效率. 当前, 我们正处于带噪声的中等规模的量子 (noisy intermediate-scale quantum, NISQ) 时代^[143], 还不能实现高质量的纠错和容错操作, 但是很有可能在某些实际问题中展示量子技术的优越性, 尤其是在处理经典量子混合算法上, 例如变分量子特征求解器 (variational quantum eigensolver, VQE)^[17] 和量子近似优化算法 (quantum approximate optimization algorithm, QAOA)^[16]. 相较于普适量子计算, 这些算法只需要使用深度较浅的量子线路并借助经典的计算机来分析量子线路的输出结果与输入参数的关系, 从而对线路进行反馈操作以及优化. 目前这些算法受到噪声的限制, 在计算的精度和效率上仍有很大的提升空间. 针对这一情况, 众多的错误缓解技术被提出^[144], 包括外推法 (extrapolation)、准概率分布法 (quasi-probability method)、量子子空间展开法 (quantum subspace expansion) 等. 这些技术不需要使用完整的量子纠错技术, 但是如果所求解的系统本身具有一定的对称性则可以使用纠错中的错误诊断技术来降低噪声的干扰, 这就是对称性检验 (symmetry

verification) 技术^[145]. 例如系统本身具有粒子数守恒、自旋守恒等对称性, 而噪声会破坏这一对称性, 从纠错的角度来看, 这意味着系统状态只分布于希尔伯特空间中的某个子空间, 而噪声将其投影至其它正交子空间中, 此时只要进行错误诊断再进行后选择处理异常结果即可. 目前已经有实验使用相关技术^[146]. 随着纠错技术的发展, 我们相信在不远的将来在使用小规模纠错码的情况下还可以进一步提升相关算法的效率.

6 讨论与展望

随着近年来相关操控技术的迅速发展, 超导量子计算平台的关键性能得到巨大的提升并成为目前最有希望实现高效量子计算的平台之一. 本文以超导平台为背景介绍了量子纠错方面的研究进展, 包括基于二能级架构以及基于玻色模式架构的纠错码, 还有纠错相关的控制技术. 在离子阱、光学以及中性原子等物理平台上, 量子纠错技术也取得了令人瞩目的进展, 虽然本文聚焦于超导系统的纠错进展, 但是相关内容也适用或者可以推广至这些物理平台.

如前文所述, 不管是二能级架构还是玻色模式架构的纠错技术的最大挑战都在于如何进一步增加参与编码的物理比特数目以及提高纠错操作的保真度. 短期来看, 超导系统需要提高对噪声的压制能力, 增加控制精度, 从而通过纠错达到盈亏平衡点, 并实现量子优势 (quantum advantage), 即在量子计算、量子模拟、量子度量学、量子通信等应用中通过纠错提升量子系统性能并超越经典系统. 中长期目标则是实现容错量子控制, 即通过扩大系统规模将逻辑错误压制到任意小. 为此, 我们认为需要从理论以及实验方面解决以下的问题:

第一, 如何优化利用高维度量子资源实现单个逻辑比特的量子纠错码?

维度是量子纠错中最重要的资源之一. 纠错的本质就是利用维度扩展带来的冗余对抗噪声的影响. 这包括以下三点: 参与编码的物理比特数目、物理比特本身的维度、相互作用的形式. 目前而言, 针对二能级类型的纠错码已经进行了较为深入的研究, 尤其是低维度的拓扑码, 包括表面码、颜色码等. 这些纠错码有着较高的阈值, 但同时所需要的物理比特数也是巨大的. 为此, 可以考虑通过增

加相互作用的形式 (如允许有限的且保真度较低的长程相互作用) 来减小资源消耗, 如三维、四维的颜色码或其他形式的非拓扑编码都需要进一步的研究. 此外, 还可能通过将比特编码成 qudit 的形式降低资源消耗, 但也需要进一步研究. 而对玻色编码而言, 对于单个模式的底层编码的研究已经较为成熟, 但是多个玻色模式如何进行拓展才能利用好玻色模式的潜力需要进一步的研究. 目前已经有相关的探索, 如文献 [46, 63–65, 66], 但是更好的方案以及具体的资源对比需要更深入的研究.

第二, 如何实现分布式量子纠错架构?

在实际超导系统中, 受限有限的冷却体积以及超导线路之间的串扰, 很难通过无限地增加短程相互作用的比特数目实现容错量子计算. 另一方面, 量子度量学、通信等应用需要在不同的量子节点之间进行纠缠分发以及量子态传输. 因此, 非常有必要深入研究分布式的量子纠错架构: 即需要考虑将整个量子系统分成若干个节点, 节点内部超导比特之间的相互作用较强, 可以实现高保真度的逻辑门操作, 节点之间利用飞行比特进行保真度较低远程相互作用, 并通过量子纠错、纠缠蒸馏等方式建立节点之间的高保真度量量子纠缠. 这就需要考虑如何构建节点内部的编码以及对应的纠错方案^[147].

第三, 如何实现混合量子编码转换?

实现不同物理平台之间的量子信息的传递和转化, 即实现混合量子编码的转换可以有效地利用不同平台的特性, 扬长避短: 一方面, 对于量子度量学方面的应用, 用于探测的物理系统不一定会具备较强的信息处理能力, 因而需要转换到超导等量子调控能力较强的系统以便进行后续的纠错测量等处理. 另一方面, 出于构建量子网络以及实现分布式量子计算的考虑, 相距较远的超导量子芯片之间必须借助飞行比特进行信息交换, 而微波光子容易与超导芯片进行耦合, 但其极易受到环境电磁噪声干扰, 在常温下受到损耗和热噪声的限制无法进行远距离传输. 因此, 需要将微波光子编码的量子态转换到其他物理载体上, 如通信波段光子, 其对于噪声的容忍能力较强, 支持远距离传输. 除了微波-光波转换外, 还可以进一步考虑微波-声波转换. 这不仅需要考虑并设计不同物理系统之间相互作用的形式, 还需要从编码层面综合考虑各系统适用的并且容易进行转换的量子纠错码.

第四, 如何实现对特定噪声免疫的量子控制?

量子系统的控制包括对量子态的操控以及测量. 控制性能的提升需要从两方面入手, 一个是从原理上免疫特定噪声, 另一个是从优化层面减少噪声影响. 对于二能级类型编码以及玻色模式编码都已经有了相关研究可以从原理上免疫一些噪声, 比方说通过设计系统相互作用实现的路径无关的 SNAP 门可以抵抗辅助比特的噪声以及实现容错测量^[127]. 相关研究需要深入考虑能否适用于更大规模的系统、能否推广至更为普适的门操作集合、能否进一步免疫主系统的高阶噪声. 从优化层面考虑减少噪声的影响依赖于噪声模型的精细化, 包括需要考虑连续形式的噪声, 如果引入相关的辅助系统, 还需要考虑辅助系统本身的不完美性. 考虑到现日益增长的物理比特数目, 一个实用的算法还必需尽可能减少优化的复杂度.

第五, 在考虑资源消耗的情况下是否有更切合实际的纠错性能评价指标?

实现量子纠错需要投入数量巨大的物理比特用于编码一个逻辑比特, 就短期而言我们更多地关注于逻辑比特是否突破盈亏平衡点以及能否进行拓展以证实量子纠错的效果. 但中长期而言, 可供选择的纠错方案逐渐增加, 我们需要评价各种纠错方案的优劣, 因而需要更切合实际的指标来衡量投入的资源与逻辑比特所能实现的信息处理能力. 这其中的资源包括空间、时间上的资源, 如所投入的物理比特数量以及实现逻辑门操作所需要的时间等.

第六, 近期如何实现带纠错的量子优势?

目前的量子系统正处于带噪声的中等规模的量子 (NISQ) 时代^[143], 在这期间, 量子系统可以集成五十到数百个带噪声的量子比特, 接近或者超过经典计算机所能模拟的极限, 就算在不考虑纠错的情况下, 也可能在量子退火 (quantum annealing)、量子深度学习 (quantum deep learning) 等方面实现量子优势. 而在未来一段时间内纠错的规模与质量仍将逐步上升, 虽然距离实现容错量子计算仍有一段距离, 但是可以预见在这个阶段纠错操作将逐渐抑制噪声, 使得在纠错的情况下量子系统在一些应用上具有进一步超越经典系统的性能.

第七, 如何在实验中探索并演示容错量子门?

当前达到盈亏平衡的量子纠错码还鲜有实验报道, 而实验上如何设计容错量子操作从而提高基于量子纠错码的量子操作的保真度是当前量子纠

错研究的一个重要的方向, 也是实现容错量子计算的必经之路. 最近几年这方面的理论和实验研究也得到了更多的关注, 人们对容错这一概念的理解也逐步突破传统横向量子门的局限. 通常, 容错这个词的出现伴随着阈值, 也就是当系统的错误率低于某一阈值时就可以通过扩展系统的维度来降低错误率. 然而, 立足于实验, 证实容错阈值在短期内十分具有挑战性. 我们应当进一步拓展容错的概念, 并在较小规模的系统中探索容错实验的一些基本特征并挖掘之前理论所忽视的实际问题^[148]. 例如, 近年来发展起来的旗帜比特 (flag qubit)^[149] 等方法可以在物理比特数目较少但比特之间连通性较好的前提下容错地实现通用逻辑门操作, 以及前面提到的基于噪声免疫实现路径无关^[150] 或者错误透明^[101] 的量子逻辑门.

最后, 我们预期量子纠错在理论方面能够与量子信息之外的其他领域结合, 进一步延拓量子纠错方法的理论内涵^[151]. 例如, 最近发现的量子纠错与凝聚态多体系统、高能物理中全息对偶原理的联系使理论物理学家们非常兴奋^[152,153]. 一方面, 可以借助超导量子系统中的纠错码来研究凝聚态中的拓扑物态, 包括自旋液体态^[84] 和分形子 (Fracton)^[154]. 另一方面, 也可以借助其他领域中的一些有趣的模型来构建新的量子纠错码或者加深对它们的理解, 例如 HaPPY 码^[153] 和基于含时横场伊辛 (Ising) 模型的实用量子纠错^[155].

参考文献

- [1] Shor P W 1994 *Proc. 35th Annu. Symp. Found. Comput. Sci.* (IEEE) Santa Fe, NM, USA, November 20–22, 1994 p124
- [2] Shor P W 1995 *Phys. Rev. A* **52** R2493
- [3] Kudra M, Biznárová J, Fadavi Roudsari A, Burnett J J, Niepce D, Gasparinetti S, Wickman B, Delsing P 2020 *Appl. Phys. Lett.* **117** 70601
- [4] Reagor M, Pfaff W, Axline C, et al. 2016 *Phys. Rev. B* **94** 14506
- [5] Romanenko A, Pilipenko R, Zorzettti S, Frolov D, Awida M, Belomestnykh S, Posen S, Grassellino A 2020 *Phys. Rev. Appl.* **13** 34032
- [6] Magnard P, Storz S, Kurpiers P, Schär J, Marxer F, Lütolf J, Walter T, Besse J C, Gabureac M, Reuer K, Akin A, Royer B, Blais A, Wallraff A 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 260502
- [7] Xu X B, Wang W, Sun L, Zou C L 2022 *Chip* 100016
- [8] Acharya R, Aleiner I, Allen R, et al. 2022 *arXiv: 2207.06431 [quant-ph]*
- [9] Jurcevic P, Javadi-Abhari A, Bishop L S, et al. 2021 *Quantum Sci. Technol.* **6** 25020

- [10] Zhu Q, Cao S, Chen F, et al. 2022 *Sci. Bull.* **67** 240
- [11] Guo Q, Cheng C, Li H, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 240502
- [12] Xu K, Zhang Y R, Sun Z H, et al. 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 150501
- [13] Xu H, Zhang J, Han J, Li Z, Xue G, Liu W, Jin Y, Yu H 2021 arXiv: 2108.00942 [quant-ph]
- [14] Arute F, Arya K, Babbush R, et al. 2019 *Nature* **574** 505
- [15] Wu Y, Bao W S, Cao S, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 180501
- [16] Farhi E, Goldstone J, Gutmann S 2014 arXiv: 1411.4028 [quant-ph]
- [17] Peruzzo A, McClean J, Shadbolt P, Yung M H, Zhou X Q, Love P J, Aspuru-Guzik A, O'brien J L 2014 *Nat. Commun.* **5** 1
- [18] Wendin G 2017 *Rep. Prog. Phys.* **80** 106001
- [19] Blais A, Grimsco A L, Girvin S M, Wallraff A 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 25005
- [20] Xu Y, Hua Z, Chen T, et al. 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 230503
- [21] Cai T Q, Han X Y, Wu Y K, Ma Y L, Wang J H, Wang Z L, Zhang H Y, Wang H Y, Song Y P, Duan L M 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 060505
- [22] Tan X, Zhang D W, Zheng W, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 017702
- [23] Ni Z, Li S, Zhang L, et al. 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 040502
- [24] Marques J F, Varbanov B M, Moreira M S, et al. 2022 *Nat. Phys.* **18** 80
- [25] Riste D, Poletto S, Huang M Z, Bruno A, Vesterinen V, Saira O P, DiCarlo L 2015 *Nat. Commun.* **6** 1
- [26] Yan F, Krantz P, Sung Y, Kjaergaard M, Campbell D L, Orlando T P, Gustavsson S, Oliver W D 2018 *Phys. Rev. Appl.* **10** 054062
- [27] Mundada P, Zhang G Y, Hazard T, Houck A 2019 *Phys. Rev. Appl.* **12** 54023
- [28] Sung Y, Ding L, Braumüller J, Vepsäläinen A, Kannan B, Kjaergaard M, Greene A, Samach G O, McNally C, Kim D, Melville A, Niedzielski B M, Schwartz M E, Yoder J L, Orlando T P, Gustavsson S, Oliver W D 2021 *Phys. Rev. X* **11** 21058
- [29] Li X, Cai T, Yan H, Wang Z, Pan X, Ma Y, Cai W, Han J, Hua Z, Han X, Wu Y, Zhang H, Wang H, Song Y P, Duan L M, Sun L Y 2020 *Phys. Rev. Appl.* **14** 24070
- [30] Song C, Xu K, Li H, Zhang Y R, Zhang X, Liu W, Guo Q, Wang Z, Ren W, Hao J, Feng H, Fan H, Zheng D, Wang D W, Wang H, Zhu S Y 2019 *Science* **365** 574
- [31] Zhao Y, Ye Y, Huang H L, et al. 2021 arXiv: 2112.13505 [quant-ph]
- [32] Negirneac V, Ali H, Muthusubramanian N, Battistel F, Sagastizabal R, Moreira M S, Marques J F, Vlothuizen W J, Beekman M, Zachariadis C, Haider N, Bruno A, DiCarlo L 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 220502
- [33] Kjaergaard M, Schwartz M E, Greene A, et al 2020 arXiv: 2001.08838 [quant-ph]
- [34] Kandala A, Wei K X, Srinivasan S, Magesan E, Carnevale S, Keefe G A, Klaus D, Dial O, McKay D C 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 130501
- [35] Blais A, Huang R S, Wallraff A, Girvin S M, Schoelkopf R J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 62320
- [36] Koch J, Yu T M, Gambetta J, Houck A A, Schuster D I, Majer J, Blais A, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2007 *Phys. Rev. A* **76** 042319
- [37] Houck A A, Schreier J A, Johnson B R, Chow J M, Koch J, Gambetta J M, Schuster D I, Frunzio L, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 80502
- [38] Reed M D, Johnson B R, Houck A A, DiCarlo L, Chow J M, Schuster D I, Frunzio L, Schoelkopf R J 2010 *Appl. Phys. Lett.* **9** 6
- [39] Jeffrey E, Sank D, Mutus J Y, White T C, Kelly J, Barends R, Chen Y, Chen Z, Chiaro B, Dunsworth A, Megrant A, O'Malley P J, Neill C, Roushan P, Vainsencher A, Wenner J, Cleland A N, Martinis J M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 190504
- [40] Yurke B, Corruccini L R, Kaminsky P G, Rupp L W, Smith A D, Silver A H, Simon R W, Whittaker E A 1989 *Phys. Rev. A* **39** 2519
- [41] Siddiqi I, Vijay R, Pierre F, Wilson C M, Metcalfe M, Rigetti C, Frunzio L, Devoret M H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 207002
- [42] Castellanos-Beltran M A, Lehnert K W 2007 *Appl. Phys. Lett.* **91** 83509
- [43] Walter T, Kurpiers P, Gasparinetti S, et al. 2017 *Phys. Rev. Appl.* **7** 054020
- [44] Reagor M, Paik H, Catelani G, et al. 2013 *Appl. Phys. Lett.* **102** 192604
- [45] Xu Y, Ma Y, Cai W, et al. 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 120501
- [46] Chamberland C, Noh K, Arrangoiz-Arriola P, Campbell E T, Hann C T, Iverson J, Putterman H, Bohdanowicz T C, Flammia S T, Keller A, Refael G, Preskill J, Jiang L, Safavi-Naeini A H, Painter O, Brandão F G S L 2022 *PRX Quantum* **3** 10329
- [47] Chu Y, Gröblacher S 2020 *Appl. Phys. Lett.* **117** 150503
- [48] Place A P M, Rodgers L V H, Mundada P, et al. 2021 *Nat. Commun.* **12** 1779
- [49] Wang C, Li X, Xu H, et al. 2021 arXiv: 2105.09890 [quant-ph]
- [50] Bao F, Deng H, Ding D, et al. 2021 arXiv: 2111.13504 [quant-ph]
- [51] Nuerbolati W, Han Z, Chu J, Zhou Y, Tan X, Yu Y, Liu S, Yan F 2022 *Appl. Phys. Lett.* **120** 174001
- [52] Zhao P, Linghu K, Li Z, Xu P, Wang R, Xue G, Jin Y, Yu H 2022 *PRX Quantum* **3** 20301
- [53] Joshi A, Noh K, Gao Y Y 2021 *Quantum Sci. Technol.* **6** 33001
- [54] Shor P W 1996 *Proc. 37th Conf. Found. Comput. Sci. (IEEE) Burlington, VT, USA, October 14–16 1996*, p56
- [55] Gottesman D 2009 arXiv: 0904.2557 [quant-ph]
- [56] Knill E, Laflamme R 1997 *Phys. Rev. A* **55** 900
- [57] Nielsen M A, Chuang I 2010 *Quantum Computation and Quantum Information* (New York: Cambridge University Press) pp1–12
- [58] Gottesman D 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1862
- [59] Michael M H, Silveri M, Brierley R T, Albert V V, Salmilehto J, Jiang L, Girvin S M 2016 *Phys. Rev. X* **6** 31006
- [60] Leghtas Z, Kirchmair G, Vlastakis B, Schoelkopf R J, Devoret M H, Mirrahimi M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 120501
- [61] Mirrahimi M, Leghtas Z, Albert V V, Touzard S, Schoelkopf R J, Jiang L, Devoret M H 2014 *New J. Phys.* **16** 45014
- [62] Gottesman D, Kitaev A, Preskill J 2001 *Phys. Rev. A* **64** 12310
- [63] Noh K, Chamberland C, Brandão F G S L 2022 *PRX Quantum* **3** 10315
- [64] Vuillot C, Asasi H, Wang Y, Pryadko L P, Terhal B M 2019 *Phys. Rev. A* **99** 32344
- [65] Guillaud J, Mirrahimi M 2019 *Phys. Rev. X* **9** 041053

- [66] Darmawan A S, Brown B J, Grimsmo A L, Tuckett D K, Puri S 2021 *PRX Quantum* **2** 30345
- [67] Kapit E 2017 *Quantum Sci. Technol.* **2** 33002
- [68] Reed M D, DiCarlo L, Nigg S E, Sun L, Frunzio L, Girvin S M, Schoelkopf R J 2012 *Nature* **482** 382
- [69] Kelly J, Barends R, Fowler A G, et al. 2015 *Nature* **519** 66
- [70] Cramer J, Kalb N, Rol M A, Hensen B, Blok M S, Markham M, Twitchen D J, Hanson R, Taminiau T H 2016 *Nat. Commun.* **7** 1
- [71] Takita M, Cross A W, Córcoles A D, Chow J M, Gambetta J M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 180501
- [72] Wootton J R, Loss D 2018 *Phys. Rev. A* **97** 52313
- [73] Chen Z, Satzinger K J, Atalaya J, et al. 2021 *Nature* **595** 383
- [74] Kitaev A Y 1997 *Russ. Math. Surv.* **52** 1191
- [75] Bravyi S B, Kitaev A Y 1998 arXiv: quant-ph/9811052 [quant-ph]
- [76] Fowler A G, Mariantoni M, Martinis J M, Cleland A N 2012 *Phys. Rev. A* **86** 32324
- [77] Raussendorf R, Harrington J, Goyal K 2006 *Ann. Phys.* **321** 2242
- [78] Raussendorf R, Harrington J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 190504
- [79] Raussendorf R, Harrington J, Goyal K 2007 *New J. Phys.* **9** 199
- [80] Fowler A G, Whiteside A C, McInnes A L, Rabbani A 2012 *Phys. Rev. X* **2** 41003
- [81] Dennis E, Kitaev A, Landahl A, Preskill J 2002 *J. Math. Phys.* **43** 4452
- [82] Knill E 2005 *Nature* **434** 39
- [83] Zeng B, Chen X, Zhou D L, Wen X G 2019 *Quantum Information Meets Quantum Matter* (New York: Springer) pp3-361
- [84] Satzinger K J, Liu Y J, Smith A, Knapp C, Newman M, Jones C, Chen Z, Quintana C, Mi X, Dunsworth A, Others 2021 *Science* **374** 1237
- [85] Liu Y J, Shtengel K, Smith A, Pollmann F 2021 arXiv: 2110.02020 [quant-ph]
- [86] Horsman C, Fowler A G, Devitt S, Van Meter R 2012 *New J. Phys.* **14** 123011
- [87] Bonilla Ataides J P, Tuckett D K, Bartlett S D, Flammia S T, Brown B J 2021 *Nat. Commun.* **12** 1
- [88] Bombin H, Martin-Delgado M A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 180501
- [89] Fowler A G 2011 *Phys. Rev. A* **83** 42310
- [90] Willsch D, Willsch M, Jin F, De Raedt H, Michielsen K 2018 *Phys. Rev. A* **98** 52348
- [91] Harper R, Flammia S T 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 80504
- [92] Gong M, Yuan X, Wang S, et al. 2022 *Natl. Sci. Rev.* **9** nwab011
- [93] Andersen C K, Remm A, Lazar S, Krinner S, Lacroix N, Norris G J, Gabureac M, Eichler C, Wallraff A 2020 *Nat. Phys.* **16** 875
- [94] Krinner S, Lacroix N, Remm A, et al. 2021 arXiv: 2112.03708 [quant-ph]
- [95] Sundaresan N, Yoder T J, Kim Y, Li M, Chen E H, Harper G, Thorbeck T, Cross A W, Córcoles A D, Takita M 2022 arXiv: 2203.07205 [quant-ph]
- [96] Khaneja N, Reiss T, Kehlet C, Schulte-Herbrüggen T, Glaser S J 2005 *J. Magn. Reson.* **172** 296
- [97] De Fouquieres P, Schirmer S G, Glaser S J, Kuprov I 2011 *J. Magn. Reson.* **212** 412
- [98] Hu L, Ma Y, Cai W, et al. 2019 *Nat. Phys.* **15** 503
- [99] Gao Y Y, Lester B J, Chou K S, Frunzio L, Devoret M H, Jiang L, Girvin S M, Schoelkopf R J 2019 *Nature* **566** 509
- [100] Chou K S, Blumoff J Z, Wang C S, Reinhold P C, Axline C J, Gao Y Y, Frunzio L, Devoret M H, Jiang L, Schoelkopf R J 2018 *Nature* **561** 368
- [101] Ma Y, Xu Y, Mu X, et al. 2020 *Nat. Phys.* **16** 827
- [102] Li L, Zou C L, Albert V V, Muralidharan S, Girvin S M, Jiang L 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 30502
- [103] Puri S, Boutin S, Blais A 2017 *npj Quantum Inf.* **3** 1
- [104] Bourassa J, Beaudoin F, Gambetta J M, Blais A 2012 *Phys. Rev. A* **86** 13814
- [105] Grimsmo A L, Combes J, Baragiola B Q 2020 *Phys. Rev. X* **10** 11058
- [106] Ofek N, Petrenko A, Heeres R, et al. 2016 *Nature* **536** 441
- [107] Heeres R W, Reinhold P, Ofek N, Frunzio L, Jiang L, Devoret M H, Schoelkopf R J 2017 *Nat. Commun.* **8** 94
- [108] Gertler J M, Baker B, Li J, Shirol S, Koch J, Wang C 2021 *Nature* **590** 243
- [109] Touzard S, Grimm A, Leghtas Z, et al. 2018 *Phys. Rev. X* **8** 21005
- [110] Lescanne R, Villiers M, Peronnin T, Sarlette A, Delbecq M, Huard B, Kontos T, Mirrahimi M, Leghtas Z 2020 *Nat. Phys.* **16** 509
- [111] Grimm A, Frattini N E, Puri S, Mundhada S O, Touzard S, Mirrahimi M, Girvin S M, Shankar S, Devoret M H 2020 *Nature* **584** 205
- [112] Albert V V, Noh K, Duivenvoorden K, et al. 2018 *Phys. Rev. A* **97** 32346
- [113] Noh K, Albert V V, Jiang L 2019 *IEEE Trans. Inf. Theory* **65** 2563
- [114] Flühmann C, Nguyen T L, Marinelli M, Negnevitsky V, Mehta K, Home J P 2019 *Nature* **566** 513
- [115] de Neeve B, Nguyen T L, Behrle T, Home J P 2022 *Nat. Phys.* **18** 296
- [116] Campagne-Ibarcq P, Eickbusch A, Touzard S, et al. 2020 *Nature* **584** 368
- [117] Terhal B M, Weigand D 2016 *Phys. Rev. A* **93** 12315
- [118] Royer B, Singh S, Girvin S M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 260509
- [119] Eastin B, Knill E 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 110502
- [120] Gottesman D, Chuang I L 1999 *Nature* **402** 390
- [121] Zhou X, Leung D W, Chuang I L 2000 *Phys. Rev. A* **62** 52316
- [122] Bravyi S, Kitaev A 2005 *Phys. Rev. A* **71** 22316
- [123] Meier A M, Eastin B, Knill E 2012 arXiv: 1204.4221 [quant-ph]
- [124] Chamberland C, Cross A W 2019 *Quantum* **3** 143
- [125] Chamberland C, Jochym-O'Connor T, Laflamme R 2017 *Phys. Rev. A* **95** 22313
- [126] Campbell E T, Terhal B M, Vuillot C 2017 *Nature* **549** 172
- [127] Rosenblum S, Reinhold P, Mirrahimi M, Jiang L, Frunzio L, Schoelkopf R J 2018 *Science* **361** 266
- [128] Krastanov S, Albert V V, Shen C, Zou C L, Heeres R W, Vlastakis B, Schoelkopf R J, Jiang L 2015 *Phys. Rev. A* **92** 40303
- [129] Heeres R W, Vlastakis B, Holland E, Krastanov S, Albert V V, Frunzio L, Jiang L, Schoelkopf R J 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 137002
- [130] Wang W, Hu L, Xu Y, Liu K, Ma Y, Zheng S B, Vijay R, Song Y P, Duan L M, Sun L 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 223604
- [131] Lloyd S, Viola L 2001 *Phys. Rev. A* **65** 10101
- [132] Shen C, Noh K, Albert V V, Krastanov S, Devoret M H,

- Schoelkopf R J, Girvin S M, Jiang L 2017 *Phys. Rev. B* **95** 134501
- [133] Hu L, Mu X, Cai W, Ma Y, Xu Y, Wang H, Song Y, Zou C L, Sun L 2018 *Sci. Bull.* **63** 1551
- [134] Cai W, Han J, Hu L, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 90504
- [135] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photonics* **5** 222
- [136] Backes K M, Palken D A, Kenany S A, et al. 2021 *Nature* **590** 238
- [137] Wang W, Wu Y, Ma Y, Cai W, Hu L, Mu X, Xu Y, Chen Z J, Wang H, Song Y P, Yuan H, Zou C L, Duan L M, Sun L 2019 *Nat. Commun.* **10** 4382
- [138] Wang W, Chen Z J, Liu X, et al. 2022 *Nat. Commun.* **13** 1
- [139] Zhou S, Zhang M, Preskill J, Jiang L 2018 *Nat. Commun.* **9** 1
- [140] Górecki W, Zhou S, Jiang L, Demkowicz-Dobrzański R 2020 *Quantum* **4** 288
- [141] Pfaff W, Axline C J, Burkhardt L D, Vool U, Reinhold P, Frunzio L, Jiang L, Devoret M H, Schoelkopf R J 2017 *Nat. Phys.* **13** 882
- [142] Muralidharan S, Li L, Kim J, Lütkenhaus N, Lukin M D, Jiang L 2016 *Sci. Rep.* **6** 1
- [143] Preskill J 2018 *Quantum* **2** 79
- [144] Endo S, Cai Z, Benjamin S C, Yuan X 2021 *J. Phys. Soc. Jpn.* **90** 32001
- [145] McArdle S, Yuan X, Benjamin S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 180501
- [146] Koh J M, Tai T, Lee C H 2022 arXiv: 2207.14322 [cond-mat.str-el]
- [147] Li Y, Benjamin S C 2016 *Phys. Rev. A* **94** 42303
- [148] Gottesman D 2016 arXiv: 1610.03507 [quant-ph]
- [149] Chao R, Reichardt B W 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 50502
- [150] Ma W L, Zhang M, Wong Y, Noh K, Rosenblum S, Reinhold P, Schoelkopf R J, Jiang L 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 110503
- [151] Jahn A, Eisert J 2021 *Quantum Sci. Technol.* **6** 33002
- [152] Almheiri A, Dong X, Harlow D 2015 *J. High Energy Phys.* **2015(4)** 1
- [153] Pastawski F, Yoshida B, Harlow D, Preskill J 2015 *J. High Energy Phys.* **2015(6)** 1
- [154] Vijay S, Haah J, Fu L 2016 *Phys. Rev. B* **94** 235157
- [155] Hong Y, Young J T, Kaufman A M, Lucas A 2022 arXiv: 2205.12998 [quant-ph]

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Advances in quantum error correction based on superconducting quantum systems^{*}

Chen Zi-Jie¹⁾ Pan Xiao-Xuan²⁾ Hua Zi-Yue²⁾ Wang Wei-Ting²⁾
Ma Yu-Wei²⁾ Li Ming¹⁾ Zou Xu-Bo¹⁾ Sun Lu-Yan^{2)†} Zou Chang-Ling^{1)‡}

1) (*Key Laboratory of Quantum Information, Chinese Academy of Sciences,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

2) (*Center for Quantum Information, Institute for Interdisciplinary Information Sciences,
Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(Received 19 September 2022; revised manuscript received 10 October 2022)

Abstract

Information processing technology based on the basic principle of quantum mechanics shows great potential applications in computing, sensing and other fields, and is far superior to classical technology. With the advance of experimental technology, quantum control technology develops rapidly. Compared with other quantum information processing platforms, the superconducting system based on solid materials has the advantages of accurate quantum controllability, excellent quantum coherence and the potential for large-scale integration. Therefore, superconducting quantum system is one of the most promising platforms for quantum information processing. The existing superconducting circuits, which can integrate about one hundred qubits, have already demonstrated the advantages of quantum systems, but further development is limited by system noise. In order to break through this bottleneck, quantum error correction technology, which is developed from the classical error correction technology, has attracted extensive attention. Here, we mainly summarize the research progress of quantum error correction in superconducting quantum systems including the basic principles of superconducting quantum systems, the quantum error correction codes, the related control techniques and the recent applications. At the end of the article, we summarize seven key problems in this field.

Keywords: quantum error correction, superconducting circuits, fault-tolerant quantum computation, bosonic codes

PACS: 03.67.Pp, 85.25.-j, 03.67.Lx, 89.70.Kn

DOI: 10.7498/aps.71.20221824

^{*} Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2017YFA0304303), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 92165209, 11925404, 11874342, 11922411, 12061131011), and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. BX2021167).

[†] Corresponding author. E-mail: lyansun@mail.tsinghua.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: clzou321@ustc.edu.cn



基于超导量子系统的量子纠错研究进展

陈子杰 潘啸轩 华子越 王伟婷 马雨玮 李明 邹旭波 孙麓岩 邹长铃

Advances in quantum error correction based on superconducting quantum systems

Chen Zi-Jie Pan Xiao-Xuan Hua Zi-Yue Wang Wei-Ting Ma Yu-Wei Li Ming Zou Xu-Bo Sun Lu-Yan Zou Chang-Ling

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 240305 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20221824

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221824>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

连续变量量子计算和量子纠错研究进展

Research advances in continuous-variable quantum computation and quantum error correction

物理学报. 2022, 71(16): 160305 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220635>

基于光量子态避错及容错传输的量子通信

Quantum error rejection and fault tolerant quantum communication

物理学报. 2018, 67(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180598>

基于测量的量子计算研究进展

Research progress of measurement-based quantum computation

物理学报. 2021, 70(21): 210301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210923>

利用超导量子电路模拟拓扑量子材料

Topological quantum material simulated with superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181857>

基于金刚石氮-空位色心自旋系综与超导量子电路混合系统的量子节点纠缠

Entanglement of quantum node based on hybrid system of diamond nitrogen-vacancy center spin ensembles and superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(7): 070302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172634>

新型超导量子比特及量子物理问题的研究

Novel superconducting qubits and quantum physics

物理学报. 2018, 67(22): 228501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180845>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

基于集成光芯片的量子模拟研究进展*

陈阳 张天炆 郭光灿 任希锋†

(中国科学技术大学, 中国科学院量子信息重点实验室, 合肥 230026)

(2022 年 10 月 10 日收到; 2022 年 11 月 17 日收到修改稿)

量子模拟是利用可控的量子系统来模拟其他未知或难以控制的量子体系, 通过这种方法来处理一些在经典计算机上无法进行仿真的复杂量子体系, 用于如基础物理探索、分子动力学研究、药物研发等相关领域. 集成光学系统是实现量子模拟的一个优秀的实验平台, 能实现如无序系统、拓扑绝缘体、非线性和非厄米体系等凝聚态物理结构的模拟, 或用于实现量子随机行走、玻色取样等以演示量子优越性. 本文介绍多种量子模拟物理模型的理论基础, 结合如硅、玻璃、铌酸锂等波导体系的优势, 综述近年来利用集成光芯片实现量子模拟的研究进展, 包括了在集成光芯片上基于模拟型和数字型这两类量子模拟实现凝聚态物理模型仿真、量子随机行走、玻色取样等, 探讨集成光芯片上的不同的量子模拟技术的实用化前景和发展趋势.

关键词: 量子模拟, 集成光芯片, 凝聚态物理模拟, 多端口干涉仪**PACS:** 42.79.Gn, 03.67.Ac, 42.82.Et, 42.60.Da**DOI:** 10.7498/aps.71.20221938

1 引言

自 1981 年费曼提出量子计算机的概念以来^[1], 虽然实现通用式量子计算机仍然是一个长期的目标, 但实现一些复杂量子体系的量子模拟任务成为研究复杂物理问题如低温物理、多体物理的关键方法. 在经典计算机上模拟量子体系时, 由于描述量子态参数所需的存储空间随着系统尺寸指数增长, 因此, 利用可控的量子系统, 例如超导系统、原子或离子体系、核以及电子自旋系统、光学体系等^[2–5]实现量子模拟, 可以有效解决在其他体系中难以模拟的任务. 光学体系天然可以用于编码量子比特, 具有较好的可操控性, 如可以利用路径、偏振、轨道角动量等多种自由度来编码信息, 且一般不需要低温环境. 此外由于具有较好的消相干能力, 光学系统是优异的承载量子信息的载体. 在传统光通信技术中, 光在自由空间传播过程中相位等信息容易

受到外界环境干扰, 集成光学系统可以利用光波导将光场束缚在微纳尺度, 从而实现稳定的信息传输, 因此在众多的光学体系中展现出独特的优势. 近些年来, 集成光学系统也因其小型化、稳定性高、规模可扩展等优势, 在量子通信、量子计算等方向展现出实用化的应用前景^[6–9].

得益于不同材料系统一些特有的优势, 如相位可调节能力、三维加工能力、高非线性系数等, 集成光学系统近十多年被广泛应用于实现如量子随机行走^[10–14]、玻色取样^[15–20]、拓扑绝缘体结构、非厄米以及非线性物理系统量子模拟^[21–26]. 基于集成光学系统的量子模拟也被用于研究分子基态能量、分子动力学^[27–29], 可以潜在用于药物分子设计等关键技术. 根据量子模拟设备不同的特性可以对其进行分类^[2], 如根据模拟设备实现量子系统细节的程度可区分为两类, 一类是全局系统的量子模拟, 用于研究如量子相变过程等; 另一类通过对每一个量子比特的精确控制和测量来准确理解要

* 国家自然科学基金 (批准号: 62061160487, 12204462)、中国博士后科学基金 (批准号: 2022M723061) 和中央高校基本科研业务费专项资金资助的课题.

† 通信作者. E-mail: renxf@ustc.edu.cn

模拟的量子体系的微观性质. 另外, 根据量子模拟设备实现量子操作的类型主要分为数字型 (digital) 和模拟型 (analog) 量子模拟. 其中前者基于量子线路, 一般包含了初态的制备、离散的量子逻辑门操作 (可分解为单比特、两比特量子门) 以及最终的态测量过程, 如集成光学系统中的多端口干涉仪结构. 后者由具有相似哈密顿量并且在一定程度上可控制的系统来实现量子模拟, 如光波导阵列、光子晶体、耦合腔阵列等.

本文基于集成光学系统介绍其在量子模拟研究领域的进展以及发展前景: 从基本的物理模型出发, 基于集成光学系统构建的晶格结构来介绍无序安德森局域化、拓扑绝缘体中的物理、非厄米以及非线性诱导的新物理现象; 基于多端口干涉仪结构介绍量子随机行走、玻色取样、量子化学模拟等过程. 通过对这些典型的、前沿的物理模型的梳理和介绍, 并且讨论这些物理模型在集成光学系统上物理实现的实验进展, 以期启发更多关于新奇物理模型的研究, 助力于新物理现象未来的实际应用探索.

2 集成光学系统

构成集成光学系统的材料体系种类繁多, 如硅基、铌酸锂、飞秒激光直写透明介质、III-V 组材料 (InP 和 GaAs)、稀土材料等实验平台 [6,30–32]. 关于不同材料的优缺点和用途, 读者可以查阅相应的文献, 本文简要介绍目前几种应用于量子模拟的主流集成光学材料体系: 1) 硅基集成光芯片, 如硅、掺杂二氧化硅、氮化硅波导等. 一方面, 通常所采用的互补金属氧化物半导体 (CMOS) 半导体加工技术经历了五十多年的发展, 具有成熟的工艺; 另一方面, 由于该体系有较高的折射率对比度, 因而具备较好的光场束缚能力, 可以实现更加小型化、集成化的系统. 基于硅的高三阶非线性系数, 可以利用四波混频效应在硅基波导中产生量子光源 [9,33–40], 另外还可以集成超导纳米线实现光子探测. 在量子模拟方面, 基于热调相位的马赫-曾德尔干涉仪构建可重构的离散型量子网络可用于研究量子随机行走过程、量子化学模拟等, 但存在相位调节的稳定性和调制速度慢的问题. 2) 铌酸锂基集成光芯片, 在制备波导时通常采用质子交换或者钛扩散技术以实现芯层折射率的增大. 该系统具有超低的损耗, 较高的二阶非线性系数和电光系数, 因此可以

利用自发参量下转换过程制备量子光源 [41–43]. 电调相位调制速度快的优势使其成为制备主动非线性器件 (如光开关、频率转换器件) 的优秀材料体系. 此外, 光子探测和电子学器件也可集成到这一系统中. 目前该系统主要应用在实现量子通信功能, 近来被用于研究非线性系统中的拓扑物理. 作为一种新兴的可动态调控的材料, 期望基于铌酸锂基的集成光芯片体系未来能够应用于实现更多物理模型量子模拟, 并且结合量子光学发挥更多的实际用途. 3) 飞秒激光直写光芯片, 通过物镜将短脉冲、高峰值功率的飞秒激光聚焦到透明材料 (如玻璃、聚合物) 中, 触发非线性吸收过程从而改变聚焦位置处材料折射率. 该系统利用高精度位移台控制样品的移动以决定波导走向, 具备可三维加工、可快速制备的优势, 因此利用飞秒激光直写技术制备的光波导阵列成为近些年实现一些难以控制的电子系统中的凝聚态物理模型量子模拟的优秀实验平台 [31]. 该系统目前存在调制难度高, 尺寸大的问题.

如图 1 所示, 在集成光学系统中, 实现凝聚态物理模型量子模拟主要用到了光波导阵列、耦合环腔阵列、光子晶体等结构, 这一类量子模拟可以归结为模拟型量子模拟; 而基于级联的分束器或者马赫-曾德尔干涉仪的多端口干涉仪结构常被用于研究离散型量子随机行走、玻色取样、量子化学模拟等, 属于离散型量子模拟. 接下来介绍不同系统用于实现量子模拟的基本原理, 将在第 3 和第 4 节中介绍这些结构在集成光量子模拟方面的研究进展.

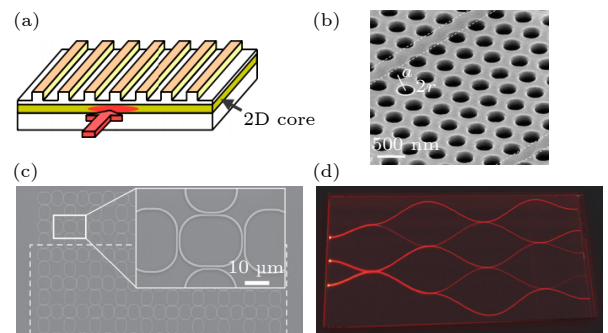


图 1 几种常见的用于量子模拟的集成光学系统 (a) 耦合光波导阵列 [44]; (b) 光子晶体; (c) 耦合环腔阵列 [45]; (d) 多端口干涉仪 [17]

Fig. 1. Several integrated optical platforms for quantum simulation: (a) Coupled optical waveguide array [44]; (b) photonic crystal; (c) array of coupled ring resonators [45]; (d) multiport interferometer [17].

2.1 光波导阵列

在傍轴近似条件下, 任意 T 时刻在光波导阵列垂直于传播方向的横截面 $\mathbf{r}_\perp$ 位置上的光场波函数 $\Psi(\mathbf{r}_\perp, T)$ (单波导有效折射率为 n_{eff} , 真空光波长为 λ_0) 满足薛定谔形式的传播方程^[25,46–48]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial T} = -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{opt}}} \nabla_\perp^2 \Psi(\mathbf{r}_\perp, T) + V_{\text{opt}}(\mathbf{r}_\perp) \Psi(\mathbf{r}_\perp, T), \quad (1)$$

其中有效光学质量为 $m_{\text{opt}} = \hbar\beta/v$ (光在波导中的群速度 $v = c/n_{\text{eff}}$, 传播常数 $\beta = n_{\text{eff}}k_0$, $\hbar$ 为约化普朗克常数, 波矢大小 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$), 波导阵列 $\mathbf{r}_\perp$ 处的折射率分布 $n(\mathbf{r}_\perp)$ 等效为有效光学势场 $V_{\text{opt}} = (\hbar k_0 c) \times [(n^2(\mathbf{r}_\perp) - n_{\text{eff}}^2)/(2n_{\text{eff}}^2)]$. 为了直观地与电子系统中的薛定谔方程对比, (1) 式中光沿传播方向的演化转换成了光场随时间的演化关系. 由于传播方程与量子力学中薛定谔方程的相似性, 光在波导阵列中的传播类似于电子在固体系统 (如周期晶格结构、无序系统、准晶结构) 中的传播过程. 光波导阵列系统中 (通常考虑单模波导), 每个波导位置处折射率分布对应于固体系统中的在位束缚势 (on-site potential), 每个波导的模式之间的重叠引起的光在波导之间的耦合对应着固体系统中电子隧穿 (tunneling). 通过控制波导阵列结构中折射率的空间分布, 可以调制光在系统中的传播行为. 1965 年, 研究者基于耦合的光纤结构理论研究一维波导链中光的衍射行为^[49], 并随后于 1972 年在等间距砷化镓波导阵列中实验观察到了光的弹道式扩散过程^[50]. 目前描述耦合光波导阵列的能带分布以及光的传播普遍采用紧束缚近似模型处理, 即从亥姆霍兹方程出发, 把光在每个波导位置处的折射率分布作为零级近似, 其他位置波导的折射率分布作为微扰项进行处理. 紧束缚近似下, 耦合光波导阵列的哈密顿量可以表示为^[13]

$$\hat{H} = \sum_{i,j} \left[\beta_i a_i^\dagger a_i + C_{i,j} a_j^\dagger a_i + C_{j,i} a_i^\dagger a_j \right], \quad (2)$$

其中, β_i 是第 i 根波导的传播常数, $C_{i,j}$ 为光从第 i 根波导耦合到第 j 根波导的耦合系数, $a_i^\dagger$ (a_i) 为光在第 i 根波导的产生 (湮灭) 算符, 满足玻色子对易关系. 根据海森伯演化方程 $i\hbar d\hat{A}/dz = [\hat{A}, \hat{H}]$ 可以得到光在沿 z 轴传播的波导阵列中的传播方程:

$$i \frac{da_i^\dagger}{dz} = -\beta_i a_i^\dagger - \sum_j C_{i,j} a_j^\dagger. \quad (3)$$

(2) 式和 (3) 式是利用光波导阵列实现凝聚态物理

模型量子模拟的基础, 通过控制波导的折射率分布或者波导之间的间距, 可以模拟周期系统连续型量子随机行走、无序系统安德森局域化等现象.

2.2 光子晶体

不同于光波导中光场通常束缚在高折射率介质中, 基于光子晶体的波导其光场可以在低折射率介质中传播, 并且可以在结构中实现剧烈角度的弯折. 光子晶体是由高低折射率交替变化的介质材料组成的周期性介电结构, 其周期长度与光波长的数量级相近. 光子晶体具有类似于固体物理的晶格结构, 按照周期排布方式可以分为一维、二维和三维光子晶体. 光子晶体中光的传播依赖于周期结构中的布拉格反射过程, 当入射光的波长接近光子晶体的晶格周期时, 这种周期结构界面处的多重反射光会发生干涉从而形成光子能带. 特别地, 在折射率差较大的光子晶体结构中将出现光子带隙 (对于具有特定偏振在一定频率范围内的特定方向入射的光全部反射).

如图 1(b) 所示, 以二维光子晶体为例 (电介质中的空气孔或者空气中的电介质), 介质介电常数 $\varepsilon(\mathbf{r})$ 在 (x, y) 平面内周期排布, 其磁场满足布洛赫定理, 因此可以表示为 $\mathbf{H}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, 其中 $n, \mathbf{k}$ 分别是能带数和波矢, $\mathbf{u}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 和晶格具有相同的周期性. 电介质中频率为 ω 的磁场满足如下传播方程^[51]:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

其中 c 表示真空光速, 且有 $\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$, 结合布洛赫定理求解本征值方程 (4) 可以得到周期性光子晶体结构中横电模 (TE) 和横磁模 (TM) 的能带结构. 在光子晶体结构中通过引入线缺陷可以破坏晶格结构的对称性从而在缺陷位置形成缺陷态, 通过设计晶格结构可以使缺陷态处在光子带隙中, 这种方法被用于制备光子晶体波导^[51–53]. 近些年来, 研究者开始利用紧束缚近似模型求解光子能带^[54–57], 从而在光子晶体结构中实现拓扑绝缘体结构的模拟, 进而实现在微纳结构中光的方向性操纵和鲁棒性传输.

2.3 光学腔阵列

耦合腔阵列是由多个通过倏逝场耦合的具有高品质因数 (Q 值) 回音壁模式的光学微腔或者

缺陷腔构成^[58]. 考虑弱耦合的情况(耦合光学腔阵列中单个腔的模式可以用独立的腔模近似), 类似于光波导阵列和光子晶体的处理方式, 耦合光学腔阵列系统可以利用紧束缚近似模型来求解光子能带及本征电磁场分布. 光学微腔可以支持多个简并的模式, 如图 2 所示的顺时针和逆时针光学模式(赝自旋), 相邻两个环腔之间通过连接的波导实现光的耦合. 基于图 2(a) 所示的结构, Hafezi 等^[59]于 2011 年提出可以实现量子自旋霍尔系统的模拟, 基本原理是设计环腔和连接波导的长度保证光分别在两个结构中发生相长和相消干涉, 从而将光束束缚在环腔中. 同时要求连接左右两个环腔的上下分支波导的长度不同, 使得顺时针/逆时针光学模式从左边耦合到右边和与之相反方向上的耦合存在相位差异, 并且与赝自旋有关. 描述图 2(a) 所示的二维方格子耦合环腔阵列的哈密顿量为

$$H = -\kappa \left(\sum_{\sigma, x, y} \hat{a}_{\sigma x+1, y}^\dagger \hat{a}_{\sigma x, y} e^{-i2\pi\alpha y\sigma} + \hat{a}_{\sigma x, y}^\dagger \hat{a}_{\sigma x+1, y} e^{i2\pi\alpha y\sigma} + \hat{a}_{\sigma x, y+1}^\dagger \hat{a}_{\sigma x, y} + \hat{a}_{\sigma x, y}^\dagger \hat{a}_{\sigma x, y+1} \right), \quad (5)$$

其中 κ 是相邻两个环腔之间的耦合系数, $\hat{a}_{\sigma x, y}^\dagger (\hat{a}_{\sigma x, y})$

是光子在位置为 (x, y) 处的赝自旋 $\sigma = \pm 1$ (顺时针/逆时针光学模式) 的产生(湮灭)算符. 对于两个正交的赝自旋模式, 光子沿着由相邻的 4 个环腔构成的闭合路径运动时将获得一个与赝自旋有关的相位, 这种行为类似于带电粒子在外加磁场下沿闭合路径运动积累的 Aharonov-Bohm 相位. 由这样的单元组成的周期耦合环腔阵列可以实现光子的有效磁场, 进一步被用于模拟量子自旋霍尔效应, 在每个赝自旋表象下对应着整数霍尔效应系统. Hafezi 研究组^[45]的这一构想随后被他们于 2013 年在硅光子芯片上实现, 他们通过输入波导耦合进频率与拓扑边界模式共振的激光, 观察到了拓扑边界态的传播, 随后他们又利用该系统研究了边界态的鲁棒性的传输和拓扑数的测量. 2013 年, Chong 研究组^[60,61]在上述模型的基础上调制描述两个环腔之间耦合的散射矩阵(图 2(b)), 系统表现出了周期驱动(Floquet)拓扑绝缘体的能带结构, 该模型不需要精细调节连接波导引起的相位; 2020 年 Afzal 等^[62]首次在微纳光学系统(硅基八边形腔阵列系统)实现了这种反常 Floquet 拓扑绝缘体^[62]. 2018 年, Leykam 等^[63]设计图 2(c) 所示结构^[63], 通过中心连接环波导实现格点环腔之间的近邻和次近邻耦合(类似于 Haldane 模型^[64]), 随后他们

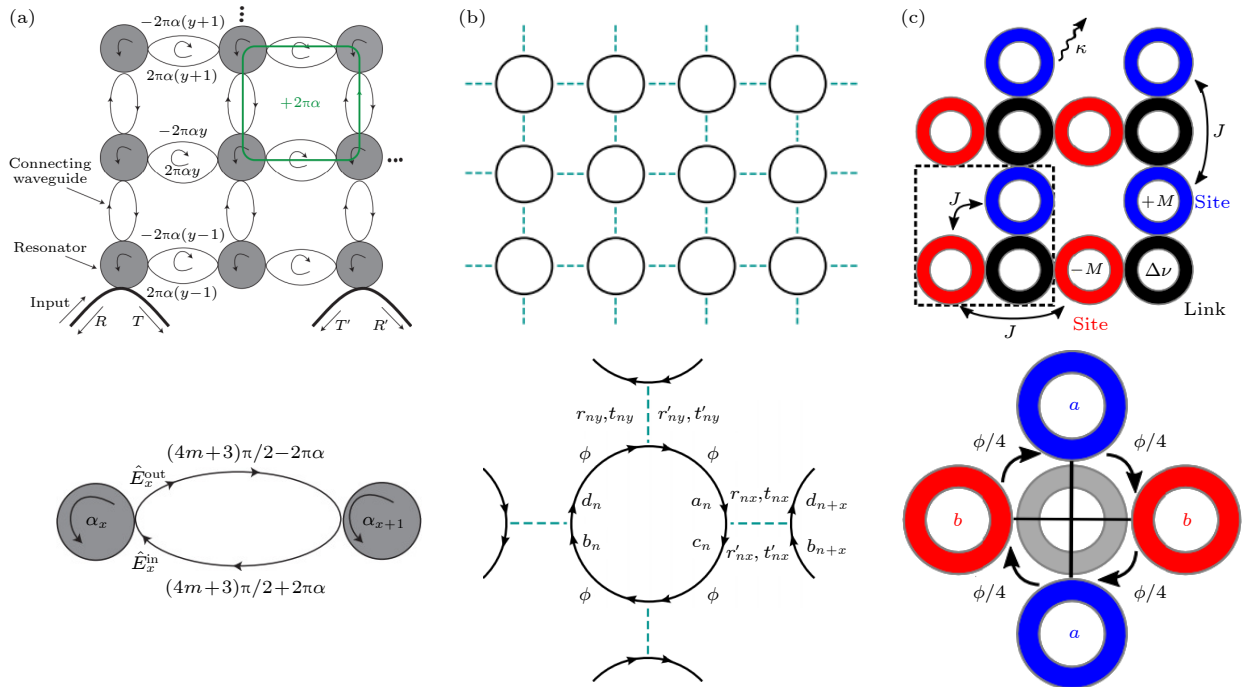


图 2 用于模拟拓扑绝缘体结构的耦合环腔阵列 (a) 量子自旋霍尔效应系统^[59]; (b) 周期驱动 Floquet 拓扑绝缘体结构^[60]; (c) 反常量子霍尔效应系统^[63]. (a)–(c) 上列为周期阵列结构, 下列为周期结构中基本单位的物理图像

Fig. 2. Arrays of coupled ring resonators for simulations of topological insulators: (a) Quantum spin Hall effect^[59]; (b) Floquet topological insulators^[60]; (c) anomalous quantum Hall effect^[63]. The upper panel in (a)–(c): periodic coupled resonator arrays; lower panel: basic units in the periodic structures.

利用硅环腔结构实现了这种反常量子霍尔系统模拟(零磁通量),并观察到了鲁棒性的拓扑边界态的传输^[65].

2.4 多端口干涉仪

多端口干涉仪主要由分束器和相移器组成,可以实现多端口的任意幺正变换. 1994年, Reck等^[66]最早提出图3(a)所示的三角形结构,随后2016年 Clements等^[67]提出矩形结构的多端口干涉仪结构,使得原先实现 N 端口任意幺正变换的结构深度缩短到 N 步. 这两种结构能够实现 N 端口任意幺正变换的原理都是基于对幺正矩阵的分解,通过将某一特定幺正矩阵多次分解得到对角矩阵,分解过程可以拆分成多个变换矩阵 $T_{p,q}$ 相乘(变换矩阵仅作用在 p, q 两个端口). 对角矩阵实验上通过处在特定端口的相移器实现,变换矩阵 $T_{p,q}$ 由可调分束比的分束器和相移器实现. 这两种构型的多端口干涉仪可用于实现离散型量子随机行走、玻色取样以及量子化学模拟等研究.

3 模拟型量子模拟

3.1 无序系统

无序系统普遍出现在固体物理体系中关于输运过程、电导等的研究^[69–72], 1958年, Phillip Ander-

son^[73]提出晶格结构中的无序导致电子局域化(安德森局域化),随后 Mott^[74]提出迁移率边的概念,即迁移率边以上的高能量电子表现出扩展性质,低能量电子表现出局域化性质. 安德森局域化现象依赖于介质的维度,对于一维无序系统所有的态都是局域的. 随着对无序系统的深入了解,研究发现无序系统中局域态的局域化长度以及波的传播受到其结构的种类影响^[69]. 无序种类由无序谱表征,两个极端情况分别为有序系统和非关联无序系统,目前对于无序系统分类所使用的有序度量(order metric)的研究仍是一个开放的问题. 尽管对于无序分类的度量及其影响无序系统中波传播行为的理论计算是个很复杂的问题,近些年来利用集成光学系统研究无序系统中的物理问题取得了一系列的进展,这得益于该系统的可操纵能力,可以对无序结构进行灵活设计.

早在1989年就已经有理论预言光在无序系统中横向的局域化现象^[75],直到2007年以色列理工学院 Segev 研究组^[76]才首次在二维光子晶体结构中观察到这一现象(如图4(a)). 他们利用光感应技术在10 mm长铌酸锶钡光折变晶体(SBN:60)中诱导周期性的三角晶格式折射率分布,进一步在每个格点上加入随机扰动使得折射率以一定的无序度改变,另外结构中要保证无序是不随时间变化的,即沿传播方向折射率分布不变^[76]. 2008年 Lahini

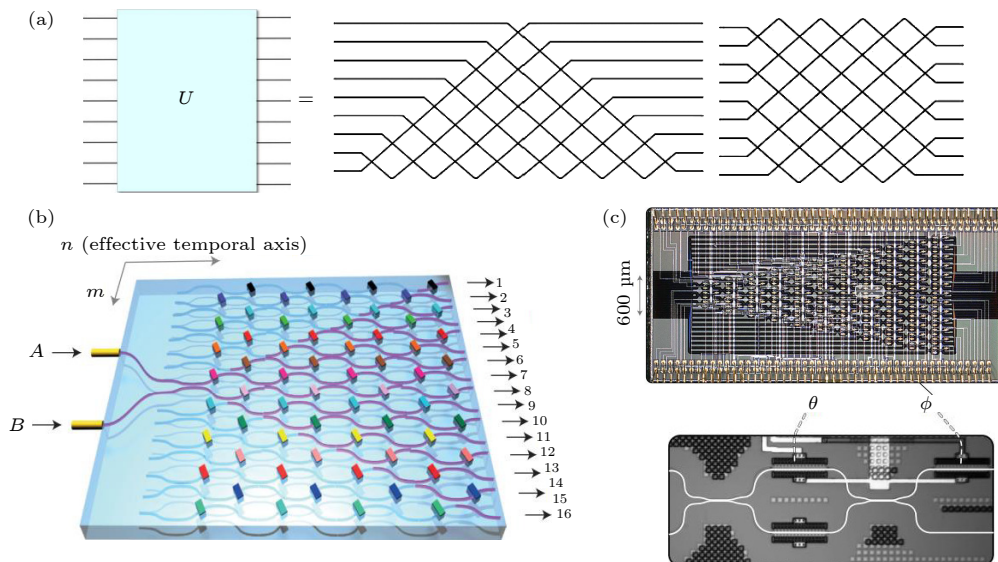


图3 多端口干涉仪用于量子模拟 (a) 三角形结构(左)^[66]和矩形结构(右)^[67]的多端口干涉仪用于实现任意的幺正变换; (b) 双光子在离散型量子随机行走芯片中的安德森局域化现象^[14]; (c) 硅基多端口干涉仪^[68], 由可调马赫-曾德尔干涉仪组成

Fig. 3. Multiport interferometer for quantum simulation: (a) Realizing arbitrary unitary operator using triangular (left)^[66] and rectangular (right)^[67] mesh of beam splitters; (b) two-photon Anderson localization in discrete-time quantum random walk circuits^[14]; (c) multiport interferometer in a silicon-on-insulator platform^[68], which is consist of tunable Mach-Zehnder interferometers.

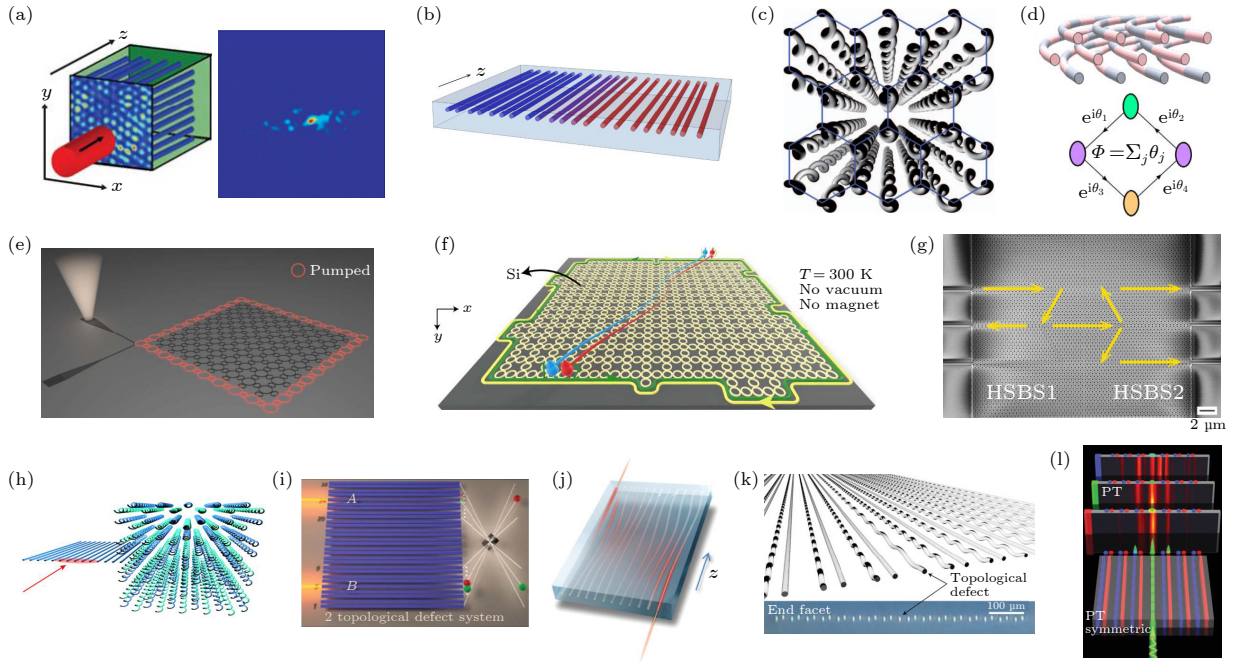


图 4 (a) 二维无序光子晶格中的安德森局域化现象^[76]; (b) 一维准周期飞秒激光直写光波导阵列^[85]; (c) 飞秒激光直写螺旋式波导阵列结构实现 Floquet 拓扑绝缘体^[25]; (d) 弯曲波导阵列实现等效磁场, 模拟 Aharonov-Bohm 效应^[89]; 在耦合环腔阵列结构中产生 (e) 拓扑绝缘体激光^[90]; (f) 拓扑保护多光子量子光源^[91]; (g) 基于谷光子晶体结构设计等比分束器并实现双光子量子干涉^[57]; (h) 无序拓扑安德森绝缘体结构^[92]; (i) 基于一维 SSH 模型在硅基结构中产生关联光子对^[93]; (j) “含时”哈密顿量系统用于研究拓扑泵浦^[87]; (k) 奇偶-时间对称与对称破缺界面处局域的拓扑边界态^[94]; (l) 非厄米 SSH 模型中非线性对奇偶-时间对称相变过程的影响^[22]

Fig. 4. (a) Anderson localization in a two-dimensional photonic lattice^[76]; (b) simulation of one-dimensional quasicrystals in femto-second-laser-written (FLW) optical waveguides^[85]; (c) realization of photonic Floquet topological insulators in a FLW helical waveguide array^[25]; (d) realization of an effective magnetic field and simulation of Aharonov-Bohm effect using curved waveguide arrays^[89]; generation of (e) topological insulator laser^[90] and (f) multiphoton quantum source^[91] in coupled resonator arrays; (g) design of a 1:1 topological beam splitter in valley photonic crystals and realize the two-photon quantum interference^[57]; (h) photonic topological Anderson insulator^[92]; (i) generation of biphoton state in a SSH photonic lattice^[93]; (j) topological pumping in a system described by a time-varying Hamiltonian^[87]; (k) topological edge state in a photonic lattice at the interface between the structures with and without parity-time symmetry^[94]; (l) nonlinear tuning of PT symmetry and non-Hermitian topological states^[22].

等^[44]在一维等间距的耦合光波导阵列(铝砷化镓波导)中也实验观察到了安德森局域化现象, 描述该系统的哈密顿量可以用(2)式表示, 实验中他们控制耦合波导之间间距不变, 而每个波导的宽度在一定范围内随机变化(对角无序). 他们理论预测并且实验观察到了局域态的传播, 对于有限系统同时也存在扩展的本征态, 而这些扩展态在无限系统下将是局域的, 只是局域化长度会更大. 早期这两项研究工作也都讨论了非线性效应对于安德森局域化的影响, 他们发现非线性效应会增强局域化过程, 这与更早之前非线性自聚焦效应导致的光孤子的结论相像^[77]. 随后研究者也在波导间距随机变化(非对角无序)的飞秒激光直写玻璃光波导阵列中观察到了安德森局域化现象^[78]. 光在不同无序度下的扩散过程也被广泛研究并被实验上观察到, 如光在周期系统中的扩散是弹道式输运过程^[13],

在无序系统中表现出局域化特征^[44,71,76], 在一定无序度的结构中表现出扩散式过程^[79](扩散速度介于前二者之间). 安德森局域化要求势场是不随时间变化的, 而对于无序含时的系统, Segev 研究组^[80]发现波的输运表现出超传输(hyper-transport)现象, 即扩散速度快于周期系统中的弹道式输运过程, 并且动量空间谱宽也随时间扩展. 近来, 人们在无序砷酸锂光子晶体和硅光子晶体结构中也观察到了安德森局域化现象^[81,82].

耦合光波导阵列系统灵活的可调控能力也被用来研究准周期晶格结构(介于周期系统与无序系统之间)中的物理. 准周期系统缺少长程平移对称性, 表现出准周期性(长程有序), 其中两个典型的例子分别为 Harper 模型和 Fibonacci 模型. Harper 模型是外加磁场的二维方格模型在一维模型上的投影, 可以用来研究 Hofstadter 蝴蝶能谱、拓扑边

界态等^[83]. Harper 模型和 Fibonacci 模型理论上具有相同的拓扑分类^[84], 随后实验上通过对局域边界态有无的观察证实了这一观点^[85](如图 4(b)所示). 通过调制波导折射率和耦合系数的分布, 研究者实验上分别实现了对角^[86]和非对角^[87]准周期一维光波导阵列, 并在相应系统中观察到了局域-去局域化转变过程. 另外, Segev 研究组^[88]利用原先样品的制备技术在准周期系统中引入无序度, 并且观察到了与周期系统不同的无序增强准周期系统输运过程的现象.

3.2 拓扑光子学

拓扑绝缘体是一类在材料体内绝缘, 特定边界上表现出导体性质的结构. 这一类结构具有一些优良的性质, 如电子的鲁棒性传输, 没有背向散射等^[23,95]. 2016 年诺贝尔物理学奖颁给了 David Thouless, Michael Kosterlitz 和 Duncan Haldane 三位物理学家以奖励他们在拓扑相变方面的研究. 拓扑绝缘体的研究起源于对于量子霍尔效应的拓展探索, 即电子在二维周期晶格势场下外加电磁场的行为. Thouless 等^[96]发现电子电导跟描述系统能带的常数有关 (TKNN 数), 系统的拓扑相由该拓扑数描述. 在具有不同拓扑性质的域 (domain) 的边界上有局域的边界态, 边界态的个数与两个域的拓扑数有关, 即体边对应关系. 拓扑相变不具备传统相变中的自发对称破缺过程, 而是伴随着拓扑数的突然变化. 2008 年, Haldane 和 Raghu^[97]从基本的麦克斯韦方程出发, 理论提出在破坏时间反演对称性的光子晶体结构中也具备像电子系统中的拓扑边界态现象. 随后 2009 年 Wang 等^[98]在磁光子晶体中进行了实验验证, 但相应材料体系的磁光系数较低, 往往需要超强的磁场, 这在实验上是比较难实现的. 近些年来随着集成光学系统加工工艺的成熟, 很多新奇的拓扑物理现象得以被实验实现.

拓扑相变过程要求系统的能带被打开, 对于二维周期系统, 需要通过破坏其时间反演对称性或者空间反转对称性来实现. 前面提到的在周期晶格结构中外加磁场可以破坏时间反演对称性, 而光学系统的磁效应比较弱难以实现拓扑能带, 取而代之的是通过设计哈密顿量实现有效磁场, 如周期性调制格点间跃迁概率、采用螺旋式波导阵列等. 2013 年 Rechtsman 等^[25]提出利用螺旋形波导结构破坏时间反演对称性 (*z*-reversal symmetry), 他们利用飞

秒激光直写技术制备如图 4(c) 所示的六角晶格光波导阵列, 通过坐标变换将势场分布转换为不含时的分布, 系统的哈密顿量可以表示为

$$i\partial_z\psi = -\frac{1}{2k_0}(\nabla + i\mathbf{A}(z))^2\psi - \frac{k_0 R^2 \Omega^2}{2}\psi - \frac{k_0 \Delta n}{n_0}\psi, \quad (6)$$

等效规范势 $\mathbf{A}(z) = k_0 R \Omega [\sin(\Omega z), -\cos(\Omega z), 0]$, Ω , R 分别为螺旋波导的转弯频率和半径. 紧束缚近似下, 波函数的演化满足 $i\partial_z\psi_n = \sum_{\langle m \rangle} c e^{i\mathbf{A}(z) \cdot \mathbf{r}_{mn}} \psi_m$, 其中 c 是波导间耦合系数. 由于哈密顿量耦合项是“含时”的, 其本征态需要用 Floquet 模式 $\psi_n = \exp(i\beta z) \phi_n$ (ϕ_n 是关于 z 的周期函数) 求解. 对于螺旋形六角晶格结构, 他们求解发现系统能带在狄拉克简并点打开, 并且在带隙中存在方向性传输的拓扑边界态. 由于拓扑边界态仅支持顺时针方向的模式, 因此该系统中边界态的传播没有背向散射, 并且对于边界上的缺陷或者无序的存在不敏感, 他们进一步在实验上证实了这些结论. 2014 年 Longhi^[99]提出通过线性调制光晶格中波导的传播常数来实现有效磁场, 从而用于构建 Aharonov-Bohm 笼子 (AB cage, 有效磁通量为 π). 这一理论设计于 2018 年被 Mukherjee 等^[89]在飞秒激光直写光波导阵列中观察到. 实验上他们采用图 4(d) 所示的弯曲式波导阵列结构, 等效地使得传播常数线性变化. 在加工每一根波导时沿着传播方向周期变化直写速度, 使得传播常数“含时”变化, 另外需要控制波导间距不变使得耦合系数近似恒为常数, 系统的等效哈密顿量为

$$H_{\text{eff}} = |J_{\text{eff}}| \sum_s \left(e^{i\theta_1} \hat{a}_s^\dagger \hat{b}_s + e^{-i\theta_2} \hat{a}_s^\dagger \hat{b}_{s-1} + e^{-i\theta_3} \hat{a}_s^\dagger \hat{c}_s + e^{i\theta_4} \hat{a}_s^\dagger \hat{c}_{s-1} + \text{H.c.} \right), \quad (7)$$

其中有效耦合系数 J_{eff} 是复数, $\hat{a}_s^\dagger$, $\hat{b}_s^\dagger$, $\hat{c}_s^\dagger$ ($\hat{a}_s$, $\hat{b}_s$, $\hat{c}_s$) 分别表示粒子在第 s 个晶胞 A , B , C 三种格点上的产生 (湮灭) 算符. 哈密顿量中的有效磁通量 $\Phi = \sum_j \theta_j$ 与周期调制传播常数的控制参数有关. 实验上他们展示了磁通量为 π 时, 分别在体内和边界上激发时光强的呼吸运动现象, 边界态的呼吸频率要远低于体态的呼吸频率. 值得一提的是, 2018 年 Keil 等提出通过在两个耦合波导中引入传播常数失谐的辅助波导也可以实现等效的 π 相位的耦合^[100], 他们进而以此构建了 AB 笼子并且观察到了体态和边界态的呼吸运动现象^[101].

在 2.3 节中介绍的基于耦合环腔阵列的拓朴结构具有时间反演对称性,但是在考虑了赝自旋后,哈密顿量中则引入了等效磁场,对于两种赝自旋其边界模式的手性相反.在这些系统中,只要结构的缺陷或者无序大小不会引起两种赝自旋模式混合,单向的边界模式就能受到拓朴保护.这些模型近来也被应用于拓朴激光、量子信息的研究:2018 年 Bandres 等^[90]在磷砷化镓铟(InGaAsP)环腔阵列中实现拓朴绝缘体激光,他们发现在拓朴平庸环腔阵列中出射多模激光,而在拓朴结构中出射单模激光(如图 4(e) 所示),并且在拓朴结构中产生的激光可以沿着边界传播,不受结构缺陷的影响,他们采用的环腔阵列结构基于图 2(a) 所示的量子自旋霍尔系统.同年 Mittal 等^[102]基于硅四波混频效应在类似的结构中(硅环腔阵列)实现了关联光子对的产生,并且发现当泵浦光、信号光和闲频光与边界模式的频率一致时,光子对的产生概率增强.随后 2021 年 Mittal 等^[103]基于反常量子霍尔模型以及双泵浦技术在硅环腔阵列中产生频率可调光子对,产生的光子对具有能量-时间纠缠特性,并用于量子干涉实验.2022 年 Dai 等^[91]基于 Floquet 拓朴绝缘体结构在硅环腔阵列中产生多光子纠缠态(如图 4(f) 所示),并且测量了在有无缺陷的结构中产生的纠缠态的保真度,从而证明了产生的 Einstein-Podolsky-Rosen 态受到了拓朴保护.

除了前面提到的具有时间反演对称性的耦合环腔阵列系统,研究发现在光子晶体中通过破坏系统的空间反转对称性也可以产生拓朴绝缘体结构.2007 年,牛谦研究组^[104]设计石墨烯六角晶格结构使得两个亚晶格格点能量不同,从而破坏空间反转对称性.他们发现该系统支持一对具有固有磁矩的赝自旋模式,并且与能带中能谷的位置有关(狄拉克简并点).他们进一步提出在外加电场下,不同能谷位置的载流子将沿着相反的方向传输,即能谷霍尔效应.基于这一模型,2013 年 Khanikaev 等^[105]在六角光子晶格结构中观察到了边界态传输,对于两个相反的赝自旋态激发条件下光子的传播方向相反.他们实验上也证实了当结构中的缺陷或无序大小不引起两个能谷的边界态模式混合时,边界态的传播受到拓朴保护.随后这种能谷霍尔拓朴绝缘体结构也被拓展到近红外波段,如飞秒激光直写光波导阵列^[106]、硅光子晶体结构^[107,108].近来谷光子晶体中的拓朴保护边界态也被用到量子信息领域:

2018 年 Barik 等^[109]在中心具有外延生长的 InAs 量子点的 GaAs 谷光子晶体结构中观察到了量子单光子源不同圆偏振模式的方向性发射.2021 年任希锋研究组与董建文研究组在^[57]硅能谷光子晶体结构中基于谷霍尔效应设计等比分束器结构(如图 4(g) 所示),并在该结构中实现了量子干涉过程.谷光子晶体中的这类边界模式也被用于实现拓朴激光^[110],由于此设计基于光子晶体结构,因此结构尺寸比耦合环腔阵列系统更加集成化.

值得一提的是,2018 年 Stutzer 等^[92]利用扭曲的六角晶格结构的波导阵列实现了光拓朴安德森绝缘体模型.实验上他们通过控制光入射到一维等间距波导阵列的角度来控制耦合进二维六角晶格波导阵列中的能量大小,从而实现处于带隙中心的模式的激发(如图 4(h) 所示).他们在破坏空间反演对称性的基础上改变子晶格中两个格点的能量(折射率)来破坏空间反转对称性,使得系统能带从拓朴相转变到平庸相,实验表现为观察不到边界态模式的激发.他们进一步又对每个格点的能量分布引入无序度(通过改变加工波导所使用的飞秒激光的扫描速度来改变折射率),系统能带又转变为拓朴能带,实验上观察到了手形边界态的方向性传播.

对于一维系统,产生拓朴相要求系统具有某种对称性,其中一个典型的例子是基于聚乙炔结构的 Su-Schrieffer-Heeger(SSH)模型.SSH 模型具有手性对称性,系统的哈密顿量可以表示为^[111]

$$H = \sum_{n=1}^N (t + \delta t) c_{A,n}^\dagger c_{B,n} + \sum_{n=1}^{N-1} (t - \delta t) c_{A,n+1}^\dagger c_{B,n} + \text{H.c.} \quad (8)$$

其中 $c_{A,n}^\dagger$, $c_{B,n}^\dagger$ ($c_{A,n}$, $c_{B,n}$) 分别表示粒子在第 n 个晶胞 A , B 两种格点上的产生(湮灭)算符.哈密顿量中描述粒子在元胞内和元胞间的跃迁概率分别为 $t \pm \delta t$, 通过计算能带的卷绕数(winding number)来描述 SSH 模型的拓朴相.2009 年 Malkova 等^[112]首次基于光学系统在光折变铌酸锶钽非线性晶体材料中实现了 SSH 模型模拟和拓朴边界态的观察.之后,2016 年 Blanco-Redondo 等在硅基光芯片上基于 SSH 模型观察到了拓朴边界态,并且研究了它们的波长依赖行为^[113],随后他们在该系统中产生了拓朴保护关联光子对^[93](如图 4(i) 所示).基于

飞秒激光直写光波导系统, 金贤敏研究组利用体态的演化过程测量了 SSH 模型的拓扑数^[36], 并研究了双光子经过该系统传输后的拓扑保护性质^[114]. SSH 模型可以很容易扩展到二维系统, 近几年在光子晶体、飞秒激光直写系统中得以实现^[37,115–117]. 另外, 基于 SSH 模型的边界态也被用于激光的研究^[118,119], 拓扑激光的概念最开始是由这些实验实现.

除了上述拓扑模型, 耦合光波导阵列系统可用于构造“含时”哈密顿量来实现拓扑泵浦. 在这一类系统中, 通过绝热改变系统的某个参数能够实现拓扑边界态的绝热演化, 即从其中一个边界态绝热演化到另一个边界态, 而不需要边界态之间的耦合. 2012 年 Kraus 等^[87]在铝砷化镓 (AlGaAs) 和飞秒激光直写玻璃光波导中分别研究了准晶结构中的拓扑边界态及其拓扑泵浦现象. 用于研究拓扑泵浦的结构如图 4(j) 所示, 系统的哈密顿量可表示为

$$H(\phi)\psi_n = t[1 + \lambda\cos(2\pi bn + \phi)]\psi_{n+1} + t[1 + \lambda\cos(2\pi b(n-1) + \phi)]\psi_{n-1}. \quad (9)$$

其中波导之间的耦合系数按照准周期分布, 而控制绝热泵浦的参数 ϕ 沿着波导传播方向 (z 轴) 缓慢变化. 他们研究发现二维整数量子霍尔系统的哈密顿量在考虑其中一个方向的周期性后, 与之对应的动量 k 与绝热泵浦参数有关 ($k = \phi a$, a 为晶格常数), 因此通过扫描参数 ϕ 可以实现拓扑边界态在动量空间的绝热演化. 实验上他们观察到了光从阵列格点的一端穿过格点绝热演化到另一端的现象. 近几年“含时”变化的波导阵列结构也被用来研究合成维度拓扑绝缘体^[120]、四维量子霍尔效应^[121]、Thouless 泵浦^[122,123]等物理现象.

3.3 非线性和非厄米系统

光在非线性介质中的传播存在群速度色散以及自相位调制效应, 可以产生超短脉冲或者光孤子. 非线性光波导阵列中的光孤子现象在 1988 年被首次提出^[124], 1998 年在铝砷化镓光波导阵列中实验观察到^[77], 随后 2003 年在二维光折变 SBN 光子晶格中也观察到了非线性光孤子现象^[125]. 描述这一类系统的哈密顿量为^[124]

$$i\frac{dE_n}{dz} + \beta E_n + c(E_{n+1} + E_{n-1}) + \lambda|E_n|^2 E_n + \mu(|E_{n+1}|^2 + |E_{n-1}|^2)E_n = 0, \quad (10)$$

其中 E_n 表示第 n 个格点处的电场强度, c 表示粒

子在相邻波导间的跃迁概率. 非线性项 $\lambda|E_n|^2 E_n$ 描述了第 n 个波导中的自相位调制, 最后一项表示了相邻波导的非线性重叠作用. 通常自相位调制起主导作用, 最后一项被省略. 早些年有大量的关于光波导阵列中光孤子的理论和实验研究工作^[77,125,126]. 非线性导致光局域化增强的现象很容易让人联想到拓扑绝缘体中局域的边界态, 近些年开始研究非线性效应对于拓扑结构的拓扑相和拓扑边界态的影响^[127]: 2018 年 Dobrykh 等^[128]在微波环腔阵列中研究 SSH 模型拓扑边界态的非线性调谐, 他们发现随着泵浦功率的增大, 电磁场更加局域在边界处, 并且观察到了非线性蓝移现象; 2020 年 Szameit 研究组^[26]利用飞秒激光直写光波导系统实验观察到光 Floquet 拓扑绝缘体中的孤子现象^[21], 随后他们又发现非线性效应可以改变系统能带拓扑性质, 从而使得原本拓扑平庸的结构在非线性作用下转变为拓扑绝缘体.

上述讨论的物理模型中描述系统的哈密顿量是厄米的, 即满足能量守恒定律. 而在真实的物理体系中, 系统与外界环境之间往往存在耦合, 有效非厄米哈密顿量近似是目前处理这一问题普遍采用的方法^[129]. 非厄米系统中一个有趣的现象是当系统满足奇偶-时间对称性 (PT 对称) 时, 系统表现出与厄米系统一样的实数能谱. 通过调制哈密顿量非厄米项的大小, 系统可以从 PT 对称未破缺相转变到 PT 对称破缺相. 系统处在 PT 对称破缺相时, 能谱不再是实数分布, 本征函数不再组成正交基. 非厄米系统表现出许多新奇的物理现象, 如趋肤效应、光漏斗效应等^[130,131]. 集成光学系统在一定程度上可以实现光增益或损耗, 近些年来被用于实现非厄米系统的量子模拟: 2010 年 Rüter 等^[132]基于掺铁铌酸锂材料研究光在具有 PT 对称的非厄米耦合波导结构中的传播, 他们利用材料中的光折变非线性效应在其中一根波导中引入光学增益, 实验上观察到了非互易的光的传输, 即改变输入端口后输出端光强分布发生变化. 2017 年 Szameit 研究组^[94]利用图 4(k) 所示的扭曲的飞秒激光直写光波导阵列结构实现了非厄米 SSH 模型的模拟, 他们研究了该系统中 PT 对称未破缺-破缺相转变过程与 SSH 模型二聚作用大小 (dimerization) 的关系, 最终实验上观察到了两个不同 PT 对称拓扑相的交界面上存在局域的边界态. 2021 年陈志刚研究组^[22]利用图 4(l) 所示的分段式波导阵列结构

实现非线性非厄米 SSH 模型的模拟, 他们理论研究了非线性项以及非厄米项对于系统能谱和本征态的影响, 并提出通过判断波导阵列中光流向有损或有增益的波导的方式来判断非线性作用是否破坏了系统的 PT 对称性. 实验上他们使用弱相干光在偏置光折变晶体 (SBN:61) 中写入这种带有损耗的分段式结构 (折射率改变可以维持 1 h 以上), 通过控制在界面缺陷波导处输入的偏置场的方向来实现自聚焦和自散焦非线性效应, 在实验上观察到了 PT 对称系统转变为 PT 对称破缺的系统. 另外非厄米系统的模拟也在光子晶体和环腔结构中可以实现 [133].

4 数字型量子模拟

2.4 节介绍了矩形多端口干涉仪, 它的简化版本 (MZ 干涉仪替换为等比分束器加相移器) 被用于模拟可实现通用量子计算的离散量子随机行走模型, 干涉仪网络中的分束器相当于同时实现了经典随机行走的抛硬币操作 (coin operator) 和平移操作 (shift operator). 2012 年 Osellame 研究组 [12] 利用飞秒激光直写系统制备离散型量子随机行走芯片, 他们通过输入双光子偏振纠缠态 $|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle \pm |V\rangle|H\rangle)$ ($|H\rangle/|V\rangle$ 表示水平/竖直偏振), 测量输出端口双光子的分布实验展示了玻色子 (费米子) 的聚束 (反聚束) 特征. 2013 年他们又利用该系统制备了无序分布的离散型量子随机行走线路 [14], 通过改变波导的相对长度使得光子在两个行走方向的其中一臂引入随机相位, 从而在无序离散型量子随机行走芯片中观察到了安德森局域化现象, 并观察到了偏振纠缠光子对的局域化现象 (如图 3(b) 所示). 2017 年 Pitsios 等 [134] 利用激光直写技术制备级联芯片模拟自旋链淬火后的纠缠增长过程, 其中第 1 个芯片通过双光子离散型量子随机行走过程模拟 5 个格点的自旋链上的演化过程, 第 2 个芯片上的热光相移器用于测量输出模式的纠缠度.

玻色取样问题研究的是 n 个不可区分的单光子输入到 $m(m > n)$ 模式干涉仪中输出端光子数的分布, 这一问题的求解对于经典计算机而言是 #P-hard 问题. 对于一些特定的取样问题, 基于这一模型近些年来在超导系统和光学系统中展示出了量子优越性 [135–137]. 在集成光学系统中, 2013 年

同年有 3 篇研究工作分别在飞秒激光直写光波导以及 SOI 波导系统中实验实现了玻色取样 (光子数为 3, 最多 6 个光学模式) [15–17], 2019 年 Paesani 等 [138] 在同一个硅芯片上实现了标准玻色取样、散射玻色取样, 以及高斯玻色取样 (8 光子, 12 个光学模式), 关于玻色取样的具体的介绍可以查阅文献 [139].

另外基于多端口干涉仪的集成光学芯片也被用来量子化学模拟, 如在硅基光芯片上利用量子相位估计以及变分本征值求解法求解分子基态能量 [138,140]. 对于具有 n 个量子比特的量子态, 描述系统演化的哈密顿量的维度为 $2^n \times 2^n$, 在量子化学中系统的哈密顿量 H 可以表示成关于系统尺寸具有多项式个数的泡利矩阵叠加的形式. 因此, 对于给定量子态 $|\psi\rangle$, 算符 H 的期望值可以拆分成多个泡利算符期望值的线性叠加 [141], 泡利算符及其张量积的期望值可以通过对每个量子比特的局部测量得到. 对于矩阵 H 的本征值求解问题, 其最小本征值对应的本征态将使得 Rayleigh-Ritz 商数 $\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$ 最小, 因而可以归结为变分问题. 基于这种思想, 量子变分本征值求解法可以用于分子基态能量的求解: 首先制备初始量子态, 利用量子期望值测量估计待测哈密顿量的期望值, 进一步计算 Rayleigh-Ritz 商数, 根据得到的商的大小反馈回初始态制备过程, 循环往复使得 Rayleigh-Ritz 商数最小. 在 2014 年 Peruzzo 等 [140] 考虑 He-H⁺ 分子的哈密顿量可以表示成:

$$H(R) = \sum_{i\alpha} h_{\alpha}^i(R) \sigma_{\alpha}^i + \sum_{ij\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{ij}(R) \sigma_{\alpha}^i \sigma_{\beta}^j, \quad (11)$$

其中 R 表示核间距, σ_{α}^i 表示子系统 i 中的泡利算符 ($i = x, y, z$), 展开系数 h 是实数. 实验中他们在硅基芯片上通过热调相移器和干涉仪的结构完成初始量子态的制备以及期望值的测量. 将输出端符合计数的测量结果发送至经典处理单元, 进一步反馈到初态制备的量子线路中, 最终经过多次迭代可以得到不同核间距下 He-H⁺ 分子的基态能量. 2017 年 Paesani 等 [138] 利用贝叶斯估计在硅基芯片上模拟氢分子基态能量, 他们的设计思想是基于贝叶斯量子相位估计算法 [142]: 对于给定的哈密顿量 H , 其本征矢量 $|\psi\rangle$ 所对应的相位为 ϕ . 首先假定要估计的相位 ϕ 满足高斯分布 $P(\phi)$ (先验条件概率), 基于贝叶斯定理根据量子态经过么正变换以及泡利

Z 算符后的测量结果来计算相位 ϕ 的后验概率分布,然后将先验概率分布替换为后验概率分布,通过多次迭代提高相位估计的置信度.实验上他们在硅基芯片上利用干涉仪以及热调相移器完成初始态制备以及控制么正操作,氢气分子哈密顿量的本征态则利用 Jordan-Wigner 变换转化到量子比特基矢,进一步他们在硅基芯片上模拟了不同原子间距下的氢分子键能^[138].2018年 Sparrow 等^[27]利用可编程的三角形结构的干涉仪结构模拟了分子振动模式的动力学演化,他们首先将分子中集体的振动模式分解成多个局域的振动模式的叠加,这些局域的振动模式对应于芯片中不同的路径,振动模式的演化则利用可实现任意么正变换的干涉仪结构实现,实验上改变不同的输入态模拟了分子中不同振动模式之间的振荡、能量转移以及振动弛豫等过程.

5 总结和展望

本文总结了集成光学芯片上实现不同种类的量子模拟的研究进展,首先介绍了几种常用光学体系用于实现量子模拟的基本物理原理,然后基于不同的实验平台介绍了集成光学芯片的几种用途:实现无序系统、拓扑绝缘体结构、非线性和非厄米系统的量子模拟,实现离散型量子随机行走、玻色取样模型,以及模拟量子化学中的分子能谱等.其中飞秒激光直写光波导系统可以对波导折射率以及空间构型做灵活的调制,在相应的结构上观察到了无序系统安德森局域化现象,利用“含时”波导阵列结构可以实现周期驱动 Floquet 拓扑绝缘体结构、合成规范场、拓扑泵浦等结构的量子模拟;耦合环腔阵列系统由格点环腔和连接波导组成,通过调节连接波导中引入的相位或调节环腔之间耦合的透射率可以用于模拟量子自旋霍尔效应、反常量子霍尔效应以及 Floquet 拓扑绝缘体,进一步结合硅基系统中的四波混频效应可以用于产生具有拓扑保护的量子光源;光子晶体结构具有更加集成化的尺寸,通过破坏体系的空间反转对称性可以实现谷霍尔效应,从而在平面内对光实现大角度的无散射弯折;在线性物理模型中加入非线性效应可以引起结构能带的变化,如使周期系统从拓扑平庸相转变到拓扑相、使非厄米系统从 PT 对称相转变到 PT 对称破缺相,这些新物理现象的实现需要用到如铌酸

锂、铝砷化镓、磷砷化镓、铌酸锶钡光折变晶体等非线性光学材料;另外,基于硅基的多端口干涉仪结构具有很强的可重构能力、成熟的加工工艺,并且能够产生片上量子光源,实现任意的么正变换,被用于实现离散型量子随机行走过程,玻色取样以及分子能谱的研究.

限于篇幅,其他一些在集成光学芯片上有趣的实验进展没有涉及,如利用线性调制波导阵列中单根波导的传播常数来模拟周期系统中的电子在外加力作用下的布洛赫振荡或者 Zener 隧穿效应^[143–145],通过调节波导间距来研究量子系统中的耗散问题^[146]、分形结构中的量子输运过程^[147]、六角图上的快速到达问题^[148]等,另外还有实现如高阶拓扑绝缘体^[149]、非阿贝尔几何相^[150,151]量子模拟等.

集成光学系统不同的材料平台能够发挥不同的优势,从而用于实现某些特定任务的量子模拟.关于不同研究领域的交叉往往能催生出新物理原理或者新技术的突破,如关于非厄米、非线性以及拓扑绝缘体结构的研究催生了拓扑激光这种未来可能有实用化前景的技术.新奇的拓扑结构应用到量子信息领域有可能可以解决制备量子光源中频率稳定性的问题,而基于集成光学芯片系统结合机器学习算法有可能进一步推动新物理结构量子模拟和更加实际化用途的实现.另外,需要指出的是利用集成光芯片实现量子模拟也会面临一些挑战,如需要尽可能的提升系统的可扩展性、可操纵能力.为了实现量子优越性展示或其他特定的实际应用,多比特、大规模、复杂系统量子模拟将成为未来的发展趋势.在实验技术层面上,大规模的集成光学系统将面临着损耗、测量技术、实验成本等方面的问题,通过尝试新材料或者开发新技术,结合多种材料体系的优势或许可以解决一些关键难题.复杂系统的量子模拟同样要求理论方面的同步推进,反过来实验上对于未知物理现象的观察同时也能进一步完善描述复杂物理系统的理论.

参考文献

- [1] Feynman R P 1982 *Int. J. Theor. Phys.* **21** 467
- [2] Georgescu I M, Ashhab S, Nori F 2014 *Rev. Modern Phys.* **86** 153
- [3] Monroe C, Campbell W C, Duan L M, Gong Z X, Gorshkov A V, Hess P W, Islam R, Kim K, Linke N M, Pagano G, Richerme P, Senko C, Yao N Y 2021 *Rev. Modern Phys.* **93**

- 025001
- [4] Houck A A, Tureci H E, Koch J 2012 *Nat. Phys.* **8** 292
 - [5] Schäfer F, Fukuhara T, Sugawa S, Takasu Y, Takahashi Y 2020 *Nat. Rev. Phys.* **2** 411
 - [6] Wang J W, Sciarrino F, Laing A, Thompson M G 2020 *Nat. Photonics* **14** 273
 - [7] Elshaari A W, Pernice W, Srinivasan K, Benson O, Zwiller V 2020 *Nat. Photonics* **14** 285
 - [8] Politi A, Matthews J C F, Thompson M G, O'Brien J L 2009 *IEEE J. Quantum Electron.* **15** 1673
 - [9] Feng L, Zhang M, Wang J, Zhou X, Qiang X, Guo G, Ren X 2022 *Photonics Res.* **10** A135
 - [10] Tang H, Lin X F, Feng Z, Chen J Y, Gao J, Sun K, Wang C Y, Lai P C, Xu X Y, Wang Y, Qiao L F, Yang A L, Jin X M 2018 *Sci. Adv.* **4** eaat3174
 - [11] Perets H B, Lahini Y, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Silberberg Y 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 170506
 - [12] Sansoni L, Sciarrino F, Vallone G, Mataloni P, Crespi A, Ramponi R, Osellame R 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 010502
 - [13] Peruzzo A, Lobino M, Matthews J C, Matsuda N, Politi A, Poullos K, Zhou X Q, Lahini Y, Ismail N, Wörhoff K, Bromberg Y, Silberberg Y, Thompson M G, O'Brien J L 2010 *Science* **329** 1500
 - [14] Crespi A, Osellame R, Ramponi R, Giovannetti V, Fazio R, Sansoni L, De Nicola F, Sciarrino F, Mataloni P 2013 *Nat. Photonics* **7** 322
 - [15] Spring J B, Metcalf B J, Humphreys P C, Kolthammer W S, Jin X M, Barbieri M, Datta A, Thomas-Peter N, Langford N K, Kundys D, Gates J C, Smith B J, Smith P G, Walmsley I A 2013 *Science* **339** 798
 - [16] Crespi A, Osellame R, Ramponi R, Brod D J, Galvao E F, Spagnolo N, Vitelli C, Maiorino E, Mataloni P, Sciarrino F 2013 *Nat. Photonics* **7** 545
 - [17] Tillmann M, Dakic B, Heilmann R, Nolte S, Szameit A, Walther P 2013 *Nat. Photonics* **7** 540
 - [18] Spagnolo N, Vitelli C, Bentivegna M, Brod D J, Crespi A, Flamini F, Giacomini S, Milani G, Ramponi R, Mataloni P, Osellame R, Galvao E F, Sciarrino F 2014 *Nat. Photonics* **8** 615
 - [19] Wang H, Qin J, Ding X, Chen M C, Chen S, You X, He Y M, Jiang X, You L, Wang Z, Schneider C, Renema J J, Hofling S, Lu C Y, Pan J W 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 250503
 - [20] Hoch F, Piacentini S, Giordani T, Tian Z N, Iuliano M, Esposito C, Camillini A, Carvacho G, Ceccarelli F, Spagnolo N 2021 arXiv: 2106.08260
 - [21] Mukherjee S, Rechtsman M C 2020 *Science* **368** 856
 - [22] Xia S, Kaltsas D, Song D, Komis I, Xu J, Szameit A, Buljan H, Makris K G, Chen Z 2021 *Science* **372** 72
 - [23] Ozawa T, Price H M, Amo A, Goldman N, Hafezi M, Lu L, Rechtsman M C, Schuster D, Simon J, Zilberberg O 2019 *Rev. Modern Phys.* **91** 015006
 - [24] Lu L, Joannopoulos J D, Soljacic M 2016 *Nat. Phys.* **12** 626
 - [25] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, Lumer Y, Podolsky D, Dreisow F, Nolte S, Segev M, Szameit A 2013 *Nature* **496** 196
 - [26] Maczewsky L J, Heinrich M, Kremer M, Ivanov S K, Ehrhardt M, Martinez F, Kartashov Y V, Konotop V V, Torner L, Bauer D, Szameit A 2020 *Science* **370** 701
 - [27] Sparrow C, Martin-Lopez E, Maraviglia N, Neville A, Harrold C, Carolan J, Joglekar Y N, Hashimoto T, Matsuda N, O'Brien J L, Tew D P, Laing A 2018 *Nature* **557** 660
 - [28] McArdle S, Endo S, Aspuru-Guzik A, Benjamin S, Yuan X 2020 *Rev. Modern Phys.* **92** 015003
 - [29] Cao Y, Romero J, Olson J P, Degroote M, Johnson P D, Kieferova M, Kivlichan I D, Menke T, Peropadre B, Sawaya N P D, Sim S, Veis L, Aspuru-Guzik A 2019 *Chem. Rev.* **119** 10856
 - [30] Bogdanov S, Shalaginov M Y, Boltasseva A, Shalaev V M 2017 *Opt. Mater. Express* **7** 111
 - [31] Corrielli G, Crespi A, Osellame R 2021 *Nanophotonics* **10** 3789
 - [32] Ramakrishnan R K, Ravichandran A B, Mishra A, Kaushalram A, Hegde G, Talabattula S, Rohde P P 2022 arXiv: 2206.15383
 - [33] Feng L T, Guo G C, Ren X F 2020 *Adv. Quantum Technol.* **3** 1900058
 - [34] Feng L T, Zhang M, Xiong X, Chen Y, Wu H, Li M, Guo G P, Guo G C, Dai D X, Ren X F 2019 *NPJ Quantum Inf.* **5** 2
 - [35] Feng L T, Zhang M, Zhou Z Y, Chen Y, Li M, Dai D X, Ren H L, Guo G P, Guo G C, Tame M, Ren X F 2019 *NPJ Quantum Inf.* **5** 90
 - [36] Wang Y, Lu Y H, Mei F, Gao J, Li Z M, Tang H, Zhu S L, Jia S, Jin X M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 193903
 - [37] Xie B Y, Su G X, Wang H F, Su H, Shen X P, Zhan P, Lu M H, Wang Z L, Chen Y F 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 233903
 - [38] Zhang M, Feng L T, Zhou Z Y, Chen Y, Wu H, Li M, Gao S M, Guo G P, Guo G C, Dai D X, Ren X F 2019 *Light Sci. Appl.* **8** 41
 - [39] Engin E, Bonneau D, Natarajan C M, Clark A S, Tanner M G, Hadfield R H, Dorenbos S N, Zwiller V, Ohira K, Suzuki N, Yoshida H, Iizuka N, Ezaki M, O'Brien J L, Thompson M G 2013 *Opt. Express* **21** 27826
 - [40] Lu X Y, Li Q, Westly D A, Moille G, Singh A, Anant V, Srinivasan K 2019 *Nat. Phys.* **15** 373
 - [41] Xu B Y, Chen L K, Lin J T, Feng L T, Niu R, Zhou Z Y, Gao R H, Dong C H, Guo G C, Gong Q H, Cheng Y, Xiao Y F, Ren X F 2022 *Sci. China Phys. Mech.* **65** 294262
 - [42] Jin H, Liu F M, Xu P, Xia J L, Zhong M L, Yuan Y, Zhou J W, Gong Y X, Wang W, Zhu S N 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 103601
 - [43] Guo X, Zou C L, Schuck C, Jung H, Cheng R, Tang H X 2017 *Light Sci. Appl.* **6** e16249
 - [44] Lahini Y, Avidan A, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Christodoulides D N, Silberberg Y 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013906
 - [45] Hafezi M, Mittal S, Fan J, Migdall A, Taylor J M 2013 *Nat. Photonics* **7** 1001
 - [46] Longhi S 2009 *Laser Photonics Rev.* **3** 243
 - [47] Chen Y, Chen X M, Ren X F, Gong M, Guo G C 2021 *Phys. Rev. A* **104** 023501
 - [48] Christodoulides D N, Lederer F, Silberberg Y 2003 *Nature* **424** 817
 - [49] Jones A L 1965 *JOSA* **55** 261
 - [50] Somekh S, Garmire E, Yariv A, Garvin H L, Hunsperger R G 1973 *Appl. Phys. Lett.* **22** 46
 - [51] Jamois C, Wehrspohn R, Andreani L, Hermann C, Hess O, Gösele U 2003 *Photonic. Nanostruct. Appl.* **1** 1
 - [52] Tanaka Y, Nakamura H, Sugimoto Y, Ikeda N, Asakawa K, Inoue K 2005 *IEEE J. Quantum Electron.* **41** 76
 - [53] Johnson S G, Villeneuve P R, Fan S H, Joannopoulos J D 2000 *Phys. Rev. B* **62** 8212
 - [54] He L, Addison Z, Mele E J, Zhen B 2020 *Nat. Commun.* **11** 3119
 - [55] Xie B, Su G, Wang H F, Liu F, Hu L, Yu S Y, Zhan P, Lu

- M H, Wang Z, Chen Y F 2020 *Nat. Commun.* **11** 3768
- [56] Jin M C, Gao Y F, Ma Q L, Zhang W, Song H, Sun J P 2021 *Phys. Rev. Mater.* **5** 024204
- [57] Chen Y, He X T, Cheng Y J, Qiu H Y, Feng L T, Zhang M, Dai D X, Guo G C, Dong J W, Ren X F 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 230503
- [58] Yariv A, Xu Y, Lee R K, Scherer A 1999 *Opt. Lett.* **24** 711
- [59] Hafezi M, Demler E A, Lukin M D, Taylor J M 2011 *Nat. Phys.* **7** 907
- [60] Liang G Q, Chong Y D 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 203904
- [61] Pasek M, Chong Y D 2014 *Phys. Rev. B* **89** 075113
- [62] Afzal S, Zimmerling T J, Ren Y, Perron D, Van V 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 253601
- [63] Leykam D, Mittal S, Hafezi M, Chong Y D 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 023901
- [64] Haldane F D M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015
- [65] Mittal S, Orre V V, Leykam D, Chong Y D, Hafezi M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 043201
- [66] Reck M, Zeilinger A, Bernstein H J, Bertani P 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 58
- [67] Clements W R, Humphreys P C, Metcalf B J, Kolthammer W S, Walmsley I A 2016 *Optica* **3** 1460
- [68] Harris N C, Bunandar D, Pant M, Steinbrecher G R, Mower J, Prabhu M, Baehr-Jones T, Hochberg M, Englund D 2016 *Nanophotonics* **5** 456
- [69] Yu S, Qiu C W, Chong Y, Torquato S, Park N 2021 *Nat. Rev. Mater.* **6** 226
- [70] Lagendijk A, van Tiggelen B, Wiersma D S 2009 *Phys. Today* **62** 24
- [71] Segev M, Silberberg Y, Christodoulides D N 2013 *Nat. Photonics* **7** 197
- [72] Rothhammer M, Zollfrank C, Busch K, von Freymann G 2021 *Adv. Opt. Mater.* **9** 2100787
- [73] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
- [74] Mott N 1967 *Adv. Phys.* **16** 49
- [75] De Raedt H, Lagendijk A, de Vries P 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 47
- [76] Schwartz T, Bartal G, Fishman S, Segev M 2007 *Nature* **446** 52
- [77] Eisenberg H S, Silberberg Y, Morandotti R, Boyd A R, Aitchison J S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3383
- [78] Martin L, Di Giuseppe G, Perez-Leija A, Keil R, Dreisow F, Heinrich M, Nolte S, Szameit A, Abouraddy A F, Christodoulides D N, Saleh B E 2011 *Opt. Express* **19** 13636
- [79] Geraldi A, Laneve A, Bonavena L D, Sansoni L, Ferraz J, Fratalocchi A, Sciarino F, Cuevas Á, Mataloni P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 140501
- [80] Levi L, Krivolapov Y, Fishman S, Segev M 2012 *Nat. Phys.* **8** 912
- [81] Vasco J P, Hughes S 2018 *Acs Photonics* **5** 1262
- [82] Hsieh P, Chung C, McMillan J F, Tsai M, Lu M, Panoiu N C, Wong C W 2015 *Nat. Phys.* **11** 268
- [83] Ni X, Chen K, Weiner M, Apigo D J, Prodan C, Alu A, Prodan E, Khanikaev A B 2019 *Commun. Phys.* **2** 55
- [84] Kraus Y E, Zilberberg O 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 116404
- [85] Verbin M, Zilberberg O, Kraus Y E, Lahini Y, Silberberg Y 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 076403
- [86] Lahini Y, Pugatch R, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Davidson N, Silberberg Y 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 013901
- [87] Kraus Y E, Lahini Y, Ringel Z, Verbin M, Zilberberg O 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 106402
- [88] Levi L, Rechtsman M, Freedman B, Schwartz T, Manela O, Segev M 2011 *Science* **332** 1541
- [89] Mukherjee S, Di Liberto M, Ohberg P, Thomson R R, Goldman N 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 075502
- [90] Bandres M A, Wittek S, Harari G, Parto M, Ren J, Segev M, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2018 *Science* **359** eaar4005
- [91] Dai T X, Ao Y T, Bao J M, Mao J, Chi Y L, Fu Z R, You Y L, Chen X J, Zhai C H, Tang B, Yang Y, Li Z H, Yuan L Q, Gao F, Lino X, Thompson M G, O'Brien J L, Li Y, Hu X Y, Gong Q H, Wang J W 2022 *Nat. Photonics* **16** 248
- [92] Stutzer S, Plotnik Y, Lumer Y, Titum P, Lindner N H, Segev M, Rechtsman M C, Szameit A 2018 *Nature* **560** 461
- [93] Blanco-Redondo A, Bell B, Oren D, Eggleton B J, Segev M 2018 *Science* **362** 568
- [94] Weimann S, Kremer M, Plotnik Y, Lumer Y, Nolte S, Makris K G, Segev M, Rechtsman M C, Szameit A 2017 *Nat. Mater.* **16** 433
- [95] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Modern Phys.* **82** 3045
- [96] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [97] Haldane F D, Raghu S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013904
- [98] Wang Z, Chong Y, Joannopoulos J D, Soljacic M 2009 *Nature* **461** 772
- [99] Longhi S 2014 *Opt. Lett.* **39** 5892
- [100] Keil R, Poli C, Heinrich M, Arkininstall J, Weihs G, Schomerus H, Szameit A 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 213901
- [101] Kremer M, Petrides I, Meyer E, Heinrich M, Zilberberg O, Szameit A 2020 *Nat. Commun.* **11** 907
- [102] Mittal S, Goldschmidt E A, Hafezi M 2018 *Nature* **561** 502
- [103] Mittal S, Orre V V, Goldschmidt E A, Hafezi M 2021 *Nat. Photonics* **15** 542
- [104] Xiao D, Yao W, Niu Q 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 236809
- [105] Khanikaev A B, Mousavi S H, Tse W K, Kargarian M, MacDonald A H, Shvets G 2013 *Nat. Mater.* **12** 233
- [106] Noh J, Huang S, Chen K P, Rechtsman M C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 063902
- [107] He X T, Liang E T, Yuan J J, Qiu H Y, Chen X D, Zhao F L, Dong J W 2019 *Nat. Commun.* **10** 872
- [108] Shalaev M I, Walasik W, Tsukernik A, Xu Y, Litchinitser N M 2019 *Nat. Nanotechnol.* **14** 31
- [109] Barik S, Karasahin A, Flower C, Cai T, Miyake H, DeGottardi W, Hafezi M, Waks E 2018 *Science* **359** 666
- [110] Zeng Y, Chattopadhyay U, Zhu B, Qiang B, Li J, Jin Y, Li L, Davies A G, Linfield E H, Zhang B, Chong Y, Wang Q J 2020 *Nature* **578** 246
- [111] Shen S Q 2012 *Topological Insulators* (Vol. 174) (Berlin, Heidelberg: Springer)
- [112] Malkova N, Hromada I, Wang X, Bryant G, Chen Z 2009 *Opt. Lett.* **34** 1633
- [113] Blanco-Redondo A, Andonegui I, Collins M J, Harari G, Lumer Y, Rechtsman M C, Eggleton B J, Segev M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 163901
- [114] Wang Y, Pang X L, Lu Y H, Gao J, Chang Y J, Qiao L F, Jiao Z Q, Tang H, Jin X M 2019 *Optica* **6** 955
- [115] Chen X D, Deng W M, Shi F L, Zhao F L, Chen M, Dong J W 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 233902
- [116] Wang Y, Ke Y, Chang Y J, Lu Y H, Gao J, Lee C, Jin X M 2021 *Phys. Rev. B* **104** 224303
- [117] El Hassan A, Kunst F K, Moritz A, Andler G, Bergholtz E J, Bourennane M 2019 *Nat. Photonics* **13** 697
- [118] Parto M, Wittek S, Hodaei H, Harari G, Bandres M A, Ren J, Rechtsman M C, Segev M, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 113901
- [119] St-Jean P, Goblot V, Galopin E, Lemaitre A, Ozawa T, Le

- Gratiet L, Sagnes I, Bloch J, Amo A 2017 *Nat. Photonics* **11** 651
- [120] Lustig E, Weimann S, Plotnik Y, Lumer Y, Bandres M A, Szameit A, Segev M 2019 *Nature* **567** 356
- [121] Zilberberg O, Huang S, Guglielmon J, Wang M H, Chen K P, Kraus Y E, Rechtsman M C 2018 *Nature* **553** 59
- [122] Jurgensen M, Mukherjee S, Rechtsman M C 2021 *Nature* **596** 63
- [123] Cerjan A, Wang M, Huang S, Chen K P, Rechtsman M C 2020 *Light Sci. Appl.* **9** 178
- [124] Christodoulides D N, Joseph R I 1988 *Opt. Lett.* **13** 794
- [125] Fleischer J W, Segev M, Efremidis N K, Christodoulides D N 2003 *Nature* **422** 147
- [126] Lederer F L, Stegeman G I, Christodoulides D N, Assanto G, Segev M, Silberberg Y R 2008 *Phys. Rep.* **463** 1
- [127] Smirnova D, Leykam D, Chong Y D, Kivshar Y 2020 *Appl. Phys. Rev.* **7** 021306
- [128] Dobrykh D A, Yulin A V, Slobozhanyuk A P, Poddubny A N, Kivshar Y S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 163901
- [129] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Modern Phys.* **93** 015005
- [130] Okuma N, Kawabata K, Shiozaki K, Sato M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 086801
- [131] Weidemann S, Kremer M, Helbig T, Hofmann T, Stegmaier A, Greiter M, Thomale R, Szameit A 2020 *Science* **368** 311
- [132] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
- [133] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, Musslimani Z H, Rotter S, Christodoulides D N 2018 *Nat. Phys.* **14** 11
- [134] Pitsios I, Banchi L, Rab A S, Bentivegna M, Caprara D, Crespi A, Spagnolo N, Bose S, Mataloni P, Osellame R, Sciarrino F 2017 *Nat. Commun.* **8** 1569
- [135] Wu Y L, Bao W S, Cao S R, Chen F S, Chen M C, Chen X W, Chung T H, Deng H, Du Y J, Fan D J, Gong M, Guo C, Guo C, Guo S J, Han L C, Hong L Y, Huang H L, Huo Y H, Li L P, Li N, Li S W, Li Y, Liang F T, Lin C, Lin J, Qian H R, Qiao D, Rong H, Su H, Sun L H, Wang L Y, Wang S Y, Wu D C, Xu Y, Yan K, Yang W F, Yang Y, Ye Y S, Yin J H, Ying C, Yu J L, Zha C, Zhang C, Zhang H B, Zhang K L, Zhang Y M, Zhao H, Zhao Y W, Zhou L, Zhu Q L, Lu C Y, Peng C Z, Zhu X B, Pan J W 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 180501
- [136] Zhong H S, Wang H, Deng Y H, Chen M C, Peng L C, Luo Y H, Qin J, Wu D, Ding X, Hu Y, Hu P, Yang X Y, Zhang W J, Li H, Li Y X, Jiang X, Gan L, Yang G W, You L X, Wang Z, Li L, Liu N L, Lu C Y, Pan J W 2020 *Science* **370** 1460
- [137] Zhu Q L, Cao S R, Chen F S, Chen M C, Chen X W, Chung T H, Deng H, Du Y J, Fan D J, Gong M, Guo C, Guo C, Guo S J, Han L C, Hong L Y, Huang H L, Huo Y H, Li L P, Li N, Li S W, Li Y, Liang F T, Lin C, Lin J, Qian H R, Qiao D, Rong H, Su H, Sun L H, Wang L Y, Wang S Y, Wu D C, Wu Y L, Xu Y, Yan K, Yang W F, Yang Y, Ye Y, Yin J H, Ying C, Yu J L, Zha C, Zhang C, Zhang H B, Zhang K L, Zhang Y M, Zhao H, Zhao Y W, Zhou L, Lu C Y, Peng C Z, Zhu X B, Pan J W 2022 *Sci. Bull.* **67** 240
- [138] Paesani S, Gentile A A, Santagati R, Wang J, Wiebe N, Tew D P, O'Brien J L, Thompson M G 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 100503
- [139] Li Y, Han Z Y, Li J C, Lv J, Yuan X, Wu B J 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 210201 (in Chinese) [黎颖, 韩泽尧, 黎超健, 吕劲, 袁晓, 吴步娇 2021 物理学报 **70** 210201]
- [140] Peruzzo A, McClean J, Shadbolt P, Yung M H, Zhou X Q, Love P J, Aspuru-Guzik A, O'Brien J L 2014 *Nat. Commun.* **5** 4213
- [141] Nielsen M A, Chuang I 2002 *Quantum Computation and Quantum Information* (American Association of Physics Teachers)
- [142] Wiebe N, Granade C 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 010503
- [143] Zhao Y, Chen Y, Hou Z S, Han B, Fan H, Lin L H, Ren X F, Sun H B 2022 *Opt. Lett.* **47** 617
- [144] Xu Y L, Fegadolli W S, Gan L, Lu M H, Liu X P, Li Z Y, Scherer A, Chen Y F 2016 *Nat. Commun.* **7** 11319
- [145] Longhi S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 193902
- [146] Crespi A, Pepe F V, Facchi P, Sciarrino F, Mataloni P, Nakazato H, Pascazio S, Osellame R 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 130401
- [147] Xu X Y, Wang X W, Chen D Y, Smith C M 2021 *Nat. Photonics* **15** 703
- [148] Tang H, Di Franco C, Shi Z Y, He T S, Feng Z, Gao J, Sun K, Li Z M, Jiao Z Q, Wang T Y, Kim M S, Jin X M 2018 *Nat. Photonics* **12** 754
- [149] Kim M, Jacob Z, Rho J 2020 *Light Sci. Appl.* **9** 130
- [150] Zhang X L, Yu F, Chen Z G, Tian Z N, Chen Q D, Sun H B, Ma G C 2022 *Nat. Photonics* **16** 390
- [151] Noh J, Schuster T, Iadecola T, Huang S, Wang M, Chen K P, Chamon C, Rechtsman M C 2020 *Nat. Phys.* **16** 989

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Research progress of integrated photonic quantum simulation^{*}Chen Yang Zhang Tian-Yang Guo Guang-Can Ren Xi-Feng[†]*(CAS Key Laboratory of Quantum Information, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)*

(Received 10 October 2022; revised manuscript received 17 November 2022)

Abstract

Quantum simulation is to use a controllable quantum system to simulate other complicated or hard-to-control quantum system, and to deal with some complex unknown quantum systems that cannot be simulated on classical computers due to the exponential explosion of the Hilbert space. Among different kinds of physical realizations of quantum simulation, integrated optical systems have emerged as an appropriate platform in recent years due to the advantages of flexible control, weak decoherence, and no interaction in optical systems. In this review, we attempt to introduce some of the basic models used for quantum simulation in integrated photonic systems. This review article is organized as follows. In Section 2, we introduce the commonly used material platforms for integrated quantum simulation, including the silicon-based, lithium niobate-based integrated circuits, and the femtosecond laser direct writing optical waveguides. Several integrated optical platforms such as the coupled waveguide arrays, photonic crystals, coupled resonator arrays, and multiport interferometers are also introduced. In Section 3, we focus on the analog quantum simulations in the integrated photonic platform, including Anderson localization of light in disordered systems, various kinds of topological insulators, nonlinear and non-Hermitian systems. More specifically, in Subsection 3.1, we present the integrated photonic realizations of disordered and quasi-periodic systems. In Subsection 3.2, we review the integrated photonic realizations of the topological insulators with and without time-reversal symmetry, including Floquet topological insulators, quantum spin hall system, anomalous quantum hall system, valley hall system, Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model, and photonic topological Anderson insulators. Besides, topological insulator lasers and topologically protected quantum photon sources are briefly reviewed. In Subsection 3.3, we review the nonlinear and non-Hermitian integrated optical systems. In Section 4 we present the integrated digital quantum simulations based on the multiport interferometers, including the discrete-time quantum random walk, Boson sampling, and molecular simulation. In Section 5, we summarize the content of the article and present the outlook on the future perspectives of the integrated photonic quantum simulation. We believe that the integrated photonic platforms will continue to provide an excellent platform for quantum simulation. More practical applications will be found based on this system through combining the fields of topological photonics, laser technologies, quantum information, nonlinear and non-Hermitian physics.

Keywords: quantum simulation, integrated photonic circuits, simulation of condensed matter physics, multiport interferometer

PACS: 42.79.Gn, 03.67.Ac, 42.82.Et, 42.60.Da

DOI: 10.7498/aps.71.20221938

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 62061160487, 12204462), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2022M723061), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China.

[†] Corresponding author. E-mail: renxf@ustc.edu.cn

基于集成光芯片的量子模拟研究进展

陈阳 张天炆 郭光灿 任希锋

Research progress of integrated photonic quantum simulation

Chen Yang Zhang Tian-Yang Guo Guang-Can Ren Xi-Feng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 244207 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20221938

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221938>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

量子计算与量子模拟中离子阱结构研究进展

Advances in the study of ion trap structures in quantum computation and simulation

物理学报. 2022, 71(13): 133701 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220224>

量子计算与量子模拟

Quantum computation and quantum simulation

物理学报. 2018, 67(12): 120301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180710>

相互作用费米子的量子模拟

Quantum simulation of interacting fermions

物理学报. 2022, 71(22): 226701 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221756>

利用超导量子电路模拟拓扑量子材料

Topological quantum material simulated with superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181857>

新型超导量子比特及量子物理问题的研究

Novel superconducting qubits and quantum physics

物理学报. 2018, 67(22): 228501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180845>

核磁共振量子信息处理研究的新进展

New research progress of nuclear magnetic resonance quantum information processing

物理学报. 2018, 67(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180754>

量子计算新进展：硬件、算法和软件专题编者按

Preface to the special topic: Recent Advances in Hardware, Algorithms and Software of Quantum Computers

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 070101 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.070101

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.070101>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

量子等离激元光子学在若干方向的最新进展

Some recent advances on quantum plasmonics

物理学报. 2019, 68(14): 147103 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190331>

柔性电子专题编者按

Preface to the special topic: Flexible electronics

物理学报. 2020, 69(17): 170101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.170101>

电介质材料和物理专题编者按

Preface to the special topic: Dielectric materials and physics

物理学报. 2020, 69(12): 120101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.120101>

光学超构材料专题编者按

Preface to the special topic: Optical metamaterials

物理学报. 2020, 69(15): 150101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.150101>

固态单量子体系的调控与应用专题编者按

Preface to the special topic: Manipulation and applications of solid-state single quantum systems

物理学报. 2022, 71(6): 060101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.060101>

太赫兹自旋光电子专题编者按

Preface to the special topic: Terahertz spintronic optoelectronics

物理学报. 2020, 69(20): 200101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.200101>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

量子计算新进展: 硬件、算法和软件专题编者按

DOI: [10.7498/aps.71.070101](https://doi.org/10.7498/aps.71.070101)

1980年, 美国科学家 Paul Benioff 和前苏联科学家 Yuri Manin 提出了量子计算的概念, 1981年诺贝尔奖获得者费曼提出了量子模拟, 1985年 David Deutsch 证明了量子计算概念的普适性. 至此, 完成了建立量子计算概念的第一个阶段. 1986-1993年, 是量子计算机研究的自由探索阶段. 1994年开始, 量子算法取得重大突破, Shor 大数分解算法和 Grover 搜索算法两大算法诞生, 极大地推动了量子计算研究在全世界的发展, 量子计算进入到大强度基础研究阶段. 2016年开始, 以 IBM 推出 5 比特量子云平台为标志的, 量子计算进入到工程研发的第四个发展阶段.

量子计算的发展受到国际的普遍关注, 为了满足广大作者和读者的需求, 进一步促进我国学者在该领域研究的学术交流和国内外影响, 《物理学报》专门组织了量子计算的专题, 邀请活跃在研究一线的学者, 贡献最新研究成果论文或综述文章, 系统全面地反映该领域的研究成果以及最新进展. 本专题得到踊跃相应, 征集到近 20 篇高水平的研究论文和综述文章, 内容涵盖发展迅速的超导量子计算、量子硬件系统与模拟、光量子计算、新奇量子系统模拟、量子算法进展等五个方向, 将在《物理学报》陆续发表.

(客座编辑: 龙桂鲁 清华大学; 范桁 中国科学院物理研究所; 郑超 北方工业大学; 李传锋 中国科学技术大学; 陈险峰 上海交通大学)

SPECIAL TOPIC—Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Preface to the special topic: Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

DOI: [10.7498/aps.71.070101](https://doi.org/10.7498/aps.71.070101)

熵不确定度关系综述

李丽娟 明飞 宋学科 叶柳 王栋

Review on entropic uncertainty relations

Li Li-Juan Ming Fei Song Xue-Ke Ye Liu Wang Dong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 070302 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20212197

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212197>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多模式固态量子存储

Multimode solid-state quantum memory

物理学报. 2019, 68(3): 030303 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182207>

量子存储研究进展

Research progress of quantum memory

物理学报. 2019, 68(3): 030307 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190039>

基于掺铒晶体的光量子存储和调控

Quantum memory and manipulation based on erbium doped crystals

物理学报. 2022, 71(6): 064203 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211803>

冷原子系综内单集体激发态的相干操纵

Coherent manipulation of single collective excitations in a cold atomic ensemble

物理学报. 2018, 67(22): 224203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181183>

与XY双自旋链耦合的双量子比特系统的关联性与相干性

Correlation and coherence for two-qubit system coupled to XY spin chains

物理学报. 2018, 67(15): 150302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180812>

相干时间超过10 min的单离子量子比特

Single-ion qubit with coherence time exceeding 10 minutes

物理学报. 2019, 68(3): 030306 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181729>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

熵不确定度关系综述*

李丽娟¹⁾ 明飞¹⁾ 宋学科¹⁾ 叶柳¹⁾ 王栋^{1)†}¹⁾ (安徽大学物理与光电工程学院, 合肥 230601)

(2021 年 11 月 29 日收到; 2021 年 12 月 26 日收到修改稿)

不确定关系是量子力学的基本特征之一, 随着量子信息理论的蓬勃发展, 不确定关系更是在其中发挥着重要的作用. 特别是将熵引入来描述不确定关系之后, 不确定关系在量子信息技术中涌现出多种应用. 众所周知, 熵不确定度关系已成为几乎所有量子密码协议安全分析的核心要素. 这篇综述主要回顾不确定关系的发展历史和最新研究进展, 从 Heisenberg 提出不相容测量其结果是不能被预测伊始, 许多学者在该观点的启发下, 做了进一步的相关扩展研究, 将可观测量与环境之间的量子关联结合起来, 对不确定关系进行各种推广从而得到更普适的数学表达式. 除此以外, 本文还重点介绍了量子存储下的熵不确定度关系及其发展, 也介绍了在某些物理系统中对应的动力学特性. 最后讨论了熵不确定度关系在量子信息领域的各种应用, 从随机数到波粒二象性再到量子密钥分发.

关键词: 熵不确定度关系, 量子存储, 量子关联**PACS:** 03.65.-w, 03.67.-a, 03.67.Hk**DOI:** 10.7498/aps.71.20212197

1 引言

量子力学颠覆了我们一直以来用经典力学的方式来研究世界运行规律的传统观念, 许多无法用经典力学理论来解释的微观现象, 量子力学都可以解释. 在量子力学领域, 不确定关系是一个极为重要的概念, 也被称作测不准关系, 它实质上反映的是微观粒子运动的基本规律, 这也是量子力学区别于经典力学的判据之一. 1927 年, Heisenberg^[1] 通过对假想实验的分析首次提出不确定关系 (示意图参照图 1), 该不确定关系展示了人们无法同时准确预测一对非对易观测量的测量结果, 也就是说, 对粒子动量预测的结果准确性越高, 那么对其位置预测的准确性就越低, 反之亦然. 随后, 这个关系式由 Kennard^[2] 给出了严格证明. 随着深入研究, 人们发现, 不确定关系不仅适用于位置和动量这对

非对易物理量, 对于其他成对的非对易可观测量同样适用, 比如谐振子的相位与激发数、粒子的角度与轨道角动量等. 据此, 关于任意两个可观测量, Robertson^[3] 提出了更为普适的不确定度不等式. 值得注意的是, 这个公式虽然普适, 但也不是量化

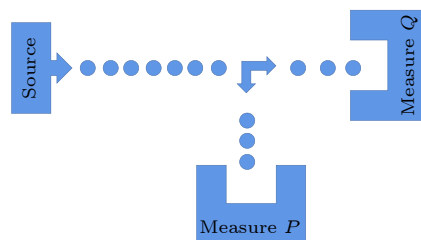


图 1 每个从粒子源发出的粒子都是用 P 或 Q 来测量的, 测量的选择是随机的. 不确定关系指出我们不能预测 P 和 Q 的测量结果

Fig. 1. Each particle emitted from the particle source is measured by P or Q , and the choice of measurement is random. The uncertainty relation indicates that we cannot predict the outcomes of both P and Q .

* 国家自然科学基金 (批准号: 12075001, 61601002, 12004006, 12175001)、安徽省自然科学基金 (批准号: 1508085QF139) 和中国科学院量子信息重点实验室开放基金 (批准号: No. KQI201701) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dwang@ahu.edu.cn

不确定性的最佳不等式, 它亦有不足之处, 这点本文将在第 2 节中给出具体分析.

随着量子信息理论不断发展, Deutsch^[4] 指出标准差用来量化不确定度有它自身的局限性, 同时学者们发现标准差并不是量化不确定度的唯一方式, 所以也逐渐衍生出许多其他方式来量化不确定度. 其中, Everett^[5] 和 Hirschman^[6] 首次提出关于位置和动量的熵不确定度关系, 这也是第一个熵不确定度关系. 随后, 这个不确定关系被推广到任意两个非对易的可观测量. 由于 Robertson 提出的不等式下界是依赖于系统的态, 为了克服这一弊端, Deutsch^[4] 利用信息熵构造了一个全新的熵不确定度不等式. 之后在 Kraus^[7] 推测的启发下, Maassen 和 Uffink^[8] 延续 Deutsch 的结论进而提出了一个著名的熵不确定度关系式. 除上述方式之外, 本文第 2 节将回顾多种形式的不确定关系.

通常情况下, 人们可用猜测游戏来演示不确定关系的物理意义. 在猜测游戏中 (如图 2 所示), 假设有两位观察者 Alice 和 Bob, 现在 Bob 准备了一个任意的态 ρ_A 并且将它发送给了 Alice, Alice 在收到这个态之后, 随机在两个 (或多个) 测量选择中选定某一个作用在态 ρ_A 上, 并记录下测量结果, 随后 Alice 告诉 Bob 她的测量选择, Bob 的任务就是猜出 Alice 的测量结果. 不确定性原理告诉我们, 如果 Alice 做了两个不相容的测量, 那么 Bob 就无法准确地猜测出两次测量的结果, 这也正好对应了制备不确定性的概念. 而熵不确定度关系, 比如 Maassen-Uffink 关系式可以被认为是最佳猜测概率的基本约束. 这个猜测游戏引发学者继续思考: 在刚提及的游戏中, Bob 只能通过经典信息来获得关于被测粒子制备的相关信息, 若让 Bob 除经典信息外还能获取相关量子信息, 那么能否提高 Bob 对 Alice 的测量结果的猜测概率呢? 具体来说也就是如果 Bob 准备的是一个双粒子系统, 且这两个粒子之间是相互关联的, 随后 Bob 只发送了其中一个粒子给 Alice, 留下另一个粒子作为量子存储, 那么在这种情况下, Bob 就可以通过两粒子之间的关联获取量子信息, 考虑到这些, Berta 等^[9] 以及 Renes 和 Boileau^[10] 顺着这个思路完成了相关研究, 并提出了一种新的熵不确定度关系, 被称为量子存储下的熵不确定度关系, 随后也有许多工作在该主题下展开, 比如三体系统的熵不确定度关系, 还有各种模型下熵不确定度动力学等, 这些工作进展都将在本文的第 3 节中一一展示.

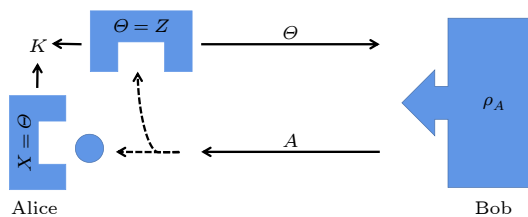


图 2 玩家 Alice 和 Bob 的猜测游戏. 首先, Bob 准备 ρ_A 并把 A 发送给 Alice. 然后, Alice 以相等的概率进行 Q 或 R 测量, 并将测量选项存储在 Θ 中. 第三, Alice 得出测量结果并将其存储在 K 中, 且向 Bob 透露测量选择 Θ . Bob 的任务是猜测 K (给定 Θ).

Fig. 2. A guessing game between players Alice and Bob. First, Bob prepares ρ_A and sends A to Alice. Then, Alice performs measurement Q or R with equal probability on A , and stores the measurement options in Θ . Third, Alice stores the measurement result in the K bit and tells Bob about her option Θ . Bob's task is to guess K (given Θ).

除了在理论上对不确定关系进行不断地探索之外, 量子信息理论的蓬勃发展也为不确定度关系打开了应用的大门. 目前, 不确定度关系广泛应用于包括纠缠目击、量子隐形传态、量子密码学、量子密钥分发、随机数等量子信息研究领域, 相关应用将会在第 4 节进行详细的讨论.

2 不同种类的不确定关系

不确定关系最开始是基于动量和位置提出的, 随着量子信息理论的兴起和发展, 众多学者在研究不确定关系的过程中引入标准差、熵等概念, 逐渐形成了不同种类的不确定关系分支, 本节主要考虑单个系统 A 的不确定关系, 介绍几种不同形式的不确定关系.

2.1 基于标准差的不确定关系

首先, Heisenberg^[1] 提出了著名的不确定性关系, 并由 Kennard 进行了严格的证明, 它可以表示为

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1)$$

这里的 Δx 和 Δp 分别代表位置和动量的标准差 $\Delta \tau = \sqrt{\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2}$ ($\tau = x, p$), $\hbar$ 是普朗克常数. 该不确定关系指出人们无法同时确定地获得某个粒子的位置和动量的精确测量结果. 在此基础上, 对于任意两个非对易的可观测量 Q 和 R , Robertson^[3] 推广得到了一个新的不等式:

$$\Delta Q \cdot \Delta R \geq \frac{1}{2} |\langle [Q, R] \rangle|, \quad (2)$$

这里的 $[Q, R] = QR - RQ$, $\langle \tau \rangle = \langle \psi | \tau | \psi \rangle$ 是可观测量 τ 在量子态 $|\psi\rangle$ 下的期望值. 正如引言所说, (2) 式并不是完美的, 它的缺点是当系统准备的态是选取的两个可观测量的本征态时, 通过计算可知, Robertson 不等式所展现出的下界 (不等式的右侧) 就会变为零, 此时结果显得过于平庸. 也就是说这个不等式的下界依赖于系统的态. 接着 Schrödinger^[11] 通过附加一个反对易子项强化 (2) 式得出:

$$\Delta Q^2 \cdot \Delta R^2 \geq \left| \frac{1}{2} \langle [Q, R] \rangle \right|^2 + \left| \frac{1}{2} \langle \{Q, R\} \rangle - \langle Q \rangle \langle R \rangle \right|^2. \quad (3)$$

然而, (2) 式和 (3) 式的下界是与状态相关的. 如果系统由 Q 或 R 中的某一个本征态制备, 很容易算出来 $|\langle [Q, R] \rangle| = 0$, $\left| \frac{1}{2} \langle \{Q, R\} \rangle - \langle Q \rangle \langle R \rangle \right| = 0$, 即 (2) 式和 (3) 式的下界为零, 这意味着在这种情况下, 用标准差来测量不确定性将变得没有意义. 随后 Maccone 和 Pati^[12] 为了消除了这个缺点提出了一个新的不确定关系:

$$\Delta Q^2 + \Delta R^2 \geq \max \{B_1, B_2\}, \quad (4)$$

这里的 $B_1 = \pm i |\langle [Q, R] \rangle| + |\langle \psi | Q \pm iR | \psi^\perp \rangle|^2$, $B_2 = \frac{1}{2} |\langle \psi^\perp_{Q+R} | Q + R | \psi \rangle|^2$, 态 $|\psi^\perp\rangle$ 正交于 $|\psi\rangle$. (4) 式表示的不确定关系已经在实验^[13–15]上得到了验证.

2.2 基于熵的不确定关系

从技术上讲, 除了上面提到的偏差以外还有另一种有效而直接的方法来描述不确定性关系, 即熵. Everett^[5] 和 Hirschman^[6] 首次引入熵来描述测不准原理. 随后, Białynicki-Birula 和 Mycielski^[16] 严格证明了关于位置与动量的微分熵不确定度关系:

$$h(Q) + h(R) \geq \log_2(e\pi), \quad (5)$$

其中 h 表示的是微分熵, 考虑一个由概率密度 $\Gamma(q)$ 控制的随机变量 Q , 微分熵可以表示为

$$h(Q) = - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(q) \log_2 \Gamma(q) dq. \quad (6)$$

假设这个量属于高斯概率分布, 则满足

$$\Gamma(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta(Q)^2}} \exp \left[\frac{-(q - \bar{q})^2}{2\Delta(Q)^2} \right], \quad (7)$$

这里的 $\bar{q}$ 表示 q 的平均值. 高斯概率分布在这个情况下是特别的: 对一个固定的标准差 $\Delta(Q)$, (7) 式的分布形式会使得 (6) 式中的熵最大化, 这一点利用拉格朗日乘数的变分演算就可以展现出来.

将 (7) 式代入 (6) 式来计算高斯分布的熵更直观, 代入得到:

$$h(Q) = \log_2 \sqrt{2\pi e \Delta(Q)^2}, \quad (8)$$

又由于高斯概率分布使熵最大化, 所以对于一个一般分布的随机变量, 下面的不等式始终成立:

$$h(Q) \leq \log_2 \sqrt{2\pi e \Delta(Q)^2}. \quad (9)$$

现在考虑粒子平移自由度的任意量子态, 它分别产生位置和动量的随机变量 Q 和 P , 然后将得到的结果不等式代入到 (5) 式得出

$$\begin{aligned} & \log_2(2\pi e \Delta(Q) \Delta(R)) \\ &= \log_2 \sqrt{2\pi e \Delta(Q)^2} \log_2 \sqrt{2\pi e \Delta(R)^2} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\geq h(Q) + h(R) \quad (11)$$

$$\geq \log_2(e\pi). \quad (12)$$

最后, 结合 (10) 式和 (11) 式很容易推断出之前关于位置与动量的结果 $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$.

众所周知, 香农熵^[17] 在信息论中起着基础而又关键的作用, 在经典物理学领域量化了给定系统状态下的信息量. 通过引入香农熵, Deutsch^[4] 提出了一个不确定关系, 写成

$$H(Q) + H(R) \geq 2 \log \left(\frac{2}{1 + \sqrt{c(Q, R)}} \right), \quad (13)$$

其中, $H(Q) = - \sum_i p_q \log_2 p_q$ 就是香农熵的计算公式, $p_q = \text{Tr}(|Q_q\rangle \langle Q_q| \rho)$ 是关于 Q 的测量结果 q 的概率; c 是指 Q 和 R 的最大重叠量, $c = \max_{ij} \{c_{ij}\} = |\langle \psi_i^Q | \psi_j^R \rangle|^2$, $|\psi_i^Q\rangle$ 指代可观测测量 Q 的本征矢, $|\psi_j^R\rangle$ 也是一样.

随后, 基于 Deutsch 的开创性工作, Maassen 和 Uffink^[8] 遵循 Kraus 的猜想对 (13) 式进行了优化, 对任意的态 ρ_A ,

$$H(Q) + H(R) \geq \log_2 \frac{1}{c(Q, R)} =: q_{MU}. \quad (14)$$

注意 (13) 式和 (14) 式中的下界都是和初态无关的, 这一点和 Robertson 提出的下界形成了对比. Korzekwa 及其团队^[18] 表示, 通过考虑总的不确定性, 单比特系统的 Maassen-Uffink 不等式可以改进为

$$\begin{aligned} & H(Q) + H(R) \\ & \geq \log_2 \frac{1}{c(Q, R)} + H(\rho)[2 + \log_2 c(Q, R)]. \end{aligned} \quad (15)$$

此外,从香农熵出发, Rényi^[19] 提出一个相对更普遍的熵版本,可以为具有高或低信息量的事件提供更大的权重. 由于其固有的数学性质,这些不同类型的熵可以很好地应用于量子密码学和信息论. 一般来说, x 阶的 Rényi 熵定义为

$$H_x(Q) = \frac{1}{1-x} \log_2 \sum_q p_q^x, \quad (16)$$

x 的范围是 $[0, \infty]$. 当 $x = 1$ 时, Rényi 熵就会恢复到 Shannon 熵, Shannon 熵可以说是 Rényi 熵的一种特殊形式. Maassen 和 Uffink^[8] 还指出,从 Rényi 熵的角度出发 (14) 式会变得更普适,对任意的 $x, y \geq \frac{1}{2}$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$, 有以下关系:

$$H_x(Q) + H_y(R) \geq q_{MU}. \quad (17)$$

当 $x = y = 1$ 时, (17) 式和 (14) 式一致, 当 $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, 可以得到另一个关于 (17) 式用最小熵和最大熵来描述的特殊例子:

$$H_{\min}(Q) + H_{\max}(R) \geq q_{MU}. \quad (18)$$

由于最小熵表征了正确猜测结果 Q 的概率, 因此这种类型不确定关系在量子密码学和量子信息论中应用最为广泛.

除上面说的三种熵不确定度关系外, 也有学者推导出了时间-能量熵不确定度关系^[20], 比如 Rastegin^[21] 通过 Pegg^[22] 的方法推导出了能量-时间的熵不确定度关系.

2.3 Majorization 不确定关系

另外一种获得与熵直接相关的不确定关系的方法就是 Majorization 方法, 代替之前的概率之和, 该方法采用的是概率的乘积. 这个想法是由 Partovi^[23] 首次提出, 然后由 Friedland 小组^[24] 和 Puchała 小组^[25] 进一步推广和发展. 现有两个半正定算子值 (positive operator-valued measures, POVM) $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}^x\}_x$ 和 $\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}^z\}_z$, 用这两个测量对系统 ρ_A 进行测量, 根据玻恩定则可以得到概率分布分别为 $P_X(x) = \text{Tr}(\rho_A \mathbb{X}^x)$ 和 $P_Z(z) = \text{Tr}(\rho_A \mathbb{Z}^z)$. 可以用 $\mathbf{P}_X^\downarrow$ 和 $\mathbf{P}_Z^\downarrow$ 来表示相应的重新排序的向量, 方便概率按从大到小的顺序排列.

现在需要找到一个向量使得 $\mathbf{P}_X^\downarrow$ 和 $\mathbf{P}_Z^\downarrow$ 张量积最大, 也就是说需要找到一个概率分布 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu(1), \mu(2), \dots, \mu(|X||Z|)\}$ 使得

$$\mathbf{P}_X^\downarrow \times \mathbf{P}_Z^\downarrow \prec \boldsymbol{\mu} \quad (19)$$

对 $\forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ 即希尔伯特空间都成立. 这样的关系式给乘积分布如何展开设置了一个界, 一个满足 (19) 式的概率分布 $\boldsymbol{\mu}$ 可以这样来构造, 考虑到 (19) 式中乘积分布的最大概率:

$$p_1 = \mathbf{P}_X^\downarrow \cdot \mathbf{P}_Z^\downarrow = p_{\text{guess}}(X) \cdot p_{\text{guess}}(Z). \quad (20)$$

我们知道如果两个测量是不相容的, 那么 p_1 总是会远离 1, 因为不可能两个测量都有一个确定的结果. 举例说明, 回想一下 Deutsch 的结果, 可以得到

$$p_{\text{guess}}(X) \cdot p_{\text{guess}}(Z) \leq b^2 =: \mu_1, \quad (21)$$

其中 $b = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{c}]$, 因此, 很明显向量 $\boldsymbol{\mu}^1 = \{\mu_1, 1 - \mu_1, 0, \dots\}$ 符合 (19) 式, 且构成了一个简单而不平凡的不确定关系式.

除此以外, Friedland 小组和 Puchała 小组都提到了用一套有效的方法来构造一个向量序列 $\{\boldsymbol{\mu}^k\}_{k=1}^{|X|-1}$, 形式为

$$\boldsymbol{\mu}^k = \{\mu_1, \mu_2 - \mu_1, \dots, 1 - \mu_{m-1}, 0, \dots, 0\}, \quad (22)$$

同时 $\boldsymbol{\mu}^k \prec \boldsymbol{\mu}^{k-1}$ 满足 (19) 式并且带来了一个越来越紧致的不确定关系. $\boldsymbol{\mu}^k$ 的表达式是根据 Majorization 问题给出的, 并且会随着 k 的增加而变得越来越难.

这里要说明的是, Rényi 熵的熵不确定度关系是直接由 Majorization 关系派生而来的, 这是由于 Rényi 熵是 Schur 凹的, 且具有可加性. 这代表了

$$\mathbf{P}_X^\downarrow \times \mathbf{P}_Z^\downarrow \prec \boldsymbol{\mu} \Rightarrow H_\alpha(X) + H_\alpha(Z) \geq H_\alpha(V), \quad (23)$$

这里的 V 是一个根据 $\boldsymbol{\mu}$ 规律分布的随机变量, 与公式 (7) 中的 Maassen-Uffink 关系相比, (23) 式中的不确定关系具有不同性质, 因为它给出了具有相同参数的 Rényi 的总和的下界. 作为一个 $x \rightarrow \infty$ 的特例, 又恢复到了 Deutsch 提出的熵不确定度关系:

$$H(Q) + H(R) \geq H^{\min}(Q) + H^{\min}(R) \quad (24)$$

$$\geq \log \frac{1}{b^2} =: q_D, \quad (25)$$

第一行的不等式是通过以 α 为参数的 Rényi 熵的单调性推出的, 若 $\alpha = 1$, 再根据 (23) 式, 可以得到

$$H(X) + H(Z) \geq H_{\text{bin}}(b^2) =: q_{\text{majorization}}, \quad (26)$$

这里的 $H_{\text{bin}}(\lambda) = -\lambda \log \lambda - (1 - \lambda) \log(1 - \lambda)$ 指二元熵.

3 量子存储下的熵不确定度关系

3.1 背景

在开始介绍量子存储下的熵不确定度关系之前,为了更好地理解接下来的内容,需要先引入几个概念及他们的数学表达式,首先 von Neumann^[26]为了描述量子体系将熵的概念推广到量子范畴,即冯诺依曼熵,它可以用来表征量子态的不确定度,计算方法如下:

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) = -\sum_j \lambda_j \log \lambda_j, \quad (27)$$

λ_j 代表量子态 ρ 的本征值. 对于一个双边量子态 ρ_{AB} , 量子联合熵、量子条件熵以及量子互信息可以表示为

$$S(AB) = -\text{Tr}(\rho_{AB} \log \rho_{AB}); \quad (28)$$

$$S(A|B) = S(AB) - S(B); \quad (29)$$

$$I(A:B) = S(A) + S(B) - S(AB) \\ = S(A) - S(A|B). \quad (30)$$

接着可以利用下面的式子来计算经典关联 $C(B|A)$ 和量子失谐 $D(B|A)$:

$$C(\rho_{AB}) = S(\rho_B) - \min_{\{E_k^A\}} S(B|\{E_k^A\}), \quad (31)$$

$$D(B|A) = I(\rho_{AB}) - C(B|A), \quad (32)$$

$I(\rho_{AB})$ 表示系统态的互信息, $S(B|\{E_k^A\}) = \sum_k p_k S(\rho_{B|E_k^A})$, 其中 $\rho_{B|E_k^A} = \text{Tr}_A(E_k^A \rho_{AB})/p_k$ 指的是经过 POVM E_k^A 测量后的态, $p_k = \text{Tr}(E_k^A \rho_{AB})$ 表示测量结果 k 的概率.

目前为止,上面所展现出的不确定关系都是有限制的,他们都只允许观察者获得有限的经典信息,前面的猜测游戏中提出的问题,即如果 Bob 除了经典信息之外还能根据两个关联的粒子获取相关的量子信息,是否可以提高 Bob 对 Alice 测量结果的概率呢? Renes 和 Boileau^[10] 在这个问题上做出了尝试并且得到了相关的结果,也为熵不确定度关系研究打开了一个新的局面,他们利用两个互补的测量基 X 和 Z 得到了如下的不等式:

$$S(X|B) + S(Z|B) \geq \log_2 d + S(A|B),$$

$$S(X|B) + S(Z|E) \geq \log_2 d, \quad (33)$$

d 代表 A 粒子维度, E 代表窃听者 Eve 的系统.

接着, Berta 等^[9] 在 Renes 和 Boileau 的结论

上做出了新的突破,将 (33) 式进一步推广到了任意两个可观测量,现在解释 Berta 等提出的不确定游戏是如何实现的. 与之前猜测游戏不同的是,这个游戏的规则是允许 Bob 保留量子存储系统来帮助他猜测 Alice 的测量结果,如图 3 所示. 两个游戏玩家必须事先知晓两个测量 Q 和 R , Bob 先准备一个双粒子系统态 ρ_{AB} , AB 粒子相互纠缠, Bob 将粒子 B 留下,将粒子 A 发送给 Alice, Alice 随机选择对粒子 A 进行测量,并且把自己的测量选择告诉 Bob, Bob 的任务仍然是预测 Alice 的测量结果,此时 Bob 这里有和粒子 A 存在纠缠的量子存储粒子 B , Bob 可以通过利用他所收到的经典信息来对粒子 B 进行测量. $S(Q|B)$ 是用来衡量 Bob 关于 Alice 用可观测量 Q 的测量结果的不确定度, $S(R|B)$ 也是同样的意义. Berta 等^[9] 提出了量子存储支撑下的熵不确定度关系:

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq \log_2 \frac{1}{c} + S(A|B), \quad (34)$$

$$S(Q|B) + S(R|E) \geq \log_2 \frac{1}{c}, \quad (35)$$

其中, $S(A|B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$ 代表测量前的态 ρ_{AB} 的条件熵, $S(Q|B) = S(\rho_{QB}) - S(\rho_B)$ 代表的是经过 Q 测量过后的态 ρ_{QB} 的条件熵,可以通过如下的式子求出经过测量的态:

$$\rho_{QB} = \sum_i (\Pi_i^Q \otimes I_B) \rho_{AB} (\Pi_i^Q \otimes I_B), \quad (36)$$

其中 $\Pi_i^Q = |\psi_i^Q\rangle\langle\psi_i^Q|$ 是作用在子系统 A 上的测量算子, $|\psi_i^Q\rangle$ 指代可观测量 Q 的本征矢. 现在来解读 (36) 式,当可观测量 Q 和 R 完全互补且粒子

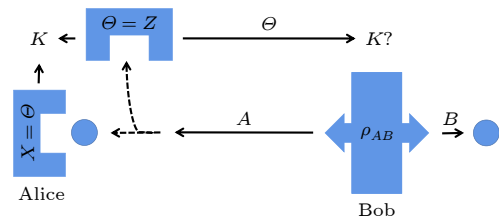


图 3 量子存储下的不确定游戏. 首先, Bob 准备态 ρ_{AB} , 然后把子系统 A 发送给 Alice. 第二, Alice 对 A 进行 Q 和 R 测量, 然后向 Bob 告知测量选择 Θ . Bob 的任务是正确猜测 K

Fig. 3. The guessing game with a quantum memory system. First, Bob prepares ρ_{AB} and sends A to Alice. Then, Alice performs measurement Q or R on A , and stores the measurement options in Θ . Third, Alice tells Bob about her option Θ . Bob's task is to guess K correctly.

A 与 B 处于最大纠缠时, 通过计算可以得出此时 $c = 1/d$, $S(A|B) = -\log_2 d$, 可以发现式子右边也就是下界等于 0, 也就是说, 此时 Berta 可以精准预测出 Alice 对粒子 A 执行测量 Q 和 R 的结果.

Berta 等的结果已在全光平台中得到验证^[27-28], 也有人提出了利用金刚石氮空位色心体系进行验证^[29]. 除这些以外, 量子存储下的熵不确定度关系在近些年也在不断发展、完善, 这些进展都会在接下来的章节中介绍.

3.2 进展

3.1 节主要介绍了量子存储下熵不确定度关系的背景起源, 接下来展示的是近些年来量子存储下熵不确定度关系的发展方向及进程.

3.2.1 两粒子系统量子存储下的熵不确定度关系

首先在两粒子量子存储下熵不确定度关系方面, 继 Berta 之后, 许多学者也在不断进行探索, 他们发现考虑到粒子 A, B 间的量子关联, 可以得到比 (34) 式更为优化的下界, Pati 等^[30] 证明了 (34) 式可以更加紧致:

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq \log \frac{1}{c} + S(A|B) + \max\{0, \delta_1\}, \quad (37)$$

其中 $\delta_1 = D(\rho_{AB}) - C(\rho_{AB})$, $C(\rho_{AB})$ 是经典关联, $D(\rho_{AB})$ 是量子失谐^[31], 数学表达式如 (31) 式和 (32) 式. 证明方程的关键是 $S(X|B) = S(X) - I(\rho_{XB})(X$ 表示测量 $Q, R)$, $I(\rho_{XB}) \leq C(B|A)$ 和 $H(Q) + H(R) \geq q_{MU}$, 这表明当量子失谐大于经典关联时, Pati 等提出的不确定度下界较 (34) 式的下界更为收紧. 如果考虑到量子态 ρ_{AB} 的纯化 $|\psi_{ABC}\rangle$, 量子失谐和经典关联之间的差异遵循单配性分配^[32,33]:

$$\delta_D = D(BC|A) - D(B|A) - D(C|A), \quad (38)$$

因此只有在量子态 ρ_{AB} 的纯化 $|\psi_{ABC}\rangle$ 违反单配性不等式 $D(BC|A) \geq D(B|A) + D(C|A)$ 时, Berta 等的不确定度下界才会被提高.

同样的, (35) 式下界也可以被优化为

$$S(Q|B) + S(R|E) \geq \log \frac{1}{c} + \max\{0, \delta'_1\}, \quad (39)$$

其中, $\delta'_1 = C(B|A) - D(BE'|A)$, $D(BE'|A)$ 代表系统 A 和 BE' 之间的量子失谐, E' 指代 ABE 的纯化系统, 即 $\rho_{ABE} = \text{Tr}_{E'}(|\Psi\rangle_{ABEE'}\langle\Psi|)$.

回到 (34) 式的下界优化问题上, 2014 年, Coles 和 Piani^[34] 在紧致界方面做出了突破, 他们引入 $\{c_{ij}\}$ 中第二大的参数 c_2 先推导出了新的不确定度关系式:

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq \log \frac{1}{c} + \frac{1 - \sqrt{c}}{2} \log \frac{c}{c_2} + S(A|B), \quad (40)$$

并进一步证明了下面紧致的不确定度关系下界:

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq q(\rho_A) + S(A|B), \quad (41)$$

式中的 $q(\rho_A) = \max\{q(\rho_A, Q, R), q(\rho_A, R, Q)\}$, 计算方式如下:

$$q(\rho_A, Q, R) = \sum_j p_j^Q \log \frac{1}{\max_k c_{jk}}, \quad (42)$$

$$q(\rho_A, R, Q) = \sum_j p_j^R \log \frac{1}{\max_k c_{jk}}, \quad (43)$$

其中 $p_j^Q = \text{Tr}\left(\prod_i^Q \rho_A\right)$ 指 Q 的测量结果概率分布, p_j^R 也是一样. 仔细观察可以发现, 如果系统 A 的维度 $d = 2$, (41) 式所表示的熵不确定度关系下界和 Berta 的下界是一致的, 但是如果维度 $d \geq q_2$, (41) 式的结果可能会比 Berta 的下界更为紧致.

还可以在全套的 ρ_A 找出最小的 $q(\rho_A)$, 也就是 $q = \min_{\rho_A} q(\rho_A)$, Coles 和 Piani 提出这种最小化可以通过以下步骤实现:

$$q = \max_{0 \leq p \leq 1} \lambda_{\min}[\Delta(p)], \quad (44)$$

$\lambda_{\min}[\Delta(p)]$ 表示矩阵 $\text{var} \Delta(p) = p\Delta_{QR} + (1-p)\Delta_{RQ}$ 的最小本征值, 其中

$$\Delta_{QR} = \sum_j \log_2 \left(\frac{1}{\max_k c_{jk}} \right) |\psi_j^Q\rangle \langle \psi_j^Q|, \\ \Delta_{RQ} = \sum_k \log_2 \left(\frac{1}{\max_j c_{jk}} \right) |\psi_k^R\rangle \langle \psi_k^R|, \quad (45)$$

同样, (40) 式和 (41) 式的不确定下界可以通过在不等式右侧加上额外的一项 $\max\{0, \delta_1\}$ 而变得更为紧致.

Adabi 等^[35] 以及 Haseli 和 Ahmadi^[36] 从 Holevo 量和互信息方面出发, 提出了如下表达式:

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq \log \frac{1}{c} + S(A|B) + \max\{0, \chi_2\},$$

$$\chi_2 = I(\rho_{AB}) - I(\rho_{QB}) - I(\rho_{RB}), \quad (46)$$

其中 $I(\rho_{QB})$ 代表着 Bob 对 Alice 的测量 Q 可获取的信息量, $I(\rho_{RB})$ 也是一样, 因此当互信息 $I(\rho_{AB})$

大于 Bob 可获取的信息之和时, (46) 式给出的下界将会比 Berta 给出的下界更为优化, 对于两粒子纯态, 经计算可得 $\delta_1 = \chi_2$, 此时, (46) 式给出的下界将会和 (34) 式和 (37) 式的下界保持一致, 除此之外, Adabi 等 [35] 还讨论了对 Werner 态, (46) 式的下界将会和 (37) 式的下界重合, 但是对于贝尔对角态和两量子比特 X 态, Adabi 的下界结果明显优于 (34) 式和 (37) 式的。

由 Berta 等 [9] 提出的熵不确定度关系适用于两个可观测量的情况, 实际上这个关系可以被推广到更一般情况, 也就是多测量设置情况, 沿着这个想法, 不少学者也在这个方向上做出了突破 [37], 下面给大家展示一些代表性的相关工作, Berta 等提出的不确定游戏中是两测量 (Q 和 R), 那么多测量的情况会怎么样? 根据 Liu 等 [38] 提出的新量子存储下熵不确定度关系, 假设这两个测量被 N 个测量 $\{M_i\}_{i=1}^N$ 所代替, 那么有:

$$\sum_{i=1}^N S(M_i|B) \geq \log \frac{1}{b} + (N-1)S(A|B), \quad (47)$$

$$b = \max_{i_N} \left\{ \sum_{i_2 \sim i_{N-1}} \max_{i_1} [c(\psi_{i_1}^1, \psi_{i_2}^1)] \prod_{m=2}^{N-1} c(\psi_{i_m}^m, \psi_{i_{m+1}}^{m+1}) \right\}, \quad (48)$$

其中, b 是参数, $c(\psi_{i_m}^m, \psi_{i_n}^n) = \max_{i_m i_n} |\langle \psi_{i_m}^m | \psi_{i_n}^n \rangle|^2$, $\{|\psi_{i_m}^m\rangle\}$ 指代 M_m 的本征矢. 观察 (47) 式可以发现, 当 $N=2$, 也就是两测量时, $b=c$, $c = \max_{ij} \{c_{ij}\}$, (47) 式中下界便会恢复到和 (36) 式一样的情况. 随后将 ε 表示为测量 $\{M_i\}$ 的新顺序, 且将 $\varepsilon_{i_n}^n$ 表示为 M_m 对应的按 ε 顺序排列的本征矢, 在此基础上, Zhang 等 [39] 得到了一个相对 (47) 式更为紧致的下界, 数学表达式如下:

$$\sum_{i=1}^N S(M_i|B) \geq \max_{\varepsilon} \{\ell_{\varepsilon}\} + (N-1)S(A|B), \quad (49)$$

式中

$$\ell_{\varepsilon} = - \sum_{i_N} p_{\varepsilon_{i_N}}^N \log \sum_{i_k, N \geq k \geq 1} \max_{i_1} \prod_{n=1}^{N-1} |\langle \varepsilon_{i_n}^n | \varepsilon_{i_{n+1}}^{n+1} \rangle|^2, \\ p_{\varepsilon_{i_N}}^N = \text{Tr}(|\varepsilon_{i_N}^N\rangle\langle \varepsilon_{i_N}^N| \otimes \mathbb{I}_B) \rho_{AB}.$$

此外, 也可以利用其他方式来优化 (49) 式的下界, Dolatkhan 等 [40] 采用 Adabi 等在这篇文章中一样的方法推导出

$$\sum_{i=1}^N S(M_i|B) \geq \log \frac{1}{b} + (N-1)S(A|B) + \max\{0, \chi_N\}, \quad (50)$$

其中 $\chi_N = (N-1)I(\rho_{AB}) - \sum_{i=1}^N I(\rho_{M_i B})$, 经对比 (50) 式和 (49) 式可知, 当 $C(B|A) \leq I(\rho_{M_i B})$ 时, (50) 式的下界相对于 (49) 式呈现的下界更优化.

除此以外, 利用 Pati 等紧致下界的方法思路, 也有学者推导出了在没有量子存储器的情况下多测量的熵不确定度关系 [38]:

$$\sum_{i=1}^N S(M_i) \geq \log \frac{1}{b} + (N-1)S(A), \quad (51)$$

可以得到

$$\sum_{i=1}^N S(M_i|B) = \sum_{i=1}^N S(M_i) - \sum_{i=1}^N I(\rho_{M_i B}) \\ \geq \sum_{i=1}^N S(M_i) - NC(B|A) \\ \geq \log \frac{1}{b} + (N-1)S(A) - NC(B|A) \\ = \log \frac{1}{b} + (N-1)S(A|B) + (N-1)D(B|A) - C(B|A). \quad (52)$$

将 (52) 式进行整合简化, 可以得到一个比 Liu 等的下界 ((47) 式) 更为紧致的下界, 表示如下:

$$\sum_{i=1}^N S(M_i|B) \geq \log \frac{1}{b} + (N-1)S(A|B) + \max\{0, \delta_N\}, \quad (53)$$

这里的 $\delta_N = (N-1)D(B|A) - C(B|A)$.

Hu 和 Fan [41] 从另外的角度来分析量子存储下的熵不确定度关系, 他们从 Berta 等提出的结论 ((34) 式) 出发, 将不确定游戏推广到了这样情况, 现有 N 个玩家共享量子态 $\rho_{AB_1 B_2 \dots B_{N-1}}$, 所有玩家都知道这个态的具体形式除了, 玩家 Alice, 那么玩家 $B_1 B_2 \dots B_{N-1}$ 之间禁止交流, 他们的任务就是预测出 Alice 作用在粒子 A 上的测量结果, 依赖于冯诺依曼熵的强次加性和条件熵的次加性 [42], 可以得到:

$$\sum_{i=1}^N S(A|B_i) \geq 0, \quad (54)$$

从 (54) 式联系到上面的游戏情况, 可以这样理解,

Alice 对粒子 A 的测量结果不能被其余玩家 $B_1 B_2 \cdots B_{N-1}$ 同时准确预测, 从这个角度分析得出的 (54) 式被认定为是不同种的不确定关系.

3.2.2 三粒子系统量子存储下的熵不确定度关系

2009 年 Renes 和 Boileau^[10] 给出了三粒子系统中量子存储下熵不确定度关系的具体形式:

$$S(X|B) + S(Z|C) \geq \log_2 \frac{1}{c} =: q_{MU}, \quad (55)$$

这里可以用单配性游戏来解释. 如图 4 所示, 假设现在有一个输出三粒子系统态 ρ_{ABC} 的发射源, 现将子系统 A, B 和 C 分别发送给 Alice, Bob 和 Charlie 三人, 接着, Alice 对系统 A 进行 X 或 Z 测量, 如果选择 X 测量, 将选择告诉 Bob, Bob 的任务就是以最小的不确定性猜出测量结果. 同样, 如果选择 Z 测量, 将选择告诉 Charlie, Charlie 需要以最小的不确定性猜出对应的测量结果, 在这个游戏里, 玩家 Bob 和 Charlie 与玩家 Alice 是对手, 在 Alice 得到测量结果 K 并将测量选择告知 Bob 和 Charlie 后, 只有在这两个玩家同时猜出结果为 K 时, 他们两个才算赢了玩家 Alice. 但是从 (55) 式可以看出, 由于测量选择 X 和 Z 的互补性, Bob 和 Charlie 对猜测结果的不确定性是一种此起彼伏的关系, 即如果在玩家 Alice 测量选择为 X 时, Bob 准确地猜出了结果为 K , 那么 Charlie 就无法在 Alice 测量

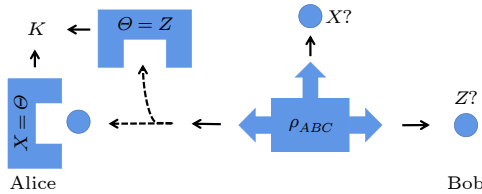


图 4 三粒子量子存储器设置图. 首先, 粒子源准备 ρ_{ABC} , 并将 A 发送给 Alice, B 发送给 Bob, C 给 Charlie. 接着, Alice 在 A 上进行 X 或 Z 测量, 然后在已经给 Bob 粒子 B 的情况下, 询问 Bob 关于 Alice 的 X 测量结果的不确定性, 在已经给 Charlie 粒子 C 的情况下询问 Charlie 有关 Alice 的 Z 测量结果的不确定性. 只有他们两个同时猜出结果 K 这个游戏才能算 Bob 和 Charlie 胜利

Fig. 4. The tripartite quantum memory setup. First, the particle source prepares ρ_{ABC} , and sends A to Alice, B to Bob, and C to Charlie. Next, Alice performs measurement X or Z on A , and asks Bob about the uncertainty of Alice's X measurement outcome, ask Charlie about the uncertainty of Alice's Z measurement outcome. Only both of them guessed that the output is K , the game can be considered a victory for Bob and Charlie.

选择为 Z 时, 正确猜测到结果为 K , 反之亦然.

对于 Renes 的结论, 会发现它的下界在两个可观测量确定下来后就是一个常量, 这是有一定的局限性. 于此, Ming 等^[43] 在 Renes 和 Boileau 的结论基础上, 得到了一个更为优化的下界, 具体形式如下:

$$S(X|B) + S(Z|C) \geq q_{MU} + \max\{0, \Delta\}, \quad (56)$$

其中, $\Delta = q_{MU} + 2S(\rho_A) - [I(A:B) + I(A:C)] + [I(Z:B) + I(X:C)] - H(X)$ 中, $I(A:B)$ 是互信息, $I(X;C) = S(\rho^B) - \sum_i p_i S(\rho_i^B)$ 是 Holevo 量, 它代表的是 Bob 对于 Alice 测量结果可获取信息的上界, Alice 对粒子 A 进行 X 测量, 得到第 i 次的测量结果对应的概率为 $p_i = \text{Tr}_{AB} \left(\prod_i \rho_{AB} \prod_i^A \right)$, 此时粒子 B 对应的量子态为 $\rho_i^B = \frac{1}{p_i} \text{Tr} \left(\prod_i \rho_{AB} \prod_i^A \right)$. $H(X)$ 代表的是对 A 粒子执行测量 X 的香农熵, $H(Z)$ 也是同样的意义, 推导过程如下: 他们利用两粒子存储下的熵不确定度关系

$$S(X|B) + S(Z|B) \geq S(A|B) + q_{MU}, \quad (57)$$

$$S(X|C) + S(Z|C) \geq S(A|C) + q_{MU}, \quad (58)$$

将两式结合便可得到一个新的不等式

$$S(X|B) + S(Z|C) \geq 2q_{MU} + S(A|B) + S(A|C) \quad (59)$$

$$-S(Z|B) - S(X|C). \quad (60)$$

再将 $S(A) = I(A:B) + S(A|B)$, $S(A) = I(A:C) + S(A|C)$, $H(Z) = I(Z:B) + S(Z|B)$ 和 $H(X) = I(X;C) + S(X|C)$ 整理, 即可推出 Ming 等的结果. 值得注意的是, 在几个特殊的情况下 Δ 可以被简化: 1) 当可观测量 X 和 Z 是完全互补且子系统 A 是最大混合态时, 比如 GHZ 态; 2) 当可观测量是泡利测量即 σ_x, σ_z 测量, 子系统又是非相干态时, 例如 GHZ 类态、广义的 W 态和 Werner 类态; 在这两种情况下都可以得到 $H(X) + H(Z) = S(\rho^A) + q_{MU}$, 那么 Δ 可以被简化为 $\Delta = S(\rho_A) - [I(A:B) + I(A:C)] + I(Z;B) + I(X;C)$.

随后, Dolatkhah 等^[44] 在 Ming 等^[43] 的工作基础上提出了新的下界, 形式如下:

$$S(X|B) + S(Z|C) \geq q_{MU} + \frac{S(A|B) + S(A|C)}{2} + \max\{0, \delta\}, \quad (61)$$

这里的 $\delta = \frac{I(A:B) + I(A:C)}{2} - [I(X:B) + I(Z:C)]$,

与 Ming 等的下界相比, 该下界在广义 W 态及混合三量子比特态中明显更为紧致, 如图 5 所示.

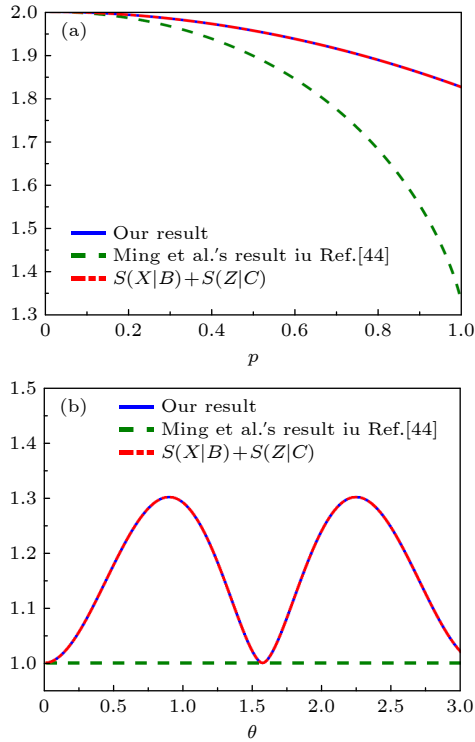


图 5 这两张图引用自参考文献 [44] 中的第三、四幅图, 图片展示了 Ming 等的结果 (图上的 Ref. [45] 就是本文参考文献 [43]) 和 Dolatkhah 等结果的对比, 这里选取的测量是泡利测量: $X = \sigma_x, Z = \sigma_z$. 图中蓝线是式 (61) 左式, 红线对应右式, 重合表明对应的量子态、界与不确定度重合. (a) 广义 W 态量子存储下的熵不确定度及下界的图像. (b) 混合三比特态量子存储下的熵不确定度及下界的图像.

Fig. 5. These two pictures are quoted in the third and fourth pictures in the reference [44]. The picture shows the comparison of the results of Ming et al. (Ref. [45] on the picture is the reference [43] in this text) and Dolatkhah et al.. The measurement selected here is the Pauli measurement: $X = \sigma_x, Z = \sigma_z$. The blue line in the figure is the left side of the formula (61), and the red line corresponds to the right side. Their overlap indicates the corresponding quantum state, and the bounds coincide with the uncertainty. (a) Different lower bounds of the tripartite quantum-memory-assisted entropic uncertainty relation (QMA-EUR) for the generalized W state; (b) Different lower bounds of the tripartite QMA-EUR for symmetric family of mixed three-qubit states.

3.3 熵不确定度关系动力学

仅仅分析熵不确定度关系本身是远远不够的, 对于熵不确定度关系的研究应该落实到具体的量子系统中来, 所以本节主要介绍熵不确定度关系在各类量子系统中的动力学演化.

3.3.1 马尔科夫和非马尔科夫噪声

从实际的角度出发, 量子系统通常是开放系统, 开放系统 [45] 退相干效应会或多或少地影响不确定度的大小. 从这个意义上说, 在量子测量中, 了解环境如何影响不确定性的变化变得不可或缺和至关重要. 到目前为止, 在各种环境噪声下的量子存储下熵不确定度关系的研究方面已经做了大量的工作. 一般来说, 环境的类型可以分为马尔科夫和非马尔科夫环境. 如果一个系统的信息以单向的方式从系统流向环境, 没有信息回流, 就说环境是马尔科夫的; 相反, 如果存储在中心系统中的信息是在系统和环境之间双向流动的, 也就是存在信息回流的情况, 则称该环境为非马尔科夫环境.

我们小组 [46] 在研究了在没有量子存储器器的情况下, 当一个量子比特经历马尔科夫和非马尔科夫的交叉时, 熵不确定性的动力学. 该系统由一个两能级原子与一个复合环境 (一个单模腔和一个多层级热库) 耦合而成. 通过研究发现, 腔体与热库相对较强的耦合强度可以减少不确定性. 即原子与腔之间相对较强的耦合强度是产生非马尔科夫的原因, 而弱耦合强度则会导致马尔科夫性. 原子腔耦合强度越强, 信息就会回流到原子中, 具体表现为测量不确定度的振荡. 值得注意的是, 当原子腔的耦合强度强于临界耦合强度时, 不确定性在测得的不确定度的范围内振荡, 当原子腔耦合强度小于临界耦合强度时, 不确定性不断减小, 并在长时间限制内达到下界.

随后, 在马尔科夫和非马尔科夫交叉的情况下讨论了由两个独立耦合到结构玻色子储层的原子组成的中心系统中量子存储下的熵不确定度关系 [47], 该不确定关系由两个独立耦合到结构玻色子储层的原子组成. 量子记忆辅助熵不确定性的动力学在马尔科夫和非马尔科夫制度中非常独特. 强烈的非马尔科夫性会导致测量不确定度和下限的大幅度和长周期振荡. 然而, 对于马尔科夫制度, 不确定性和下限会随着时间的推移先增加然后减少到一个固定值. 此外, 还有一些工作 [48–50] 来观察受非马尔科夫性影响的熵的不确定性的动力学特征.

3.3.2 几种特定的系统中的熵不确定度关系动力学

弯曲时空下系统, Feng 等 [51] 在 2015 年首次观测到在 Schwarzschild 黑洞框架中的量子存储下

的熵不确定度关系, 这个 Schwarzschild 黑洞被认为是提供弯曲时空的一个. 研究可以发现, 霍金辐射可以对不确定性下界进行重要修正. 对于自由落体的观察者与其拥有与待测量子系统初始相关的量子存储器的静态合体之间的不确定性博弈, 因此源于霍金辐射的信息丢失不可避免地导致不确定性量的增加. 熵不确定性对黑洞的质量、量子存储器的模式频率以及观察者与黑洞表面的距离很敏感. 此外, 为了显示其结果的普遍性, 将熵不确定度与其他不确定度测量, 即 Aharonov-Anandan 时间- 能量不确定度进行了比较.

考虑到两个静态玩家之间的不确定性博弈, Alice 持有的测量系统 A 和 Bob 充当量子存储器的 B 通常可以通过一对两能级原子与黑洞外波动的无质量量子标量场相互作用来模拟. 经过模拟可以注意到复合系统最终会达到平衡. 事实上, 子系统 A 的量子信息是通过它们之间产生的纠缠来传递并存储在量子存储器中的. 值得注意的是, 可以通过 $S(A|B) < 0$ 纠缠被目击到.

最近, Huang 等 [52] 研究了在 Schwarzschild 黑洞表面附近, 有自旋和无自旋的 Dirac 场方向的熵不确定度关系, 证明了其边界可以用 Holevo 量重写. 结果表明, 与互信息相比, Holevo 下界比更紧致. 此外, 当量子存储器离开黑洞时, 不确定性和所提议的下界之间的差异不变, 并且不依赖于黑洞的任何属性. 此外, 已经有学者 [53–55] 研究了在 Garfinkle-Horowitz-Strominger 背景下用于 Dirac 粒子膨胀黑洞量子存储下的熵不确定度关系.

我们还关注了自旋链系统中的熵不确定度关系, Heisenberg 自旋链也有许多分类, 一维 Heisenberg 的 XYZ 链哈密顿量可以表示为

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (J_x \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + J_y \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + J_z \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z), \quad (62)$$

$\sigma_k^\gamma (\gamma = x, y, z)$ 指代 k 位置的泡利算符, J_γ 是关于自旋-自旋相互作用的实际耦合强度. 如果 $J_z = 0$, 且 $J_x = J_y$, 相应的 Heisenberg 链称为 XX 模型. 第一个将量子存储下熵不确定度关系应用到两比特 XX 自旋模型的是 Huang 等 [56]. 他们的结果表明, 两个自旋量子位之间的耦合系数越大越会降低不确定度, 对于相对较大的耦合系数, 熵不确定度甚至会达到零. 随后, 在其他 Heisenberg 自旋链模型和具有 Dzyaloshinski-Moriya (DM) 相互作用

的 Heisenberg 模型中, 也有一些关于量子存储下熵不确定度关系的研究 [57–59].

此外, 团队还探讨了在非均匀磁场中一般海森伯 XYZ 模型中熵不确定度与量子关联之间的关系 [13]. 值得注意的是, 我们得到一个有趣的结果, (55) 式中表示的下界可以改写为

$$U_R = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) + \log_2 \frac{1}{c} \\ = \log_2 \frac{1}{c} + \min_{\{\pi_i^B\}} [S_{\{\pi_i^B\}}(\rho_{A|B})] - D(\rho_{AB}), \quad (63)$$

从 (63) 式中可以发现, 下界与量子关联 $D(\rho_{AB})$ 是成反关联的. 此外, Zheng 等 [60] 和 Huang 等 [61] 还研究了系统的纠缠与下界之间的关系, Heisenberg 模型中具有 DM 相互作用的熵不确定度的紧密性. Ming 等 [62] 比较了 DM 相互作用的不同部分对降低熵不确定度的影响, 并且发现不确定关系的下界与量子相干密切相关, 但不完全依赖于量子相干. Yang 等 [63] 也研究了具有 DM 相互作用的一般 Heisenberg XYZ 模型的熵不确定度的动力学特性. Zhang 等 [64] 和 Shi 等 [65] 研究了高维 Heisenberg 模型量子存储下熵不确定度关系, 最近 Li 等 [66] 及 Ju 等 [67] 研究了自旋混合链中的熵不确定度关系. 除了上面说的两种系统, 还有非惯性坐标系 [68]、金刚石中的单氮空位中心 [29]、中微子 [69,70] 等系统中熵不确定度关系的演化.

实际上在现实量子信息处理中, 任何量子系统都不可避免地会与周围环境相互作用, 从而导致退相干或耗散, 这也会对不确定性产生影响 [71], 考虑到这一点, 在执行量子任务时需要有效地抑制退相干. 而为了获得更精确的测量结果, 一些研究人员致力于追求利用各种操作如非坍缩操作 [72–75]、过滤操作 [76,77]、非厄米操作 [78–81] 等对熵不确定度进行调控.

4 不确定关系在实际中的应用

4.1 量子隐形传态

(34) 式中量子存储下的熵不确定度关系也可以用来识别非经典隐形传态 [82] 的信道状态. 基于平均隐形传态的保真度

$$F_{\text{av}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \text{Tr} \sqrt{\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}}, \quad (64)$$

是局部酉不变的事实, 同时任意两量子比特态是局

部么正的, 几何上表明, 与没有量子记忆存储下的情况相比, 任意对应于 Berta 等提出的不确定下界改进的态 ρ_{AB} 对于量子隐形传态来说更有用. 也就是说, 当一个人观察到一个负的条件熵 $S(A|B)$ 时, 可以确定保真度能超越经典极限 $2/3$.

4.2 导引不等式

在 1935 由 Schrödinger^[83] 首先强调, 导引是一种与纠缠相关的双量子系统的现象 (尽管不完全相同). 考虑有两个参与者 Alice 和 Bob 两方的远程实验室范例, 他们俩各自掌握着子系统 A 或 B . 导引表示一个子系统 A 的测量选择可能导致另一个子系统 B 上的不同状态集合. 并不是所有的量子态都是可导引的, 举个例子, 可分离态就是不可导引的. 此外只要是违反贝尔不等式的态都是可导引的, 贝尔不等式是根据局部隐变量模型推出的. Wiseman 等^[84] 将可导引的概念形式化为那些不允许局域隐态模型 (LHS) 的态 ρ_{AB} , LHS 模型可以这样来解释, 系统 B 有一个局部量子态, 它与系统 A 上的任意可观测量经典地相关. 这种形式化的描述使得研究人员推导出了导引不等式, 与贝尔不等式类似.

Walborn 等^[85] 和 Schneeloch 等^[86] 展示了如何利用熵不确定性关系来推导导引不等式. 如果 B 有一个局部隐态, 那么它的测量概率必须服从单系统的不确定性关系, 即使它们是以 A 的测量结果为条件的. 更准确地说, LHS 模型意味着 A 和 B 上的离散可观测量 X_A, X_B 的联合概率分布为

$$P(X_A, X_B) =$$

$$\sum_{\lambda} P(\Lambda = \lambda) P(X_A | \Lambda = \lambda) P_Q(X_B | \Lambda = \lambda), \quad (65)$$

这里 Λ 是决定 Bob 的局部状态的隐变量, λ 是这个变量可以取的一个特定值, 而 $P_Q(X_B | \Lambda = \lambda)$ 上的下标 Q 强调了概率分布来自于单个量子态. 然后得到

$$H(X_B | X_A) \geq H(X_B | X_A \Lambda) \quad (66)$$

$$= \sum_{\lambda} P(\Lambda = \lambda) H(X_B | X_A \Lambda = \lambda) \quad (67)$$

$$= \sum_{\lambda} P(\Lambda = \lambda) H(X_B | \Lambda = \lambda), \quad (68)$$

这里的 $H(X_B | X_A \Lambda = \lambda)$ 可以被解读为以 X_A 为条件, 以 $\Lambda = \lambda$ 为条件的 X_B 的熵. 因此, 对于两个在

B 上的可观测量 X_B 和 Z_B 和其他两个在 A 上的可观测量 X_A 和 Z_A , 可以得到

$$\begin{aligned} & H(X_B | X_A) + H(Z_B | Z_A) \\ & \geq \sum_{\lambda} P(\Lambda = \lambda) [H(X_B | \Lambda = \lambda) + H(Z_B | \Lambda = \lambda)]. \end{aligned} \quad (69)$$

将其与 Maassen-Uffink 的不确定度关系 (31) 式相结合, 得到如下的导引不等式^[86]:

$$H(X_B | X_A) + H(Z_B | Z_A) \geq q_{MU}, \quad (70)$$

其中, q_{MU} 对应着 Bob 的可观测量, 任何允许 LHS 模型的状态 ρ_{AB} 必须满足 (70) 式. 因此, (70) 式的实验违反可以构成导引的演示. 对于连续变量, 也可以推导出类似的导引不等式^[85].

Zhen 等^[87] 通过局域不确定原理证明了 EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) 导引. 他们指出如果下面的不等式被违背, 那么就说明两比特态 ρ_{AB} 是可导引的 (A 可以导引 B), 不等式如下:

$$\sum_i \delta^2(\alpha_i A_i + B_i) \geq C_B, \quad (71)$$

其中, $\delta^2(M) = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2$, $C_B = \min_{\rho_B} \sum_i \delta^2(B_i)$, $\{\alpha_i\}$ 均为实数.

4.3 随机数

随机数是许多日常信息处理任务中的关键资源, 应用范围之广可以从在线赌博到科学模拟和密码学, 因为计算机被设定来执行确定性操作, 所以随机数是一种稀缺资源. 经典物理是确定性的, 换句话说, 如果观察者对物理学系统的初始状态和在该系统上进行的操作有充分的了解, 那么从原理上来说, 实验的每一个结果都可以被准确地预测, 而伪随机的研究试图规避这个问题^[88].

量子力学固有的不确定性不允许人们去考虑随机性更强的概念, 即在信息领域层面上来说, 随机数是安全的. 形式上, 想生成一个随机变量 L 可以均匀分布在设定长度 l 上的所有位串 $\{0, 1\}^l$ 上. 此外, 我们还希望这个随机变量独立于观察者可能拥有的任何边信息包括用于计算 L 的过程和任何用来准备 L 的随机种子. 经典量子积态

$$\pi_{LE} = \frac{1}{2^l} \sum_{i=1}^{2^l} |i\rangle \langle i|_L \otimes \pi_E, \quad (72)$$

描述了独立于其环境或边信息 E 的 l 位均匀随机数. 通常我们最期待的结果就是接近这个态, 也就

是说如果

$$\left\| \rho_{LE} - \frac{1}{2^l} \sum_{i=1}^{2^l} |i\rangle\langle i|_L \otimes \rho_E \right\|_{\text{Tr}} \leq \delta, \quad (73)$$

那么可以说 ρ_{LE} 描述了一个 L 是 δ 接近 l 位均匀随机数且独立于 E 的态, 这里的 $\|\cdot\|_{\text{Tr}}$ 代表迹范数. 这个界意味着 L 有超过 $\frac{1}{2}(1+\delta)$ 的概率不能够从一个均匀且独立的随机变量中被区分开来. 这个观点是通用可组合安全框架的核心^[89,90], 也保证了满足此属性的密钥可以安全地用于任何需要密钥的加密协议.

熵不确定度关系可以帮助我们实现真正的随机数. 因为他们表明了量子测量产生的随机变量是不确定的. 然而, 为了提取近似均匀和独立的随机数, 还需要一个额外的步骤, 也是接下来要介绍的.

先讨论条件最小熵的现实意义. 最小熵在密码学中的重要性部分归功于剩余哈希原理 (leftover hashing lemma)^[91–93], 该原理指出, 存在一个函数族 $\{f_s\}_s$ ($f_s: \chi \rightarrow [2^l]$), 叫做哈希函数, 这样, 当初始的最小熵足够大时, 通过应用含有均匀随机选择的种子 S 的函数 f_s 得到的随机变量 $L = f_S(X)$ 接近均匀随机数, 且与 S 无关.

更正式地来说, Renner^[94] 和 König^[95] 展示了量子情况下的结果. 对于任意 $H_{\min}(X|E) \geq k$ 的经典量子态

$$\rho_{XE} = \sum_x P_X(x) |x\rangle\langle x|_X \otimes \rho_E^x, \quad (74)$$

都存在一组哈希函数. 经过应用函数 f_s 之后的经典-量子-经典态 ρ_{LES} 为

$$\rho_{LES} = \sum_{s,x} \frac{P_X(x)}{|S|} |f_S(x)\rangle\langle f_S(x)|_L \otimes \rho_E^x \otimes |s\rangle\langle s|_S, \quad (75)$$

它描述的是一个态中的 L 是 δ 接近 l 位均匀随机数且独立于 E 和 S , 这里的 $\delta = 2^{\frac{(l-k)}{2}}$.

在计算机科学中, 对环境 E 是平凡的特殊例子进行了广泛的讨论. 由于哈希是一个经典的进程, 人可能认为边信息的物理性质是非相关的, 且一个经典处理就足够了, 事实上, 这在一般情况下是不会成立的. 举个例子, 如果某些提取器的输入侧信息被存储在量子存储器中, 那么它们的输出可能是部分已知的, 同时, 相同的输出几乎一致地限

制了任意经典边信息, 具体例子见 Gavinsky 等^[96] 的文章.

通过考虑 ε -smooth 最小熵 (记为 $H_{\min}^\varepsilon(X|E)$, 其中 $\varepsilon > 2$) 的变化, 可以对这一结果进行推广, 这是通过最大化状态的最小熵来定义的, 这些态处在围绕态 ρ 周围半径为 ε 的球中. 推广后的剩余哈希引理^[94,97,98] 断言, 存在一个函数族 $\{f_s\}_s$, 使得对任意 $H_{\min}^\varepsilon(X|E) \geq k$ 的态 ρ_{XE} , 发现 $L = f_S(x)$ 是 $\delta + \varepsilon$ 接近 l 位均匀随机数且独立于 E 和 S , 这里的 δ 和 (75) 式中定义的一样. 推广后的结果在以下情况下是紧致的, 即如果 $L = f_S(x)$ 对任意的函数族 $\{f_s\}_s$ 都是 ε 接近均匀随机数且独立于 E 和 S , 那么就可以得到 $H_{\min}^{\varepsilon'}(X|E) \geq l$, 这里的 $\varepsilon' = \sqrt{2\varepsilon}$. 由于这个紧密性结果, 有理由说, 平滑最小熵描述了 (至少近似地) 与其环境 E 相关的随机源 X 中可以提取多少均匀随机数.

实际上, 如果可以得出 $H_{\min}^\varepsilon(X|E)$ 很大, 那么验证了属于量子随机数. 原则上来说, 所有涉及量子存储的熵不确定度关系都适用于这项任务, 只要可以验证熵的下界. 三体不确定关系特别适合这个任务, 下面量子密钥分发的安全性取决于做出这种估计的能力. 举个例子, Vallone 等^[99] 专门研究了最大熵和最小熵的不确定关系

$$H_{\min}(X|B) + H_{\max}(Z|C) \geq q_{MU}, \quad (76)$$

从而得出

$$H_{\min}(X|E)_\rho \geq \log_2 d - H_{\max}(Z), \quad (77)$$

这里的 X 和 Z 是 d 维希尔伯特空间中相互无偏基测量, E 是被测系统的环境, 最大熵 $H_{\max}(Z) = H_{1/2}(Z)$ 可以通过统计学检验估算得出, 导致了对 $H_{\min}(X|E)$ 充满信心. 正如讨论的那样, 剩余哈希引理允许从 X 中提取均匀随机数.

Miller 和 Shi^[100] 推导出了基于熵差的下界, 而不是条件熵, 假设 X 和 Z 是在一个量子比特上互补的二元测量, 那么下面的关系式始终成立:

$$H_\alpha(XB)_\rho - H_\alpha(B) \geq q(\alpha, \delta) \quad \alpha \in (1, 2], \quad (78)$$

这里的 δ 是由下面的等式得出的:

$$\text{Tr} \left[\langle Z^0 | \rho_{AB} | Z^0 \rangle^\alpha \right] = \delta \text{Tr} [\rho_B^\alpha], \quad (79)$$

q 是满足 $\lim_{\alpha \rightarrow 1} q(\alpha, \delta) = 1 - 2h(\delta)$ 的函数. 然后继续使用这个结果来限定 smooth 最小熵, 并继续应用到广义剩余哈希引理上.

4.4 波粒二象性

波粒二象性是指单个量子系统既可以表现出波的行为,也可以表现出粒子性行为的基本概念,无法设计出能够同时显示两种行为的干涉仪.这一观点先被 Feynman 定性地讨论了,随后 Woottter 和 Zurek^[101]、Jaeger 等^[102]、Englert^[103] 和 Bergou^[104] 及其他学者^[105] 将其进行了定量的讨论,这些学者都是证明了广为人知的波粒二象性关系不等式的人.然后在 Mach-Zehnder 干涉仪下,推导了单光子的一些相关关系.在所有的这些情况下,粒子性行为与已知的光子传输路径相关,当有人改变了一对干涉仪臂之间的相对相位时,波行为和特定输出模式下探测光子的概率中看到的振荡有关,将 which-path 可观测量表示为 $Z = \{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$, 粒子性行为可以通过路径可预测性 $P = 2p_{\text{guess}}(Z) - 1$ 来量化,路径可预测性和精准猜测路径的概率 $p_{\text{guess}}(Z)$ 有关.波行为是由边缘可见度来量化的:

$$\nu = \frac{p_0^{\max} - p_0^{\min}}{p_0^{\max} + p_0^{\min}},$$

$$p_0^{\max} := \max_{\phi} p_0; \quad p_0^{\min} := \min_{\phi} p_0, \quad (80)$$

这里的 p_0 是指光子被 D_0 探测到的概率,可以在图 6 中看到. Woottter 和 Zurek^[101] 证明了

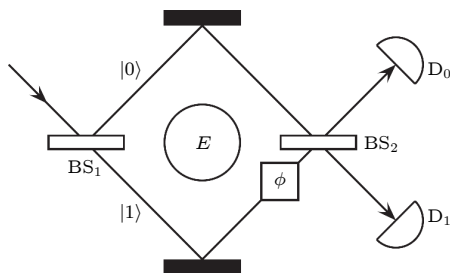


图 6 这张图引用自参考文献 [105] 中的第 18 幅图,展示的是一个 Mach-Zehnder 单光子干涉仪.一个光子撞击分束器,然后通过 Z 的基态 $|0\rangle, |1\rangle$ 标记这两个可能的路径,光子可能与干涉仪内部的某个环境 E 相互作用.然后将一个相位 ϕ 应用于下路径,再将这两个路径在第二个波束分束器上重新组合.最后在 D_0 或 D_1 处检测到光子

Fig. 6. This picture is from the 18th picture in the reference [105]. The picture shows a Mach-Zehnder single photon interferometer. A photon hits the beam splitter, and then we pass the ground state of Z ($|0\rangle, |1\rangle$) to mark these two possible paths. The photon may be related to an environment in the interferometer E Interaction. Then apply a phase ϕ to the lower path, and then recombine the two paths on the second beam splitter. Finally, a photon is detected at D_0 or D_1 .

$$P^2 + \nu^2 \leq 1, \quad (81)$$

即 $P = 1$ 时, $\nu = 0$ (也就是说,完全的粒子性行为就意味着没有波行为),反之亦然.

更一般地,假设光子与干涉仪内部的某个环境系统 E 相互作用.测量 E 可能揭示一些比如说关于光子路径的一些信息,所以很自然地考虑路径的可分辨性

$$\mathcal{D} = 2p_{\text{guess}}(Z|E) - 1. \quad (82)$$

Jaeger 等^[102] 和 Englert^[103] 证明了 (81) 式的加强版本,即:

$$\mathcal{D}^2 + \nu^2 \leq 1. \quad (83)$$

像 (81) 式和 (83) 式的波粒二象性关系概念上经常被认为不同于不确定关系,尽管这点一直以来都存在争论.如 Dürr 和 Rempe^[106] 以及 Busch 和 Shilladay^[107] 发现某些波粒二象性关系与 Robertson 涉及标准差的不确定度关系之间存在联系. Coles 等^[108] 表示 (81) 式和 (83) 式以及其他一些波粒二象性关系实际上是伪装的熵不确定度关系.特别地,它们对应于 (76) 式中最小和最大熵不确定度关系,应用于互补量子可观测量.即 (81) 式等价于不确定度关系

$$H_{\min}(Z) + \min_{W \in XY} H_{\max}(W) \geq 1, \quad (84)$$

其中 $\min_{W \in XY}$ 对应于最小化 Bloch 球 $x-y$ 平面上的所有可观测量.同样地, (83) 式等价于不确定关系

$$H_{\min}(Z|E) + \min_{W \in XY} H_{\max}(W) \geq 1. \quad (85)$$

这将波粒二象性原理与熵测不准原理统一起来,说明前者是后者的一个特例.

自然地,其他熵可以用来代替最小和最大熵,虽然人们可能无法得到与波粒二象性关系的精确对等关系,但概念意义可能是相似的. Bosyk 等^[109] 采用了用其他熵来替代最大最小熵的方法,他利用的是包含了 Rényi 熵的不确定关系. Vaccaro^[110] 根据互信息采用香农熵来表示波粒二象性关系.此外,还补充了一个概念,即波和粒子的行为分别与对称性和非对称性有关. Englert 等^[111] 还考虑了具有两条以上路径的干涉仪的波和粒子行为的熵测量.

4.5 量子密钥分发

密钥分发方案的目标是让诚实的两方通过公共通道进行通信,以使密钥不被任何潜在的对手窃

取, 从而达成共享密钥的协议. 传统上, 试图共享密钥的两个诚实方被称为 Alice 和 Bob, 而窃听者被称为 Eve. 通过简单的对称论证, 很明显, 如果只考虑经典信息, 密钥分配是不可能的, 因为 Eve 会听到所有 Alice 对 Bob 的沟通, 在协议的任意点上, 她至少和 Bob 拥有同样多的关于 Alice 密钥的信息, 如果 Bob 知道 Alice 的密钥, 那么 Eve 也知道. Bennett 等^[112]首先提出量子密钥分配, 随后由 Ekert^[113]提出了更优化方案^[114]. 由于非复制和非克隆的量子信息特征^[115], 当 Alice 和 Bob 共享密钥并通过量子信道进行通信时, 对称性的论点就不再适用了. 简单地说, 不管窃听者什么时候与信道进行相互作用, 对粒子进行测量, 她的行为都会不可避免地量子通信过程中产生噪声. 因此, 他们能够检测并立即终止协议.

这里先介绍一种简单的协议, 采用的是删节版的 Ekert^[113]协议. 首先准备工作: Alice 和 Bob 使用公共信道共享一个最大纠缠的双量子位态. Eve 可以与信道进行连续的相互作用. 然后测量: 他们随机同意 (使用公共通道), 在基 $Z = \{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$ 或 $X = \{|+\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|\}$ 进行, 并在此基底上测量各自的量子比特 (这两个步骤重复了很多次). 参数评估: Alice 会公布她的测量结果. 如果双方的测量结果在大多数回合中都是一致的, 就可以得出结论, 双方之间关联存在一些保密性, 然后继续改正错误并提取一个密钥. 如果没有, Alice, Bob 双方就中止协议.

针对一般性攻击的量子密钥分发安全性首先由 Mayers^[116], Biham 等^[117], Lo 和 Chau^[118]以及 Shor 和 Preskill^[119]正式建立. 在所有这些安全性讨论中, 互补性或不确定原理以某种形式被调用来说明如果 Alice 和 Bob 在一个基础上测量的量子比特有很大的的一致性, 那么 Eve 关于在互补基础上测量的比特的信息必然是低的.

熵不确定度关系首次被 Cerf 等^[120]和 Grosshans 等^[121]用于这方面. 特别是 Koashi 利用 Maassen-Uffink 关系建立了安全性. 然而, 熵不确定性与量子存储器之间的关系提供了一个更直接的途径来 QKD 的安全性参数进行形式化描述, 如下所示. 这里遵循 Berta 等^[9]提出的论点. 首先要注意, 在准备步骤中, 窃听者可能会干扰, 因此没有人知道在准备步骤完成后, Alice 和 Bob 是否确实共享最大纠缠态. 然而, 在不失一般性的前提下, 可以

假设 Alice, Bob 和 Eve 在制备步骤后共享一个任意态 ρ_{ABE} , 其中 A 和 B 是量子位, E 是 Eve 持有的任意量子系统. 设 Θ 是一个处于完全混合状态的二进制寄存器, 它决定了量子位是在基 X 还是基 Z 中被测量, 并用 Y 表示 Alice 测量的输出. 就可以得到 $H(Y|B\Theta) = \frac{1}{2}[H(X|B) + H(Z|B)]$ 和 $H(Y|E\Theta) = \frac{1}{2}[H(X|E) + H(Z|E)]$. 因此, 可以将具有量子存储器的三体熵不确定度原理写为

$$H(Y|E\Theta) + H(Y|B\Theta) \geq q_{MU} = 1, \quad (86)$$

$q_{MU} = 1$ 是基于测量基 X 和 Z 得出的. 在对 Alice 量子位进行测量后, 对态 $\rho_{Y\Theta BE}$ 进行熵的计算. 接着再对 B 进行测量, 这会产生一个 Y 中的估算 $\hat{Y}$, 再根据数据处理不等式可以得出 $H(Y|B\Theta) \leq H(Y|\hat{Y})$, 因此总结得出 $H(Y|E\Theta) \geq 1 - H(Y|\hat{Y})$. 这就保证了只要条件熵 $H(Y|\hat{Y})$ 很小, Eve 对于 Alice 测量结果的不确定度 (就 von Neumann 熵而言) 就会很大. 这就是安全准则的量化表达.

除上述应用外, 还有许多其他重要的应用, 比如两方密码学^[122–124]、纠缠目击^[125,126]等, 还有熵不确定度关系与量子相干^[127–130]、量子纠缠^[131]、失谐^[30–32, 132]等之间的联系.

5 结论与展望

本文从海森伯测不准原理出发, 追溯了熵不确定度关系的历史, 讨论了海森伯不确定原理和它的各类衍生关系式及其最新进展. 首先从标准差、熵和优化方法的角度回顾了不确定关系, 接着又着重介绍了量子存储下熵不确定度关系的发展, 这些关系与许多量子信息处理任务直接相关. 许多学者仍在探索不确定关系, 各种新的工具不断被拿来并试图推出新的不确定关系. 如 Majorization 方法, 用 Majorization 方法来度量不确定度仍有很大的发展前景; 关于量子存储下熵不确定度关系, Dupuis 等^[123]在 2015 年建立了推导不确定关系的元定理. 但据了解, 并不是所有体系推出的不确定关系都很紧致, 因此也需要进一步改善加强.

本文提到的各种技术应用如量子密钥分发等为获得更精细的熵不确定度关系提供了动力. 例如, 要证明涉及两次以上测量的量子密钥分发协议的安全性, 就需要新的熵不确定度关系, 即允许量子存储和多次测量的熵不确定度关系. 这是一个需

要更多研究的重要前沿领域. 与设备无关的随机数, 即证明从不可信的设备获得的随机数是另一种新兴应用, 熵不确定度关系在这方面应该是很有潜力的.

对于熵的不确定度关系, 除了对各种技术应用有着推进作用, 它还让人们的基础物理学有了更深的了解. 如熵的不确定度关系使不确定原理与波粒二象性原理统一起来. 将熵不确定度关系应用于干涉仪, 很可能成为量化波粒二象性的一个自然框架, 同样, 量子基础的一个热门话题是测量不确定性. 也可以将制备不确定度的概念与可逆性测量相结合^[133], 相应的熵不确定度关系在 IBM^[134] 量子实验上测试成功, 不确定关系在实验研究方面也有着相当多的进展^[135–137]. 除上述以外, 熵不确定度关系可能在凝聚态物理的相变研究^[138,139] 中发挥作用, 也在狭义和广义相对论的背景下^[140,141] 进行了研究. 鉴于量子信息在宇宙学中^[142] 扮演着越来越重要的角色, 希望在未来, 熵不确定度关系在宇宙学等相关背景下有着进一步的发展. 期待不确定度在未来得到更多的关注, 在学者们的共同努力下取得一些新的成果.

参考文献

- [1] Heisenberg W 1927 *Z. Phys.* **43** 172
- [2] Kennard E H 1927 *Z. Phys.* **44** 326
- [3] Robertson H P 1929 *Phys. Rev.* **34** 163
- [4] Deutsch D 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 631
- [5] Everett H 1957 *Rev. Mod. Phys.* **29** 454
- [6] Hirschman I I 1957 *Am. J. Math.* **79** 152
- [7] Kraus K 1987 *Phys. Rev. D* **35** 3070
- [8] Maassen H, Uffink J 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1103
- [9] Berta M, Christandl M, Colbeck R, Renes J M, Renner R 2010 *Nat. Phys.* **6** 659
- [10] Renes J, Boileau J C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 020402
- [11] Schrödinger E 1930 *Physikalisch-Mathematische Klasse* **14** 296
- [12] Maccone L, Pati A K 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 260401
- [13] Wang K K, Zhan X, Bian Z H, Li J, Zhang Y S, Xue P 2016 *Phys. Rev. A* **93** 052108
- [14] Xiao L, Wang K, Zhan X, Bian Z, Li J, Zhang Y, Xue P, Pati A K 2017 *Opt. Express* **25** 17904
- [15] Fan B, Wang K K, Xiao L, Xue P 2018 *Phys. Rev. A* **98** 032118
- [16] Białynicki-Birula I, Mycielski J 1975 *Commun. Math. Phys.* **44** 129
- [17] Shannon C 1948 *Bell Syst. Tech. J.* **27** 379
- [18] Korzekwa K, Lostaglio M, Jennings D, Rudolph T 2014 *Phys. Rev. A* **89** 042122
- [19] Rényi A 1961 *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Vol. 1) (Berkeley: University of California Press) pp547–561
- [20] Dodonov V V, Dodonov A V 2015 *Phys. Scr.* **90** 074049
- [21] Rastegin A E 2019 *Ann. Phys.* **531** 1800466
- [22] Pegg D T 1998 *Phys. Rev. A* **58** 4307
- [23] Partovi M H 2011 *Phys. Rev. A* **84** 052117
- [24] Friedland S, Gheorghiu V, Gour G 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 230401
- [25] Puchała Z, Rudnicki Ł, Życzkowski K 2013 *J. Phys. A* **46** 272002
- [26] Nielsen M A, Chuang I L (translated by Zheng D Z and Zhao Q C) 2005 *Quantum Computation and Quantum Information* (Beijing: Tsinghua University Press) pp155–157
- [27] Li C F, Xu J S, Xu X Y, Li K, Guo G C 2011 *Nat. Phys.* **7** 752
- [28] Prevedel R, Hamel D R, Colbeck R, Fisher K, Resch K J 2011 *Nat. Phys.* **7** 757
- [29] Xu Z Y, Zhu S Q, Yang W L 2012 *Appl. Phys. Lett.* **101** 244105
- [30] Pati A K, Wilde M M, Usha Devi A R, Rajagopal A K, Sudha 2012 *Phys. Rev. A* **86** 042105
- [31] Ollivier H, Zurek W H 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 017901
- [32] Hu M L, Fan H 2013 *Phys. Rev. A* **88** 014105
- [33] Bera M N, Prabhu R, Sen (De) A, Sen U 2012 *Phys. Rev. A* **86** 012319
- [34] Coles P J, Piani M 2014 *Phys. Rev. A* **89** 022112
- [35] Adabi F, Salimi S, Haseli S 2016 *Phys. Rev. A* **93** 062123
- [36] Haseli S, Ahmadi F 2019 *Eur. Phys. J. D* **73** 65
- [37] Xie B F, Ming F, Wang D, Ye L, Chen J L 2021 *Phys. Rev. A* **104** 062204
- [38] Liu S, Mu L Z, Fan H 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042133
- [39] Zhang J, Zhang Y, Yu C S 2015 *Sci. Rep.* **5** 11701
- [40] Dolatkhah H, Haseli S, Salimi S, Khorashad A S 2019 *Quantum Inf. Process.* **18** 13
- [41] Hu M L, Fan H 2013 *Phys. Rev. A* **87** 022314
- [42] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [43] Ming F, Wang D, Fan X G, Shi W N, Ye L, Chen J L 2020 *Phys. Rev. A* **102** 012206
- [44] Dolatkhah H, Haseli S, Salimi S, Khorashad A S 2020 *Phys. Rev. A* **102** 052227
- [45] Yao Y B, Wang D, Ming F, Ye L 2020 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **53** 035501
- [46] Wang D, Ming F, Huang A J, Sun W Y, Shi J D, Ye L 2017 *Sci. Rep.* **7** 1066
- [47] Wang D, Shi W N, Ming F, Hoehn R D, Sun W Y, Ye L, Kais S 2018 *Quantum Inf. Process.* **17** 335
- [48] Chen M N, Wang D, Ye L 2019 *Phys. Lett. A* **383** 977
- [49] Karpat G, Piilo J, Maniscalco S 2015 *EPL* **111** 50006
- [50] Chen P F, Ye L, Wang D 2019 *Eur. Phys. J. D* **73** 108
- [51] Feng J, Zhang Y Z, Gould M D, Fan H 2015 *Phys. Lett. B* **743** 198
- [52] Huang J L, Shu F W, Xiao Y L, Yung M H 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 545
- [53] Zhang Z Y, Liu J M, Hu Z F, Wang Y Z 2018 *Ann. Phys.* **530** 1800208
- [54] Ming F, Wang D, Ye L 2019 *Ann. Phys.* **531** 1900014
- [55] Wang D, Shi W N, Hoehn R D, Ming F, Sun W Y, Kais S, Ye L 2018 *Ann. Phys.* **530** 1800080
- [56] Huang A J, Wang D, Wang J M, Shi J D, Sun W Y, Ye L 2017 *Quantum Inf. Process.* **16** 204
- [57] Wang D, Ming F, Huang A J, Sun W Y, Ye L 2017 *Laser Phys. Lett.* **14** 095204
- [58] Ming F, Wang D, Shi W N, Huang A J, Sun W Y, Ye L

- 2018 *Quantum Inf. Process.* **17** 89
- [59] Wang D, Huang A J, Ming F, Sun W Y, Lu H P, Liu C C, Ye L 2017 *Laser Phys. Lett.* **14** 065203
- [60] Zheng X, Zhang G F 2017 *Quantum Inf. Process.* **16** 1
- [61] Huang Z M 2018 *Laser Phys. Lett.* **15** 025203
- [62] Ming F, Wang D, Shi W N, Huang A J, Du M M, Sun W Y, Ye L 2018 *Quantum Inf. Process.* **17** 267
- [63] Yang Y Y, Sun W Y, Shi W N, Ming F, Wang D, Ye L 2019 *Front. Phys.* **14** 31601
- [64] Zhang Z Y, Wei D X, Liu J M 2018 *Laser Phys. Lett.* **15** 065207
- [65] Shi W N, Ming F, Wang D, Ye L 2019 *Quantum Inf. Process.* **18** 70
- [66] Li L J, Ming F, Shi W N, Ye L, Wang D 2021 *Physica E* **133** 114802
- [67] Ju F H, Zhang Z Y, Liu J M 2020 *Commun. Theor. Phys.* **72** 125102
- [68] Wang D, Ming F, Huang A J, Sun W Y, Shi J D, Ye L 2017 *Laser Phys. Lett.* **14** 055205
- [69] Wang D, Ming F, Song X K, Ye L, Chen J L 2020 *Eur. Phys. J. C* **80** 800
- [70] Li L J, Ming F, Song X K, Ye L, Wang D 2021 *Eur. Phys. J. C* **81** 728
- [71] Ming F, Wang D, Huang A J, Sun W Y, Ye L 2018 *Quantum Inf. Process.* **17** 9
- [72] Zhang Y L, Fang M F, Kang G D, Zhou Q P 2018 *Quantum Inf. Process.* **17** 62
- [73] Chen P F, Sun W Y, Ming F, Huang A J, Wang D, Ye L 2019 *Laser Phys. Lett.* **15** 015206
- [74] Haseil S, Dolatkah H, Salimi S, Khorashad A S 2019 *Laser Phys. Lett.* **16** 045207
- [75] Guo Y N, Fang M F, Tian Q L, Li Z D, Zeng K 2018 *Laser Phys. Lett.* **15** 105205
- [76] Su Q, Al-Amri M, Davidovich L, Suhail Zubairy M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 052323
- [77] Huang A J, Shi J D, Wang D, Ye L 2017 *Quantum Inf. Process.* **16** 46
- [78] Bender C M, Boettcher S 1988 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [79] Shi W N, Wang D, Sun W Y, Ming F, Huang A J, Ye L 2018 *Laser Phys. Lett.* **15** 075202
- [80] Yu M, Fang M F 2017 *Quantum Inf. Process.* **16** 213
- [81] Adabi F, Haseli S, Salimi S 2016 *EPL* **115** 60004
- [82] Hu M L, Fan H 2012 *Phys. Rev. A* **86** 032338
- [83] Schrödinger E 1935 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31** 555
- [84] Wiseman H M, Jones S J, Doherty A C 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 140402
- [85] Walborn S P, Salles A, Gomes R M, Toscano F, Souto Ribeiro P H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 130402
- [86] Schneeloch J, Broadbent C J, Walborn S P, Cavalcanti E G, Howell J C 2013 *Phys. Rev. A* **87** 062103
- [87] Zhen Y Z, Zheng Y L, Cao W F, Li L, Chen Z B, Liu N L, Chen K 2016 *Phys. Rev. A* **93** 012108
- [88] Vadhan S P 2012 *Found. Trends Theor. Comput. Sci.* **7** 1
- [89] Canetti R 2001 *Proc. IEEE Symposium on Foundations of Computer Science 2001* Newport Beach, CA, USA, October 8–11, 2001 p136–145
- [90] Unruh D 2010 *Proceedings of 29th Annual International Conference on Theory and Applications of Cryptographic Techniques* France, May 30–June 03, 2010 pp486–505
- [91] McInnes J 1987 *Technical Report 194/87*, Department of Computer Science, University of Toronto
- [92] Impagliazzo R, Levin L A, Luby M 1989 *Proceedings of ACM STOC 1989* Washington, Seattle, USA, May 14–17, 1989 pp12–24
- [93] Impagliazzo R, Zuckerman D 1989 *Proceedings of the 30th Annual Symp On Foundations of Computer Science* Research Triangle Park, North Carolina, USA, October 30–November 01, 1989 pp248–253
- [94] Renner R 2005 *Ph.D. Dissertation* (Zurich: ETH)
- [95] Renner R, König R 2005 *Proceedings of the 2nd Theory of Cryptography Conference* Cambridge, England, February 10–12, 2005 pp407–425
- [96] Gavinsky D, Kempe J, Kerenidis I, Raz R, de Wolf R 2009 *SIAM J. Comput.* **38** 1695
- [97] Tomamichel M, Renner R 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 110506
- [98] Tomamichel M, Schaffner C, Smith A, Renner R 2011 *IEEE Trans. Inf. Theory* **57** 5524
- [99] Vallone G, Marangon D G, Tomasin M, Villoresi P 2014 *Phys. Rev. A* **90** 052327
- [100] Miller C A, Shi Y 2014 *Proceedings of ACM STOC 2014* New York, USA, May 31–June 03 2014 pp417–426
- [101] Wootters W, Zurek W H 1979 *Phys. Rev. D* **19** 473
- [102] Jaeger G, Shimony A, Vaidman L 1995 *Phys. Rev. A* **51** 54
- [103] Englert B G 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2154
- [104] Englert B G, Bergou J A 2000 *Opt. Commun.* **179** 337
- [105] Coles P J, Berta M, Tomamichel M, Wehner S 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 015002
- [106] Dürr S, Rempe G 2000 *Am. J. Phys.* **68** 1021
- [107] Busch P, Shilladay C 2006 *Phys. Rep.* **435** 1
- [108] Coles P J, Kaniewski J, Wehner S 2014 *Nat. Commun.* **5** 5814
- [109] Bosyk G M, Portesi M, Holik F, Plastino A 2013 *Phys. Scr.* **87** 065002
- [110] Vaccaro J A 2011 *Proc. R. Soc. A* **468** 1065
- [111] Englert B G, Kaszlikowski D, Kwek L C, Chee W H 2008 *Int. J. Quantum Inf.* **06** 129
- [112] Bennett C H, Brassard G 1984 *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing 1984* Bangalore, India, December 10–12 1984 pp175–179
- [113] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [114] Scarani V, Bechmann-Pasquinucci H, Cerf N, Dusek M, Lütkenhaus N, Peev M 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1301
- [115] Wootters W K, Zurek W H 1982 *Nature* **299** 802
- [116] Mayers D 1996 *Collection in Lecture Notes in Computer Science* (Springer, New York) p343
- [117] Biham E, Boyer M, Boykin P O, Mor T, Roychowdhury V 2006 *J. Cryptol.* **19** 381
- [118] Lo H K, Chau H F 1999 *Science* **283** 2050
- [119] Shor P W, Preskill J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 441
- [120] Cerf N J, Bourennane M, Karlsson A, Gisin N 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 127902
- [121] Grosshans F, Cerf N J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 047905
- [122] Koashi M 2006 *J. Phys. Conf. Ser.* **36** 98
- [123] Dupuis F, Fawzi O, Wehner S 2015 *IEEE Trans. Inf. Theory* **61** 1093
- [124] König R, Wehner S, Wulschleger J 2012 *IEEE Trans. Inf. Theory* **58** 1962
- [125] Gühne O, Tóth G 2009 *Phys. Rep.* **474** 1
- [126] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
- [127] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401
- [128] Coles P J, Yu L, Gheorghiu V, Griffiths R 2011 *Phys. Rev. A* **83** 062338

- [129] Luo S L 2005 *Theor. Math. Phys.* **143** 681
- [130] Yang Y Y, Ye L, Wang D 2020 *Ann. Phys.* **532** 2000062
- [131] Cao Y, Wang D, Fan X G, Ming F, Wang Z Y, Ye L 2021 *Commun. Theor. Phys.* **73** 015101
- [132] Ming F, Song X K, Ling J J, Ye L, Wang D 2020 *Eur. Phys. J. C* **80** 275
- [133] Berta M, Wehner S, Wilde M M 2016 *New J. Phys.* **18** 073004
- [134] IBM 2016 "IBM Quantum Experience."
- [135] Ma W C, Ma Z H, Wang H Y, Chen Z H, Liu Y, Kong F, Li Z K, Peng X H, Shi M J, Shi F Z, Fei S M, Du J F 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 160405
- [136] Ringbauer M, Biggerstaff D N, Broome M A, Fedrizzi A, Branciard C, White A G 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 020401
- [137] Zhou F, Yan L L, Gong S J, Ma Z H, He J Z, Xiong T P, Chen L, Yang W L, Feng M, Vedral V 2016 *Sci. Adv.* **2** e1600578
- [138] Romera E, Calixto M 2015 *J. Phys. Condens. Matter* **27** 175003
- [139] Xiong S J, Sun Z, Liu J M 2020 *Laser Phys. Lett.* **17** 095203
- [140] Feng J, Zhang Y Z, Gould M D, Fan H 2013 *Phys. Lett. B* **726** 527
- [141] Jia L, Tian Z, Jing J 2015 *Ann. Phys.* **353** 37
- [142] Hayden P, Preskill J 2007 *J. High Energy Phys.* **09** 120

SPECIAL TOPIC—Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Review on entropic uncertainty relations*

Li Li-Juan¹⁾ Ming Fei¹⁾ Song Xue-Ke¹⁾ Ye Liu¹⁾ Wang Dong^{1)†}

¹⁾ (School of Physics and Optoelectronics Engineering, Anhui University, Hefei 230601, China)

(Received 29 November 2021; revised manuscript received 26 December 2021)

Abstract

The Heisenberg uncertainty principle is one of the characteristics of quantum mechanics. With the vigorous development of quantum information theory, uncertain relations have gradually played an important role in it. In particular, in order to solved the shortcomings of the concept in the initial formulation of the uncertainty principle, we brought entropy into the uncertainty relation, after that, the entropic uncertainty relation has exploited the advantages to the full in various applications. As we all know the entropic uncertainty relation has become the core element of the security analysis of almost all quantum cryptographic protocols. This review mainly introduces development history and latest progress of uncertain relations. After Heisenberg's argument that incompatible measurement results are impossible to predict, many scholars, inspired by this viewpoint, have made further relevant investigations. They combined the quantum correlation between the observable object and its environment, and carried out various generalizations of the uncertainty relation to obtain more general formulas. In addition, it also focuses on the entropy uncertainty relationship and quantum-memory-assisted entropic uncertainty relation, and the dynamic characteristics of uncertainty in some physical systems. Finally, various applications of the entropy uncertainty relationship in the field of quantum information are discussed, from randomness to wave-particle duality to quantum key distribution.

Keywords: entropic uncertainty relation, quantum memory, quantum correlation

PACS: 03.65.-w, 03.67.-a, 03.67.Hk

DOI: 10.7498/aps.71.20212197

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12075001, 61601002, 12004006, 12175001), the Natural Science Foundation of Anhui Province, China (Grant No. 1508085QF139), and the Fund from CAS Key Laboratory of Quantum Information (Grant No. KQI201701).

† Corresponding author. E-mail: dwang@ahu.edu.cn

量子存储式量子计算机与无噪声光子回波

周宗权

“Quantum memory” quantum computers and noiseless photon echoes

Zhou Zong-Quan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 070305 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20212245

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212245>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

量子存储研究进展

Research progress of quantum memory

物理学报. 2019, 68(3): 030307 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190039>

多模式固态量子存储

Multimode solid-state quantum memory

物理学报. 2019, 68(3): 030303 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182207>

基于掺铒晶体的光量子存储和调控

Quantum memory and manipulation based on erbium doped crystals

物理学报. 2022, 71(6): 064203 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211803>

硅和锗量子计算材料研究进展

Research progress of silicon and germanium quantum computing materials

物理学报. 2021, 70(21): 217802 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211492>

基于拉曼协议的量子存储

Raman protocol-based quantum memories

物理学报. 2019, 68(3): 034203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182215>

金刚石氮空位中心自旋量子调控

Quantum control of nitrogen-vacancy center in diamond

物理学报. 2018, 67(12): 120302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180755>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

量子存储式量子计算机与无噪声光子回波*

周宗权^{1)†}

1) (中国科学技术大学, 中国科学院量子信息重点实验室, 合肥 230026)

(2021 年 12 月 5 日收到; 2022 年 1 月 11 日收到修改稿)

量子计算机一个重要的应用是攻破经典密码. 以往的研究表明, 攻破广泛使用的 2048 位 RSA 密码所需要的量子比特数目在 2000 万左右, 远远超出了目前的技术水平. 近期法国研究人员提出, 如使用配备了多模式量子存储的量子计算机, 则只需要 1.3 万个量子比特即可攻破 2048 位的 RSA 密码. 这一研究把量子存储器的应用推广到量子计算领域, 为研制实用化量子计算机提供了一条新的技术路线. 量子存储式量子计算机需要微波段的量子存储器, 这是目前亟待开发的新技术. 基于对量子存储过程中原子辐射本质的分析, 近期我们提出了无噪声光子回波方案, 成功解决了光子回波的自发辐射噪声难题, 有望进一步实现微波段量子存储并应用于量子存储式量子计算机中.

关键词: 量子计算, 量子存储, RSA, 光子回波**PACS:** 03.67.Lx, 07.05.-t**DOI:** 10.7498/aps.71.20212245

1 量子计算

量子计算有望为人类提供前所未有的强大算力, 引起了各国政府和大型公司的广泛重视和投入. 近年来该领域一个重要的研究进展是实现了量子优越性的证明^[1,2], 即针对一个人为设计的特定问题, 证明量子计算机或量子模拟机相比经典计算机具有求解速度上的优势. 值得注意的是, 这个问题并非一个有用的问题, 量子优越性的证明只需要 100 个左右的物理量子比特. 求解一个有用的问题自然是量子计算机发展的终极目标, 其中一个最具代表性的例子就是攻破经典密码. 要完成这样的目标, 一般需要对物理量子比特进一步执行纠错编码获得逻辑量子比特并且需要大量的逻辑比特, 其资源需求是非常庞大的.

经典通信的加密原理主要是基于特定数学问题的计算复杂性. RSA 密码是目前最广泛使用的一类加密算法, 其对应的数学问题是质因数分解.

比如我们可以快速算出 $353 \times 797 = 281341$. 但是当问题变成 281341 应分解成哪两个质数的乘积, 这个问题求解起来就变困难很多了. 当 RSA 密码的位数长至 2048 位时, 即便使用目前最强大的超级计算机也无法在一个合理的时间内攻破它.

1994 年, 美国数学家 Shor 提出著名的 Shor 算法, 证明使用量子计算机可以快速地实现大数的因数分解. 2019 年, Google 公司 Gidney 和瑞典 KTH 皇家理工学院的 Ekerå 证明量子计算机只需要 8 个小时即可攻破 2048 位的 RSA 密码, 但是需要 2000 万个物理量子比特^[3]. 这一需求远远超出了目前量子计算研究的技术水平 (约 100 个物理量子比特), 看起来遥不可及. 如何降低实用化量子计算机的物理资源需求是理论研究的一个重要难题.

2 量子存储式量子计算机

在冯诺依曼架构的经典计算机中, 存储器扮演了一个重要的角色, 即用来保存处理器的中间计算

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2017YFA0304100) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zq_zhou@ustc.edu.cn

结果. 冯诺依曼架构的量子计算机也早有实验研究, 但是由于量子存储器本身也较难实现, 目前大多量子计算实验研究都没有引入量子存储器. 近期, 法国国家科学中心的 Gouzien 和 Sangouard 在《物理评论快报》上发表论文^[4], 证明使用配备量子存储器的量子计算机, 可以大幅度地降低量子计算机对物理量子比特数目的需求.

法国团队提出的方案示意图如图 1, 其基本结构是一个二维的超导量子计算芯片, 和一个三维(二维空间加一维时间)的多模式量子存储器. 每个量子比特由空间模式指数和时间模式指数来寻址. 当一个量子比特需要处理时, 相应的存储器将以微波光子的形式向计算芯片中对应的量子比特传输量子态信息. 当处理完成, 量子比特的量子态重新被存入存储器直到下一次操作. 量子计算芯片每个时间点处理存储单元中的一个切片(即具有同样时间模式指数的所有存储单元), 整个过程可以形象地理解为借助量子存储器实现对量子计算芯片的时间域复用.

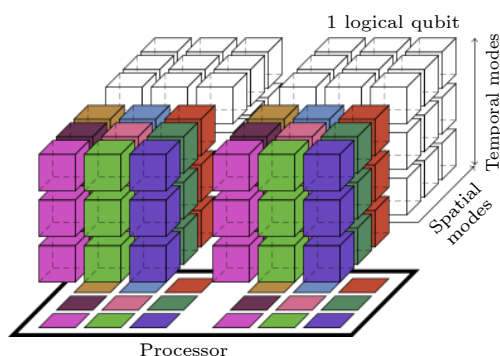


图 1 “量子存储”量子计算机的架构图^[4]

Fig. 1. Quantum computing architecture with multimode quantum memories^[4].

他们的理论分析表明, 这种量子存储式量子计算机求解 2048 位 RSA 密码只需要 1.3 万个物理量子比特和 177 天的时间. 其额外的代价是需要 2800 万空间模式和 45 个时间模式的量子存储器, 且存储时间约为 2 h. 对比前人的结果, 这个方案降低量子计算机的物理比特数需求达 3 个量级, 进一步逼近了目前的技术水平, 而它对量子存储模式数和寿命的需求则较为苛刻. 当然, 在这个工作中存储器资源的需求并没有仔细优化, 后续研究也许会进一步缩减这方面的需求.

长寿命的量子存储必须基于长相干寿命的物质系统来实现. 本团队近期利用稀土掺杂晶体

(Eu:YSO 晶体) 实现了对光波段光场长达 1 h 的相干存储, 是目前光存储时间的最长记录^[5]. 该工作中使用的存储方案是原子频率梳, 它要求光谱烧孔技术来制备梳状结构吸收带, 不能直接用于微波段量子存储. 在法国团队的论文中, 作者们提出在稀土离子掺杂晶体中执行光子回波方案来实现微波段的多模式量子存储. 光子回波方案无需裁剪原始吸收带, 故在微波段上也易于执行, 但是其应用到量子存储领域仍存在重大挑战.

3 无噪声光子回波量子存储

光子回波是原子系综在与电磁脉冲相互作用时产生的一种相干辐射. 1950 年, 美国物理学家 Hahn 在射频波段上首次发现了光子回波现象, 历史上也习惯称之为自旋回波或 Hahn 回波. 光子回波目前最重要的应用是医学上的核磁共振成像, 这一领域的研究已获得过多次诺贝尔奖.

如果能够把光子回波推向量子领域, 则有望实现任意频段的量子存储. 遗憾的是, 前人的理论研究表明标准光子回波不能用于量子存储^[6], 这是因为大量原子被激发到激发态, 带来不可区分的自发辐射噪声并淹没量子信号. 这一本质困难导致近十年来有关光子回波量子存储的研究基本处于停滞状态. 为了探究光子回波的噪声是否本质上不可消除, 我们仔细研究了已有的量子存储方案及各种类型的光子回波方案.

在光与物质相互作用的过程中, 原子系综的辐射从本质上可分为两大类, 即受激辐射与自发辐射(表 1). 进一步考虑其激励来源, 来自于信号所激励的受激辐射, 本质上正是我们所需要的输出信号. 而来自于其他控制光所激励的受激辐射, 是一种相干噪声. 这种噪声的模式(包括空间、偏振、频率及位相)由其激励光场所决定, 所以原理上是与信号光可区分的. 自发辐射必定源自激发态的布居数, 由于辐射位相随机, 其输出一定是噪声. 与相干噪声不同, 自发辐射的模式任意, 故无法通过选择信号的模式来滤除. 值得一提的是, 以上分析是普适的, 无论信号是经典信号还是量子信号. 经典数字光通讯的中继放大器之间的距离不能相距过远, 从量子不可克隆定律的角度来看待这个问题^[7], 其本质是确保传输衰减后的信号大小, 来保证信号相比放大介质的自发辐射噪声仍占主导优势.

表 1 光与原子相互作用中的辐射分类

Table 1. 1. Radiations from the atomic ensemble when interacting with light.

辐射类型 Radiation Type	来源 Source	输出结果 Output
受激辐射 Stimulated emission	信号激励 Signal pulses 控制光激励 Control pulses	目标信号 Target signal 特定辐射模式的相干噪声 Coherent noise with certain modes
自发辐射 Spontaneous emission	激发态布居数 Population in the excited state	辐射模式任意的非相干噪声 Incoherent noise with arbitrary modes

基于上述分析, 构造量子存储方案的本质可以理解构造一种光与原子相互作用的方案, 以高效率地获取量子信号所激励的受激辐射, 同时避免引入不可区分的相干噪声或自发辐射噪声. 而光子回波方案从原理上必须使用光学 π 脉冲来使得原子系综演化相位重聚, 所以一定会激发大量原子到激发态, 带来不可避免的自发辐射噪声. 这也是前人工作^[6]认为标准光子回波不可能实现量子存储的根本原因. 事实上, 已取得成功的所有量子存储方案, 包括原子频率梳、电磁感应致透明、可控非均匀加宽、失谐拉曼方案等, 全部都避免引入激发态布居数来避免自发辐射噪声问题.

自发辐射噪声在光子回波方案中不可避免, 但是否与信号完全不可能区分呢? 仔细考察所有的光子回波方案, 会发现它们的一个共性问题: 其发射信号的上能级发射信号的激发态正是被大量布居数占据的激发态, 这导致自发辐射噪声与信号不可区分, 所以消除自发辐射噪声的关键在于如何分离信号辐射的激发态与布居数占据的激发态.

基于这个思路, 我们提出了“无噪声光子回波”方案 (noiseless photon echo, 简称 NLPE), 成功地解决了光子回波中的自发辐射噪声问题^[8], 首次在有大量原子被激发的条件下仍然实现了量子存储. 我们扩大了原子系统的希尔伯特空间为包含两个激发态能级和两个基态能级的四能级结构, 并在其中施加与信号不同频率的四个 π 脉冲, 最终成功使得发射信号的激发态与布居数占据的激发态可区分, 借助频率滤波即可严格消除自发辐射噪声. 由于施加的 π 脉冲与信号光频率不同, 相干噪声也很容易滤除. 本团队在 Eu:YSO 晶体中执行了光波段的 NLPE 实验演示^[8], 成功观察到单光子的光子回波且信噪比超过 42.5 ± 7.5 , 并实现了 time-bin 量子比特的存储. 在掺 Eu 材料中, NLPE 取得的存储效率和信噪比相比此前唯一可用的原子频率梳方案^[9]获得了超过四倍的提升. 在光量子 U 盘应

用中, Eu:YSO 晶体在磁场下的能级退简并及其尺寸限制将导致样品吸收很弱^[5], 如采用原子频率梳方案, 则需要进一步裁剪吸收带导致存储效率过于低下. 而 NLPE 方案完整利用了介质的原始吸收带, 故有望成为量子 U 盘应用的有效存储方案. 由于 NLPE 方案无需裁剪原子吸收带, 与标准光子回波一样易于执行, 故也有望成为微波段量子存储的有效方案, 在量子存储式量子计算机中取得应用.

4 总 结

此前, 有关量子存储器的研究主要聚焦于量子通信领域的应用, 比如基于多模式量子存储建立量子中继^[10], 从而构建远程的量子互联网, 或者是基于超长寿命量子存储实现可移动的量子 U 盘^[5]. 而法国团队的这一成果^[4]则定量地展现了量子存储器在量子计算机中的价值, 成功推广了量子存储器的应用范围.

法国团队的工作目前还没有考虑存储装置的效率、噪声和相干寿命等问题, 这些在实验上也是比较重大的挑战. 匹配多模式量子存储器的量子计算机是否会比不带量子存储的更大规模量子计算机更容易研制? 这个问题目前人们并没有完全确定的答案, 但法国团队的工作为实用化量子计算机的研制提供了一条可行的技术路线, 有待人们去进一步探索. 该技术路线面临的一项重大挑战在于微波段量子存储至今还没有在任何物质系统中实现过. 本团队的理论分析和光波段的实验已经证明 NLPE 是一种有效的量子存储方案^[8], 这一方案在微波段的实际表现也有待实验上的进一步探索.

参考文献

- [1] Arute F, Arya K, Babbush R, et al. 2019 *Nature* **574** 505
- [2] Zhong H S, Wang H, Deng Y H, et al. 2020 *Science* **370** 1460
- [3] Gidney C, Ekerå M 2021 *Quantum* **5** 433
- [4] Gouzien E, Sangouard N 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 140503

- [5] Ma Y, Ma Y Z, Zhou Z Q, et al. 2021 *Nat. Commun.* **12** 2381
 [6] Ruggiero J, Le Gouët J L, Simon C, Chancelière T 2009 *Phys. Rev. A* **79** 053851
 [7] Scarani V, Iblisdir S, Gisin N, et al. 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 1225
 [8] Ma Y Z, Jin M, Chen D L, Zhou Z Q, Li C F, Guo G C 2021 *Nat. Commun.* **12** 4378
 [9] Jobez P, Laplane C, Timoney N, Gisin N, Ferrier A, Goldner P, Afzelius M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 230502
 [10] Liu X, Hu J, Li Z F, Li X, Li P Y, Liang P J, Zhou Z Q, Li C F, Guo G C 2021 *Nature* **594** 41

SPECIAL TOPIC—Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

“Quantum memory” quantum computers and noiseless photon echoes^{*}

Zhou Zong-Quan^{1)†}

1) (CAS Key Laboratory of Quantum Information, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

(Received 5 December 2021; revised manuscript received 11 January 2022)

Abstract

One of the most important applications of quantum computing is to crack classical cryptosystem. Previous studies showed that the number of qubits required to crack the widely used 2048-bit RSA cipher is about 20 million, which is far beyond the current technology for quantum computing. Recently, É. Gouzien and N. Sangouard of the French Alternative Energies and Atomic Energy Commission proposed a quantum computing architecture based on a two-dimensional grid of superconducting qubits and a three-dimensional multimode quantum memory. They showed that only 13k qubits are required to crack a 2048-bit RSA integer with the help of a long-lived quantum memory with 28 million spatial modes and 45 temporal modes. Their results clearly demonstrate the values of quantum memories in quantum computing and provide an alternative approach for building practically useful quantum computers. Quantum computers require quantum memories to work at microwave band, which remains an outstanding challenge. Based on a detailed analysis of atomic radiations during the quantum storage process, we recently proposed a noiseless-photon-echo protocol which can successfully eliminate the spontaneous emission noise in photon echoes. This protocol is expected to further enable microwave quantum storage and the construction of “quantum memory” quantum computers.

Keywords: quantum computing, quantum memory, RSA, photon echoes

PACS: 03.67.Lx, 07.05.-t

DOI: 10.7498/aps.71.20212245

^{*} Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2017YFA0304100).

[†] Corresponding author. E-mail: zq_zhou@ustc.edu.cn

周期驱动的二能级系统中的准宇称-时间对称动力学

胡洲 曾招云 唐佳 罗小兵

Quasi-parity-time symmetric dynamics in periodically driven two-level non-Hermitian system

Hu Zhou Zeng Zhao-Yun Tang Jia Luo Xiao-Bing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 074207 (2022) DOI: 10.7498/aps.70.20220270

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220270>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

Parity-time对称性对电注入半导体激光器的模式控制

Mode control of electrically injected semiconductor laser with parity-time symmetry

物理学报. 2020, 69(2): 024202 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191351>

非厄米局域拓扑指标的动力学特性

Dynamics of non-Hermitian local topological marker

物理学报. 2021, 70(23): 230309 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211576>

广义布里渊区与非厄米能带理论

Generalized Brillouin zone and non-Hermitian band theory

物理学报. 2021, 70(23): 230307 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211908>

Lipkin-Meshkov-Glick模型中的能级劈裂与宇称振荡研究

Energy level splitting and parity oscillation in Lipkin-Meshkov-Glick model

物理学报. 2018, 67(18): 182101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181069>

三聚化非厄密晶格中具有趋肤效应的拓扑边缘态

Topological edge states with skin effect in a trimerized non-Hermitian lattice

物理学报. 2019, 68(10): 104206 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190112>

周期驱动系统的非平衡热输运与热力学几何

Nonequilibrium thermal transport and thermodynamic geometry in periodically driven systems

物理学报. 2021, 70(23): 230503 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211723>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

周期驱动的二能级系统中的准宇称-
时间对称动力学*胡洲^{1) #} 曾招云^{2) #} 唐佳^{1) #} 罗小兵^{1) 2) †}

1) (浙江理工大学物理系, 杭州 310018)

2) (井冈山大学数理学院, 吉安 343009)

(2022 年 2 月 14 日收到; 2022 年 3 月 10 日收到修改稿)

本文研究了一个周期驱动的非宇称-时间对称二能级量子系统的非厄米动力学. 通过经典相空间分析方法, 解出了该非厄米系统的 Floquet 态和准能谱, 并解析构造了由该非厄米哈密顿量支配下的量子态的非么正时间演化算符, 给出了不同参数区域的量子态演化. 本文数值和分析证明, 该非宇称-时间对称二能级 Floquet 系统, 类似于宇称-时间对称系统, 存在一个准能谱从实数谱到复数谱的相变. 本文还揭示了在量子态的动态演化中存在一种准宇称-时间对称动力学, 即, 该系统的粒子布居概率演化完全满足时间空间对称 (宇称-时间对称), 但是由于相位演化违反了宇称-时间对称性的要求, 因此包含相位信息的量子态演化不满足时间空间对称 (宇称-时间对称). 这些结果加深了对非厄米物理的理解, 拓展和推广了传统的宇称-时间对称概念.

关键词: 宇称-时间对称, 周期驱动二能级系统, 非厄米物理, 动力学演化**PACS:** 42.50.Dv, 03.67.-a, 11.30.Er, 03.65.Yz**DOI:** 10.7498/aps.70.20220270

1 引言

众所周知, 量子体系的状态演化由哈密顿量确定并服从薛定谔方程. 传统量子力学认为, 描述一个量子力学系统的哈密顿量必须具有厄米性, 才具有实数的能量本征值, 从而保证能量的可观测性和体系概率守恒. 1998 年, Bender 和 Boettcher^[1] 发现, 满足宇称-时间 (parity-time, PT) 对称性的非厄米哈密顿量的本征值也可以为实数. 当非厄米参数强度增大时, PT 对称系统的能量本征值存在一个从实数谱到复数谱的对称破缺相变. 尽管 PT 对称量子理论源于量子力学, 但随后被类比到经典物理系统中, 在光学^[2-6]、力学^[7]、电学^[8]、声学^[9,10] 等

多种经典系统中被实验验证. 但受制于量子力学的退相干性及量子实验系统的复杂性, 真正的量子体系中实现宇称时间对称哈密顿量的演化具有巨大挑战. 最近, 人们在光子^[11-13]、冷原子^[14]、腔自旋波混合系统^[15,16]、金刚石氮-空位色心^[17]、核磁共振^[18,19]、离子阱^[20,21] 等量子体系实验平台中成功构造了等效 PT 对称量子哈密顿量. PT 对称物理的发展不但加深了人们对量子力学基本问题的理解, 而且为单向隐身^[10,22-24]、相干完美吸收^[25]、非互易性传输^[5,6,26]、超灵敏传感^[27,28]、单模激光^[29,30]、无线传能^[31]、拓扑相的控制^[4,32] 等一系列应用技术带来了新的前景.

同时, PT 对称的非厄米量子系统相应的数学结构也吸引了人们的关注^[33-37]. 实际上, 算符厄米

* 浙江省自然科学基金 (批准号: LY21A050002)、国家自然科学基金 (批准号: 11975110, 12164022)、江西省教育厅科技项目 (批准号: GJJ211026) 和浙江理工大学科研启动基金 (批准号: 20062318-Y) 资助的课题.

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: xiaobingluo2013@aliyun.com

性只是本征值为实数的充分条件, 而非必要条件. 2002 年, Mostafazadeh^[35,36] 在数学上拓展了 PT 对称理论: 对于一个任意哈密顿量 H , 若在线性厄米算符 η 的作用下, 可以将该哈密顿量变成它的厄米共轭, 即满足 $\eta H \eta^{-1} = H^\dagger$, 则这个哈密顿量是赝厄米的, 其本征值也可以为实数. 这种赝厄米哈密顿量更为广泛, 它包含了 PT 对称哈密顿量. 由于非厄米物理带来了丰富的新奇效应, 构造和理解具有实本征谱的非 PT 对称的非厄米哈密顿量也引起了人们的兴趣. 例如, Nixon 和 Yang^[38] 最近在数学上构造了一类具有任意增益和耗散分布的复数势函数, 证明了这类非厄米哈密顿量不仅具有实数谱, 而且和 PT 对称体系一样, 能量本征谱存在一个从实数谱到复数谱的相变. 这类非 PT 对称势函数简洁而且容易调控, 有望在多能级原子系统^[39] 等实验平台中实现.

对非厄米哈密顿量量子体系加以周期性调控, 可以实现许多平衡态系统中无法达到的新奇的物理学现象, 如非厄米 Floquet 拓扑物态^[12,40]、Floquet 调控下的 PT 相变^[41–44]、Floquet 调控实现增益和双向隐身^[45] 等. 周期调制的宇称-时间对称性物理已经在经典电路^[42]、冷原子^[14]、光子^[12] 等体系中实验实现. 二能级系统 (称为量子比特) 是量子信息和量子计算的基本单元, PT 对称二能级非厄米量子系统自然引起了理论和实验的关注和兴趣. 人们可以将宇称-时间对称哈密顿量扩展成更大空间中的厄米哈密顿量, 从而实现量子比特子系统在非厄米哈密顿量支配下的演化. 在前期工作中研究了周期性驱动对 PT 对称二能级系统的量子调控^[41,46–48], 并获得了一些精确解^[47,48], 有助于对非厄米哈密顿量的精确操控. 但是, 目前对具有实能谱的非 PT 对称二能级非厄米量子系统的 Floquet 调控的研究较少.

本文研究了一个周期驱动的非 PT 对称二能级量子系统的非厄米动力学. 通过经典相空间分析方法, 首先得到了该非厄米系统的 Floquet 态和准能谱, 从而解析构造了非么正时间演化算符, 分析了不同参数区域量子态演化行为. 通过解析和数值证明, 该非 PT 对称二能级 Floquet 系统, 类似于 PT 对称系统, 存在一个准能谱从实数谱到复数谱的相变. 而且, 在量子态的动态演化过程中, 存在一种准 PT 对称量子动力学: 该系统的粒子布居概率演化满足时间空间对称 (PT 对称), 但是量子态演化 (由于相位演化违反 PT 对称性要求) 不满足

时间空间对称 (PT 对称). 这种准 PT 对称量子动力学推广了传统的 PT 对称概念, 加深了对非厄米物理和非传统量子力学的理解.

2 模型

考虑一个一般的周期驱动的非厄米二能级哈密顿量系统, 其动力学演化满足的薛定谔方程可写成:

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \mathbf{H} |\psi\rangle, \quad (1)$$

其中, 态矢量 $|\psi\rangle = (\psi_1, \psi_2)^T$ (文中上标 T 表示矩阵转置), 哈密顿量 H 具有如下形式

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_0 + i\gamma_1 & V(t) \\ V^*(t) & -\gamma_0 - i\gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

这里, γ_0 为两能级的静态失谐, γ_1 为非厄米参数, $V(t)$ 为两能级间的耦合强度, 假定两能级的耦合强度具有时间周期性, 即 $V(t + T') = V(t)$.

首先介绍 PT 对称系统的 Floquet 本征模和准能量的基本概念和性质. 若哈密顿量 $\mathbf{H}(t)$ 与 $\mathbf{PT}$ 算符满足对易关系, 即 $[\mathbf{H}, \mathbf{PT}] = 0$, 则该哈密顿量被认为具有 PT 不变性, 这里的 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为宇称算符, $\mathbf{T}$ 是时间反演算符, 具有如下效应 $i \rightarrow -i, t_0 + t \rightarrow t_0 - t$ 这里, t_0 为某个时间反演点. 可以证明: 当 $\gamma_0 = 0$, 且 $V(t_0 + t) = V(t_0 - t)$ 时, 哈密顿量 (2) 系统变成了标准的具有 PT 对称性的二能级 Floquet 系统, 此时 $[\mathbf{H}, \mathbf{PT}] = 0$. 与厄米 Floquet 系统一样, 周期驱动的非厄米 (不限于 PT) 系统 (1) 同样具有 Floquet 态解, 即 $|\psi\rangle = |\varphi\rangle e^{-i\varepsilon t}$, $|\varphi(t + T')\rangle = |\varphi(t)\rangle$ 在把时间作为另外一个维度的广义希尔伯特空间中, 态矢量 $|\varphi\rangle = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ 满足如下本征值方程:

$$\mathbf{F} |\varphi\rangle = \varepsilon |\varphi\rangle, \quad (3)$$

这里的 $\mathbf{F}$ 称为 Floquet 哈密顿量, 其定义为 $\mathbf{F} := \mathbf{H} - i\partial/\partial t$, ε 称为准能量, $|\varphi\rangle$ 称为 Floquet 态本征模 (或简称 Floquet 态). 若 $[\mathbf{H}, \mathbf{PT}] = 0$, 则 $[\mathbf{F}, \mathbf{PT}] = 0$ 也同样成立, 该 Floquet 系统具有 PT 对称性. 对于具有 PT 对称性的 Floquet 系统, 如果 Floquet 态 $|\varphi\rangle$ 满足本征值方程 (3), 那么 $\mathbf{PT} |\varphi\rangle$ 也是 Floquet 哈密顿量的本征模, 具有复共轭的准能量 ε^* , 即 $\mathbf{FPT} |\varphi\rangle = \varepsilon^* \mathbf{PT} |\varphi\rangle$. 当准能量为实数时, 即 $\varepsilon = \varepsilon^*$, $\mathbf{PT}$ 算符和 $\mathbf{F}$ 算符具有共同的本征态, $\mathbf{PT} |\varphi\rangle = e^{i\beta} |\varphi\rangle$, β 为任意相位 (可以通过一个简单的规范变

换去掉), 此时系统具有稳定的本征动力学模, 处于 PT 对称未破缺相. 当准能量为复数时, PT 算符和 F 算符不再拥有共同的本征态, 系统处于 PT 对称破缺相. 在 PT 对称系统中, 准能谱从实能谱到复能谱的转变, 称为 PT 对称破缺相变.

其次, 简单讨论具有 PT 对称性的二能级系统的一般量子态演化的性质. 定义 $t_{0\pm} = t_0 \pm t$, 如果 $|\psi(t_{0\pm})\rangle = [\psi_1(t_{0+}), \psi_2(t_{0+})]^T$ 是薛定谔方程 (1) 的解, 那么 $PT|\psi(t_{0+})\rangle = [\psi_2^*(t_{0-}), \psi_1^*(t_{0-})]^T$ 和 $[\psi_1(t_{0+})e^{-i\xi}, \psi_2(t_{0+})e^{-i\xi}]^T$ (ξ 为任意相位) 也是薛定谔方程 (1) 的解. 假如在 t_0 时刻, $\psi_1(t_0) = \psi_2^*(t_0)e^{i\xi}$, 则 $PT|\psi(t_{0+})\rangle$ 和 $e^{-i\xi}|\psi(t_{0+})\rangle$ 是薛定谔方程 (1) 的同一个解, 即:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t_0 + t) \\ \psi_2(t_0 + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^*(t_0 - t) \\ \psi_1^*(t_0 - t) \end{pmatrix} e^{i\xi}. \quad (4)$$

方程 (4) 等价于

$$|\psi_1(t_0 + t)| = |\psi_2(t_0 - t)|, \quad (5)$$

$$\theta_1(t_0 + t) + \theta_2(t_0 - t) = \xi. \quad (6)$$

其物理含义是, 在 PT 对称二能级系统中, 从 t_0 时刻开始演化的量子动力学, 沿着 $+t$ 方向演化和沿着 $-t$ 方向演化在宇称算符 (交换两个基矢, 空间反演) 操作下是完全相同的.

一个有趣的问题自然提出: 是否存在非 PT 对称的非厄米 Floquet 系统, 它具有类似 PT 对称的性质, 其准能谱也存在从实数谱到复数谱的相变? 如果存在, 那么其一般量子态的动力学演化是否有可能也和 PT 对称系统一样, 仍然存在某种对称性呢?

本文以一个具体的 Floquet 模型为例尝试去回答上述问题. 在哈密顿模型 (2) 中, 选择简单的驱动 [49]:

$$V(t) = \nu \cos \omega t - i\nu \sin \omega t. \quad (7)$$

这样的哈密顿量可以描述一个被外磁场 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ 驱动的二能级非厄米系统. 在实验方面, 以双势阱系统为例, 这样一个依赖于时间的复数隧穿系数, 可以同时调制两个势阱间的势垒高度和两个势阱的量子态的相角来实现. 容易证明, 对于任意时刻 t_0 , 等式 $V(t_0 + t) = V(t_0 - t)$ 都不成立, 即这个二能级非厄米 Floquet 系统本质上不具有 PT 对称性. 在下一节, 本文将求解该二能级非厄米系统的 Floquet 态本征模和任意量子态的非

么正演化.

3 Floquet 态和准能谱

3.1 约化的有效哈密顿量

由于哈密顿量的非厄米性, 该系统不再保持概率守恒, 即量子态的模 (范数) $n(t) = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ 不再为常数, 它随时间的演化可由非厄米薛定谔方程 (1) 得到:

$$\frac{dn}{dt} = 2\gamma_1 (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2). \quad (8)$$

因此, 引入归一化的量子态:

$$|\psi'(t)\rangle = \frac{|\psi(t)\rangle}{\sqrt{n(t)}}. \quad (9)$$

该归一化的量子态满足新的薛定谔方程:

$$i\frac{d}{dt}|\psi'(t)\rangle = \mathbf{H}'(t)|\psi'(t)\rangle, \quad (10)$$

约化后的有效哈密顿量的形式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'(t) = & i\gamma_1(|\psi'_1|^2 - |\psi'_2|^2) + \nu \cos(\omega t)\sigma_x \\ & + \nu \sin(\omega t)\sigma_y + (\gamma_0 + i\gamma_1)\sigma_z. \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 为泡利矩阵的 3 个分量. 值得强调的是, 虽然有效哈密顿量 $\mathbf{H}'$ 是非厄米的, 但此时新的量子态的范数保持守恒, 即 $\frac{d}{dt}\langle \psi'(t) | \psi'(t) \rangle = 0$.

3.2 赝定态

由于 $\psi'_1 = |\psi'_1|e^{i\theta_1}$, $\psi'_2 = |\psi'_2|e^{i\theta_2}$, 定义两能级的布居数差 $Z(t) = |\psi'_1|^2 - |\psi'_2|^2$ 和相对相位 $\theta' = \theta_2 - \theta_1$, 归一化后的新量子态可以表述为:

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+Z(t)}{2}}e^{i\theta_1} \\ \sqrt{\frac{1-Z(t)}{2}}e^{i\theta_2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

以布居数差 Z 和相对相位 θ' 为两个独立变量, 薛定谔方程 (10) 变成了如下的两个耦合方程:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= 2\gamma_1(1 - Z^2) + 2\nu\sqrt{1 - Z^2}\sin(\theta' - \omega t), \\ \frac{d\theta'}{dt} &= 2\gamma_0 - 2\nu\frac{Z}{\sqrt{1 - Z^2}}\cos(\theta' - \omega t). \end{aligned} \quad (13)$$

现在我们可以 (Z, θ') 的相空间研究系统的动力学演化, 在相空间定义一种“赝定态”,

$$\frac{dZ}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta'}{dt} = \omega. \quad (14)$$

这样一种“赝定点”可以认为是非含时哈密顿量系统的传统定点在 Floquet 系统的一种拓展. 它描述量子态在两能级的布居数差不随时间变化, 但相对相位线性增长 (每隔一个驱动周期相对相位增长 2π , 等价于每隔一个驱动周期 $T' = 2\pi/\omega$, 相对相位不变). 实际上, 这样一种“赝定点”对应周期驱动量子系统的 Floquet 态. 为了方便研究这种“赝定点”, 我们引入一个新的变量, $\theta = \theta' - \omega t$, 方程 (13) 变成:

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dt} &= 2\gamma_1(1 - Z^2) + 2\nu\sqrt{1 - Z^2}\sin\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 2\gamma_0 - \omega - 2\nu\frac{Z}{\sqrt{1 - Z^2}}\cos\theta.\end{aligned}\quad (15)$$

这样, 寻找“赝定点”就转化为寻找方程 (15) 的定点, $\frac{dZ}{dt} = 0, \frac{d\theta}{dt} = 0$.

首先, 考虑共振 (即两能级的失谐等于外场驱动频率, $2\gamma_0 = \omega$) 情况的定点. 为了方便计算, 若

无特殊说明, 本文设定: 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} < 1$ 时, $\sin\alpha = \frac{\gamma_1}{\nu}$; 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} > 1$ 时, $\cosh\alpha = \frac{\gamma_1}{\nu}$. 在共振情况下, 方程 (15) 的定点可以分成以下三类情况: 1) 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} < 1$ 时, 存在两个定点 $(Z_f, \theta_f) = (0, 2\pi - \alpha), (Z_f, \theta_f) = (0, \alpha + \pi)$, 这里 $\sin\alpha = \frac{\gamma_1}{\nu}$; 2) 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} = 1$ 时, 只存在一个定点 $(Z_f, \theta_f) = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} > 1$ 时, 存在两个定点 $(Z_f, \theta_f) = \left(\pm\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 这里 $\cosh\alpha = \frac{\gamma_1}{\nu}$.

其次, 考虑非共振 ($2\gamma_0 \neq \omega$) 情况. 由方程 (15) 可知, 非共振时, $Z_f \neq 0$. 令 $\frac{dZ}{dt} = 0, \frac{d\theta}{dt} = 0$, 可以得到关于 Z_f 的四次方程,

$$\begin{aligned}-\gamma_1^2 Z_f^4 - \left[\left(\gamma_0 - \frac{1}{2}\omega\right)^2 + \nu^2 - \gamma_1^2\right] Z_f^2 \\ + \left(\gamma_0 - \frac{1}{2}\omega\right)^2 = 0.\end{aligned}\quad (16)$$

求解方程 (16), 得到定点的布居数差:

$$Z_f = \pm\sqrt{\frac{1}{-2\gamma_1^2}\left\{\left[-\gamma_1^2 + \left(\gamma_0 - \frac{1}{2}\omega\right)^2 + \nu^2\right] - \sqrt{\left[-\gamma_1^2 + \left(\gamma_0 - \frac{1}{2}\omega\right)^2 + \nu^2\right]^2 + 4\gamma_1^2\left(\gamma_0 - \frac{1}{2}\omega\right)^2}\right\}}. \quad (17)$$

这些定点解的稳定性可以通过计算雅可比矩阵:

$$\begin{pmatrix} -4\gamma_1 Z_f - \frac{2\nu Z_f \sin\theta_f}{\sqrt{1 - Z_f^2}} & 2\nu\sqrt{1 - Z_f^2}\cos\theta_f \\ -2\nu\frac{\cos\theta_f}{(1 - Z_f^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{2\nu Z_f \sin\theta_f}{\sqrt{1 - Z_f^2}} \end{pmatrix}.\quad (18)$$

的本征值 $\lambda_{1,2}$ 来分析. 如果雅可比矩阵两个本征值的实部都小于或等于 0, 则这个定点是稳定的, 否则, 定点是不稳定的. 在共振 ($2\gamma_0 = \omega$) 情况下, 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} < 1$ 时, 两个定点 $(Z_f, \theta_f) = (0, 2\pi - \alpha), (Z_f, \theta_f) = (0, \alpha + \pi)$ 对应的雅可比矩阵的本征值为 $\lambda_{1,2} = \pm 2i\nu\sqrt{1 - \frac{\gamma_1^2}{\nu^2}}$. 雅可比矩阵的本征值为纯虚数, 因此, 这两个定点是稳定的. 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} = 1$ 时, 定点 $(Z_f, \theta_f) = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 对应的雅可比矩阵的本征值 $\lambda = 0$, 对应临界稳定. 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} > 1$ 时, 两个定点 $(Z_f, \theta_f) = \left(\pm\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 对应的雅可比矩阵的本征值为 $\lambda_1 = -2\gamma_1 Z_f, \lambda_2 = -\frac{2\nu Z_f}{\sqrt{1 - Z_f^2}}$. 其中, 定点 $Z_f = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}$ 对应的雅可比

矩阵的两个本征值都为负的实数, 为稳定的结点; 另外一个定点对应的雅可比矩阵的两个本征值都为正的实数, 为不稳定的结点. 同理, 非共振 ($2\gamma_0 \neq \omega$) 情况的雅可比矩阵分析可知, 对于任意大小的非厄米参数 γ_1 , 一个定点是稳定的, 一个定点是非稳定的.

图 1 给出了 (Z, θ) 的经典相图. 图 1(a)–(c) 给出了共振 ($2\gamma_0 = \omega$) 的 3 种情况, 图 1(d) 给出了非共振 ($2\gamma_0 \neq \omega$) 情况. 图中的红点表示定点. 文中所有参数都已经无量纲化.

如图 1(a) 所示, 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} < 1$ 时, 两个定点都位于 $Z_f = 0$ 处, 它们各自被一层层封闭轨道包围, 两者都是稳定的定点 (中心). 如果增大非厄米参数 γ_1 的强度, 两个定点相互趋近, 向 $(Z_f, \theta_f) = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 处移动, 保持 $Z_f = 0$. 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} = 1$ 时, 两个定点合并成了一个定点 $(Z_f, \theta_f) = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, 如图 1(b) 所示. 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} > 1$ 时, 如图 1(c) 所示, 两个定点都居于 $\theta_f = \frac{3}{2}\pi$ 处, 但 $Z_f \neq 0$, 意味着两能级上的布居数不对

称 (一个能级上占有的粒子数相对于另外一能级的粒子数占优势), 这是由于非厄米导致的自囚禁 (布居数不对称) 量子态. 这时, 其中一个定点 ($Z_f > 0$) 为收点 (sink), 邻域的所有轨线最终都要落在其上, 另外一个定点 ($Z_f < 0$) 为源点或发点 (source), 邻域中的所有解都要远离它. 如果继续增大非厄米参数 γ_1 的强度, 这两个自囚禁 (布居数不对称) 的定点会沿着 $\theta_f = \frac{3}{2}\pi$ 移动, 一个趋向 $Z_f = 1$, 另一个趋向 $Z_f = -1$, 量子态的自囚禁效应增强. 图 1(d) 给出了非共振 ($2\gamma_0 \neq \omega$) 情况, 这时, 取任意小的非厄米参数 γ_1 , 两能级上的布居数都不相等, $Z_f \neq 0$, 系统也存在一个稳定的收点 ($Z_f > 0$), 一个不稳定的源点 ($Z_f < 0$), 所有轨线都发自源点流向收点.

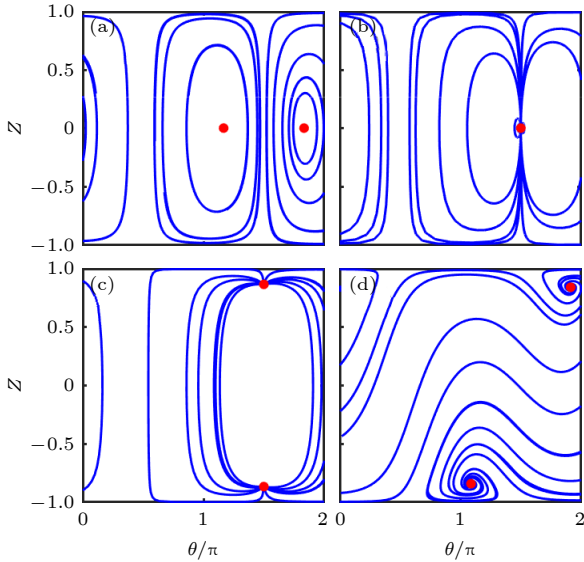


图 1 不同系统参数下的相空间轨道 ($\omega = 2, \nu = 1$) (a) $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 0.5$; (b) $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 1$; (c) $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 2$; (d) $\gamma_0 = 2, \gamma_1 = 0.5$

Fig. 1. Phase-space trajectories with different system parameters ($\omega = 2, \nu = 1$): (a) $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 0.5$; (b) $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 1$; (c) $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 2$; (d) $\gamma_0 = 2, \gamma_1 = 0.5$.

3.3 Floquet 态和准能量

本节将从相空间的赝定点构造系统的 Floquet 态和准能量. 约化后的薛定谔方程 (10) 存在归一化的 Floquet 态解 $|\psi'\rangle = |\varphi'\rangle e^{-i\varepsilon't}$, $|\varphi'(t+T')\rangle = |\varphi'(t)\rangle$, 这里, $T' = 2\pi/\omega$, 量子态的归一化条件要求 ε' 为实数. Floquet 态 $|\varphi'\rangle$ 满足本征值方程 $(\mathbf{H}' - i\partial_t)|\varphi'\rangle = \varepsilon'|\varphi'\rangle$. 由定点 (Z_f, θ_f) 可以构造出归一化的 Floquet 态解 $|\psi'\rangle$:

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon't} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+Z_f}{2}} e^{-i\omega t} \\ \sqrt{\frac{1-Z_f}{2}} e^{i\theta_f} \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon't - im\omega t}. \quad (19)$$

显然, 态向量中两组分的布居数差为 Z_f , 相位差为 $\theta_2 - \theta_1 = \theta_f + \omega t$, 对应经典相空间的赝定点. 式中的相位 $-m\omega t$ 反映了准能谱的类似布里渊区的周期性结构. 本文中如无特殊说明取 $m = 0$, 把准能量限制在一个布里渊区内.

由 (9) 式可以得到原始哈密顿量的 Floquet 态解:

$$|\psi\rangle = \sqrt{n} |\psi'\rangle = \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle} |\varphi'\rangle e^{-i\varepsilon't + \text{Im}(\varepsilon)t}. \quad (20)$$

此处用到关系式 $n = \langle\varphi|\varphi\rangle e^{2\text{Im}(\varepsilon)t}$, $\varepsilon = \text{Re}(\varepsilon) + i\text{Im}(\varepsilon)$. (20) 式和原始 Floquet 态解 $|\psi\rangle = |\varphi\rangle e^{-i\varepsilon t}$, 相比较, 可得到具有时间周期性的 Floquet 态本征模 $|\varphi\rangle = \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle} |\varphi'\rangle$, 以及 $\varepsilon' = \text{Re}(\varepsilon)$, 也就是说, 归一化的 Floquet 态解的准能量是原始 Floquet 态解的准能量的实部, 其值求解如下:

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \langle\varphi'|\mathbf{H}'|\varphi'\rangle - i\langle\varphi'|\frac{d}{dt}|\varphi'\rangle \\ &= \gamma_0 Z_f + \sqrt{1 - Z_f^2} \nu \cos \theta_f - \omega/2 - Z_f \omega/2 + m\omega. \end{aligned} \quad (21)$$

由 (8) 式可知, 原始哈密顿量 Floquet 态解的模 (范数) 随时间的演化方程满足,

$$n(t) = n(0) e^{2\gamma_1 Z_f t}, \quad (22)$$

式中的 $n(0)$ 表示初始时刻 $t = 0$ 的原始哈密顿量 Floquet 态解的模 (范数). (22) 式与 $n = \langle\varphi|\varphi\rangle e^{2\text{Im}(\varepsilon)t}$ 比较, 可以得到原始 Floquet 态解的准能量的虚部,

$$\text{Im}(\varepsilon) = \gamma_1 Z_f, \quad (23)$$

以及,

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = n(0). \quad (24)$$

假如设定 $n(0) = 1$, 则原始哈密顿量的 Floquet 态解 (20) 可以简化为:

$$|\psi\rangle = |\varphi'\rangle e^{-i\varepsilon't}, \quad (25)$$

准能量为:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon' + i\text{Im}(\varepsilon) \\ &= (\gamma_0 + i\gamma_1) Z_f + \sqrt{1 - Z_f^2} \nu \cos \theta_f \\ &\quad - \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}Z_f \omega + m\omega. \end{aligned} \quad (26)$$

由 (26) 式可知, 如果 Floquet 态在两能级上的占有概率 (布居数) 相等, $Z_f = 0$, 那么准能谱是全实数谱, 如果两能级上的占有概率 (布居数) 不相等, $Z_f \neq 0$, 准能谱就会变成复数谱.

本文所考虑的周期驱动非厄米系统, 在归一化的相空间中具有特殊的“赝定点”, 它对应不依赖时间的布居数差和依赖于时间的相对相位. 但是对于更一般的周期驱动非厄米系统, 在归一化的经典相空间中, Floquet 态本征模应该对应庞加莱截面 (每隔驱动周期间隔采样) 的定点. 即, 布居数差一般是时间的周期函数, $Z = Z_d + Z_a(t)$, 这里, Z_d 是常数 ($Z_d = \frac{1}{T'} \int_0^{T'} Z dt$), 代表庞加莱截面的定点位置, $Z_a(t)$ 是平均值为 0 的时间周期函数. 这时, Floquet 态解的模 (范数) 随时间的演化方程满足 $n(t) = n(0)e^{2\gamma \int_0^t Z_a dt} e^{2\gamma_1 Z_d t}$, 与 $n = \langle \varphi | \varphi \rangle e^{2\text{Im}(\varepsilon)t}$ 比较, 可以得到, 准能量的虚部为, $\text{Im}(\varepsilon) = \gamma_1 Z_d$, 以及 $\langle \varphi | \varphi \rangle = n(0)e^{2\gamma \int_0^t Z_a dt}$, 这样, 原始哈密顿量的概率不守恒的 Floquet 态解可以构造出来, 即: $|\psi\rangle = \sqrt{n} |\psi'\rangle = \sqrt{\langle \varphi | \varphi \rangle} |\varphi'\rangle e^{-i\varepsilon' t + \text{Im}(\varepsilon)t}$. 可以知道, 原始哈密顿量 Floquet 态解的准能量的虚部由 Z_d 决定.

结合 (19), (25), (26) 式, 可以确定薛定谔方程 (1) 的 Floquet 态和准能量. 考虑非共振 ($2\gamma_0 \neq \omega$) 情况, 其定点解 (17) $Z_f \neq 0$, 结合 $v\sqrt{1 - Z_f^2} \cos \theta_f = \frac{2\gamma_0 - \omega}{2Z_f} (1 - Z_f^2)$, 给出准能量 ($m = 0$) 为:

$$\varepsilon = \frac{2\gamma_0 - \omega}{2Z_f} + i\gamma_1 Z_f - \frac{1}{2}\omega. \quad (27)$$

显然, 在非共振情况下, 由于 $Z_f \neq 0$, 对于任意非零的非厄米强度 γ_1 , 其准能量都是复数.

接下来, 本文侧重于研究共振 ($2\gamma_0 = \omega$) 情况的本征模和量子动力学演化, 将分别给出共振情况三类定点对应的 Floquet 态和准能量.

1) $\frac{\gamma_1}{\nu} < 1$. 这时, 方程 (15) 有两个布居数对称的定点. 定点 $(Z_f, \theta_f) = (0, 2\pi - \alpha)$ 对应的 Floquet 态解为:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-i\alpha} \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t}, \quad (28)$$

准能量为:

$$\varepsilon = -(\gamma_0 - \nu \cos \alpha). \quad (29)$$

另外一个定点 $(Z_f, \theta_f) = (0, \alpha + \pi)$ 对应的 Floquet 态解为:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} e^{i\alpha} \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t}, \quad (30)$$

准能量为:

$$\varepsilon = -(\gamma_0 + \nu \cos \alpha). \quad (31)$$

2) $\frac{\gamma_1}{\nu} = 1$. 这时, 两个定点合并成一个定点 $(Z_f, \theta_f) = (0, \frac{3\pi}{2})$, 其对应的 Floquet 态解为:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ie^{-i\omega t} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t}, \quad (32)$$

准能量为 $\varepsilon = -\gamma_0$. 这时, 两个 Floquet 态本征模塌缩成一个, 这个参数点被称为奇异点 (exceptional point). 系统能谱在奇异点附近有独特的拓扑结构, 将带来许多新奇的物理现象和应用, 如增强传感灵敏度 [27,28,50], 非对称模式转化和手性传输 [4] 等.

3) $\frac{\gamma_1}{\nu} > 1$. 这时, 两个布居数不对称的定点出现. 其中一个定点 $(Z_f, \theta_f) = (\frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha}, \frac{3\pi}{2})$ 对应的 Floquet 态解为:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\alpha}}} \begin{pmatrix} ie^{-i\omega t} \\ e^{-\alpha} \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t}, \quad (33)$$

准能量为:

$$\varepsilon = i\nu \sinh \alpha - \gamma_0. \quad (34)$$

另一个定点 $(Z_f, \theta_f) = (-\frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha}, \frac{3\pi}{2})$ 对应的 Floquet 态解为:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\alpha}}} \begin{pmatrix} ie^{-i\omega t} \\ e^{\alpha} \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t}, \quad (35)$$

准能量为:

$$\varepsilon = -i\nu \sinh \alpha - \gamma_0. \quad (36)$$

图 2 给出了非厄米系统 (1) 在周期驱动 (7) 作用下共振 ($2\gamma_0 = \omega$) 情况时的准能量的实部 (见图 2(a)) 和虚部 (见图 2(b)) 随参数 γ_1/ν 的关系. 红线和蓝线代表直接对角化一个驱动周期的时间演化算符的数值结果, 圆圈代表经典相图中赝定点对应的准能量解析结果. 如图所示, 数值结果和解析结果完全符合. 尽管在周期驱动 (7) 作用下, $V(t_0 + t) \neq V(t_0 - t)$, 从而非厄米系统 (1) 不具有

PT 对称性, $[\mathbf{H}, \mathbf{PT}] \neq 0$, 但可发现, 它和 PT 对称系统一样, 存在一个准能谱从实数谱到复数谱的相变. 当非厄米系统 (1) 的准能谱为实数时, 将 $\mathbf{PT}$ 算符作用在实数准能谱 $\varepsilon = -(\gamma_0 - \nu \cos \alpha)$ 对应的 Floquet 态本征模 $|\varphi(t_0 + t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega(t_0+t)}, -e^{i\alpha})^T$ 上, 可以验证, 对于任意的时刻点 t_0 ,

$$\begin{aligned} \mathbf{PT} \begin{pmatrix} \varphi_1(t_0 + t) \\ \varphi_2(t_0 + t) \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e^{-i\alpha} \\ e^{i\omega(t_0-t)} \end{pmatrix} \neq C \begin{pmatrix} \varphi_1(t_0 + t) \\ \varphi_2(t_0 + t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (37)$$

式中, C 为任意常数. 这说明, 该实数准能谱对应的 Floquet 态 $|\varphi(t_0 + t)\rangle$ 不是 $\mathbf{PT}$ 算符的本征模. 同理可证, 另外一支实数准能谱 $\varepsilon = -(\gamma_0 + \nu \cos \alpha)$ 对应的 Floquet 态也不是 $\mathbf{PT}$ 算符的本征模. 这进一步说明, 在周期驱动 (7) 作用下的非厄米 Floquet 系统 (1) 具有实数准能谱, 但该系统不具有 PT 对称性.

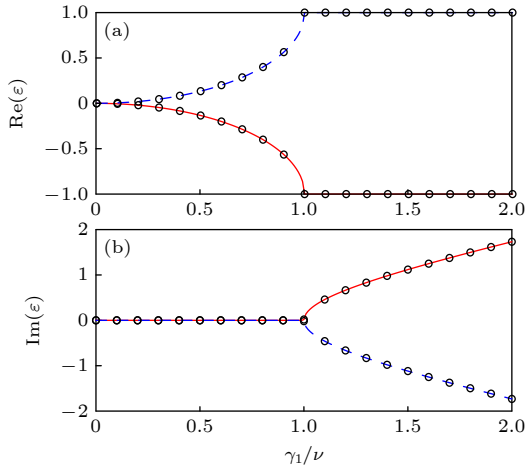


图 2 非厄米系统 (1) 在周期驱动 (7) 作用下共振 ($2\gamma_0 = \omega$) 情况时的准能谱的实部 (a) 和虚部 (b) 随参数 γ_1/ν 的关系. 红线和蓝线代表直接对角化一个驱动周期的时间演化算符的数值结果, 圆圈代表经典相图中赝定点对应的准能量解析结果. 参数取为 $\gamma_0 = 1$, $\omega = 2$

Fig. 2. Real (a) and imaginary (b) parts of the quasienergies as a function of γ_1/ν for the non-Hermitian system (1) subject to a periodic modulation (7) in the resonant ($2\gamma_0 = \omega$) case. The red and blue lines denote the numerical results of quasienergies computed through direct diagonalization of the time-evolution operator over one period of the driving, while the circles denote exact analytical results of quasienergies corresponding to the pseudo fixed points in phase space. The system parameters are set as $\gamma_0 = 1$, $\omega = 2$.

4 量子态的非么正动力学演化

在第 3 节中, 已经通过相空间中的定点方法解析构造了系统的 Floquet 态本征模和准能量. 由这些 Floquet 态和准能量, 我们可以求解任意量子态的时间演化. 在共振情况下, 即使本文所研究的 Floquet 系统不具有 PT 对称性, 也存在能谱从实数谱到复数谱的相变. 那么, 一般量子态的动力学演化又会具有什么独特的量子性质呢? 分 3 种情况求解在共振 ($2\gamma_0 = \omega$) 情况下的一般量子态的动力学演化.

1) $\frac{\gamma_1}{\nu} < 1$. 由两个基本的 Floquet 态解 (28) 和 (30), 构造通解:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= C_1 e^{i(\gamma_0 - \nu \cos \alpha)t} e^{-i\omega t} + C_2 e^{i(\gamma_0 + \nu \cos \alpha)t} e^{-i\omega t}, \\ \psi_2(t) &= C_1 e^{i(\gamma_0 - \nu \cos \alpha)t} e^{-i\alpha} - C_2 e^{i(\gamma_0 + \nu \cos \alpha)t} e^{i\alpha}, \end{aligned} \quad (38)$$

式中叠加系数 C_1, C_2 由初态决定.

假设给定 $t = 0$ 时刻的态矢量, $|\psi(0)\rangle = [\psi_1(0), \psi_2(0)]^T$, 时间演化算符作用在该态矢量上, 可得:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= U_{11}(t, 0) \psi_1(0) + U_{12}(t, 0) \psi_2(0), \\ \psi_2(t) &= U_{21}(t, 0) \psi_1(0) + U_{22}(t, 0) \psi_2(0). \end{aligned} \quad (39)$$

由初态 $|\psi(0)\rangle$ 决定 (38) 式的叠加系数 C_1, C_2 后, 比较 (38) 和 (39) 式, 可以写出从 $t = 0$ 开始的非么正时间演化算符的具体的矩阵形式:

$$\begin{aligned} U(t, 0) &= \begin{pmatrix} U_{11}(t, 0) & U_{12}(t, 0) \\ U_{21}(t, 0) & U_{22}(t, 0) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + e^{2i\alpha}} \\ &\times \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} a^*(t) + b(t) & e^{i\alpha} [a^*(t) - b(t)] \\ e^{i\alpha} [b^*(t) - a(t)] & b^*(t) - e^{2i\alpha} a(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

式中, $a(t) = e^{i(\nu \cos \alpha + \frac{\omega}{2})t}$, $b(t) = e^{i(\nu \cos \alpha - \frac{\omega}{2})t}$.

以初始条件 $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$ 为例, 由 (39) 和 (40) 式可知:

$$\psi_1(t) = \frac{1}{1 + e^{2i\alpha}} \left[e^{2i\alpha - i(\gamma_0 + \nu \cos \alpha)t} + e^{i(\nu \cos \alpha - \frac{\omega}{2})t} \right], \quad (41)$$

$$\psi_2(t) = \frac{e^{i\alpha}}{1 + e^{2i\alpha}} \left[e^{-i(\nu \cos \alpha - \frac{\omega}{2})t} - e^{i(\nu \cos \alpha + \frac{\omega}{2})t} \right]. \quad (42)$$

因此有, $|\psi_1(t)|^2 = \frac{\cos^2(\alpha - \nu t \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha}$, $|\psi_2(t)|^2 = \frac{\sin^2(\nu t \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha}$, $\theta_1(t) = -\frac{\omega}{2}t + \arg[\cos(\alpha - \nu t \cos \alpha)]$,

$\theta_2(t) = \frac{\omega}{2}t + \frac{3}{2}\pi + \arg[\sin(\nu t \cos \alpha)]$. 其中, $\arg$ 代表某函数的相角, 当函数取值为正实数时, 该相角为 0, 当函数取值为负实数时, 该相角为 π . 当 $t_0 = \frac{\alpha - (k+1/2)\pi}{2\nu \cos \alpha}$ (k 为整数) 时, 可以验证, $|\psi_1(t_0+t)|^2 = |\psi_2(t_0-t)|^2$, $\theta_1(t_0+t) + \theta_2(t_0-t) = \xi - \omega t$, 其中, $\xi = \theta_1(t_0) + \theta_2(t_0) = \frac{3}{2}\pi + \arg[\cos(\alpha - \nu t_0 \cos \alpha)] + \arg[\sin(\nu t_0 \cos \alpha)]$.

以 $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$ 为初态直接数值模拟原始薛定谔方程 (1), 图 3 给出了在共振情况下, 当 $\frac{\gamma_1}{\nu} < 1$ 时的系统动力学. 从图 3 可以看出, 两能级上的占有概率 $|\psi_1|^2$ 和 $|\psi_2|^2$ 随时间周期振荡, 当 $t_0 = \frac{\alpha - (k+1/2)\pi}{2\nu \cos \alpha}$ (k 为整数) 时, 在两能级上的占有概率相等, $|\psi_1|^2 = |\psi_2|^2$. 图中以 $t_0 = -0.605$ 为例说明了这个特性. 图 3 显示, 从 t_0 时刻开始, 沿着正向演化 ($+t$ 方向) 和沿着反向演化 ($-t$ 方向) 在宇称算符 (交换两个基矢 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$, 空间反演) 操作下, 概率是完全相同的, 即 $|\psi_1(t_0+t)|^2 = |\psi_2(t_0-t)|^2$. 但相位之和, $\theta_1(t_0+t) + \theta_2(t_0-t)$, 却不等于 t_0 时刻的值 $\xi = \theta_1(t_0) + \theta_2(t_0)$, 反而随时

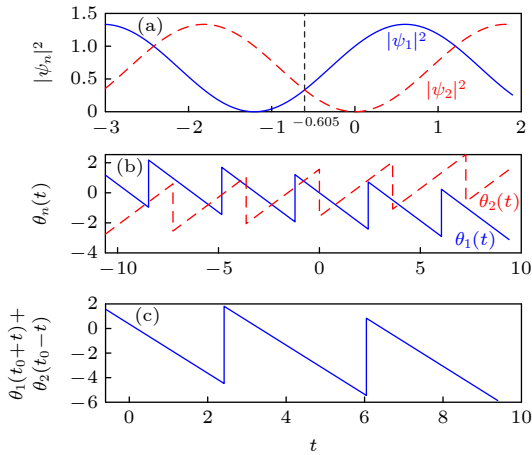


图 3 在共振情况下的系统动力学 ($\frac{\gamma_1}{\nu} < 1$) (a) 两能级上的占有概率 $|\psi_n|^2$ ($n = 1, 2$) 随时间演化; (b) 相位 θ_n ($n = 1, 2$) 随时间演化; (c) 以 $t_0 = -0.605$ 为时间反演点的 $\theta_1(t_0+t) + \theta_2(t_0-t)$ 演化. 系统参数取为 $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 0.5, \omega = 2, \nu = 1$ 初态为 $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$

Fig. 3. System dynamics for the resonance case with the non-Hermitian parameters $\frac{\gamma_1}{\nu} < 1$, starting the system with the state $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$: (a) Time evolutions of the occupation probabilities $|\psi_1|^2$ and $|\psi_2|^2$; (b) time evolutions of phases $\theta_1(t)$ and $\theta_2(t)$; (c) time evolution of the sum of phases, $\theta_1(t_0+t) + \theta_2(t_0-t)$. Here we choose the time-inversion point $t_0 = -0.605$. The system parameters are $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 0.5, \omega = 2, \nu = 1$.

间 t 线性变化. 注意, 在数值中, 相位每隔 2π 有个跳跃. 图中的数值结果完全符合理论预言.

2) $\gamma_1/\nu = 1$. 这时, 系统处于奇异点, 只有一个 Floquet 态解 (32), 但可以构造出另外一个线性无关的基本解:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = e^{i\gamma_0 t} \begin{pmatrix} i t e^{-i\omega t} \\ t - \frac{1}{\nu} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

因此, 由这两个线性无关的基本解, 可以写出薛定谔方程 (1) 的通解:

$$\psi_1(t) = (C_1 + C_2 t) i e^{i(\gamma_0 - \omega)t}, \quad (44)$$

$$\psi_2(t) = \left[C_1 + C_2 \left(t - \frac{1}{\nu} \right) \right] e^{i\gamma_0 t}, \quad (45)$$

式中叠加系数 C_1, C_2 由初态决定. 由 (44) 和 (45) 式, 可以得到, 从 $t = 0$ 开始的非么正时间演化算符为

$$U(t, 0) = \begin{pmatrix} (1 + \nu t) e^{-i\frac{\omega}{2}t} & -i\nu t e^{-i\frac{\omega}{2}t} \\ -i\nu t e^{i\frac{\omega}{2}t} & (1 - \nu t) e^{i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

当 $t = 0$ 时刻的态制备为 $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$ 时, 把时间演化算符 (46) 作用在 $t = 0$ 的态矢量上, 可得:

$$\psi_1(t) = (1 + \nu t) e^{-i\frac{\omega}{2}t}, \quad (47)$$

$$\psi_2(t) = -i\nu t e^{i\frac{\omega}{2}t}. \quad (48)$$

可以证明, 当 $t_0 = -\frac{1}{2\nu}$ 时, $|\psi_1(t_0+t)| = |\psi_2(t_0-t)|$, $\theta_1(t_0+t) + \theta_2(t_0-t) = \pi/2 - \omega t$.

取 $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$ 为初态, 通过直接数值积分模拟原始薛定谔方程 (1), 图 4 给出了在共振情况下, 当 $\gamma_1/\nu = 1$ 时的系统动力学演化. 从图 4 可以看出, 两能级上的占有概率从 $t_0 = -0.5$ 开始沿着正向演化 ($+t$ 方向), 呈时间 t 的平方增长. 如理论预期一样, 数值结果显示, $|\psi_1(t_0+t)|^2 = |\psi_2(t_0-t)|^2$, 相位之和, $\theta_1(t_0+t) + \theta_2(t_0-t)$, 却不恒等于 t_0 时刻的相位之和, 而是随时间 t 线性减小. 注意, 在数值中, 相位每隔 2π 有个跳跃.

3) $\gamma_1/\nu > 1$. 由系统的两个基本的 Floquet 态解 (33) 和 (35), 可以构造在这种情况下的通解

$$\psi_1(t) = C_1 i e^{i(\gamma_0 - \omega)t + \nu \sinh \alpha t} + C_2 i e^{i(\gamma_0 - \omega)t - \nu \sinh \alpha t}, \quad (49)$$

$$\psi_2(t) = C_1 e^{-\alpha} e^{i\gamma_0 t + \nu \sinh \alpha t} + C_2 e^{\alpha} e^{i\gamma_0 t - \nu \sinh \alpha t}. \quad (50)$$

式中叠加系数 C_1, C_2 由初态决定. 同理, 由 (49) 和 (50) 式, 可以得到, 从 $t = 0$ 开始的非么正时间演化

算符为

$$U(t, 0) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}t + \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{-2\alpha}} + \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}t - \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{2\alpha}} & -i \left(\frac{e^{-\alpha} e^{-i\frac{\omega}{2}t + \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{-2\alpha}} + \frac{e^{\alpha} e^{-i\frac{\omega}{2}t - \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{2\alpha}} \right) \\ -i \left(\frac{e^{-\alpha} e^{i\frac{\omega}{2}t + \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{-2\alpha}} + \frac{e^{\alpha} e^{i\frac{\omega}{2}t - \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{2\alpha}} \right) & -\frac{e^{-2\alpha} e^{i\frac{\omega}{2}t + \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{-2\alpha}} - \frac{e^{2\alpha} e^{i\frac{\omega}{2}t - \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{2\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

当 $t = 0$ 时刻的态制备为 $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$ 时, 把时间演化算符 (51) 作用在该态矢量上, 可得

$$\psi_1(t) = \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}t + \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{-2\alpha}} + \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}t - \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{2\alpha}}, \quad (52)$$

$$\psi_2(t) = -i \left(\frac{e^{-\alpha} e^{i\frac{\omega}{2}t + \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{-2\alpha}} + \frac{e^{\alpha} e^{i\frac{\omega}{2}t - \nu t \sinh \alpha}}{1 - e^{2\alpha}} \right). \quad (53)$$

类似地, 可以证明, 当 $t_0 = -\frac{\alpha}{2\nu \sinh \alpha}$ 时, $|\psi_1(t_0 + t)| = |\psi_2(t_0 - t)|$, $\theta_1(t_0 + t) + \theta_2(t_0 - t) = \xi - \omega t$, 这里 $\xi = \theta_1(t_0) + \theta_2(t_0) = \pi/2$.

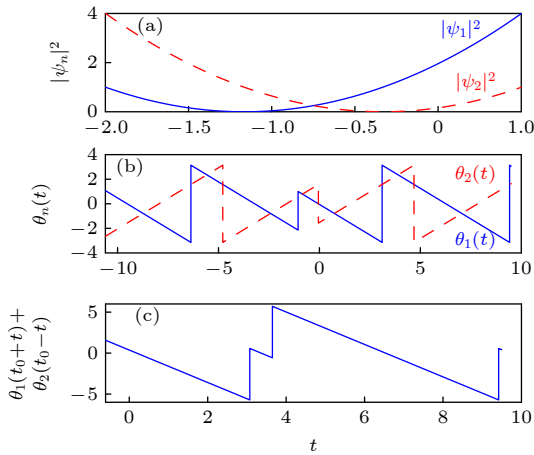


图 4 在共振情况下的系统动力学 ($\gamma_1/\nu = 1$) (a) 两能级上的占有概率 $|\psi_n|^2$ ($n = 1, 2$) 随时间演化; (b) 相位 θ_n ($n = 1, 2$) 随时间演化; (c) 以 $t_0 = -0.5$ 为时间反演点的 $\theta_1(t_0 + t) + \theta_2(t_0 - t)$ 演化. 系统参数取为 $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 1, \omega = 2, \nu = 1$ 初态为 $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$

Fig. 4. System dynamics for the resonance case with the non-Hermitian parameters $\gamma_1/\nu = 1$, starting the system with the state $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$: (a) Time evolutions of the occupation probabilities $|\psi_1|^2$ and $|\psi_2|^2$; (b) time evolutions of phases $\theta_1(t)$ and $\theta_2(t)$; (c) time evolution of the sum of phases, $\theta_1(t_0 + t) + \theta_2(t_0 - t)$. Here the time-inversion point is given by $t_0 = -0.5$. The system parameters are $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 1, \omega = 2, \nu = 1$.

图 5 给出了在共振情况下, 当 $\gamma_1/\nu > 1$ 时的系统动力学演化. 同样地, 这里也是以 $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$ 为初态直接数值模拟了原始薛定谔方程 (1). 如

图 5 所示, 两能级上的占有概率从 $t_0 = -0.380$ 开始沿着正向演化 ($+t$ 方向), 呈指数形式增长. 类似地, 如理论预期的一样, 数值结果显示, $|\psi_1(t_0 + t)|^2 = |\psi_2(t_0 - t)|^2$, 相位之和, $\theta_1(t_0 + t) + \theta_2(t_0 - t)$, 随时间 t 线性减小.

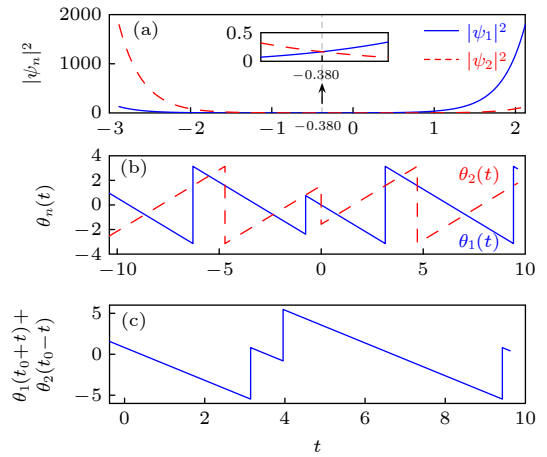


图 5 在共振情况下的系统动力学. $\gamma_1/\nu > 1$. (a) 两能级上的占有概率 $|\psi_n|^2$ ($n = 1, 2$) 随时间演化. (b) 相位 θ_n ($n = 1, 2$) 随时间演化. (c) 以 $t_0 = -0.380$ 为时间反演点的 $\theta_1(t_0 + t) + \theta_2(t_0 - t)$ 演化. 系统参数取为 $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 2, \omega = 2, \nu = 1$ 初态为 $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$

Fig. 5. System dynamics for the resonance case with the non-Hermitian parameters $\gamma_1/\nu > 1$, starting the system with the state $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$. (a) Time evolutions of the occupation probabilities $|\psi_1|^2$ and $|\psi_2|^2$. (b) Time evolutions of phases $\theta_1(t)$ and $\theta_2(t)$. (c) Time evolution of the sum of phases, $\theta_1(t_0 + t) + \theta_2(t_0 - t)$. Here the time-inversion point is given by $t_0 = -0.380$. The system parameters are $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 2, \omega = 2, \nu = 1$.

以上分析和数值证明, 具有周期驱动形式 (7) 的系统 (1) 虽然不具有 PT 对称性, 但在共振情况下, 其量子态演化具有类似 PT 对称的性质. 当非厄米参数强度小于某个临界值时, 两能级系统布居概率呈周期振荡; 当非厄米参数强度大于该临界值时, 布居概率呈指数增强. 而且, 在共振情况下, 从 t_0 时刻开始演化的量子态, 沿着正方向 ($+t$ 方向) 演化和沿着反方向 ($-t$ 方向) 演化在宇称算符 (交换两个基矢, 空间反演) 操作下, 概率是完全

相同的. 也就是说, 从系统粒子布居概率来看, 该非厄米系统的动力学和 PT 对称系统完全一样. 但实际上, 两能级系统的概率幅的相位不满足 PT 对称性的要求. 从数学上讲, 该系统只满足 PT 对称的其中一个条件: $|\psi_1(t_0 + t)| = |\psi_2(t_0 - t)|$, 但不满足另外一个条件 $\theta_1(t_0 + t) + \theta_2(t_0 - t) = \xi$, 这里 ξ 是个常数, 由 t_0 时刻的概率幅的相位决定. 我们把这种类似 PT 对称性的量子动力学称为准 PT 对称量子动力学.

5 结 论

采用经典相空间分析方法研究了一个周期驱动的非 PT 对称二能级量子系统的非厄米物理特性. 由于哈密顿量的非厄米性, 体系概率不守恒, 引入一个归一化的量子态, 并把薛定谔方程转化成了一个以两能级布居数差和相对相位为两个独立变量的经典动力学方程. 研究发现, 该量子系统的 Floquet 态对应经典相空间的“赝定点”, 即不随时间变化的布居数差和依赖于时间的相对相位. 在经典相空间“赝定点”的基础上, 我们解析构造了由该非厄米哈密顿量支配下的量子态的非么正时间演化算符, 给出了不同参数区域的量子态演化. 研究结果表明, 该非 PT 对称二能级量子系统也存在类似 PT 对称系统一样的从对称未破缺区到破缺区的过渡, 而且在该系统量子态的动力学演化中, 存在一种准 PT 对称量子动力学, 即系统粒子布居概率演化完全满足时间空间对称 (PT 对称), 但由于相位演化不满足 PT 对称性的要求, 因此, 该量子态演化不满足时间空间对称 (PT 对称). 这些研究结果有利于进一步加深对非厄米量子系统, 特别是对 PT 对称概念的理解.

对于更一般的周期驱动非厄米系统, 在归一化的经典相空间中, Floquet 态本征模对应庞加莱截面 (每隔驱动周期间隔采样) 的定点. 本文建立的经典相空间定点同 Floquet 态和准能量的数学联系, 可以推广到非线性的非厄米量子系统中, 有助于研究开放量子多体系统的经典和量子对应, 有助于构造新的超越标准量子极限的快速演化非么正量子门^[18,51], 这些都是未来进一步的研究工作的重点.

参考文献

- [1] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [2] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, Morandotti R, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902
- [3] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
- [4] Doppler J, Mailybaev A A, Böhm J, Kuhl U, Girschik A, Libisch F, Milburn T J, Rabl P, Moiseyev N, Rotter S 2016 *Nature* **537** 76
- [5] Peng B, Özdemir Ş K, Lei F, Monifi F, Gianfreda M, Long G Lu, Fan S, Nori F, Bender C M, Yang L 2014 *Nat. Phys.* **10** 394
- [6] Chang L, Jiang X, Hua S, Yang C, Wen J, Jiang L, Li G, Wang G, Xiao M 2014 *Nat. Photonics* **8** 524
- [7] Bender C M, Berntson B K, Parker D, Samuel E 2013 *Am. J. Phys.* **81** 173
- [8] Schindler J, Li A, Zheng M C, Ellis F M, Kottos T 2011 *Phys. Rev. A* **84** 040101(R)
- [9] Fleury R, Sounas D, Alù A 2015 *Nat. Com.* **6** 5905
- [10] Liu T, Zhu X, Chen F, Liang S, Zhu J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 124502
- [11] Tang J S, Wang Y T, Yu S, He D Y, Xu J S, Liu B H, Chen G, Sun Y N, Sun K, Han Y J, Li C F, Guo G C 2016 *Nat. Photonics* **10** 642
- [12] Xiao L, Zhan X, Bian Z H, Wang K K, Zhang X, Wang X P, Li J, Mochizuki K, Kim D, Kawakami N, Yi W, Obuse H, Sanders B C, Xue P 2017 *Nat. Phys.* **13** 1117
- [13] Gao W C, Zheng C, Liu L, Wang T J, Wang C 2021 *Optics Express* **29** 517
- [14] Li J, Harter A K, Liu J, Melo L de, Joglekar Y N, Luo L 2019 *Nat. Com.* **10** 855
- [15] Zhang D K, Luo X Q, Wang Y P, Li T F, You J Q 2017 *Nat. Com.* **8** 1368
- [16] Shen R C, Zhang G Q, Wang Y P, You J Q 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 230305 (in Chinese) [沈瑞昌, 张国强, 王逸璞, 游建强 2019 物理学报 **68** 230305]
- [17] Wu Y, Liu W, Geng J, Song X, Ye X, Duan C K, Rong X, Dun J 2019 *Science* **364** 878
- [18] Zheng C, Hao L, Long G L 2013 *Philos. Trans. R. Soc. A* **371** 20120053
- [19] Wen J, Zheng C, Kong X, Wei S, Xin T, Long G 2019 *Phys. Rev. A* **99** 062122
- [20] Wang W C, Zhou Y L, Zhang H L, Zhang J, Zhang M C, Xie Y, Wu C W, Chen T, Ou B Q, Wu W, Jing H, Chen P X 2021 *Phys. Rev. A* **103** L020201
- [21] Ding L, Shi K, Zhang Q, Shen D, Zhang X, Zhang W 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 083604
- [22] Lin Z, Ramezani H, Eichelkraut T, Kottos T, Cao H, Christodoulides D N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 213901
- [23] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* **488** 167
- [24] Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, Lu M H, Oliveira J E B, Almeida V R, Chen Y F, Scherer A 2013 *Nat. Mater.* **12** 108
- [25] Sun Y, Tan W, Li H Q, Li J, Chen H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143903
- [26] Jin L, Song Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 073901
- [27] Hodaei H, Hassan A U, Wittek S, Garcia-Gracia H, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2017 *Nature* **548** 187
- [28] Yu S, Meng Y, Tang J, Xu X, Wang Y, Yin P, Ke Z, Liu W, Li Z, Yang Y, Chen G, Han Y, Li C, Guo G 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 240506
- [29] Feng L, Wong Z J, Ma R M, Wang Y, Zhang X 2014 *Science* **346** 972
- [30] Hodaei H, Miri M A, Heinrich M, Christodoulides D N,

- Khajavikhan M 2014 *Science* **346** 975
- [31] Assawaworrarit S, Yu X, Fan S 2017 *Nature* **546** 387
- [32] Xu H, Mason D, Jiang L, Harris J G E 2016 *Nature* **537** 80
- [33] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401
- [34] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [35] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 205
- [36] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 2814
- [37] Huang Y F, Cao H X, Wang W H 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 030301 (in Chinese) [黄永峰, 曹怀信, 王文华 2020 物理学报 **69** 030301]
- [38] Nixon S, Yang J 2016 *Phys. Rev. A* **93** 031802(R)
- [39] Hang C, Gabadadze G, Huang G 2017 *Phys. Rev. A* **95** 023833
- [40] Pan J, Zhou L 2020 *Phys. Rev. B* **102** 094305
- [41] Luo X B, Huang J H, Zhong H H, Qin X Z, Xie Q T, Kivshar Y S, Lee C H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 243902
- [42] Chitsazi M, Li H, Ellis F M, Kottos T 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 093901
- [43] Duan L, Wang Y, Chen Q 2020 *Chin. Phys. Lett.* **37** 081101
- [44] Xie Q, Rong S, Liu X 2018 *Phys. Rev. A* **98** 052122
- [45] Koutserimpas T T, Alù A, Fleury R 2018 *Phys. Rev. A* **97** 013839
- [46] Luo X B, Wu D, Luo S, Guo Y, Yu X, Hu Q 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 345301
- [47] Yang B, Luo X B, Hu Q, Yu X 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043828
- [48] Luo X B, Yang B, Zhang X F, Li L, Yu X 2017 *Phys. Rev. A* **95** 052128
- [49] Cui B, Wang L C, Yi X X 2010 *Phys. Rev. A* **82** 062105
- [50] Liu Z P, Zhang J, Özdemir Ş K, Peng B, Jing H, Lu X Y, Li C W, Yang L, Nori F, Liu Y 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 110802
- [51] Bender C M, Brody D C, Jones H F, Meister B K 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 040403

SPECIAL TOPIC—Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Quasi-parity-time symmetric dynamics in periodically driven two-level non-Hermitian system^{*}

Hu Zhou^{1) #} Zeng Zhao-Yun^{2) #} Tang Jia^{1) #} Luo Xiao-Bing^{1) 2) †}

1) (*Department of Physics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China*)

2) (*School of Mathematics and Physics, Jinggangshan University, Ji'an 343009, China*)

(Received 14 February 2022; revised manuscript received 10 March 2022)

Abstract

In recent years, there have been intensive studies of non-Hermitian physics and parity-time (PT) symmetry due to their fundamental importance in theory and outstanding applications. A distinctive character in PT-symmetric system is phase transition (spontaneous PT-symmetry breaking), i.e. an all-real energy spectrum changes into an all-complex one when the non-Hermitian parameter exceeds a certain threshold. However, the conditions for PT-symmetric system with real energy spectrum to occur are rather restrictive. The generalization of PT-symmetric potentials to wider classes of non-PT-symmetric complex potentials with all-real energy spectra is a currently important endeavor. A simple PT-symmetric two-level Floquet quantum system is now being actively explored, because it holds potential for the realization of non-unitary single-qubit quantum gate. However, studies of the evolution dynamics of non-PT-symmetric two-level non-Hermitian Floquet quantum system are still relatively rare.

In this paper, we investigate the non-Hermitian physics of a periodically driven non-PT-symmetric two-level quantum system. By phase-space analysis, we find that there exist so-called pseudo fixed points in phase space representing the Floquet solutions with fixed population difference and a time-dependent relative phase between the two levels. According to these pseudo fixed points, we analytically construct a non-unitary evolution operator and then explore the dynamic behaviors of the non-PT-symmetric two-level quantum system in different parameter regions. We confirm both analytically and numerically that the two-level non-Hermitian Floquet quantum system, although it is non-parity-time-symmetric, still features a phase transition with the quasienergy spectrum changing from all-real to all-complex energy spectrum, just like the PT symmetric system. Furthermore, we reveal that a novel phenomenon called quasi-PT symmetric dynamics occurs in the time evolution process. The quasi-PT symmetric dynamics is so named in our paper, in the sense that the time-evolution of population probabilities in the non-PT-symmetric two-level system satisfies fully the time-space symmetry (PT symmetry), while time-evolution of the quantum state (containing the phase) does not meet such a PT symmetry, due to the fact that time-evolution of the phases of the probability amplitudes on the two levels violates the requirement for the PT symmetry.

Keywords: parity-time symmetry, periodically driven two-level systems, non-Hermitian physics, dynamical evolution

PACS: 42.50.Dv, 03.67.-a, 11.30.Er, 03.65.Yz

DOI: 10.7498/aps.70.20220270

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LY21A050002), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11975110, 12164022), the Scientific and Technological Research Fund of Jiangxi Provincial Education Department (Grant No. GJJ211026), and Zhejiang Sci-Tech University Scientific Research Start-up Fund (Grant No. 20062318-Y).

[#] These authors contributed equally.

[†] Corresponding author. E-mail: xiaobingluo2013@aliyun.com

规范势下正方形格点超导量子比特电路中的量子态输运

赵艳军 谭宁 王垚琪 郑亚锐 王辉 刘伍明

Quantum state transport in a square-lattice superconducting qubit circuit under gauge potential

Zhao Yan-Jun Tan Ning Wang Yu-Qi Zheng Ya-Rui Wang Hui Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 100304 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222349

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222349>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于辅助单比特测量的量子态读取算法

A quantum state readout method based on a single ancilla qubit

物理学报. 2021, 70(21): 210303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211066>

量子态制备及其在量子机器学习中的前景

Quantum state preparation and its prospects in quantum machine learning

物理学报. 2021, 70(14): 140307 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210958>

基于量子算法的量子态层析新方案

A novel scheme of quantum state tomography based on quantum algorithms

物理学报. 2019, 68(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190157>

基于光量子态避错及容错传输的量子通信

Quantum error rejection and fault tolerant quantum communication

物理学报. 2018, 67(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180598>

铁基超导中拓扑量子态研究进展

Research progress of topological quantum states in iron-based superconductor

物理学报. 2018, 67(20): 207101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181455>

一维超导传输线腔晶格中的拓扑相变和拓扑量子态的调制

Modulation of topological phase transitions and topological quantum states in one-dimensional superconducting transmission line cavities lattice

物理学报. 2022, 71(19): 194203 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220675>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

规范势下正方形格点超导量子比特电路中的量子态输运*

赵艳军¹⁾ 谭宁¹⁾ 王垚琪¹⁾ 郑亚锐²⁾ 王辉^{3)†} 刘伍明^{4)5)‡}

1) (北京工业大学, 光电子技术教育部重点实验室, 北京 100124)

2) (量元科技(深圳)有限公司, 深圳 518033)

3) (浪潮人工智能研究院, 济南 250011)

4) (中国科学院物理研究所, 北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100190)

5) (中国科学院大学物理学院, 北京 100190)

(2022 年 12 月 11 日收到; 2023 年 3 月 23 日收到修改稿)

借助于电感型耦合器产生人造规范势(有效磁通), 本文研究了正方形传输子量子比特模型中的量子态输运性质. 理论计算发现, 单粒子本征态与单空穴本征态具有相同的本征能谱, 并且相同能量下, 两者的平均粒子流与平均空穴流受有效磁通正弦调制后互为相反数. 当初态为占据一个格点的单粒子与单空穴时, 如果系统时间反演对称(有效磁通为 4π 的整数倍), 单粒子与单空穴的含时波函数各分量相等, 否则不等. 分析证明, 以上计算结果是由于对体系哈密顿量的粒子-空穴操作等价于对其做时间反演. 此外还发现, 有效磁通为 π 时, 单粒子或单空穴只在初始比特与两个相邻比特之间输运, 有效磁通为 0 时, 单粒子或单空穴通过两个相邻比特输运到对角比特, 然后再反向输运; 无论有效磁通如何取值, 两者具有相同的平均(粒子或空穴)流和格点占据概率.

关键词: 规范势, 量子态输运, 量子态制备

PACS: 03.67.Ac, 03.67.-a

DOI: 10.7498/aps.72.20222349

1 引言

20 世纪末, 由 Feynman^[1] 提出的使用一种人工可控的量子系统来模拟另一种现实中真实的量子系统的研究方案——量子模拟, 在凝聚态材料研究领域具有广阔的应用前景. 特别地, 作为一种新思路, 量子模拟方法可以避免经典计算机在处理多体量子态时面临的数据存储困难^[2]. 因此, 在人造量子系统中进行已知现象的演示, 或未知现象的探索已经成为凝聚态物理量子模拟研究的重要方向.

规范势理论在凝聚态物理的发展中充当十分重要的角色. 20 世纪末的贝里相位^[3]、整数^[4]、分数^[5,6]量子霍尔效应, 以及 21 世纪初的量子自旋霍尔效应^[7-11]和拓扑绝缘体^[12], 都得益于规范势的发展, 激起了在量子模拟中引入规范势的研究. 其中, 比较突出的是冷原子平台^[13], 例如利用空间变化的激光与原子内态的耦合可以产生人造磁场^[14-18], 如果进一步控制失谐量随时间变化甚至可以产生人造电场^[16]. 但在集成化方面, 冷原子平台还面临着不小的困难. 而超导量子电路^[19-21]则因传承了传统的微电子工艺, 在集成方面享有独特的优势,

* 北京市自然科学基金(批准号: 4222064)、国家自然科学基金(批准号: 11904013, 61835013, 12234012)、国家重点研发计划(批准号: 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1402100)和中国载人航天工程空间应用系统项目资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wanghui@iphy.ac.cn

‡ 通信作者. E-mail: wliu@iphy.ac.cn

这有望催生面向量子模拟的专用超导量子芯片. 因而立足此平台开展关于规范势的量子模拟研究具有难以估量的应用前景.

自 1999 年单个电荷量子比特中呈现出量子振荡^[22]后, 多比特研究一直在追逐比特参数一致性以及良好相干性的过程中前进. 相应地, 基于超导量子电路的规范势研究也经历了从单比特到多比特的过程. 如何在格点之间产生规范势也是限制多比特下规范势研究的一个难点. 对于单比特系统而言, 研究重心主要集中在动量空间, 即利用量子比特哈密顿量的可调性来研究绝热变化下的贝里相位、陈数 (或缠绕数) 以及拓扑性质^[23–27]. 随着高品质芯片中比特数目的有效提高^[28], 在多比特构造的格点空间中研究规范势诱导的拓扑效应的报导越来越多. 这也得益于合成格点间有效磁通 (阿贝尔规范势) 的若干方案被相继提出, 例如周期调制量子比特频率^[29–31]以及利用约瑟夫森结的非线性^[32–34]等思路. 较典型地, 2017 年, Roushan 等^[34]在三角形格点原包中利用周期调制的电感耦合器实现了光子的有效磁通, 并观察到了时间反演对称破缺诱导的单光子态与单空穴态的手性输运现象. 由于此三角形原包可看作实现分数量子霍尔效应的基本单元, 此研究为实现最终的二维分数量子霍尔效应奠定实验基础.

类似地, 由于正方格点原包是整数量子霍尔效应的基本单元, 受文献^[34]启发, 本文将研究有效磁通对正方形格点原包中量子态的影响. 考虑利用电感耦合器产生有效磁通, 系统研究正方格点中单粒子本征态、单空穴本征态、单粒子态以及单空穴态的制备方法, 输运性质以及测量方案. 同时, 将根据主流实验参数考虑环境对这些过程的影响. 虽然调制比特频率的方法产生有效磁通对样品制备的要求简单, 但耦合器对比特间的相互作用控制更加完美, 在需要精确开关比特耦合的场景更有优势. 本工作作为研究规范势下更复杂模型中的量子行为, 特别是整数量子霍尔效应, 提供重要的基础参考数据.

2 理论模型

如图 1 所示, 本文研究的正方格点体系由传输量子比特以及耦合器构成. 其中, 传输量子比特由超导量子干涉仪 (SQUID), 分流电容 C_j 与电感 L_0 构成. 电感耦合器由约瑟夫森结 L_{Tj} 与电感

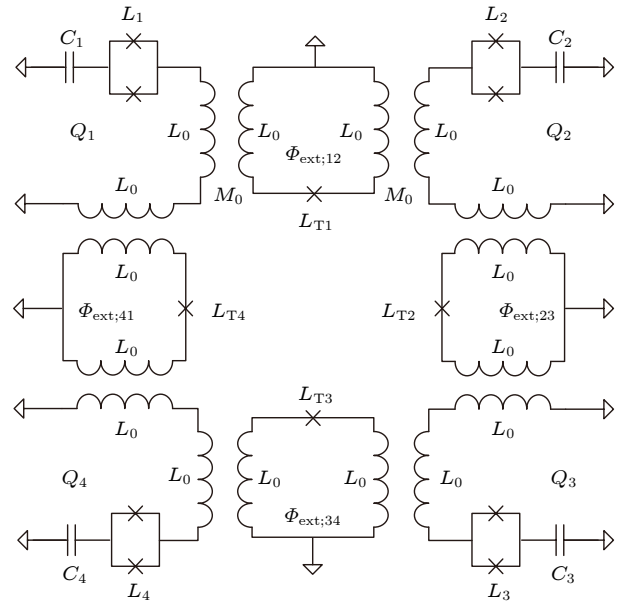


图 1 四量子比特电路结构示意图. 在该示意图中量子比特是由电容、电感和约瑟夫森结组成, 而耦合器由电感与约瑟夫森结组成的环路构成. 相邻两个量子比特之间通过耦合器实现耦合, 每一个耦合器可以调节外加磁通来实现可调耦合. 其中, Q_j 表示量子比特, L_j 与 L_{Tj} ($j = 1, 2, 3, 4$) 都代表约瑟夫森结电感, C_j 代表电容, L_0 代表电感, M_0 表示相邻电感之间的互感

Fig. 1. Schematic diagram of the four qubit circuit structure. In this diagram, a qubit is composed of a capacitor, an inductance and a Josephson junction, while a coupler is composed of a loop consisting of an inductance and a Josephson junction. The coupling between two adjacent qubits is realized by a coupler, where the external magnetic flux can be tuned to achieve adjustable coupling. Here, Q_j stands for a qubit, L_j and L_{Tj} ($j = 1, 2, 3, 4$) stand for Josephson junction inductance, C_j stands for the capacitance, L_0 stands for the inductance, M_0 denotes the mutual inductance between adjacent inductances.

L_0 组成的环路构成, 并且可通过外部磁通 $\Phi_{\text{ext},j,j+1}$ 进行控制. 借助于量子比特与耦合器之间的互感 M_0 , 比特之间可形成受 $\Phi_{\text{ext},j,j+1}$ 控制的等效耦合. 如果进一步考虑 4 个量子比特分别被经典场 (图中未明确标出) 驱动, 则经过一些列正则量子化与二能级近似操作, 体系的哈密顿量可以表示为

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{j=1}^4 \frac{\hbar\omega_j}{2} \sigma_j^z \\
 & + \sum_{j=1}^4 \hbar g_{j,j+1}(t) (\sigma_j^+ + \sigma_j^-) (\sigma_{j+1}^+ + \sigma_{j+1}^-) \\
 & + \sum_{j=1}^4 \left[\frac{\hbar\Omega_j}{2} e^{i(\nu_j t + \varphi_j)} \sigma_j^- + \text{H.c.} \right]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

为自洽起见, 约定在 (1) 式的下标中, 如果 $j = 4$, 应取 $j + 1 = 1$. 这里选取量子比特 Q_1 与 Q_3 完全相等, 量子比特 Q_2 与 Q_4 完全相等, $\omega_j = (\sqrt{8E_{C;j}E_{J;j}} - E_{C;j})/\hbar$ 代表量子比特 Q_j 从基态 $|g_j\rangle$ 到激发态 $|e_j\rangle$ 的跃迁频率, $\sigma_j^z = |e_j\rangle\langle e_j| - |g_j\rangle\langle g_j|$ 为泡利算符, $\sigma_j^+ = |e_j\rangle\langle g_j|$ ($\sigma_j^- = |g_j\rangle\langle e_j|$) 为量子比特 Q_j 的上升 (下降) 算符, $\Omega_j = C_c|V_{in}|\sqrt{\frac{2\omega_j}{\hbar C_{J;j}}}$, ν_j 与 $\phi_j = -\arg\{V_{in}\} - \pi/2$ 分别代表经典场的驱动强度、频率以及相位. 此外耦合器产生的比特间耦合强度为

$$g_{j,j+1} = \frac{1}{2} \frac{M_0^2 \sqrt{\omega_j \omega_{j+1}}}{\sqrt{L_{J;j} L_{J;j+1} L_{Tj}}} \cos(\Phi_{\text{ext};j,j+1}),$$

其大小受偏置磁通 $\Phi_{\text{ext};j,j+1}$ 控制. 其中 Φ_0 表示磁通量子, $E_{C;j} = e^2/(2C_{J;j})$ 表示约瑟夫森电荷能, e 表示元电荷量, $E_{J;j} = [\Phi_0/(2\pi)]^2/L_{J;j}$ 表示约瑟夫森能, $L_{J;j}$ 表示量子比特线性电感, $C_{J;j}$ 表示量子比特的电容, C_c 表示施加驱动场耦合电容, V_{in} 表示入射电压复振幅, M_0 是相邻电感 L_0 之间的互感, $L_{T;j}$ 表示约瑟夫森结线性电感. 1) 当 $\Phi_{\text{ext};j,j+1}$ 仅含静磁场时, 可以控制耦合的开关 [35,36]. 例如, 当 $g_{j,j+1}(t) \equiv g_{j,j+1} \neq 0$ 时, 比特间耦合打开; 当 $g_{j,j+1}(t) \equiv 0$ 时, 比特间耦合关断. 2) 而当 $\Phi_{\text{ext};j,j+1}$ 包含时变磁场时, 可以产生复数跳跃项 [34] 或双粒子激发 (湮灭) [37]. 后面可知, 前者是合成有效磁通 [38] 的基本原理, 后者可用于单空穴态的制备. 由此可见, 调控经典场以及比特间耦合强度可以来控制哈密顿量 H . 借助于此, 将围绕单粒子本征态, 单空穴本征态, 单粒子态以及单空穴态展开具体研究.

3 单粒子本征态和单空穴本征态

要产生正方格点中的有效磁通, 则需对耦合器施加时变偏置磁通, 使得耦合强度满足形式 $g_{j,j+1}(t) = 2g_0 \cos(\Delta_{j,j+1}t + \varphi_{j,j+1})$ [34]. 当耦合器的调制频率满足两端量子比特的频率差 $\Delta_{j,j+1} = \omega_{j+1} - \omega_j$ 时, 根据旋波近似理论, 可以忽略 $\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+$ 与 $\sigma_j^- \sigma_{j+1}^-$ 两项. 此外, 进一步调节耦合器调制相位, 使其满足 $\varphi_{j,j+1} = \Phi_s/4$. 此时, 相互作用表象下的系统哈密顿量可以写为

$$H_I = H_{\text{eff}} + \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\hbar \Omega_j}{2} e^{-i(\epsilon_j t + \phi_j)} \sigma_j^+ + \text{H.c.} \right).$$

其中, 有效哈密顿量为

$$H_{\text{eff}} = \sum_{j=1}^4 \hbar g_0 \left(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- e^{i\frac{\Phi_s}{4}} + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ e^{-i\frac{\Phi_s}{4}} \right), \quad (2)$$

其描述了正方格点量子比特的耦合情况. (2) 式可以映射为弱磁场下带电粒子的哈密顿量 [38], 因此, 将这里的相位 $\Phi_s = \sum_{j=1}^4 \varphi_{j,j+1}$ 称为穿过正方格点的有效磁通. 此外, 在驱动项中, 裸耦合强度为 $g_0 = M_0^2 \sqrt{\omega_j \omega_{j+1}} / (2\sqrt{L_{J;j} L_{J;j+1}} L_{Tj})$, 其中取 $L_{Tj} \equiv L_T$, 并且由于量子比特 Q_1 与 Q_3 完全相等, 量子比特 Q_2 与 Q_4 完全相等, 使得裸耦合强度相等; 驱动场与量子比特的频率差为 $\epsilon_j = \nu_j - \omega_j$.

为考察有效哈密顿量的本征态激发行为, 对量子比特的上升下降算符进行离散傅里叶变换,

$$\sigma_j^+ = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{n=1}^4 e^{-ik_n j} \Sigma_n^+ \quad \text{及} \quad \sigma_j^- = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{n=1}^4 e^{ik_n j} \Sigma_n^-.$$

其中, $k_n = (n-1)2\pi/4$ 称为波矢, $n = 1, 2, 3, 4$, 算符 Σ_n^+ (Σ_n^-) 代表量子比特的集体上升 (下降) 算符. 这时可以得到

$$H_I = \sum_{n=1}^4 \left[\hbar \tilde{\omega}_n \Sigma_n^+ \Sigma_n^- + \left(\frac{\hbar A_n}{2} \Sigma_n^+ + \text{H.c.} \right) \right],$$

其中

$$\tilde{\omega}_n = 2g_0 \cos(k_n + \Phi_s/4),$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{j=1}^4 e^{ik_n j} \Omega_j e^{-i(\epsilon_j t + \phi_j)}.$$

利用量子比特的集体上升算符, 单粒子本征态可以表示为 $|k_n\rangle = \Sigma_n^+ |0\rangle$, 这里 $|0\rangle = |0000\rangle$ 表示 (四比特) 基态. 此后约定, 右矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle$ 中, $q_j = 0$ 和 $q_j = 1$ 分别表示比特 Q_j 处于基态 $|g_j\rangle$ 和激发态 $|e_j\rangle$.

基于以上模型, 可以从基态 $|0\rangle$ (可在关断比特间所有耦合及驱动场的条件下自然冷却获取) 出发, 制备单粒子本征态 $|k_n\rangle$. 具体方法为: 调节驱动场并使驱动频率 ν_j 与量子比特 Q_j 的跃迁频率 ω_j 满足共振条件 $\epsilon_j = \tilde{\omega}_n$, 并使驱动强度与相位满足 $\Omega_j e^{-i\phi_j} = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{-ik_n j} B_n$, 此时驱动项只剩下 $\frac{\hbar B_n}{2} e^{-i\tilde{\omega}_n t} \Sigma_n^+ + \text{H.c.}$. 那么, 在强驱动条件下, 从初始时刻 t_0 施加一个 π 脉冲 $|B_n|(t_1 - t_0) = \pi$, 体系便可从基态 $|0\rangle$ 一次演化到单粒子本征态 $|k_n\rangle$. 这里, 强驱动条件是指驱动强度远大于量子比特的衰减率.

考察单粒子本征态 $|k_n\rangle$ 在有效磁通 Φ_S 下的手性输运性质. 关闭量子比特的所有驱动场后, 系统演化只受 H_{eff} 约束. 如果定义粒子流算符 $I_{j,j+1}$ 表示单位时间由量子比特 Q_j 流向量子比特 Q_{j+1} 的粒子数, 那么它应满足如下的连续性方程, 即

$$\frac{d(\sigma_j^+ \sigma_j^-)}{dt} = \frac{[\sigma_j^+ \sigma_j^-, H_{\text{eff}}]}{i\hbar} = I_{j-1,j} - I_{j,j+1}. \quad (3)$$

经过简单计算, 可以得到粒子流算符的形式为

$$I_{j,j+1} = ig_0(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- e^{i\frac{\Phi_S}{4}} - \text{H.c.}). \quad (4)$$

单粒子本征态 $|k_n\rangle$ 下的平均粒子流为 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n} = \langle k_n | I_{j,j+1} | k_n \rangle = -\frac{g_0}{4} \sin\left(k_n + \frac{\Phi_S}{4}\right)$. 在图 2 中, 蓝色实线展示了裸耦合强度取 $g_0/(2\pi) = 4\text{ MHz}$ 时, 平均粒子流在不同单粒子本征态 $|k_n\rangle$ 下随有效磁通 Φ_S 的变化. 可以看到, 平均粒子流与有效磁通 Φ_S 呈正弦函数关系, 波矢 k_n 主要决定正弦函数的初始相位.

如果将处于基态的量子比特看作一个空穴的话, 那么系统同样存在单空穴本征态, 即只有一个量子比特处于基态的本征态. 这时, $|0\rangle_h = |1111\rangle$ 可以看做空穴的真空态, 并且 σ_j^+ (σ_j^-) 可以看做空穴的湮灭 (产生) 算符 $\sigma_{h,j}^+$ ($\sigma_{h,j}^-$). 那么, 相互作用表象下的系统哈密顿量可以写为

$$H_I^h = H_{\text{eff}}^h + \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\hbar\Omega_j}{2} e^{i(\epsilon_j t + \phi_j)} \sigma_{h,j}^+ + \text{H.c.} \right). \\ H_{\text{eff}}^h = \sum_{j=1}^4 \hbar g_0 \left(\sigma_{h,j}^+ \sigma_{h,j+1}^- e^{-i\frac{\Phi_S}{4}} + \sigma_{h,j}^- \sigma_{h,j+1}^+ e^{i\frac{\Phi_S}{4}} \right), \quad (5)$$

用来描述 $-\Phi_S$ 磁通下空穴的有效哈密顿量. 经过变

换 $\sigma_{h,j}^- = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{n=1}^4 e^{-ik_n j} \Sigma_{h,n}^-$, $\sigma_{h,j}^+ = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{n=1}^4 e^{ik_n j} \Sigma_{h,n}^+$

之后, $H_I^h = \sum_{n=1}^4 \left[\hbar\tilde{\omega}_n \Sigma_{h,n}^+ \Sigma_{h,n}^- + \left(\frac{\hbar A_n}{2} \Sigma_{h,n}^- + \text{H.c.} \right) \right]$.

属于本征值 $\hbar\tilde{\omega}_n$ 的单空穴本征态为 $|k_n\rangle_h = \Sigma_h^+ |0\rangle_h$. 要制备单空穴本征态主要分为两步. 首先, 以真空态 $|0000\rangle$ 为初态, 在关断比特耦合的情况下, 顺次对 4 个比特 $Q_1 - Q_4$ 施加 π 脉冲, 制备到空穴真空态 $|0\rangle_h$. 然后, 打开耦合器形成有效磁通, 同时调节驱动场并使驱动频率 ν_j 与量子比特 Q_j 的跃迁频率 ω_j 满足共振条件 $\epsilon_j = -\tilde{\omega}_n$, 并使驱动强度与相位满足 $\Omega_j e^{-i\phi_j} = e^{-ik_n j} B_n / \sqrt{4}$, 此时驱动项只剩下 $\frac{\hbar B_n}{2} e^{i\tilde{\omega}_n t} \Sigma_{h,n}^- + \text{H.c.}$. 那么, 在强驱动条件下, 从初始时刻 t_0 施加一个 π 脉冲 $|B_n| (t_1 - t_0) = \pi$, 体系便可从空穴真空态 $|0\rangle_h$ 一次演化到单空穴本征态 $|k_n\rangle_h$. 值得指出的是, 空穴真空态 $|0\rangle_h$ 的制备也可以通过调制耦合器达到. 首先, 打开 $Q_1 - Q_2$ 耦合, 改变耦合器偏置磁通使耦合强度满足形式 $g_{1,2}(t) = 2g_0 \cos(\Delta_{1,2}t + \varphi_{1,2})$, 其中, $\Delta_{1,2} = \omega_1 + \omega_2$. 根据旋波近似理论, 仅保留 $\sigma_1^+ \sigma_2^+$ 与 $\sigma_1^- \sigma_2^-$ 两项. 这时, 仅需一个脉冲 $g_0 t = \frac{\pi}{2}$, 体系便可从基态 $|0\rangle$ 到达量子态 $|1100\rangle$. 接着同样只打开 $Q_3 - Q_4$ 耦合, 使耦合强度 $g_{3,4}(t) = 2g_0 \cos(\Delta_{3,4}t + \varphi_{3,4})$, $\Delta_{3,4} = \omega_3 + \omega_4$. 这时仅保留 $\sigma_3^+ \sigma_4^+$ 与 $\sigma_3^- \sigma_4^-$ 两项. 类似地, 只需一个脉冲 $g_0 t = \frac{\pi}{2}$, 便可获取空穴真空态 $|0\rangle_h$.

类似地, 通过考察空穴的连续性方程, 同样可以求得空穴流算符为

$$I_{j,j+1}^h = ig_0(\sigma_{h,j}^+ \sigma_{h,j+1}^- e^{-i\frac{\Phi_S}{4}} - \text{H.c.}). \quad (6)$$

那么, 在本征态 $|k_n\rangle_h$ 下空穴流的平均值为

$$\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,k_n} = \langle k_n | I_{j,j+1}^h | k_n \rangle_h \\ = \frac{g_0}{4} \sin\left(k_n + \frac{\Phi_S}{4}\right) = -\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n}.$$

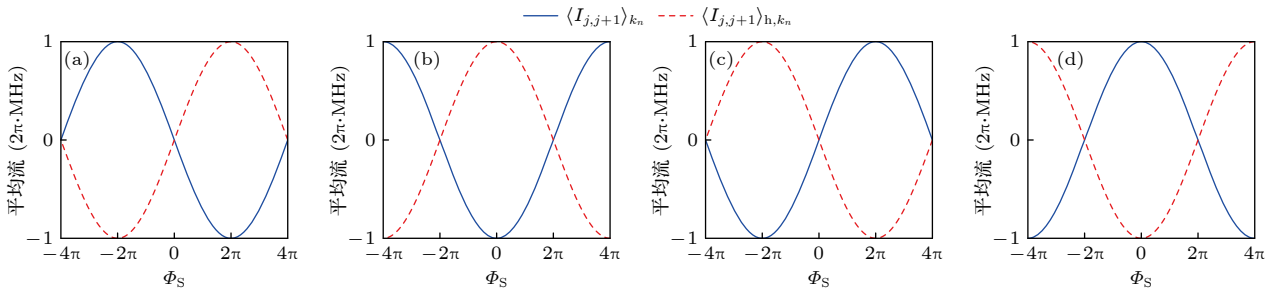


图 2 当 n 分别取 (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4 时, 单粒子 (空穴) 本征态 $|k_n\rangle$ ($|k_n\rangle_h$) 下的平均粒子 (空穴) 流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n}$ ($\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,k_n}$) 随有效磁通 Φ_S 的变化曲线. 取裸耦合强度 $g_0/(2\pi) = 4\text{ MHz}$. 此外, 蓝色实线 (红色虚线) 代表平均粒子 (空穴) 流

Fig. 2. Average particle (hole) current $\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n}$ ($\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,k_n}$) in the single-particle (hole) eigenstate $|k_n\rangle$ ($|k_n\rangle_h$) against the effective magnetic flux Φ_S for n taking (a) 1, (b) 2, (c) 3, and (d) 4, respectively. We have taken the coupling strength $g_0/(2\pi) = 4\text{ MHz}$. Additionally, the solid blue (dashed red) curves represent the particle (hole) current.

可见, 在属于相同本征值的单粒子本征态与单空穴本征态下, 平均粒子流与平均空穴流方向相反, 如图 2 中红色虚线所示. 这种相反的空穴与粒子流, 可以从时间反演的角度来进行深度解释. 暂不考虑粒子态和空穴态带来的物理上的区别, 仅在数学上将所有的算符 (量子态) 都看成对应的矩阵 (向量), 亦即将粒子态基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle$ 与空穴态基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle_h$ 进行一一映射. 在后者中, $q_j = 0$ 与 $q_j = 1$ 分别表示量子比特 Q_j 处于激发态和基态. 这时, 对体系有效哈密顿量的粒子-空穴操作之后, 空穴的有效哈密顿量 H_{eff}^h 与粒子的有效哈密顿量 H_{eff} 互为时间反演, 即 $H_{\text{eff}}^h = T H_{\text{eff}} T^{-1}$. 其中 T 为时间反演算符, 此处单指取复共轭. 因此, 属于相同本征值 $2\hbar g_0 \cos\left(k_n + \frac{\Phi_S}{4}\right)$ 的单空穴本征态与单粒子本征态必互为时间反演, 即 $|k_n\rangle_h = T|k_n\rangle T^{-1}$, 这可由本征态具体表达式轻易验证. 另一方面, 发现粒子流与空穴流算符满足关系 $I_{j,j+1}^h = -T I_{j,j+1} T^{-1}$. 因此, 对于平均粒子流, 可得

$$\begin{aligned} \langle I_{j,j+1} \rangle_{h,k_n} &= {}_h\langle k_n | I_{j,j+1}^h | k_n \rangle_h \\ &= (T \langle k_n | T^{-1}) (-T I_{j,j+1} T^{-1}) (T | k_n \rangle T^{-1}) \\ &= -T \langle k_n | I_{j,j+1} | k_n \rangle T^{-1} = -\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n}, \end{aligned}$$

该式最后利用了平均粒子流是实数的性质. 这就从时间反演的角度解释了为什么在属于相同本征值的单粒子与单空穴本征态下, 平均粒子流与平均空穴流互为相反数. 特别地, 当有效磁通 Φ_S 为零时, 有效哈密顿量满足时间反演对称, 此时, 有效哈密顿量 $H_{\text{eff}} = H_{h,\text{eff}}$, 且均在本征值 $\hbar\tilde{\omega}_n$ 处有两个简并的本征态 $|k_n\rangle$ 与 $|k_n\rangle_h$.

4 单粒子态

单粒子态指只有一个量子比特被激发的态, 可表示为 $|j\rangle = \sigma_j^+ |0\rangle$, 其中 j 取值 1—4. 以单粒子态 $|1\rangle$ 为例, 其制备可以由基态 $|0\rangle$ 一步获取. 这只需在关断比特间所有耦合的情况下, 只对量子比特 Q_1 施加共振驱动场, 即 $\nu_1 = \omega_1$. 以 t_0 为初始时刻, 经历一个 π 脉冲 $\Omega_1(t_1 - t_0) = \pi$, 那么体系便可从初态 $|0\rangle$ 演化到单粒子态 $|1\rangle$.

现在, 考察单粒子态 $|1\rangle$ 在有效磁通下的手性输运性质. 通过关闭量子比特所有驱动场, 并打开所有耦合器, 对体系合成 (2) 式中的有效哈密顿量

H_{eff} . 由于 $|1\rangle$ 不是有效哈密顿的本征态, 因此会进行时间演化. 经过时间 t 后的波函数可记为 $|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}} t\right) |1\rangle$. 将初态展开为单粒子本征态 (见第 3 节) 的线性叠加, 即可获得波函数的具体形式:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{j=1}^4 \psi_j(t) |j\rangle = \frac{1}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) + \cos(\tilde{\omega}_3 t)] |1\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} [-i \sin(\tilde{\omega}_0 t) - \sin(\tilde{\omega}_3 t)] |2\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) - \cos(\tilde{\omega}_3 t)] |3\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} [-i \sin(\tilde{\omega}_0 t) + \sin(\tilde{\omega}_3 t)] |4\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

如前所述, $\tilde{\omega}_0 = 2g_0 \cos \frac{\Phi_S}{4}$ 和 $\tilde{\omega}_3 = 2g_0 \sin \frac{\Phi_S}{4}$ 是有效哈密顿量 H_{eff} 的两个本征频率. 进一步算得任意时刻的平均粒子流 $\langle I_{j,j+1}(t) \rangle_1 = \langle \psi_1(t) | I_{j,j+1} | \psi_1(t) \rangle$, 可得

$$\begin{aligned} \langle I_{12} \rangle_1 &= -\langle I_{41} \rangle_1 \\ &= \frac{g_0}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) + \cos(\tilde{\omega}_3 t)] \\ &\quad \times \left[\cos \frac{\Phi_S}{4} \sin(\tilde{\omega}_0 t) + \sin \frac{\Phi_S}{4} \sin(\tilde{\omega}_3 t) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle I_{23} \rangle_1 &= -\langle I_{34} \rangle_1 \\ &= -\frac{g_0}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) - \cos(\tilde{\omega}_3 t)] \\ &\quad \times \left[\cos \frac{\Phi_S}{4} \sin(\tilde{\omega}_0 t) - \sin \frac{\Phi_S}{4} \sin(\tilde{\omega}_3 t) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

观察平均粒子流表达式, 容易发现, 在 $\Phi_S = \pi + 2n\pi$ (n 为整数) 时比特 Q_3 无粒子流入, 即 $\langle I_{23} \rangle_1 = \langle I_{43} \rangle_1 \equiv 0$. 图 3(a)—(g) (图 3(i)—(p)) 给出了 $\Phi_S = \pi$ ($\Phi_S = 0$) 时, $Q_j - Q_{j+1}$ 间平均粒子流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_1$ 和量子态 $|j\rangle$ 占据概率 $P_j = |\psi_j(t)|^2$ 的演化曲线. 这里, 蓝色虚线 (红色实线) 排除 (包含) 了环境的影响. 其中, 环境的影响可以用下面的主方程来描述:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \frac{[H_{\text{eff}}, \rho]}{i\hbar} + \sum_{j=1}^4 \mathcal{L}_j[\rho], \quad (10)$$

其中, $\rho(t)$ 为四比特体系的密度算符.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j[\rho] &= -\gamma_j \langle e_j | \rho | e_j \rangle |e_j\rangle \langle e_j| \\ &\quad + \gamma_j \langle e_j | \rho | e_j \rangle |g_j\rangle \langle g_j| - \frac{\Gamma_j}{2} \langle e_j | \rho | g_j \rangle |e_j\rangle \\ &\quad \times \langle g_j| - \frac{\Gamma_j}{2} \langle g_j | \rho | e_j \rangle |g_j\rangle \langle e_j|, \end{aligned}$$

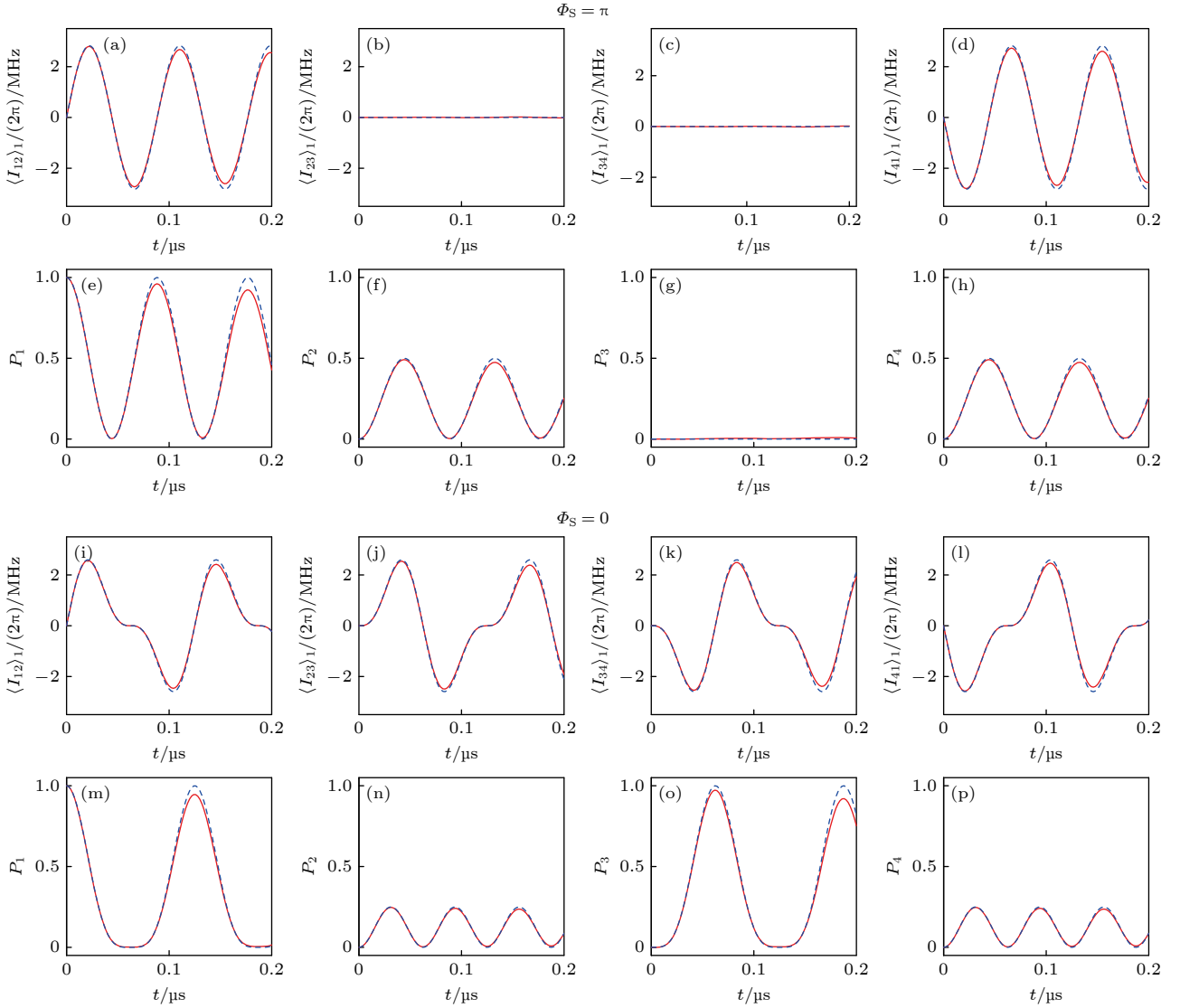


图 3 当有效磁通取 $\Phi_S = \pi$ ($\Phi_S = 0$) 时, 单粒子态 $|1\rangle$ 演化时间 t 后 (a)–(d) [(i)–(l)] 比特 $Q_j - Q_{j+1}$ 之间的平均粒子流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_1$ 与 (e)–(h) [(m)–(p)] 量子态 $|j\rangle$ 上的占据概率 P_j 的变化曲线. 其中, 蓝色虚线 (红色实线) 指排除 (包含) 环境影响, 此外, 取裸耦合强度 $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, Q_j 弛豫速率 $\gamma_j/(2\pi) \equiv 0.05$ MHz, Q_j 退相速率 $\Gamma_j/(2\pi) \equiv 0.1$ MHz

Fig. 3. Variation curves of both the (a)–(d) [(i)–(l)] average $Q_j - Q_{j+1}$ particle current $\langle I_{j,j+1} \rangle_1$ and (e)–(h) [(m)–(p)] occupation probability P_j on the quantum state $|j\rangle$ for the effective magnetic flux taking $\Phi_S = \pi$ ($\Phi_S = 0$) after the time t for which the single-particle state $|1\rangle$ evolves. Here, the dashed blue (solid red) curves represent the environment influence is excluded (included). Additionally, we specify the bare coupling strength $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, Q_j relaxation rate $\gamma_j/(2\pi) \equiv 0.05$ MHz, and Q_j dephasing rate $\Gamma_j/(2\pi) \equiv 0.1$ MHz.

这里, $\mathcal{L}_j[\rho]$ 表示量子比特 Q_j 的林德布拉德耗散项, $\gamma_j(\Gamma_j)$ 是量子比特 Q_j 的弛豫速率 (退相速率). 取耦合器裸耦合强度 $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, 弛豫速率 $\gamma_j/(2\pi) \equiv 0.05$ MHz, 退相速率 $\Gamma_j/(2\pi) \equiv 0.1$ MHz. 结合上述的平均粒子流公式, 在图中可以很容易地看出粒子流 $\langle I_{12} \rangle_1$ 与 $\langle I_{41} \rangle_1$, $\langle I_{23} \rangle_1$ 与 $\langle I_{34} \rangle_1$ 在数值上互为相反数, 并且当有效磁通 Φ_S 为 0 和 π 时, 平均粒子流和量子态演化存在着不同的情况. 当 $\Phi_S = \pi$ 时, 发现单粒子由 Q_1 同时向着 Q_2 和 Q_4 演化, 同时 Q_3 上的占据概率 P_3 始终为零. 观察平均粒子流也

可以看出, 只有量子比特 $Q_1 - Q_2$ 和 $Q_1 - Q_4$ 之间出现非零的平均粒子流. 更直接地, 这是因为当 $\Phi_S = \pi$ 时, $\tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}_3 = \sqrt{2}g_0$, 进而由波函数公式 (见 (7) 式) 容易验证 [3] 上的概率振幅 $\psi_3(t) \equiv 0$. 另外, 非零的占据概率和平均粒子流均以频率 $2\tilde{\omega}_0$ 正弦振荡, 对应周期约为 $0.088 \mu\text{s}$, 这也可以在图中明显发现. 当 $\Phi_S = 0$ 时, 发现单粒子由 Q_1 同时沿着 Q_2 和 Q_4 向 Q_3 输运, 并且相邻两个量子比特之间均存在粒子流. 当 Φ_S 取 0 时, $\tilde{\omega}_0 = 2g_0$ 以及 $\tilde{\omega}_3 = 0$. 此时, 可以验证平均粒子流以 $\tilde{\omega}_0$, $2\tilde{\omega}_0$ 两种频率正

弦振荡, 对应周期分别为 $0.125 \mu\text{s}$ 和 $0.0625 \mu\text{s}$, 这就是图中平均粒子流不是单纯正弦函数的原因. 类似的振荡情况也适用于占据概率 P_1 和 P_3 . 而 P_2 , P_4 则只以频率 $2\tilde{\omega}_0$ 做正弦振荡. 两种有效磁通下, 环境影响均可忽略不计, 这是由于在所取典型参数下, 系统处于强耦合区.

5 单空穴态

不同于单粒子态只有一个比特处于激发态, 单空穴态中只有一个量子比特处于基态, 其余的量子比特都处于激发态, 即 $|j\rangle_{\text{h}} = \sigma_j^- |0\rangle_{\text{h}}$. 假设初态为基态 $|0\rangle$, 以 $|1\rangle_{\text{h}}$ 为例, 其制备可通过在关断比特间所有耦合时, 顺次对 Q_2 , Q_3 , Q_4 施加 π 脉冲来实现. 另一种制备方法可以利用耦合器的可调耦合. 仅打开 Q_2 — Q_3 间耦合, 改变耦合器偏置磁通, 使得耦合强度满足 $g_{2,3}(t) = 2g_0 \cos(\Delta_{2,3}t + \varphi_{2,3})$ ^[34], 其中, $\Delta_{2,3} = \omega_2 + \omega_3$. 根据旋波近似理论, 仅保留 $\sigma_2^+ \sigma_3^+$ 与 $\sigma_2^- \sigma_3^-$ 两项. 这时, 仅需一个脉冲 $g_0 t = \pi/2$, 即可制备到 $|0110\rangle$. 然后, 仅需对 Q_4 施加一个 π 脉冲, 即可制得单空穴态 $|1\rangle_{\text{h}} = |0111\rangle$.

对比单粒子态 $|1\rangle$, 继续考察单空穴态 $|1\rangle_{\text{h}}$ 在有效磁通下的手性输运性质, 此时继续对系统合成有效哈密顿量 H_{eff} ((2) 式). 通过将单空穴态展开为单空穴本征态 (第 3 节) 的线性叠加, 可以计算任意时刻的波函数为 $|\psi^{\text{h}}(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}} t\right) |1\rangle_{\text{h}}$, 结果为

$$\begin{aligned} |\psi^{\text{h}}(t)\rangle &= \sum_{j=1}^4 \psi_j^{\text{h}}(t) |j\rangle_{\text{h}} = \frac{1}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) + \cos(\tilde{\omega}_3 t)] |1\rangle_{\text{h}} \\ &+ \frac{1}{2} [-i \sin(\tilde{\omega}_0 t) + \sin(\tilde{\omega}_3 t)] |2\rangle_{\text{h}} \\ &+ \frac{1}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) - \cos(\tilde{\omega}_3 t)] |3\rangle_{\text{h}} \\ &+ \frac{1}{2} [-i \sin(\tilde{\omega}_0 t) - \sin(\tilde{\omega}_3 t)] |4\rangle_{\text{h}}. \end{aligned} \quad (11)$$

利用此结果以及空穴流的表达式 ((6) 式), 可以进一步计算任意时刻的平均空穴流 $\langle I_{j,j+1}(t) \rangle_{\text{h},1} = \langle \psi^{\text{h}}(t) | I_{j,j+1}^{\text{h}} | \psi^{\text{h}}(t) \rangle$, 可得

$$\begin{aligned} \langle I_{12} \rangle_{\text{h},1} &= -\langle I_{41} \rangle_{\text{h},1} \\ &= \frac{g_0}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) + \cos(\tilde{\omega}_3 t)] \\ &\times \left[\cos \frac{\Phi_{\text{S}}}{4} \sin(\tilde{\omega}_0 t) + \sin \frac{\Phi_{\text{S}}}{4} \sin(\tilde{\omega}_3 t) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \langle I_{23} \rangle_{\text{h},1} &= -\langle I_{34} \rangle_{\text{h},1} \\ &= -\frac{g_0}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) - \cos(\tilde{\omega}_3 t)] \\ &\times \left[\cos \frac{\Phi_{\text{S}}}{4} \sin(\tilde{\omega}_0 t) - \sin \frac{\Phi_{\text{S}}}{4} \sin(\tilde{\omega}_3 t) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

对比单粒子态波函数 (7) 式与单空穴态波函数 (11) 式, 容易发现波函数在各个基矢上的占据概率满足关系 $P_j^{\text{h}} = P_j$, 其中, $P_j^{\text{h}} = |\psi_j^{\text{h}}(t)|^2$. 此外, 对于平均粒子流 (8) 式和 (9) 式与平均空穴流 (12) 式和 (13) 式, 可得 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{\text{h},1} = \langle I_{j,j+1} \rangle_1$. 采取与图 3 相同的参数, $g_0/(2\pi) = 4 \text{ MHz}$, $\gamma_j/(2\pi) = 0.05 \text{ MHz}$, $\Gamma_j/(2\pi) = 0.1 \text{ MHz}$, 图 4 给出了 P_j^{h} 以及 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{\text{h},1}$ 的演化曲线. 可见, 无论是单粒子态或单空穴态, 对应格点处的占据概率, 以及平均 (粒子或空穴) 流具有相同的含时演化曲线, 因此, 其具体细节的描述可参考第 4 节. 但这并不意味着单粒子态和单空穴态具有完全等价的演化行为, 这是因为波函数不一定完全等价, 例如通过仔细观察可发现, 虽然 $\psi_1^{\text{h}} \equiv \psi_1$, $\psi_3^{\text{h}} \equiv \psi_3$, 但是, 当且仅当 $\Phi_{\text{S}} = 4n\pi$ (n 为整数) 时, $\psi_2^{\text{h}} \equiv \psi_2$, $\psi_4^{\text{h}} \equiv \psi_4$, 否则, $\psi_2^{\text{h}} \neq \psi_2$, $\psi_4^{\text{h}} \neq \psi_4$. 可以验证, 条件 $\Phi_{\text{S}} = 4n\pi$ (n 为整数) 意味着哈密顿量满足空间对称 $H_{\text{eff}}|_{Q_2 \leftrightarrow Q_4} = H_{\text{eff}}$ 以及时间反演对称 $TH_{\text{eff}}T^{-1} = H_{\text{eff}}$.

下文从空间对称性分析单粒子态与单空穴态具有相同格点占据概率以及平均 (粒子或空穴) 流的原因. 由于单粒子的上升 (下降) 算符等价于空穴的下降 (上升) 算符, 据前所述, 将空穴基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle_{\text{h}}$ 与粒子基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle$ 进行一一映射, 且不考虑它们的区别. 这样, 有效磁通 Φ_{S} 下单空穴态 $|1\rangle_{\text{h}}$ 的运动可以等价于有效磁通 $-\Phi_{\text{S}}$ 下单粒子态 $|1\rangle$ 的运动, 即

$$|\psi^{\text{h}}(t)\rangle_{\Phi_{\text{S}}} = |\psi(t)\rangle_{-\Phi_{\text{S}}}, \quad (14)$$

$$H_{\text{eff}}^{\text{h}}|_{\Phi_{\text{S}}} = H_{\text{eff}}|_{-\Phi_{\text{S}}}, \quad (15)$$

$$I_{j,j+1}^{\text{h}}|_{\Phi_{\text{S}}} = I_{j,j+1}|_{-\Phi_{\text{S}}}. \quad (16)$$

对于有效磁通 Φ_{S} 下单粒子态 $|1\rangle$ 的运动行为, 其含时波函数可以记为 $|\psi(t)\rangle_{\Phi_{\text{S}}} = \sum_{j=1}^4 \psi_j(t) |j\rangle$. 现在, 将此体系沿 Q_1 — Q_3 连线旋转角度 π , 在原始坐标系下观测, 即可得到有效磁通 $-\Phi_{\text{S}}$ 下的单粒子态的运动. 旋转之后的波函数 (算符) 也可以通过将旋转之前的波函数 (算符) 表达式中关于 Q_2 和 Q_4 的量相互交换得到. 可以验证, 有效磁通 $\pm\Phi_{\text{S}}$ 下的有

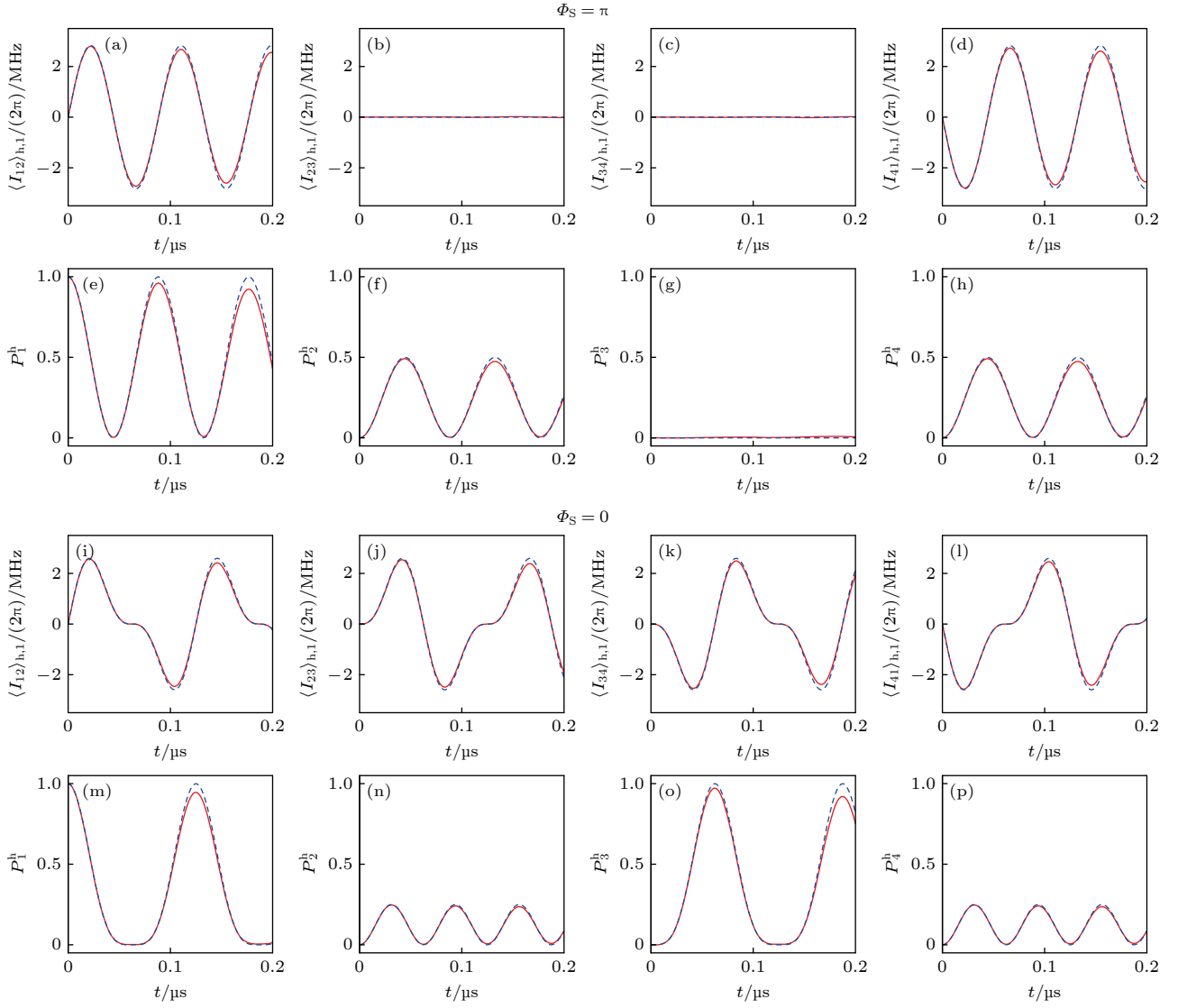


图 4 当有效磁通取 $\Phi_S = \pi$ ($\Phi_S = 0$) 时, 单空穴态 $|1\rangle_h$ 演化时间 t 后 (a)–(d) [(i)–(l)] 比特 $Q_j - Q_{j+1}$ 之间的平均空穴流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,1}$ 与 (e)–(h) [(m)–(p)] 量子态 $|j\rangle_h$ 上的占据概率 P_j^h 的变化曲线. 这里, 蓝色虚线 (红色实线) 指排除 (包含) 环境影响, 此外, 取裸耦合强度 $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, Q_j 弛豫速率 $\gamma_j/(2\pi) \equiv 0.05$ MHz, Q_j 退相速率 $\Gamma_j/(2\pi) \equiv 0.1$ MHz

Fig. 4. Variation curves of both the (a)–(d) [(i)–(l)] average $Q_j - Q_{j+1}$ hole current $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,1}$ and (e)–(h) [(m)–(p)] occupation probability P_j^h on the quantum state $|j\rangle_h$ for the effective magnetic flux taking $\Phi_S = \pi$ ($\Phi_S = 0$) after the time t for which the single-hole state $|1\rangle_h$ evolves. Here, the dashed blue (solid red) curves represent the environment influence is excluded (included). Additionally, we specify the bare coupling strength $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, Q_j relaxation rate $\gamma_j/(2\pi) \equiv 0.05$ MHz, and Q_j dephasing rate $\Gamma_j/(2\pi) \equiv 0.1$ MHz.

效哈密顿量, 粒子流算符, 以及含时波函数分别满足:

$$|\psi(t)\rangle_{-\Phi_S} = |\psi(t)\rangle_{\Phi_S, Q_2 \leftrightarrow Q_4}, \quad (17)$$

$$H_{\text{eff}}|_{-\Phi_S} = H_{\text{eff}}|_{\Phi_S, Q_2 \leftrightarrow Q_4}, \quad (18)$$

$$I_{j,j+1}|_{-\Phi_S} = I_{j,j+1}|_{\Phi_S, Q_2 \leftrightarrow Q_4}. \quad (19)$$

通过对比 (14)–(16) 式与 (17)–(19) 式, 可以建立 Φ_S 下单空穴态与单粒子的联系, 这时将去掉下标 Φ_S . 1) 对于波函数, $|\psi^h(t)\rangle = \psi_1(t)|1\rangle_h +$

$\psi_4(t)|2\rangle_h + \psi_3(t)|3\rangle_h + \psi_2(t)|4\rangle_h$. 如果 $\Phi_S = 4n\pi$, 则 $\psi_2(t) \equiv \psi_4(t)$, $|\psi^h(t)\rangle \equiv |\psi(t)\rangle$; 否则, 由于 $\psi_2(t) \neq \psi_4(t)$, $|\psi^h(t)\rangle \neq |\psi(t)\rangle$. 前者导致了空间对称性 $H_{\text{eff}}|_{Q_2 \leftrightarrow Q_4} = H_{\text{eff}}$, 这更意味着 $H_{\text{eff}}^h = H_{\text{eff}}$. 又因为初始时刻波函数 $|\psi^h(0)\rangle = |0\rangle_h$ 与 $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ 可认为相等, 因此, 单空穴与单粒子经历相等哈密顿量演化后的波函数一定一致. 2) 对于平均 (粒子或空穴) 流, 有 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,1} = \langle I_{j,j+1} \rangle_{1|Q_2 \leftrightarrow Q_4}$ (如 $\langle I_{12} \rangle_{h,1} = \langle I_{14} \rangle_{1|}$), 又由于 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{1|Q_2 \leftrightarrow Q_4} = \langle I_{j,j+1} \rangle_1$ (如 $\langle I_{14} \rangle_1 =$

$\langle I_{12} \rangle_1$), 可得 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,1} = \langle I_{j,j+1} \rangle_1$. 3) 对于占据概率, $P_j^h = P_j|_{Q_2 \leftrightarrow Q_4}$. 由于 $P_j|_{Q_2 \leftrightarrow Q_4} = P_j$ (如 $P_2 = P_4$), 因此, 可得 $P_j^h = P_j$. 这就从空间对称性分析了单粒子态和单空穴态含时波函数与平均 (粒子或空穴) 流占据概率方面的异同.

从时间反演对称性这个角度来分析单粒子态与单空穴态具有相似演化行为的原因. 这里把空穴基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle_h$ 与粒子基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle$ 进行一一映射, 且不考虑它们的区别. 进一步对体系有效哈密顿量的粒子-空穴操作, 使得有效磁通 Φ_S 下的单空穴哈密顿量等价于对有效磁通 Φ_S 下的单粒子哈密顿量做时间反演. 这样, 单空穴态所对应的含时波函数 $|\psi^h(t)\rangle$ 等价于将单粒子态对应的含时波函数 $|\psi(t)\rangle$ 的各个系数 $\psi_j(t)$ 中的 t 替换为 $-t$ 并取共轭, 即

$$|\psi^h(t)\rangle = |\psi^*(-t)\rangle, \quad (20)$$

$$H_{\text{eff}}^h = T H_{\text{eff}} T^{-1}, \quad (21)$$

$$I_{j,j+1}^h = -T I_{j,j+1} T^{-1}. \quad (22)$$

其中 T 为时间反演算符, 对于有效磁通 Φ_S 下单粒子态 $|1\rangle$ 的运动行为, 其含时波函数可以记为 $|\psi(t)\rangle_{\Phi_S} = \sum_{j=1}^4 \psi_j(t)|j\rangle$.

通过对比 (20)–(22) 式, (7)–(9) 式和 (11)–(13) 式. 1) 对于波函数, $|\psi^h(t)\rangle = \psi_1^*(-t)|1\rangle_h + \psi_2^*(-t)|2\rangle_h + \psi_3^*(-t)|3\rangle_h + \psi_4^*(-t)|4\rangle_h$, 其中 $\psi_1^*(-t) \equiv \psi_1(t)$, $\psi_3^*(-t) \equiv \psi_3(t)$, 如果 $\Phi_S = 4n\pi$, $\psi_2^*(-t) \equiv \psi_2(t)$, $\psi_4^*(-t) \equiv \psi_4(t)$, $|\psi^h(t)\rangle \equiv |\psi(t)\rangle$; 否则, 由于 $\psi_2^*(-t) \neq \psi_2(t)$, $\psi_4^*(-t) \neq \psi_4(t)$, 使得 $|\psi^h(t)\rangle \neq |\psi(t)\rangle$. 可以看出前者满足时间反演对称性 $H_{\text{eff}}^h = T H_{\text{eff}} T^{-1} = H_{\text{eff}}$, 即单空穴与单粒子的哈密顿量等价. 又因为初始时刻波函数 $|\psi^h(0)\rangle = |0\rangle_h$ 与 $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ 可认为相等, 因此, 单空穴与单粒子经历相等哈密顿量演化后的波函数一定一致. 这里定义相近度 $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle|$ 表示单空穴态含时波函数 $|\psi^h(t)\rangle$ 与单粒子态含时波函数 $|\psi(t)\rangle$ 之间的区别, 并给出相近度表达式 $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle| = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\tilde{\omega}_3 t)$. 当有效磁通 Φ_S 满足条件 $\Phi_S = 4n\pi$ 时, 相近度 $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle|$ 始终为 1, 如图 5 中红色实线所示, 可以认为单粒子态与单空穴态的含时波函数相等, 不存在区别. 当不满足条件时则发生了时间反演破缺, 此时单空穴与单粒子的哈密顿量不等价, 虽然初始波函数相同, 但是单空穴态含时波函数 $|\psi^h(t)\rangle$

与单粒子态含时波函数 $|\psi(t)\rangle$ 会随时间产生区别, 如图 5 中蓝色点段线和绿色虚线所示, 由相近度表达式得知变化的频率为 $2\tilde{\omega}_3$, 其中 $\tilde{\omega}_3 = 2g_0 \sin \frac{\Phi_S}{4}$, 当有效磁通 $\Phi_S = \pi/4$ 时, 与之对应的周期近似为 $0.32 \mu\text{s}$, 而当有效磁通 $\Phi_S = \pi/2$ 时, 与之对应的周期近似为 $0.163 \mu\text{s}$, 这个在图 5 中不难看出. 还有在相同的较小时刻且有效磁通 Φ_S 处于 $4n\pi$ 至 $4n\pi + 2\pi$ 区间, 相近度 $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle|$ 随有效磁通 Φ_S 增大而减小. 2) 对于平均 (粒子或空穴) 流, 有

$$\begin{aligned} \langle I_{j,j+1}(t) \rangle_{h,1} &= T \langle I_{j,j+1}(t) \rangle_{h,1} T^{-1} \\ &= T \langle \psi^h(t) | T^{-1} T I_{j,j+1}^h T^{-1} T | \psi^h(t) \rangle T^{-1} \\ &= -\langle \psi(-t) | I_{j,j+1} | \psi(-t) \rangle_1 \\ &= -\langle I_{j,j+1}(-t) \rangle_1 = \langle I_{j,j+1}(t) \rangle_1, \end{aligned}$$

因此, 可得 $\langle I_{j,j+1}(t) \rangle_{h,1} = \langle I_{j,j+1}(t) \rangle_1$ (如 $\langle I_{12}(t) \rangle_{h,1} = \langle I_{12}(t) \rangle_1$). 3) 对于占据概率, $P_j^h = |\psi_j^*(-t)|^2$, 又因为 $|\psi_j^*(-t)|^2 = |\psi_j(t)|^2$, 因此, 无论是满足时间反演还是在时间反演破缺条件下, $P_j^h = P_j$. 以上就是从时间反演对称性分析了单粒子态和单空穴态含时波函数与平均 (粒子或空穴) 流占据概率方面的异同. 最后可认为如果采用量子层析测量^[39]的方法就能够知道单粒子态与单空穴态的区别.

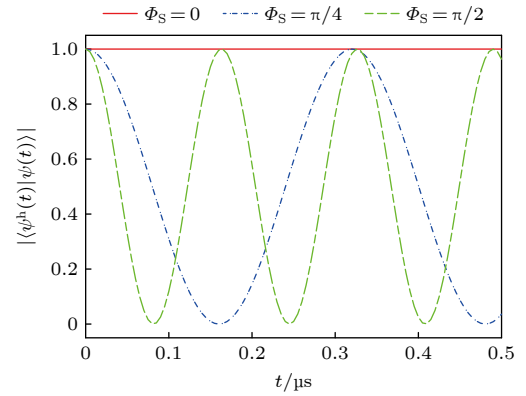


图 5 当有效磁通取 $\Phi_S = 0$ (红色实线), $\Phi_S = \pi/4$ (蓝点段线) 或 $\Phi_S = \pi/2$ (绿色虚线) 时, 演化时间 t 后单空穴态含时波函数 $|\psi^h(t)\rangle$ 与单粒子态含时波函数 $|\psi(t)\rangle$ 的相近度 $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle|$ 的变化. 这里取裸耦合强度 $g_0/(2\pi) = 4 \text{ MHz}$.
Fig. 5. Variation curves of the similarity degree $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle|$ between the time-dependent wave function $|\psi^h(t)\rangle$ in the single hole state and the time-dependent wave function $|\psi(t)\rangle$ in the single particle state for the effective magnetic flux taking $\Phi_S = 0$ (solid red), $\Phi_S = \pi/4$ (dash-dotted blue) or $\Phi_S = \pi/2$ (dashed green) after an evolution time t . Here, we specify the bare coupling strength $g_0/(2\pi) = 4 \text{ MHz}$.

6 粒子流和空穴流的测量方法

对于前面所提到的粒子流可以通过测量得到, 下面来叙述一下测量方法, 此方法借鉴于文献 [31]. 首先需要将现有的四量子比特方格结构进行解耦, 得到相邻两个量子比特 j 与 $j+1$ 之间的哈密顿量 $H_{j,j+1} = \hbar g_0 \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \text{H.c.}$, 由于其会受到环境因素 (弛豫速率 γ_j 与退相速率 Γ_j) 的影响, 因此 j 与 $j+1$ 两个量子比特间的相互作用可以使用以下林德布拉德主方程来描述:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{j,j+1} = & \frac{[H_{j,j+1}, \rho_{j,j+1}]}{i\hbar} + \mathcal{L}_j [\rho_{j,j+1}] \\ & + \mathcal{L}_{j+1} [\rho_{j,j+1}] + \mathcal{L}_{j+2} [\rho_{j,j+1}] \\ & + \mathcal{L}_{j-1} [\rho_{j,j+1}]. \end{aligned}$$

这里, $\mathcal{L}_j [\rho_{j,j+1}]$ 表示林德布拉德耗散项:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j [\rho_{j,j+1}] = & -\gamma_j \langle j | \rho_{j,j+1} | j \rangle \sigma_{jj} + \gamma_j \langle j | \rho_{j,j+1} | j \rangle \sigma_{00} \\ & - \frac{\Gamma_j}{2} \langle j | \rho_{j,j+1} | 0 \rangle \sigma_{j,0} - \frac{\Gamma_j}{2} \langle 0 | \rho_{j,j+1} | j \rangle \sigma_{0,j}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中, 投影算符为

$$\sigma_{jj} = |j\rangle\langle j|, \sigma_{00} = |0\rangle\langle 0|, \sigma_{j,0} = |j\rangle\langle 0|, \sigma_{0,j} = |0\rangle\langle j|.$$

在满足强耦合 $g_0 \gg \gamma_j, \Gamma_j$ 条件时, 可以定义粒子差 $P_{j,j+1}(t) = \langle j+1 | \rho_{j,j+1} | j+1 \rangle - \langle j | \rho_{j,j+1} | j \rangle$, 并且可以由林德布拉德主方程推导出:

$$\begin{aligned} P_{j,j+1}(t) = & e^{-\bar{\Gamma}t} \\ & \times \left[P_{j,j+1}(0) \cos(g_0 t) + \frac{2\langle I_{j,j+1} \rangle}{g_0} \sin(g_0 t) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

$\bar{\Gamma} = (\gamma_j + \gamma_{j+1} + \Gamma_j + \Gamma_{j+1})/4$, $I_{j,j+1}$ 表示由 j 位置量子比特流向 $j+1$ 位置量子比特的粒子流. 同理, 也定义空穴差表达式为 $P_{j,j+1}^h(t) = \hbar \langle j+1 | \rho_{j,j+1}^h | j+1 \rangle_h - \hbar \langle j | \rho_{j,j+1}^h | j \rangle_h$, 由林德布拉德主方程推导出:

$$\begin{aligned} P_{j,j+1}^h(t) = & e^{-\tilde{\Gamma}t} \\ & \times \left[P_{j,j+1}^h(0) \cos(g_0 t) + \frac{2\langle I_{j,j+1}^h \rangle}{g_0} \sin(g_0 t) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tilde{\Gamma} = (\gamma_j + \gamma_{j+1} + 2\gamma_{j+2} + 2\gamma_{j-1} + \Gamma_j + \Gamma_{j+1})/4,$$

其中, $\langle I_{j,j+1}^h \rangle$ 表示由 j 位置量子比特流向 $j+1$ 位

置量子比特的空穴流. 最终需要将仿真图像与实验数据进行拟合才可以得到粒子流 $\langle I_{j,j+1} \rangle$ 和空穴流 $\langle I_{j,j+1}^h \rangle$.

将空穴基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle_h$ 与粒子基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle$ 进行了一一映射, 对比 (24) 式与 (25) 式, 最大的差异主要来自于参数 $\bar{\Gamma}$ 和 $\tilde{\Gamma}$. 假设单粒子 (空穴) 态在 $|j\rangle (|j\rangle_h)$ 与 $|j+1\rangle (|j+1\rangle_h)$ 间演化, 其中单粒子态下林德布拉德耗散项 $\mathcal{L}_{j-1} [\rho_{j,j+1}]$ 和 $\mathcal{L}_{j+2} [\rho_{j,j+1}]$ 没有对林德布拉德主方程作出贡献, 而在考虑单空穴态时, 单空穴态下林德布拉德耗散项 $\mathcal{L}_{j-1} [\rho_{j,j+1}^h]$ 和 $\mathcal{L}_{j+2} [\rho_{j,j+1}^h]$ 对林德布拉德主方程作出贡献, 这个原因导致了参数 $\bar{\Gamma}$ 和 $\tilde{\Gamma}$ 的不同.

7 结 论

本文基于电感型耦合器调制比特间耦合产生人造规范势 (有效磁通), 且每个比特受独立的经典场驱动的四传输子量子比特正方形格点体系, 研究了单粒子本征态、单空穴本征态、单粒子态以及单空穴态在格点环路存在有效磁通时的输运性质. 经过理论计算得到单粒子本征态 $|k_n\rangle$ 与单空穴本征态 $|k_n\rangle_h$ 具有相同的本征能谱, 并且相同能量下, 单粒子本征态的平均粒子流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n}$ 与单空穴本征态的平均空穴流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,k_n}$ 都是有效磁通 Φ_S 的正弦函数, 二者的数值在相同有效磁通时互为相反数. 当初态为只占据一个格点的单粒子 (空穴) 时, 如果系统时间反演对称 (有效磁通 $\Phi_S = 4n\pi$, n 为整数), 单粒子与单空穴的含时波函数各分量 $\psi_j(t)$ 与 $\psi_j^h(t)$ 相等, 否则系统时间反演破缺, 单粒子与单空穴的含时波函数不相等. 进一步分析证明, 得到上述计算结果是由于对体系哈密顿量的粒子-空穴操作等价于对其做时间反演. 除此以外, 还发现单粒子态与单空穴态的演化行为比较相似, 存在两种特殊的情况: 1) 当有效磁通 $\Phi_S = \pi$ 时, 单粒子 (空穴) 只在初始比特与两个相邻比特之间输运, 即单粒子态 $|j\rangle$ (单空穴态 $|j\rangle_h$) 同时演化到单粒子态 $|j+1\rangle$ (单空穴态 $|j+1\rangle_h$) 和单粒子态 $|j-1\rangle$ (单空穴态 $|j-1\rangle_h$), 然后再同时反向演化; 2) 当有效磁通 $\Phi_S = 0$ 时, 单粒子 (空穴) 由初始比特通过两个相邻比特输运到初始比特的对角量子比特, 然后再反向输运, 即单粒子态 $|j\rangle$ (单空穴态 $|j\rangle_h$) 先同时演化到单粒子态 $|j+1\rangle$ (单空穴态 $|j+1\rangle_h$) 和单粒子态 $|j-1\rangle$ (单空穴态 $|j-1\rangle_h$), 再演化到单粒子态

$|j+2\rangle$ (单空穴态 $|j+2\rangle_h$), 随时间推移再次反向演化回到初始单粒子 (空穴) 态. 并且无论有效磁通 Φ_S 取何值时, 平均 (粒子或空穴) 流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_1$ 和 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,1}$ 相等, 以及单粒子与单空穴的占据概率 P_j 和 P_j^h 也相等. 另外, 对体系哈密顿量的粒子-空穴操作也等价于对体系做空间旋转, 在考虑单粒子与单空穴为初始态, 有效磁通 $\Phi_S = 4n\pi$ (n 为整数) 时, 经理论计算, 单粒子含时波函数分量 $\psi_2(t)$ 与 $\psi_4(t)$ 相等, 使得单粒子与单空穴含时波函数相等; 否则不相等. 对于平均 (粒子或空穴) 流, 以及单粒子与单空穴的占据概率得到的结论与时间反演情况一致. 本文也介绍了单粒子本征态、单空穴本征态、单粒子态以及单空穴态理想条件下制备流程, 以及粒子流与空穴流的测量方案, 希望对今后的实验中提供一些帮助. 本文中使用的量子体系可以作为二维正方格点体系的一个基本单元, 对今后的二维体系量子模拟, 特别是整数量子霍尔效应的研究中具有一定的参考意义.

参考文献

- [1] Feynman R P 1982 *Int. J. Theor. Phys.* **21** 467
- [2] Georgescu I M, Ashhab S, Nori F 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 153
- [3] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. A* **392** 45
- [4] Hatsugai Y 1993 *Phys. Rev. B* **48** 11851
- [5] Tsui D C, Stormer H L, Gossard A C 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 1559
- [6] Laughlin R B 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1395
- [7] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [8] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [9] Bernevig B A, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 106802
- [10] König M, Wiedmann S, Brune C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
- [11] Hsieh D, Qian D, Wray L, Xia Y, Hor Y S, Cava R J, Hasan M Z 2008 *Nature* **452** 970
- [12] Chiu C K, Teo J C Y, Schnyder A P, Ryu S 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035005
- [13] Goldman N, Juzeliunas G, Oehberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [14] Lin Y J, Compton R L, Perry A R, Phillips W D, Porto J V, Spielman I B 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 130401
- [15] Lin Y J, Compton R L, Jimenez-Garcia K, Porto J V, Spielman I B 2009 *Nature* **462** 628
- [16] Lin Y J, Compton R L, Jimenez-Garcia K, Phillips W D, Porto J V, Spielman I B 2011 *Nat. Phys.* **7** 531
- [17] Aidelsburger M, Atala M, Nascimbene S, Trotzky S, Chen Y A, Bloch I 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 255301
- [18] Aidelsburger M, Atala M, Lohse M, Barreiro J T, Paredes B, Bloch I 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185301
- [19] Krantz P, Kjaergaard M, Yan F, Orlando T P, Gustavsson S, Oliver W D 2019 *Appl. Phys. Rev.* **6** 021318
- [20] Gu X, Kockum A F, Miranowicz A, Liu Y X, Nori F 2017 *Phys. Rep.* **718** 1
- [21] Blais A, Grimsmo A L, Girvin S M, Wallraff A 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 025005
- [22] Nakamura Y, Pashkin Y A, Tsai J S 1999 *Nature* **398** 786
- [23] Leek P J, Fink J M, Blais A, Bianchetti R, Göppl M, Gambetta J M, Schuster D I, Frunzio L, Schoelkopf R J, Wallraff A 2007 *Science* **318** 1889
- [24] Möttönen M, Vartiainen J J, Pekola J P 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 177201
- [25] Neeley M, Ansmann M, Bialczak R C, Hofheinz M, Lucero E, O'Connell A D, Sank D, Wang H, Wenner J, Cleland A N, Geller M R, Martinis J M 2009 *Science* **325** 722
- [26] Schroer M D, Kolodrubetz M H, Kindel W F, Sandberg M, Gao J, Vissers M R, Pappas D P, Polkovnikov A, Lehnert K W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 050402
- [27] Roushan P, Neill C, Chen Y, et al. 2014 *Nature* **515** 241
- [28] Barends R, Kelly J, Megrant A, et al. 2014 *Nature* **508** 500
- [29] Tangpanitanon J, Bastidas V M, Al-Assam S, Roushan P, Jaksch D, Angelakis D G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 213603
- [30] Alaeian H, Chang C W S, Moghaddam M V, Wilson C M, Solano E, Rico E 2019 *Phys. Rev. A* **99** 053834
- [31] Zhao Y J, Xu X W, Wang H, Liu Y X, Liu W M 2020 *Phys. Rev. A* **102** 053722
- [32] Koch J, Houck A A, Hur K L, Girvin S M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043811
- [33] Yang Z H, Wang Y P, Xue Z Y, Yang W L, Hu Y, Gao J H, Wu Y 2016 *Phys. Rev. A* **93** 062319
- [34] Roushan P, Neill C, Megrant A, et al. 2017 *Nat. Phys.* **13** 146
- [35] Chen Y, Neill C, Roushan P, Leung N, Fang M, Barends R, Kelly J, Campbell B, Chen Z, Chiaro B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 220502
- [36] Geller M R, Donate E, Chen Y, Neill C, Roushan P, Martinis J M 2015 *Phys. Rev. A* **92** 012320
- [37] Berkovits R 2013 *Phys. Rev. B* **87** 075141
- [38] Luttinger J M 1951 *Phys. Rev.* **84** 814
- [39] Ahmed S, Muoz C S, Nori F, Kockum A F 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 140502

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Quantum state transport in a square-lattice superconducting qubit circuit under gauge potential*

Zhao Yan-Jun¹⁾ Tan Ning¹⁾ Wang Yu-Qi¹⁾ Zheng Ya-Rui²⁾
Wang Hui^{3)†} Liu Wu-Ming^{4)5)‡}

1) (*Key Laboratory of Opto-electronic Technology, Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China*)

2) (*Quantum Technology (Shenzhen) Co., Ltd., Shenzhen 518033, China*)

3) (*Inspur Artificial Intelligence Research Institute, Jinan 250011, China*)

4) (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

5) (*College of Physics, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(Received 11 December 2022; revised manuscript received 23 March 2023)

Abstract

In this paper, we study the transport properties of quantum states in the square-lattice quantum bit model by using inductive couplers to generate the artificial gauge potential (effective magnetic flux). It is found by theoretical calculation that the eigenstates of single particle and single hole have the same eigen energy spectrum, and the average particle and hole currents, sinusoidally modulated by the effective magnetic flux, are opposite to each other with respect to the same eigen energy. For an initial single-particle or single-hole state where only one lattice site is occupied, if the time-inversion symmetry is preserved (the effective magnetic flux is an integral multiple of 4π), the components of the time-dependent wave functions of the single particle and the single hole are equal, otherwise they are not equal. The analysis demonstrates that the above calculation results are due to the fact that the particle-hole operation for the system Hamiltonian is equivalent to the time inversion. In addition, it is found that when the effective magnetic flux is π , a single particle or a single hole is only transported between the initial bit and two adjacent bits, and when the effective magnetic flux is 0, a single particle or a single hole is transported to the diagonal bit through two adjacent bits, and then transported in reverse. Regardless of the value of effective magnetic flux, both the single-particle and single-hole states share the same average (particle or hole) current and lattice site occupation probability.

Keywords: gauge potential, quantum state transport, quantum state preparation

PACS: 03.67.Ac, 03.67.-a

DOI: 10.7498/aps.72.20222349

* Project supported by the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 4222064), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11904013, 61835013, 12234012), the National Key Research and Development Plan of China (Grant Nos. 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1402100), and the National Manned Space Engineering Space Application System Project.

† Corresponding author. E-mail: wanghui@iphy.ac.cn

‡ Corresponding author. E-mail: wliu@iphy.ac.cn

多能级系统中的动力学解耦

张治达 易康源 陈远珍 燕飞

Dynamic decoupling for multi-level systems

Zhang Zhi-Da Yi Kang-Yuan Chen Yuan-Zhen Yan Fei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 100305 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222398

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222398>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一类多能级Rosen-Zener模型的精确解

Exact solution to a kind of multi-level Rosen-Zener models

物理学报. 2019, 68(13): 133201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190353>

电磁场中施主中心量子点内磁极化子态寿命与qubit退相干

Magnetopolaron-state lifetime and qubit decoherence in donor-center quantum dots with the electromagnetic field

物理学报. 2020, 69(14): 147802 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200242>

相干时间超过10 min的单离子量子比特

Single-ion qubit with coherence time exceeding 10 minutes

物理学报. 2019, 68(3): 030306 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181729>

周期驱动的二能级系统中的准宇称-时间对称动力学

Quasi-parity-time symmetric dynamics in periodically driven two-level non-Hermitian system

物理学报. 2022, 71(7): 074207 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220270>

奇异谱分析用于提升双光梳激光测距精度

Singular spectrum analysis for precision improvement in dual-comb laser ranging

物理学报. 2018, 67(1): 010601 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171922>

HgTe/CdTe量子阱中自旋拓扑态的退相干效应

Dephasing effect of quantum spin topological states in HgTe/CdTe quantum well

物理学报. 2019, 68(22): 227301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191072>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

多能级系统中的动力学解耦

张治达^{1)2)3)4)#} 易康源^{1)2)3)4)#} 陈远珍^{1)2)3)4)†} 燕飞^{1)2)3)‡}

1) (南方科技大学, 深圳量子科学与工程研究院, 深圳 518055)

2) (国际量子研究院, 深圳 518055)

3) (南方科技大学, 广东省量子科学与工程重点实验室, 深圳 518055)

4) (南方科技大学物理系, 深圳 518055)

(2022 年 12 月 16 日收到; 2023 年 3 月 2 日收到修改稿)

动力学解耦技术能有效地抑制由低频环境噪声导致的退相干过程, 因此在量子信息领域获得了广泛的应用. 传统的动力学解耦方案通过对简单的二能级体系, 如量子比特, 施加特定的 π 脉冲序列来实现解耦效果. 随着量子计算研发的深入, 对于像超导量子比特这种天然的多能级系统, 研究者不再局限于二能级子空间, 而是提出和实现了一系列基于多能级体系的量子调控手段和量子算法. 目前对于如何抑制这些体系中的退相干尚缺乏深入研究. 本文利用较易在实验中实现的紧邻能级间的 π 脉冲, 构建了多种针对多能级系统的动力学解耦序列. 结果表明这些序列可以很好地消除准静态噪声的影响. 此外, 通过计算滤波函数, 还分析了这些序列及其拓展方案对于高斯噪声的抑制作用, 并结合控制函数对滤波效果给出了物理解释. 研究结果对于多能级体系中的相关噪声研究, 包括噪声功率谱密度和关联性的刻画以及退相干的抑制等, 均具有启发意义.

关键词: 多能级系统, 噪声, 退相干, 动力学解耦, 滤波函数**PACS:** 03.67.Lx, 03.67.Pp, 85.25.-j**DOI:** 10.7498/aps.72.20222398

1 引言

量子计算使用量子叠加和量子纠缠等资源进行计算, 有望提供经典计算难以企及的算力, 解决社会生活中一些难以求解的问题. 对于任何量子系统, 由环境噪声造成的退相干过程都是不可避免的, 它使得量子态中存储的信息会逐渐流失到环境中去, 从而导致体系量子性的消失. 信息流失越多, 错误发生的概率也越大, 因此有效执行量子算法 (包括纠错算法) 所需的容错阈值将确定算法执行时间的上限. 过快的退相干是实现通用量子计算的瓶颈之一, 因此如何抑制系统的退相干是量子计算发展过程中非常重要的问题. 在各种形式的环境噪

声中, 低频噪声的主要影响体现在对量子比特频率产生扰动, 从而导致比特的相位退相干现象, 物理上可以用相位相干时间 T_2 表征这种影响^[1]. 由于低频噪声的特征时间远大于相位退相干时间, 所以其对比特频率的扰动具有准静态特性. 对于这样的准静态噪声, 动力学解耦是一类行之有效的抑制其影响的技术^[2-4]. 其中最常见的是 Hahn^[2] 提出的自旋回波 (spin echo) 方法, 以及在此基础上由 Carr, Purcell^[5] 和 Meiboom, Gill 等^[6] 拓展得到的, 可以修正更高阶噪声的 CPMG 方法. 通过对动力学解耦序列进行嵌套得到的所谓级联动力学解耦 (concatenated dynamical decoupling, CDD) 方法, 理论上可以修正任意阶数的噪声, 但代价是消耗的资源指数上升^[7-9]. 为了克服这一问题, Uhrig^[10-13]

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: chenyz@sustech.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: yanf7@sustech.edu.cn

提出了新的动力学解耦 (Uhrig's dynamical decoupling, UDD) 方法, 只用 n 个脉冲即可实现对噪声的第 n 阶修正.

实验方面, Bylander 等^[14]首先在超导量子线路上用动力学解耦提升了比特的相干时间, 并完成了对噪声的频谱分析, 后来他们又在实验上实现了针对连续参数驱动过程的旋转回波 (rotary echo) 方法^[15]. 此后动力学解耦方法被广泛应用于超导量子计算和量子模拟的相关实验, 包括在不同比特的能级之间的动力学解耦也已经实现^[16]. 值得一提的是, 最近 Google 在量子纠错方向上的突破性工作^[17]中也使用了 CPMG 动力学解耦方案.

除了利用动力学解耦延长比特寿命, 节省量子计算所需的时间, 如何通过更加有效地利用硬件资源来提高算力也是非常关键的问题. 对于像超导量子比特这类天然就是多能级体系的情形, 一个自然的想法是将其高能级也利用起来进行量子信息编码, 从而获得比只使用二能级情形更大的可用计算空间^[18–20]. 尤其是作为当前主流超导量子比特类型之一的 transmon 比特, 它是一个弱非谐系统, 因此作为二能级比特使用时, 本来也需要考虑如何抑制高能级的影响, 例如从计算空间向高能级的泄露等. 所以, 如果能够在其上实现更好的多能级操控, 则不但可以扩展计算空间的维度, 提升硬件资源的使用效率^[21–24], 由此发展的技术也可以帮助优化现有的基于二能级的操控方案.

近年来研究者沿着这一思路取得了一系列实验进展. 例如, 通过利用高能级来替代辅助比特, 大幅减少门线路所需的比特数量, 研究人员实现了三能级量子与门^[25]. 此外, 三能级控制相位门具有更高的效率和更好的可扩展性^[26]; 基于三能级体系的量子模拟则可以展示更多的演化模式和预测更多的物理性质^[27]. 在量子精密测量^[28]和量子通讯^[29]等领域, 多能级体系也存在一定的优势.

当然, 使用更多的能级进行量子信息处理, 也意味着需要面对更为复杂的退相干过程和更高的错误率, 因此多能级体系中退相干的抑制是一个更具有挑战性的难题. 相较于针对二能级体系丰富的动力学解耦方案, 目前还较少有面向多能级系统的相关技术. 现有的一些理论研究都存在局限性, 例如最近提出的通用连续动力学解耦方案 (general continuous dynamical decoupling, GCDD)^[30], 它使用连续波形, 原则上可以实现具有动力学解耦效果的任意能级的门操作, 但是该方法的实验实现具

有很大难度. 另外, 将 UDD 应用于 N 能级体系的方案^[31]只能保护特定的量子态, 且同样具有较高的实验难度.

本文提出了一种针对 N 能级体系中量子操作的动力学解耦方案. 这个方案只需要使用相邻能级间的 π 脉冲. 首先考虑了准静态噪声, 求得具有噪声解耦性质的脉冲序列结构; 然后研究这些序列对于更普遍的高斯噪声的作用, 通过计算得到了高斯噪声情形中不同序列对应的滤波函数, 并对滤波函数做出了物理解释; 最后研究了这些序列的可扩展性.

2 多能级体系动力学解耦序列的构造

2.1 多能级解耦序列结构

考虑一个 N 能级体系, 其能级间距受到准静态噪声影响而存在涨落. 在远小于准静态噪声的特征时间的尺度上, 可以近似认为体系的能级间距的变化是一些定值, 因此其哈密顿量可以写成如下形式:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \delta_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & \delta_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 δ_i 代表第 i 个激发态和基态之间能量差的准静态涨落值. 这种准静态噪声会造成体系在演化时, 各能量本征态积累不同但均正比于时间的额外相位. 因此, 为了消除其影响, 可以基于 spin echo 方法的原理来构造脉冲序列. 一种可行的方法是只使用紧邻能级之间的 π 脉冲来构造序列. 对于一个 N 能级体系, 存在 $N-1$ 个这样的 π 脉冲: $\pi_{01}, \pi_{12}, \dots, \pi_{(N-1)N}$.

考虑如下的序列:

$$\left(\xrightarrow{\tau_1} \Omega_1 \xrightarrow{\tau_2} \Omega_2 \dots \xrightarrow{\tau_{N-1}} \Omega_{N-1} \xrightarrow{\tau_N} \right)^N, \quad (2)$$

其中 Ω_i 代表从 $\pi_{01}, \pi_{12}, \dots, \pi_{(N-1)N}$ 中随机但不重复选取的脉冲, τ_i 代表相邻脉冲之间的自由演化时间, 指数 N 代表将括号内序列重复 N 次. 因此, 整个演化过程可以表示为

$$\left(e^{iH\tau_N} \Omega_{N-1} e^{iH\tau_{N-1}} \dots \Omega_2 e^{iH\tau_2} \Omega_1 e^{iH\tau_1} \right)^N = e^{iC}. \quad (3)$$

假定自由演化部分的时间远大于 π 脉冲的持续时间, 则在上述演化后, 各能量本征态积累的由准静态噪声引起的额外相位将彼此相等, 相当于体系演化的波函数多了一个整体相位, 从而等效消除了准

静态噪声的影响. 以三能级为例, 按照 (3) 式只需要将 π_{01}, π_{12} 两个脉冲重复 3 次即可, 实际的动力学解耦序列结构可以用图 1(a) 表示, 为了方便展示, 这里令 $\tau_3 = 0$. 图 1(b) 为在这个序列下不同初始态的演化过程, 可以看到每个态在不同能级上停留的时间都相同, 所以由准静态噪声积累的额外相位都相等.

另外在实际实验中像 π_{01} 和 π_{12} 这两个涉及到同一个能级的脉冲是不能同时施加的. 但可以选择以下组合方式:

$$\left[\xrightarrow{\tau_1} (\pi_{01}\pi_{23} \dots \pi_{(N-2)(N-1)}) \xrightarrow{\tau_2} (\pi_{12}\pi_{34} \dots \pi_{(N-1)N}) \xrightarrow{\tau_3} \right]^N, N \text{ 为偶数.} \quad (4)$$

在这种组合方式下括号内的脉冲可以同时施加, 这将大大缩短序列的长度.

2.2 高斯噪声和滤波函数

2.1 节讨论了准静态噪声的情形, 但实际环境中存在的噪声一般都会包含非准静态的成分, 所以此时 (1) 式中的能级间距应表示为含时形式 $\delta_i(t)$. 假定所考虑的噪声仍可归属于高斯噪声的范畴, 则其导致的相位误差 $\Delta\phi = \int_{t_0}^t \delta_i(t') dt'$ 也是满足高斯分布的随机信号, 因此有 $\langle e^{i\Delta\phi} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle \Delta\phi^2 \rangle}$. 所

以不同噪声导致的退相干的具体形式, 以及不同动力学解耦序列的效果, 均可通过计算 $\langle \Delta\phi^2 \rangle$ 加以确定. 下面首先介绍控制函数的概念, 这是计算 $\langle \Delta\phi^2 \rangle$ 的重要辅助工具.

一个 N 能级体系在经历由 (3) 式给出的演化之后, 其第 n 个和第 m 个能级积累的由噪声导致的额外相位的差可以通过下式计算:

$$\Delta\phi_{nm} = \phi_n - \phi_m = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_0}^{t_{\text{end}}} \delta_i(t) f_i^{nm}(t_{\text{end}} - t_0, t) dt, \quad (5)$$

这里的 $f_i^{nm}(\tau = t_{\text{end}} - t_0, t)$ 即为控制函数. 它是一个分段函数, 通过在不同的自由演化时段中取 1, -1 或 0 等不同的值, 来体现作用于不同能级的噪声对 $\Delta\phi_{nm}$ 的贡献 (图 1). 例如, 考虑 $|n\rangle, |m\rangle$ 两个初态的演化, 它们将在一系列 π 脉冲的翻转作用下遍历所有的能级后再回到自身. 当它们被翻转到 i 能级的时候会受到噪声 $\delta_i(t)$ 的影响, 所以可以在 $|n\rangle$ 受影响的时间区间内取 $f_i^{nm}(\tau, t) = 1$, 在 $|m\rangle$ 受影响时取 $f_i^{nm}(\tau, t) = -1$, 其他时候取 $f_i^{nm}(\tau, t) = 0$. 图 1 给出了三能级情形的一个实例. 由于一般只需考虑激发态和基态之间的相位差, 所以下文将这种情形的控制函数 f_i^{n0} 简记为 f_i^n , 而将相应的相位差涨落记为 $\langle \Delta\phi_n^2 \rangle$, 后者由下面的计算给出:

$$\begin{aligned} \langle \Delta\phi_n^2 \rangle &= \left\langle \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^N \delta_i(t'_1) f_i^n(\tau, t'_1) \sum_{j=1}^N \delta_j(t'_2) f_j^n(\tau, t'_2) dt'_1 dt'_2 \right\rangle \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \delta_i(t'_1) \delta_j(t'_2) \rangle f_i^n(\tau, t'_1) f_j^n(\tau, t'_2) dt'_1 dt'_2 \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N S_{ij}(\omega) e^{i\omega(t'_2 - t'_1)} f_i^n(\tau, t'_1) f_j^n(\tau, t'_2) \frac{d\omega}{2\pi} dt'_1 dt'_2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_{ij}(\omega) \widetilde{f_i^n}(\tau, \omega) \widetilde{f_j^n}(\tau, \omega)^* \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_i(\omega) F_i^n(\tau, \omega) + 2 \sum_{i < j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_{ij}(\omega) F_{ij}^n(\tau, \omega), \end{aligned} \quad (6)$$

这里 S, F 分别是噪声 δ_i 或 δ_i, δ_j 之间关联的功率密度函数和滤波函数. 如果两个噪声之间没有关联, 则 $\langle \delta_i(t_1) \delta_j(t_2) \rangle = 0, S_{ij}(\omega) = 0$.

利用 (6) 式可以计算高斯噪声在特定动力学

解耦序列下的相位积累, 进而评价该序列对噪声的抑制效果. 另外还可以根据实际噪声的功率谱密度来调整解耦序列的参数, 从而优化其噪声抑制表现.

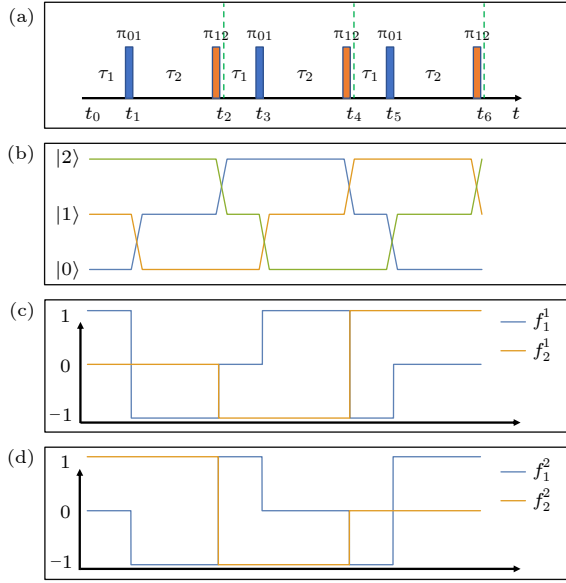


图 1 针对三能级体系的动力学解耦脉冲序列、能级演化及控制函数 (a) 动力学解耦序列, 脉冲施加的时刻分别为 $t_1, t_2, \dots, t_6$, t_0, t_6 是整个序列开始和结束的时刻; (b) 不同初态在演化过程中的变化, 每个初态都走遍了不同的能级; (c), (d) 分别是 $|0\rangle, |1\rangle$ 之间和 $|0\rangle, |2\rangle$ 之间的控制函数

Fig. 1. Pulse sequence for dynamical decoupling, state evolution and control function in the case of a three-level system: (a) The pulse sequence; π pulses are applied at time $t_1, t_2, \dots, t_6$, t_0, t_6 are the start and end moments of the whole sequence; (b) evolution of different initial states; each state is sequentially flipped into all other states by the π pulses in the sequence; (c), (d) plot the control functions linking states $|0\rangle, |1\rangle$ and $|0\rangle, |2\rangle$, respectively.

2.3 三能级动态解耦滤波函数的分析

首先在图 1(a) 所示的三能级动力学序列下可以得到 $|0\rangle, |1\rangle$ 之间和 $|0\rangle, |2\rangle$ 之间的控制函数, 见图 1(c), (d). 对控制函数 $f(\tau, t)$ 进行傅里叶分析得到 $\tilde{f}(\tau, \omega)$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1^1(\tau, \omega) &= \frac{1}{i\omega} (-e^{i\omega t_0} + 2e^{i\omega t_1} - e^{i\omega t_2} - e^{i\omega t_3} \\ &\quad + 2e^{i\omega t_4} - e^{i\omega t_5}), \\ \tilde{f}_2^1(\tau, \omega) &= \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega t_2} - 2e^{i\omega t_4} + e^{i\omega t_6}), \\ \tilde{f}_1^2(\tau, \omega) &= \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega t_1} - 2e^{i\omega t_2} + e^{i\omega t_3} + e^{i\omega t_4} \\ &\quad - 2e^{i\omega t_5} + e^{i\omega t_6}), \\ \tilde{f}_2^2(\tau, \omega) &= \frac{1}{i\omega} (-e^{i\omega t_0} + 2e^{i\omega t_2} - e^{i\omega t_4}).\end{aligned}\quad (7)$$

考虑两种典型的时间间隔选取方式, 一种是令 (3) 式中的 $\tau_1 = \tau_2 = \frac{\tau}{6}, \tau_3 = 0$, 即所有的 π 脉冲之间都是等间隔的. 将 $t_j = j\frac{\tau}{6}$ 代入 (7) 式可以得到

(6) 式中的滤波函数:

$$\begin{aligned}F_1^1 &= F_1^2(\tau, \omega) = \frac{1}{\omega^2} 64 \cos\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{12}\right)^4, \\ F_2^1 &= F_2^2(\tau, \omega) = \frac{1}{\omega^2} 16 \sin\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)^4, \\ F_{12}^1 &= F_{12}^2(\tau, \omega) = \frac{1}{\omega^2} \left[-128 \cos\left(\frac{\omega\tau}{12}\right)^3 \right. \\ &\quad \times \left(-1 + 2 \cos\left(\frac{\omega\tau}{6}\right) \right) \sin\left(\frac{\omega\tau}{12}\right)^4 \\ &\quad \times \left(\cos\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right) \left. \right].\end{aligned}\quad (8)$$

这里的 F_{ij}^n 的虚部为奇函数, 如果关联噪声密度 S_{ij} 是实对称函数, 比如线性关联的白噪声或 $1/f$ 噪声, 那么只需要考虑 F_{ij}^n 的实部, 这是因为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_{ij}(\omega) F_{ij}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_{ij}(\omega) \text{Re}[F_{ij}^n], \quad (9)$$

这里关联项实部的符号与自身项的符号相反, 所以在此序列下, 噪声间的正关联会抑制退相干效应, 负关联则会增强退相干效应.

另一种时间间隔选取方式是令 $\tau_1 = \frac{\tau}{3}, \tau_2 = 0, \tau_3 = 0$. 将 $t_1 = t_2 = \frac{\tau}{3}, t_3 = t_4 = \frac{2\tau}{3}, t_5 = t_6 = \tau$ 代入 (7) 式得到滤波函数:

$$\begin{aligned}F_1^1(\omega, \tau) &= \frac{1}{\omega^2} 16 \sin\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)^2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{3}\right)^2, \\ F_2^1(\omega, \tau) &= F_1^2(\omega, \tau) = F_2^2(\omega, \tau) \\ &= \frac{1}{\omega^2} 16 \sin\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)^4.\end{aligned}\quad (10)$$

F_{12}^n 的形式较为复杂, 没有在 (10) 式中详细写出. 图 2 给出了两种不同的间隔选取方式所对应的滤波函数.

3 滤波函数的物理解释及拓展

3.1 滤波函数的物理解释

如果忽略滤波函数中的 $1/\omega^2$ 衰减项, 则它们都是 $\omega\tau$ 的周期函数. 通过对比控制函数和序列内噪声周期数量的关系, 可以直观地理解这些函数的周期性. 为了方便理解, 先来看最简单的二能级体系中的 Ramsey 过程, 见图 3. 这个过程的控制函数始终取常数值 1, 其滤波函数则满足 $F\omega^2 = \sin(\omega\tau/2)^2$.

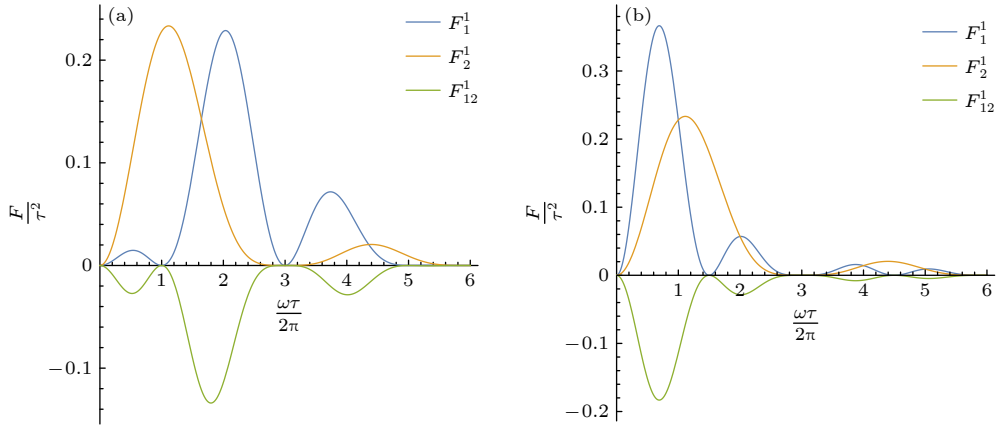

 图 2 滤波函数 (a) 所有 π 脉冲等间隔分布; (b) 一次重复中的两个 π 脉冲间隔为零

Fig. 2. Filter functions: (a) For equal intervals between consecutive pulses; (b) for zero interval between the two pulses during one repetition.

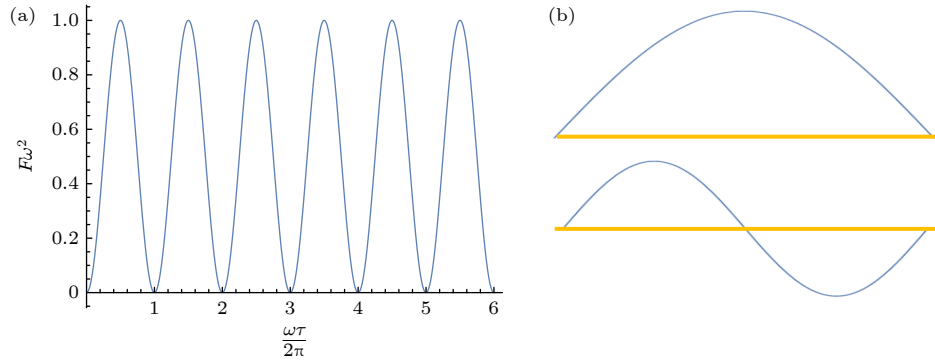


图 3 二能级体系 Ramsey 过程的滤波函数的周期性 (a) 去掉衰减项后的滤波函数; (b) 操作时间内的噪声周期数

Fig. 3. Periodicity of the Ramsey filter function: (a) The filter function without the attenuation term; (b) noise period during operation time.

不难发现, 满足 $\omega\tau$ 为 2π 的整数倍的噪声频率分量, 其在一个演化周期 τ 内的累积相位为零, 因此这些频率处的滤波函数达到最小值 0. 相反, 如果 $\omega\tau$ 等于 $\pi/2$ 的奇数倍, 则噪声累积相位为局部最大, 从而滤波函数达到最大值.

对于具有不含时频谱的噪声, 即 $\delta(t) = \int C(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, 相应的相位积累为

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_0^\tau \delta(t) f(\tau, t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\tau C(\omega) f(\tau, t) e^{i\omega t} dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) \tilde{f}(\tau, \omega)^* d\omega. \end{aligned} \quad (11)$$

而对于频谱随时间变化的噪声, 虽然 $\delta(t)$ 不是一个稳定的函数, 因此不能进行傅里叶展开, 但是噪声的关联函数 $\langle \delta(0) \delta(\tau') \rangle = \int S(\omega) e^{i\omega\tau'} d\omega$ 是一个稳定的函数, 所以依然可以对本文所关注的 $\langle \Delta\phi^2 \rangle$ 进

行傅里叶展开:

$$\begin{aligned} \langle \Delta\phi^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\tau \int_0^\tau S(\omega) e^{i\omega(t'_2 - t'_1)} \\ &\quad \times f(\tau, t'_1) f(\tau, t'_2) dt'_1 dt'_2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |\tilde{f}(\tau, \omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (12)$$

注意 (12) 式只保留了对应于 (6) 式的自身项, 而忽略了关联项, 因此以下讨论将不包含不同能级感受到的噪声之间关联的贡献. 此外, (12) 式省略了 $1/2\pi$ 系数, 因为可以将之合并到 $C(\omega) S(\omega)$ 中. 频谱变化噪声的滤波函数 $F(\omega) = |\tilde{f}(\tau, \omega)|^2$ 是由 $\tilde{f}(\tau, \omega)$ 决定的, 通过和 (11) 式对比可以发现, 这就是某一频率的稳定噪声在控制函数下积累的相位:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tau, \omega) &= \Delta\phi_\omega = \int_0^\tau f(\tau, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \int_0^\tau f(\tau, t) \cos(\omega t) dt + i \int_0^\tau f(\tau, t) \sin(\omega t) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

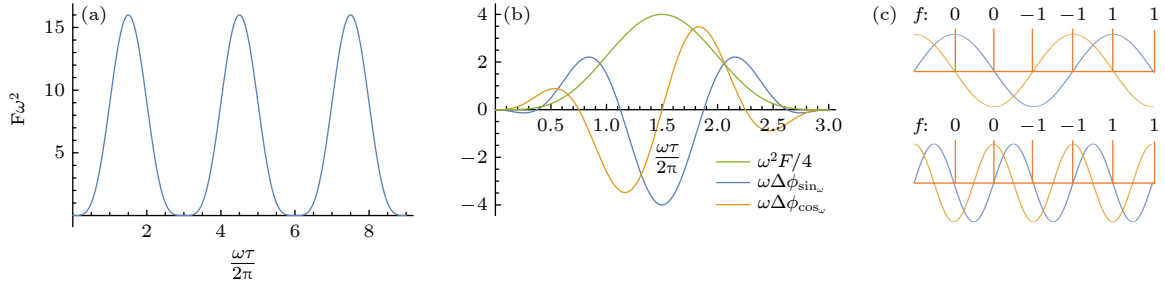


图 4 三能级体系滤波函数的周期性 (a) $F = \frac{1}{\omega^2} 16 \sin\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)^4$ 中的周期部分; (b) $F\omega^2, \omega\Delta\phi_{\sin\omega}$ 和 $\omega\Delta\phi_{\cos\omega}$ 之间的关系 (为了方便比较将 $F\omega^2$ 除以 4); (c) 噪声与控制函数的比较, 上图中噪声周期数为 1.5, sin 类型的噪声积累了最大的相位, cos 类型的噪声与自身完全抵消; 下图中噪声周期数为 3, 两种类型的噪声都与自身完全抵消

Fig. 4. Periodicity of the filter function in the case of a three-level system; (a) Periodic part of $F = \frac{1}{\omega^2} 16 \sin\left(\frac{\omega\tau}{6}\right)^4$; (b) relation among $F\omega^2, \omega\Delta\phi_{\sin\omega}$ and $\omega\Delta\phi_{\cos\omega}$; (c) comparison between some periods of noise and control function. The number of noise cycles in the upper figure is 1.5, sin-type of noise accumulates a maximum phase, while the cos-type of noise completely cancels out itself. The number of noise cycles in the bottom figure is 3, and both types of noise completely cancel out themselves.

所以滤波函数正比于固定频率噪声在控制方程下积累相位的模平方. 图 4 是三能级滤波函数的例子, 通过对比不同频率噪声的贡献 (图 4(b), (c)) 可以很好地理解滤波函数的周期部分.

3.2 滤波函数的关联项

以上讨论是针对同一能级噪声的滤波函数 F_i , 而用来刻画不同能级间噪声关联贡献的滤波函数 F_{ij} 的解析形式一般非常复杂, 但从三能级体系的例子中可以发现, $|1\rangle, |2\rangle$ 能级间关联滤波函数的实部是负值, 也就是说如果两个噪声之间是正相关的, 那么关联项积累的效果可以对各个能级起到一定的抵消作用. 一个最简单的例子是在频率可调的比特中, 磁通噪声会造成比特频率 ω 的涨落, 但是这种涨落并不会改变三能级体系哈密顿量的形式, 后者将保持 $0, \omega, 2\omega - \alpha$ 的形式, 所以此时 $|1\rangle, |2\rangle$ 能级之间的噪声为线性关联 $\delta_2(t) = 2\delta_1(t)$, 因此可以将方程 (5) 中的关联项写成:

$$\begin{aligned} S_{12}(\omega) &= \int \langle \delta_1(0) \delta_2(\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= 2 \int \langle \delta_1(0) \delta_1(\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau = 2S_1(\omega). \end{aligned} \quad (14)$$

最终积累的相位为

$$\begin{aligned} \langle \Delta\phi \rangle_n^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_1(\omega) [F_1^n(\tau, \omega) + 4F_2^n(\tau, \omega) \\ &\quad + 4\text{Re}[F_{12}^n(\tau, \omega)]]], \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

这里总的滤波函数是 $F^n = F_1^n(\tau, \omega) + 4F_2^n(\tau, \omega) + 4\text{Re}[F_{12}^n(\tau, \omega)]$. 如果假设一二能级的噪声是非同源

的, 但是仍具有 $S_2(\omega) = 4S_1(\omega)$ 的关系, 则有 $F^{n'} = F_1^n(\tau, \omega) + 4F_2^n(\tau, \omega)$

将上述结果代入 (7) 式, 结果如图 5 所示, 其中蓝线为有关联项的滤波函数, 可以看出噪声之间的关联性加强了滤波的效果.

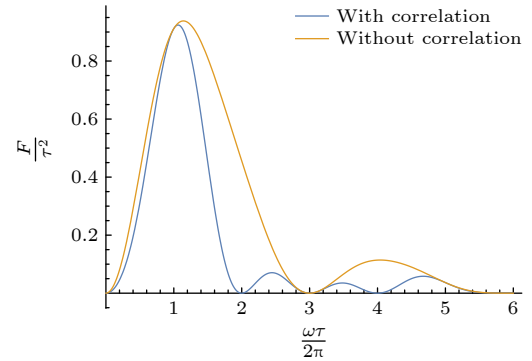


图 5 关联与非关联噪声滤波函数

Fig. 5. Filter function with and without correlation.

另一方面, 电荷噪声 n_g 则会改变哈密顿量的形式, 所以能级之间不再满足上文所述的固定关系, 而且相邻能级的能量随电荷噪声变化的方向相反^[32], 如图 6 所示, 因而此时噪声之间的关联会导致 $\langle \Delta\phi \rangle_n^2$ 增大.

3.3 动力学解耦序列的扩展

对于二能级体系, 可以通过重复或嵌套的方式来拓展简单的动力学解耦序列, 这一思想同样可用于多能级体系的动力学解耦序列. 以下仍以三能级体系为例进行讨论. 如果规定 (2) 式给出的一个完

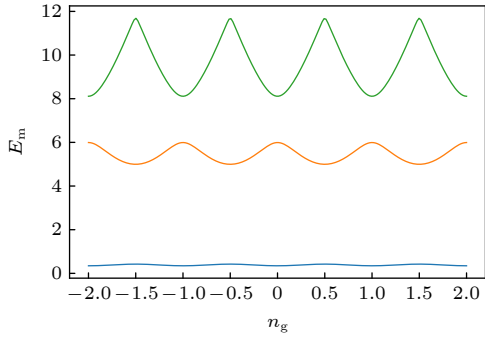


图 6 电荷比特能级与电荷噪声的关系

Fig. 6. Energy levels of a charge qubit as a function of charge noise.

整序列为一个单元, 则后续可以重复施加 m 个不同或相同的单元, 假定其中单个单元的长度为 T_i , 那

么序列总长度就是 $T = \sum_{i=1}^m T_i$. 最终的控制函数是每部分控制函数的求和:

$$f'(T, t) = \sum_{i=1}^m f^i(T_i, t). \quad (16)$$

为简洁起见, 这里没有写出具体涉及的能级的指标, 只是用新的上标 i 代表不同单元. 下面考虑最简单的情形, 即所有单元都包含相同的序列, 因此所有 f^i 也是相同的. 这样可以将控制函数的傅里叶级数写成:

$$f'(T, \omega) = \sum_{n=1}^m e^{i6(n-1)\omega t} f(\tau, \omega). \quad (17)$$

利用 $F' = |f'|^2$ 得到:

$$F'(T, \omega) = \left| \sum_{n=1}^m e^{i6(n-1)\omega t} F(\tau, \omega) \right|^2 = \begin{cases} \left[-1 + 2 \sum_{n=1}^{2n-1=m} \cos[(n-1)\omega\tau] \right]^2 F(\tau, \omega), & m \text{ 为奇数}, \\ 4 \left[\sum_{n=1}^{2n=m} \cos\left[\frac{2n-1}{2}\omega\tau\right] \right]^2 F(\tau, \omega), & m \text{ 为偶数}. \end{cases} \quad (18)$$

代入 (7) 式中的 $F(\tau, \omega)$ 可以得到新的滤波函数:

$$F'_1(T, \omega) = \frac{1}{\omega^2} 64 \left[\sum_{n=1}^m \cos\left[\frac{(2n-1)}{4}\omega\tau\right] \right] \sin\left(\frac{1}{12}\omega\tau\right)^4, \\ F'_2(T, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2} 16 \left[-1 + 2 \sum_{n=1}^{2n-1=m} \cos[(n-1)\omega\tau] \right]^2 \sin\left(\frac{1}{6}\omega\tau\right)^4, & m \text{ 为奇数}, \\ \frac{1}{\omega^2} 64 \left[\sum_{n=1}^{2n=m} \cos\left[\frac{2n-1}{2}\omega\tau\right] \right]^2 \sin\left(\frac{1}{6}\omega\tau\right)^4, & m \text{ 为偶数}. \end{cases} \quad (19)$$

从图 7 可以看出, 随着 m 的增加, 滤波函数的峰宽在逐渐变窄, 这也代表可以被过滤的频率范围在增加, 而代价是峰值位置的噪声会被加强.

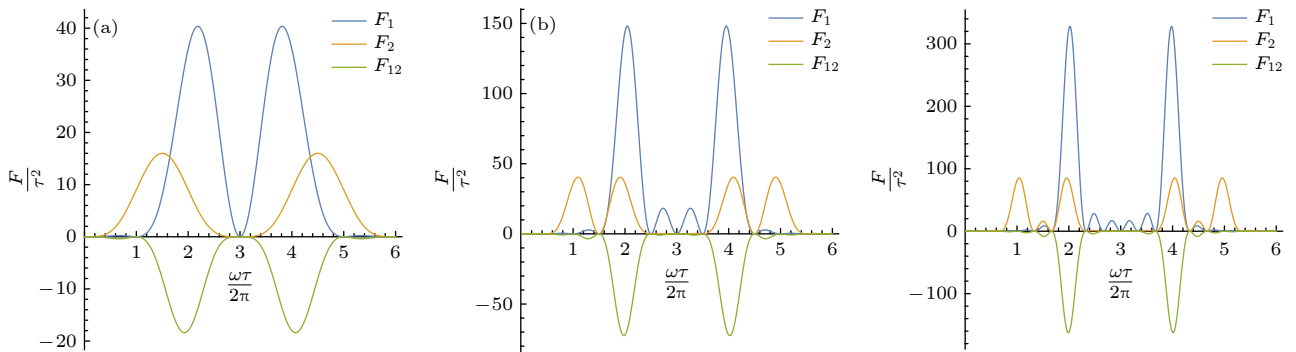

 图 7 m 不同时, 重复序列下的滤波函数周期性 (a) $m = 1$; (b) $m = 2$; (c) $m = 3$

Fig. 7. Periodicity of filter functions for repeated sequences with different m : (a) $m = 1$; (b) $m = 2$; (c) $m = 3$.

4 结 论

本文讨论了一个针对多能级体系的动力学解耦方案. 该方案只需要使用紧邻能级的 π 脉冲, 因此具有很好的实验可行性. 通过巧妙地构造由这样的 π 脉冲组成的序列, 可以有效地消除由准静态噪声导致的额外相位积累. 然后进一步分析了这些解耦序列在高斯噪声情形下的滤波函数, 通过滤波函数来反向调整序列结构, 可以实现更加针对性的噪声抑制效果. 滤波函数本质上是控制函数的傅里叶变换, 它可以被视为是不同频率的噪声分量在解耦序列调制下导致的相位积累. 此外还发现, 关联项的存在可以对正关联的噪声起到抑制效果, 而对反关联的噪声起到增强效果. 最后, 还对简单的动力学解耦序列进行了拓展, 结果显示同一单元的重复施加可以收窄滤波函数进而扩大滤波的频率范围.

在二能级情形中, 研究者已经实现了将动力学解耦和量子门结合, 得到具有动力学解耦效果的量子门, 即所谓的 dynamically corrected gate. 对于基于多能级体系的量子线路, 也可以按照这一思路去发展相应的方案, 本文研究结果可以作为这类探索的基础.

参考文献

- [1] Clerk A A, Devoret M H, Girvin S M, Marquardt F, Schoelkopf R J 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1155
- [2] Hahn E L 1950 *Phys. Rev.* **80** 580
- [3] Slichter C P 1990 *Principles of Nuclear Magnetic Resonance* (3rd Ed.) (New York: Springer) pp1–7
- [4] Viola L, Lloyd S 1998 *Phys. Rev. A* **58** 2733
- [5] Carr H Y, Purcell E M 1954 *Phys. Rev.* **94** 630
- [6] Meiboom S, Gill D 1958 *Rev. Sci. Instrum.* **29** 688
- [7] Grégoire I 2005 *Ph. D. Dissertation* (Paris: Université Pierre et Marie Curie - Paris VI)
- [8] Khodjasteh K, Lidar D A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 180501
- [9] Khodjasteh K, Lidar D A 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062310
- [10] Uhrig G S 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 100504
- [11] Uhrig G S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 120502
- [12] Uhrig G S 2008 *New J. Phys.* **10** 083024
- [13] Uhrig G S, Pasini S 2010 *New J. Phys.* **12** 045001
- [14] Bylander J, Gustavsson S, Yan F, Yoshihara F, Harrabi K, Fitch G, Oliver W D 2011 *Nat. Phys.* **7** 565
- [15] Gustavsson S, Bylander J, Yan F, Forn-Díaz P, Bolkhovskiy V, Braje D, Oliver W D 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 170503
- [16] Qiu J, Zhou Y, Hu C K, Yuan J, Zhang L, Chu J, Huang W, Liu W, Luo K, Ni Z, Pan X, Yu D 2021 *Phys. Rev. A* **16** 054047
- [17] Google 2023 *Nature* **614** 676
- [18] Gottesman D 1999 *Chaos Solitons Fractals* **10** 1749
- [19] Grassl M, Rötteler M, Beth T 2003 *Inter. J. Foundat. Compu. Sci.* **14** 757
- [20] Bullock S S, O'Leary D P, Brennen G K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 230502
- [21] Campbell E T, Anwar H, Browne D E 2012 *Phys. Rev. X* **2** 041021
- [22] Campbell E T 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 230501
- [23] Anwar H, Brown B J, Campbell E T, Browne D E 2014 *New J. Phys.* **16** 063038
- [24] Krishna A, Tillich J P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 070507
- [25] Chu J, He X, Zhou Y, Yuan J, Zhang L, Guo Q, Hai Y, Han Z, Hu C K, Huang W, Jia H, Yu D 2023 *Nat. Phys.* **19** 126
- [26] Luo K, Huang W, Tao Z, Zhang L, Zhou Y, Chu J, Liu W, Wang B, Cui J, Liu S, Yan F, Yu D 2023 *Phys. Rev. Lett.* **130** 030603
- [27] Blok M S, Ramasesh V V, Schuster T, O'Brien K, Kreikebaum J M, Dahlen D, Morvan A, Yoshida B, Yao N Y, Siddiqi I 2021 *Phys. Rev. X* **11** 021010
- [28] Suslov M V, Lesovik G B, Blatter G 2011 *Phys. Rev. A* **83** 052317
- [29] Bouchard F, Fickler R, Boyd R W, Karimi E 2017 *Sci. Adv.* **3** e1601915
- [30] Napolitano R J, Fanchini F F, da Silva A H, Bellomo B 2021 *Phys. Rev. Research* **3** 013235
- [31] Mukhtar M, Saw T B, Soh W T, Gong J 2010 *Phys. Rev. A* **81** 012331
- [32] Koch J, Terri M Y, Gambetta J, Houck A A, Schuster D I, Majer J, Blais A, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2007 *Phys. Rev. A* **76** 042319

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Dynamic decoupling for multi-level systems

Zhang Zhi-Da^{1)2)3)4)#} Yi Kang-Yuan^{1)2)3)4)#}

Chen Yuan-Zhen^{1)2)3)4)†} Yan Fei^{1)2)3)‡}

1) (*Shenzhen Institute for Quantum Science and Engineering, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China*)

2) (*International Quantum Academy, Shenzhen 518055, China*)

3) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Science and Engineering, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China*)

4) (*Department of Physics, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China*)

(Received 16 December 2022; revised manuscript received 2 March 2023)

Abstract

Dynamical decoupling refers to a family of techniques that are widely used to suppress decoherence in various quantum systems, caused by quasi-static environmental noise. They have broad applications in the field of quantum information processing. Conventional dynamical decoupling targets at noise in two-level system such as qubits and often consists of specifically engineered sequences of π pulses that swap between two different states. On the other hand, researchers do not limit their study within simple two-levels systems any more, but go and seek for even more efficient quantum hardware. A variety of quantum algorithms and schemes of quantum control using multi-level systems, such as qutrits and qudits, for quantum information processing have been proposed and implemented successfully. However, decoherence in such a multi-level system is inherently more sophisticated than that in two-level systems. So far there has been little systematic research on how to tackle decoherence problems in such systems.

In this work, we propose several sequences of dynamical decoupling for multi-level systems that only rely on π pulses linking neighboring levels, which is easy to implement experimentally. Our results show that these sequences can efficiently suppress quasi-static noise presented in multi-level systems. In addition, by calculating the corresponding filter functions of these sequences, we are able to further analyze their effect on generic Gaussian noise that may not be quasi-static. We also give a physical explanation of the noise filtering mechanism of these sequences by considering their control functions. Other topics discussed in our work include power spectral density and correlation of noise in multi-level systems. Our work may be regarded as a first step towards a more systematic investigation of dynamical decoupling techniques applicable to multi-level systems.

Keywords: multi-level system, noise, decoherence, dynamic decoupling, filter function

PACS: 03.67.Lx, 03.67.Pp, 85.25.-j

DOI: 10.7498/aps.72.20222398

These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: chenyz@sustech.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: yanf7@sustech.edu.cn