

时间反演对称性破缺系统中的拓扑零能模

张卫锋 李春艳 陈险峰 黄长明 叶芳伟

Topological zero-energy modes in time-reversal-symmetry-broken systems

Zhang Wei-Feng Li Chun-Yan Chen Xian-Feng Huang Chang-Ming Ye Fang-Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 220201 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.220201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.220201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于石墨烯超表面的宽带电磁诱导透明研究

Wide band electromagnetically induced transparency in graphene metasurface of composite structure

物理学报.2017, 66(10): 100202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.100202>

多种有序钙钛矿结构的高压制备与特殊物性

High-pressure synthesis and special physical properties of several ordered perovskite structures

物理学报.2017, 66(3): 030201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.030201>

一类异构多智能体系统固定和切换拓扑下的一致性分析

Consensus analysis for a class of heterogeneous multi-agent systems in fixed and switching topology

物理学报.2014, 63(22): 220201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220201>

生物分子膜门电极 AlGaIn/GaN 高电子迁移率晶体管 (HEMT) 生物传感器研究

Research on biomolecule-gate AlGaIn/GaN high-electron-mobility transistor biosensors

物理学报.2014, 63(7): 070204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.070204>

驱动模式对具有库源平衡的黏性流体中空间反射时间反演联合对称性的影响

The influence of different driving patterns on parity time-reversal symmetry

物理学报.2014, 63(6): 060206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.060206>

专题: 拓扑经典波动

编者按 拓扑原来是一个几何学的概念, 用来描述几何结构在某些连续变化下不变的性质. 过去几十年来, 由于凝聚态物理和量子场论的发展, 人们发现拓扑可以描述很多物理学中有趣的现象. 2016 年诺贝尔物理奖颁给了 Thouless, Haldane 和 Kosterlitz, 奖励他们发现了拓扑相变和物质的拓扑相. 近年来物理学的重要发现和研究热点之一就是具有非平庸物理性质的拓扑物质态. 现在对这些拓扑物质态的研究已经从电子系统扩散到玻色子和经典波动系统. 本专题是关于经典波动系统的拓扑态及其物理效应的, 得到了国内在拓扑经典波前沿研究的一些专家和研究组的撰稿支持, 收录了一维、二维和三维经典波动系统的拓扑相, 包括声波、电磁波、光电耦合系统等等, 而其中万变不离其宗的就是狄拉克方程.

近年来对能带拓扑性质的研究扩展到了经典波动系统. 经典波, 如电磁波和声波等在周期结构中也有能带出现, 并且这些能带也可以具有非平庸的拓扑性质. 相对于电子系统而言, 经典波动系统具有更好的可控性、可测量性、相干性和制备优势, 因此更容易实现和观测某些拓扑能带及其物理性质. 在过去的 10 年里经典波动系统的拓扑性质如火如荼地发展, 中国科学家做出了顶尖的贡献. 本专题内容涉及光子晶体、声子晶体、光学和声学超构材料等经典波动系统中的拓扑能带及其物理效应, 包含一维、二维和三维系统的一系列工作, 值得初入此行的学者和对该领域感兴趣的读者参考.

(客座编辑 苏州大学 蒋建华)

时间反演对称性破缺系统中的拓扑零能模*

张卫锋¹⁾ 李春艳¹⁾ 陈险峰¹⁾ 黄长明²⁾ 叶芳伟^{1)†}

1)(上海交通大学物理与天文学院, 区域光纤通信网与新型光通信系统国家重点实验室, 上海 200240)

2)(浙江师范大学数理与信息工程学院物理系, 金华 321004)

(2017 年 8 月 3 日收到; 2017 年 9 月 28 日收到修改稿)

Su-Schreiffer-Heeger 模型预测了在一维周期晶格的边缘处可能出现零维的拓扑零能模, 其能量本征值总是出现在能隙的正中间. 本文以半导体微腔阵列中光子和激子在强耦合情况下形成的准粒子为例, 通过准粒子的自旋轨道耦合与 Zeeman 效应, 研究了时间反演对称性破缺对拓扑零能模的影响. 发现拓扑零能模的能量本征值可以随着自旋轨道耦合强度的变化在整个带隙内移动, 自旋相反的模式移动方向相反; 在二维微腔阵列中发现了沿着晶格边缘移动的拓扑零能模, 提出了一维零能模的概念. 由于时间反演对称性的破缺, 这种一维拓扑零能模解除了在相反传输方向上的能级的简并, 从而在传输过程中出现极强的绕过障碍物的能力.

关键词: 拓扑绝缘体, 拓扑零能模, 边缘态, 自旋轨道耦合

PACS: 02.10.Yn, 33.15.Vb, 98.52.Cf, 78.47.dc

DOI: 10.7498/aps.66.220201

1 引言

拓扑绝缘体是一种具有全新量子特性的物质态^[1,2]. 它们虽然与普通绝缘体一样具有能隙, 但

能带的拓扑性质与之截然不同: 拓扑绝缘体具有非零的拓扑不变量. 若将两种具有不同拓扑特性的材料放在一起, 则在这两种材料的界面上存在拓扑相变. 拓扑相变保证了在界面处体带隙中总存在界面态. 这种界面态受界面两侧的拓扑保护, 其性质对

* 国家自然科学基金 (批准号: 11104181, 61475101) 和高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20110073120074) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: fangweiye@sjtu.edu.cn

材料边缘处的具体细节并不敏感,且不会在杂质和声子的影响下产生后向散射.因此,电子在发生拓扑相变的界面上具有稳定的单向传输性.拓扑绝缘体的这种特性在发展新型的电子器件方面具有重要的价值,因此一跃成为近年来凝聚态物理研究的热点.

拓扑绝缘体的概念很快渗透到了光学和电磁学中.2008年,利用法拉第效应打破时间反演对称性,Haldane和Raghu^[3]首次在光子晶体中预言了能带的拓扑性质和单向传输的边缘态.该理论预测在2009年即被实验证实^[4].由于拓扑边缘态具有单向传输、对制备过程中引入的随机和杂质高度免疫的特性,人们预测光学拓扑性可能会对未来的光学系统产生革命性的影响.这方面的理论和实验研究即蓬勃开展,形成了光学研究的一个新领域,即“拓扑光子学”^[5].

拓扑相也可以出现在一维的物理系统中,此即著名的Su-Schreiffer-Heeger (SSH) 模型所描写的一维周期性排布的阵列^[6].在该阵列中,相邻基元之间的耦合强度出现交替性的强弱变化,使得该阵列结构出现两种可能的拓扑相,分别称为拓扑的平庸相和非平庸相.在具有非平庸拓扑相的阵列的末端,会出现局域的边缘态^[7-15].与二维或者高维系统中的边缘态相同,这种零维边缘态具有受拓扑保护的“鲁棒性”:即使阵列出现结构上的随机的扰动,它们的模式波形也基本保持不变,其本征值总是被“钳制”在体能带带隙的正中间^[15],因此这种边缘态也常被称为拓扑“零能”模.迄今为止,SSH模型在光学结构上的实现非常之多,包括介质^[7]和等离子体^[8,9]波导阵列、介质纳米颗粒链^[10]、金属圆盘阵列^[11]、光学微腔结构^[12]等.在研究这些光学SSH结构时,人们普遍采用紧束缚近似的处理方法,因此电磁波在这些结构中的演化呈现出“离散光学”^[16]的特性,这就较好地模拟了原始的SSH模型(该模型也由一组离散方程所描述^[6]).不过,近期也出现了若干由连续方程研究这种拓扑零能模的工作^[13-15].有趣的是,在最近的一项工作中,我们发现传统的表面等离子体极化(SPPs)也可以看成是一类特殊的拓扑零能模^[15],从而揭示了SPPs的拓扑起源.

拓扑零能模也可以出现在二维周期晶格的边角处^[17-19].与被广泛研究的其色散曲线连接相邻主能带的拓扑表面态不同,拓扑零能模并非由主带分歧出来,它们总是独立地出现在能隙的正中

央^[6-12,13-15,19].因此,它们始终具有最佳的模式局域性和频率稳定性,这让它们在实现稳定的光学微腔方面具有特别的应用价值,因为微腔制作过程不可避免地引入的随机扰动不会让这些微腔模式发生频率漂移.

以上关于拓扑零能模的所有工作都是在具有时间反演不变对称性的系统中进行的.很自然地,人们会问:如果系统不具有时间反演对称性,拓扑零能模是否还相应地存在?如果存在,它们的特性(能量本征值、局域性)会发生怎样的变化?它们还具有抗结构微扰的受拓扑保护的性质吗?目前报道的所有拓扑零能模都局域在晶格末端(无移动性),能否实现沿着晶格边缘移动的拓扑零能模?

本文首次在时间反演对称性破缺的体系中研究了拓扑零能模的特性,系统地回答了上述问题.采用的研究对象是半导体光学微腔阵列,在这种结构中,局域在腔中的光子和局域在量子阱中的激子产生强烈的耦合,形成了半光半物质的准粒子(excitation polaritons)^[20-28].这些准粒子在垂直磁场的作用下,产生TE-TM偏振的能级劈裂,引入了自旋(偏振)和轨道的耦合(spin-orbit coupling),从而打破了系统的时间反演对称性.首先研究微腔之间的耦合呈交替性强弱变化的一维微腔阵列结构.研究发现,尽管此时系统不再具有时间反演对称性,拓扑零能模依旧可以出现在阵列边缘处,但其能量本征值不再固定在相应能隙的中间,而是随着自旋轨道耦合力度的变化,在能隙中发生了显著的移动.自旋相反的拓扑零能模移动的方向相反.接着研究了二维微腔阵列中的拓扑零能模,发现它们可以沿着阵列边缘处稳定地传输,并且,由于时间反演对称破缺的作用,它们具有较强的绕过障碍物传输的能力.据我们所知,目前在一维和二维系统中研究的拓扑零能模都是零维模式,本文首次报道了它们一维形式的存在.这种具有稳定传输特性的一维拓扑零能模可能在信息传输和处理中具有较好的应用优势.

2 Gross-Pitaevskii 方程

如引言部分所述,在半导体微腔阵列结构中,由于共同受到微腔的强烈束缚,腔中光子和激子发生强烈耦合,形成半光半物质的准粒子.准粒子的运动由如下形式的Gross-Pitaevskii方程描述^[20,26]:

$$\begin{aligned}
 i\frac{\partial\psi_{\pm}}{\partial t} = & -\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_{\pm} \\
 & + \frac{\beta\hbar^2}{m^*}\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\psi_{\mp} \\
 & + [\varepsilon_0 R(x, y) \pm \varepsilon_Z]\psi_{\pm} \\
 & + \varepsilon_0(|\psi_{\pm}|^2 + \sigma|\psi_{\mp}|^2)\psi_{\pm}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中 $\psi_{\pm}$ 为圆偏振基矢表象中的波函数的两个自旋分量, 它们和 TM, TE 偏振基矢表象中的波函数的 $\psi_{x,y}$ 的关系为 $\psi_{\pm} = (\psi_x \mp i\psi_y)/2^{1/2}$. 方程 (1) 右侧的第一项 $-\hbar^2/2m^*\nabla^2$ 为微腔准粒子的动量项, 其中 m^* 为准粒子的有效质量. 方程 (1) 右侧第二项描写的则是起源于微腔光子能量劈裂的自旋轨道耦合项 $\beta\hbar^2/m^*$, 其中 $\beta = (m_x - m_y)/4m^*$, $m_{x,y}$ 分别为 TM 和 TE 极化粒子的有效质量. 方程 (1) 右侧第三项 $\varepsilon_0 R(x, y)$ 表示准粒子在微腔阵列中感受到的势函数 (ε_0 为单位能量), 而 ε_Z 代表了 Zeeman 效应作用下两个自旋分量的能级分裂, 该参数与外加磁场强度成正比. 方程的最后一项为方程的非线性项, 起源于准粒子之间的相互作用. 本文假定波函数振幅较小, 因此非线性项可以忽略.

进行无量纲化后 (详见下列用于无量纲化的特征参数), 上述方程可方便地表达为如下形式:

$$\begin{aligned}
 i\frac{\partial\psi_{\pm}}{\partial t} = & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_{\pm} \\
 & + \beta\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\psi_{\mp} \\
 & + R(x, y)\psi_{\pm} \pm \Omega\psi_{\pm}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

在本工作中,

$$R(x, y) = -p \sum_n e^{-[(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2]/d^2}$$

为微腔势阱 (用宽度为 d 和振幅为 p 的高斯函数近似) 的一维或二维周期阵列. 阵列在 x 方向的晶格常数为 L_x (对于二维微腔阵列, 则还有 y 方向的晶格常数 L_y). 方程中的参数 β 和 Ω 分别表征了准粒子的自旋轨道耦合强度和 Zeeman 效应的强度. 观察方程 (2) 不难发现, 当自旋轨道耦合和 Zeeman 效应同时出现时, 即当 $\beta \neq 0$ 且 $\Omega \neq 0$ 时, 系统不再具有时间反演的对称性. 但请注意, 仅仅有自旋轨道耦合 ($\beta \neq 0, \Omega = 0$) 或者仅仅有 Zeeman 效应时 ($\beta = 0, \Omega \neq 0$), 系统的时间反演对称性仍旧得以维持.

在开始求解方程 (2) 之前, 为完整起见, 将方程 (1) 无量纲化为方程 (2) 所用到的特征参数陈列于

下: 采用 $x_0 = 1 \mu\text{m}$ 作为横向坐标的归一化因子, 采用 $\varepsilon_0 = \hbar^2/2mx_0^2$ 作为能量的归一化因子, 采用 $t_0 = \hbar\varepsilon_0^{-1}$ 作为时间的归一化因子. 此时, 对于有效质量为 $m^* = 10^{-31} \text{ g}$ 的极化激元, 其特征能量为 $\varepsilon_0 = 0.35 \text{ meV}$, 时间尺度为 $t_0 = 1.9 \text{ ps}$. 这样, 势阱深度 $p = 8$ 对应于 2.8 meV , 势阱宽度 $d = 0.5$ 对应于 $0.5 \mu\text{m}$. 在这样的势阱参数下, 每个微腔势阱 (用振幅为 p 和宽度为 d 的高斯函数描述) 仅支持一个横模.

3 理论结果与讨论

3.1 零维拓扑零能模的能级可调性

先考察如图 1 所示的一维排布的微腔阵列. 不失一般性, 在阵列中共选取了 42 个相同的微腔. 这些微腔可以排成如图 1 (a)–(c) 所示的三种典型的结构: $L_1/L_x = 0.4, 0.5$ 和 0.6 . 这里 $L_x = 3.6$ 代表水平方向的晶格常数, L_1 则代表左起第一个和第二个微腔之间的间隔. 先在 $\beta = \Omega = 0$ 条件下比较该三种结构的本征值谱. 为此, 将定态解 $\psi_{\pm}(x, y, t) = u_{\pm}(x, y) e^{iEt}$ 代入方程 (2), 并求解所得的定态方程在满足边界条件 $u_{\pm}|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$ 下的本征解. 所得的本征值谱分别如图 1 (f)–(h) 所示. 可以看到, 随着 L_1 的增大, 能带经历了从一开始的打开 ($L_1/L_x < 0.5$), 到闭合 ($L_1/L_x = 0.5$), 和再打开 ($L_1/L_x > 0.5$) 的过程. 在能带重新打开后, 在阵列结构的左右两侧出现了能量简并的边缘态 (图 1 (d), (e)). 由于这种边缘态局域在一维晶格的两个末端, 没有任何空间维度上的移动性, 因此属于零维模.

注意在紧束缚近似的方法处理中, 这两个边缘态的能量本征值恰好落在能隙的正中央, 因此它们常被称为拓扑零能模. 在这里采用的连续模型的计算结果表明, 边缘态的本征值其实总会稍微偏离中央位置 (在本例中为偏离中央向下, 见下文), 其原因是严格的连续模型计算得到的上下两条能带一般总不会是完全对称的. 这是因为在紧束缚近似的处理框架下, 系统的整体波函数假定是由孤立基元的基模线性叠加而成. 这些波函数的本征值虽然各不相同, 但组成它们的基模被认为是不变的, 即离散模型忽略了基元基模的色散效应, 从而描写晶格中非同类“原子” (图 1 (a) 和图 1 (c) 的结构等同于“双原子”分子组成的结构) 的紧束缚方程在形式上完全相同, 这就导致了相应的两条能带完全对称.

但实际上, 由于非同类原子所处的能级不同, 基元的基模存在色散效应带来的差异, 因此描写两类原子的方程实际上会存在系数上的略微差异, 所以严格的连续模型计算得到的两条能带总非严格对称,

边缘态也并非严格处于能隙的正中位置. 即使如此, 这里还是称这些边缘态为拓扑零能模, 以便说明本文研究的就是这类模, 从而可与文献中的相关研究结果直接比较.

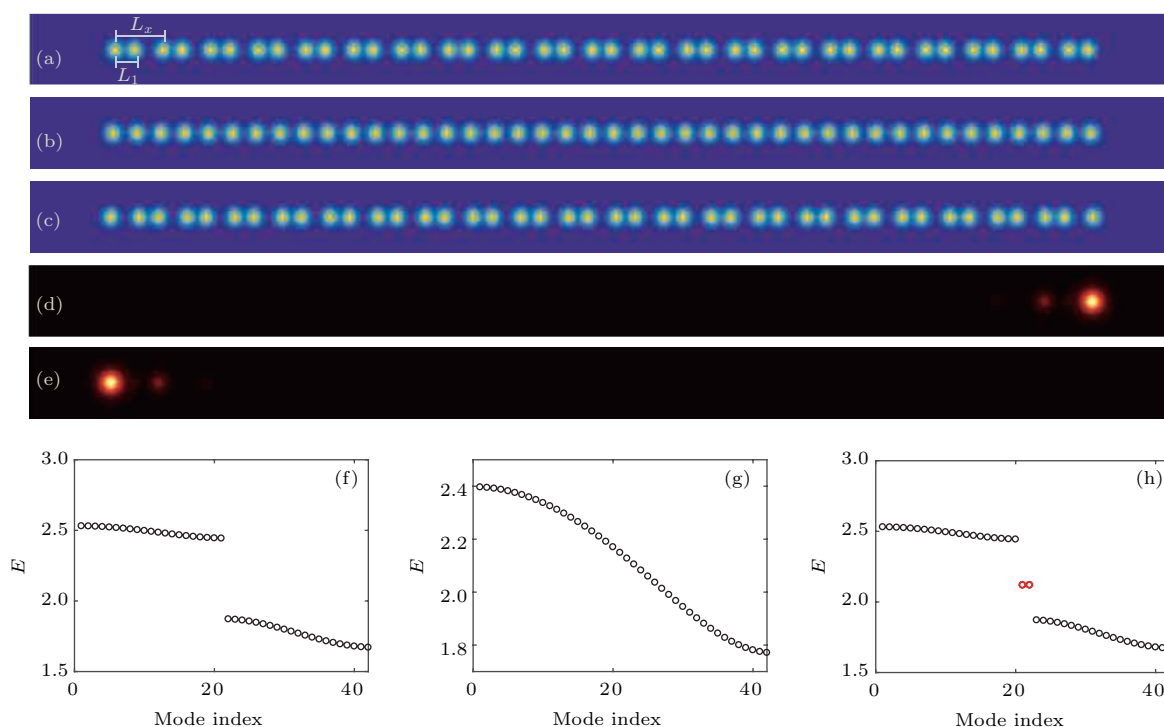


图1 (a), (b), (c) 分别为 $L_1/L_x = 0.4, 0.5$ 和 0.6 的一维微腔阵列结构示意图; (f), (g), (h) 分别为这三种结构对应的能量本征值谱; (h) 两个红色圆点表示出现在图 (c) 结构左右两侧的局域模 (d), (e); $\beta = 0, \Omega = 0$

Fig. 1. Schematics of one-dimensional array of microcavity, with $L_1/L_x = 0.4$ (a), 0.5 (b) and 0.6 (c), respectively. Their eigen-energy spectrums are shown in (f), (g) and (h) respectively. The two red dots shown in (h) indicate two edge modes localized at the right (d) and right (e) end of the structure (c). $\beta = 0, \Omega = 0$.

接下来研究时间反演对称性的破缺对这种拓扑零能模的影响. 为此, 取定图 1(c) 所示的拓扑非平庸结构, 并固定非零 Zeeman 场 ($\Omega = 0.5$), 慢慢增加自旋轨道耦合强度 β . $\Omega = 0.5$ 的 Zeeman 场解除了自旋向上和自旋向下模式能级的简并, 使得原先的每一个能级都一分为二, 从而出现两套类似的能级 (比较图 1(h) 和图 2(a)), 这两套能级分别对应 $|u_-| \neq 0, |u_+| \approx 0$ (即自旋向下) 和 $|u_+| \neq 0, |u_-| \approx 0$ (即自旋向上) 的波函数分布情况, 前者对应第一和第二个能带以及它们之间的边缘态, 后者对应第三和第四个能带以及它们之间的边缘态 (图 2(a), (b), (c)). 随着 β 从零开始增加, 可以发现自旋向上和向下的边缘态的能量本征值都在各自所属的带隙内产生移动. 我们用 $\Delta E/E_{\text{gap}}$ 定量地描述这种移动 (图 2(d)), 其中 ΔE 为边缘态的能量与下体带能量的差值, 而 E_{gap} 则为边缘态所在能隙的宽度. 据此, $\Delta E/E_{\text{gap}} = 0.5$ 表明相应的边

缘态出现在带隙的正中央. 如上文所述, 这种情况仅仅出现在遵守时间反演对称性体系的紧束缚近似的处理中, 而本文所采用的连续模型则给出了 $\Delta E/E_{\text{gap}}|_{\beta=0} = 0.43$ 的结果 (图 2(d)). 通过计算进一步发现, 随着的 β 增加, 两个自旋相反的边缘态都从 $\Delta E/E_{\text{gap}} = 0.43$ 的位置开始移动, 但有趣的是, 它们的移动方向刚好相反: 自旋向下的边缘态快速向下带移动, 而自旋向上的边缘态则十分缓慢地向上移动. 不难预测, 当 β 增加到一定程度时, 自旋向下的模式可以一直下移直至接触下带, 即 $\Delta E/E_{\text{gap}} \rightarrow 0$, 而自旋向上的模式可以一直上移直至接触上带, 即 $\Delta E/E_{\text{gap}} \rightarrow 1$. 令人惊奇的是, 在这整个过程中, 虽然边缘态不断地趋近下方或者上方的体能带, 但它们的模场分布并没有出现明显的变化, 始终极好地局域在阵列边缘处 (参考图 2(a)–(c) 插图中所给出的模式图). 拓扑零能模的这种模式特征与普通的缺陷模构成了鲜明的对

比, 后者在趋近体能带时, 波形迅速展宽, 并最终收敛于相应的 Bloch 波^[29]. 这是因为普通缺陷模本来就是从体带中的 Bloch 波分歧出来的, 而这里的边缘态则起源于拓扑效应, 与体带本身并无直接联系. 需要说明的是在目前的半导体微腔的技术水平

下, 所能达到的自旋轨道耦合力度一般在 $\beta \approx 0.4$ 以下^[28]. 但即便如此, 自旋向下边缘态在能隙中的相对位置移动已经超过 50% (图 2(d)). 这说明自旋轨道耦合可以很好地调节拓扑零能模出现的能量位置.

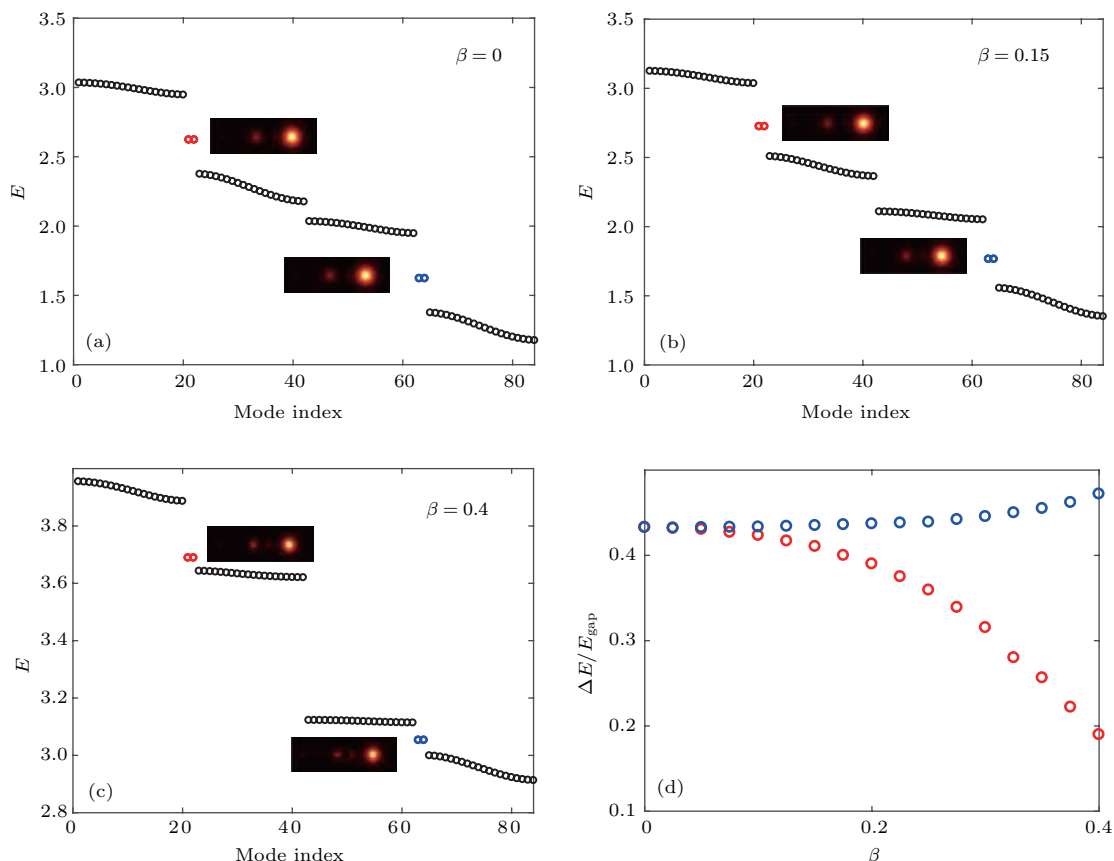


图 2 图 1(c) 所示一维晶格阵列模型的能量本征谱 (a) $\beta = 0$, $\Omega = 0.5$; (b) $\beta = 0.15$, $\Omega = 0.5$; (c) $\beta = 0.4$, $\Omega = 0.5$; (d) 拓扑边缘态的本征能量在相应能隙中的位置随自旋轨道耦合强度 β 的变化, 图中红色圆点代表自旋向下的边缘态, 蓝色圆点代表自旋向上的边缘态; (a), (b), (c) 中的插图代表局域在晶格右侧的边缘态的振幅

Fig. 2. The eigen-energy spectrums of one-dimensional array shown in Fig. 1(c): (a) $\beta = 0$, $\Omega = 0.5$; (b) $\beta = 0.15$, $\Omega = 0.5$; (c) $\beta = 0.4$, $\Omega = 0.5$; (d) dependence of the spectral position of edge mode in versus spin-orbit coupling strength. Red dots in these figures stand for the spin-down-polarized edge states, and blue dots stand for spin-up-polarized edge states. The insets in (a), (b), (c) represent the amplitude modulus of the edge states localized at the right-end of the structure.

因此, 这部分的工作反映出时间反演对称性破缺的体系依然支持拓扑零能模, 但与时间反演对称体系中模式的本征值总被“钳制”在能隙中央位置不同, 此时模式的本征值随着时间反演对称性的破缺逐渐偏离中心位置. 另外, 自旋向上和自旋向下的边缘态的能量本征值在能隙中的移动方向相反.

3.2 一维拓扑零能模的空间移动性

迄今为止绝大部分关于拓扑零能模的研究均基于一维的周期系统. 这些模式属于空间零维模,

因为它们局域在一维晶格的末端, 不具有空间上的任何移动性. 最近有若干二维周期晶格中的拓扑零能模的研究^[17–19], 但这些工作涉及的两维晶格在两个维度上均被截断, 研究者们仅关注出现在晶格边角处 (corner) 的拓扑零能模, 因此, 这些模式仍旧属于零维模.

我们提出一维拓扑零能模的概念. 如 3.1 节所述, 类似图 1(c) 的结构 ($L_1/L_x > 0.5$) 支持拓扑零能模, 为了让这些模式移动起来, 把这种一维结构在 y 方向上周期性地排布起来, 形成在 x 方向截断而在 y 方向周期性延拓的两维晶格阵列, 如图 3(a)

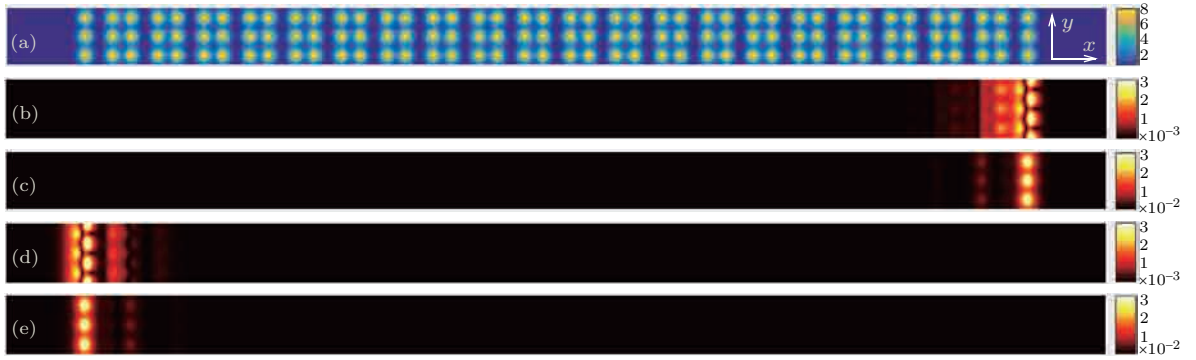


图3 (a) y 方向周期排列而 x 方向截断的二维晶格结构; 动量为 $k = 0.25K$ 的局域在晶格右侧的边缘态 $|\psi_+|$ (b) 和 $|\psi_-|$ (c), 以及局域在晶格左侧的边缘态的 $|\psi_+|$ (d) 和 $|\psi_-|$ (e); $L_1/L_x = 0.6$, $L_y = 1.4$, $\beta = 0.15$, $\Omega = 0.5$

Fig. 3. (a) Two-dimensional array periodic in y direction and finite in x direction. Modulus of $|\psi_+|$ (b) and $|\psi_-|$ (c) of the edge state associated with wavevector $k = 0.25K$ located at the right-end of the structure; (d) and (e) are the same as (b) and (c) but for edge modes located at the left-end of the structure. $L_1/L_x = 0.6$, $L_y = 1.4$, $\beta = 0.15$, $\Omega = 0.5$.

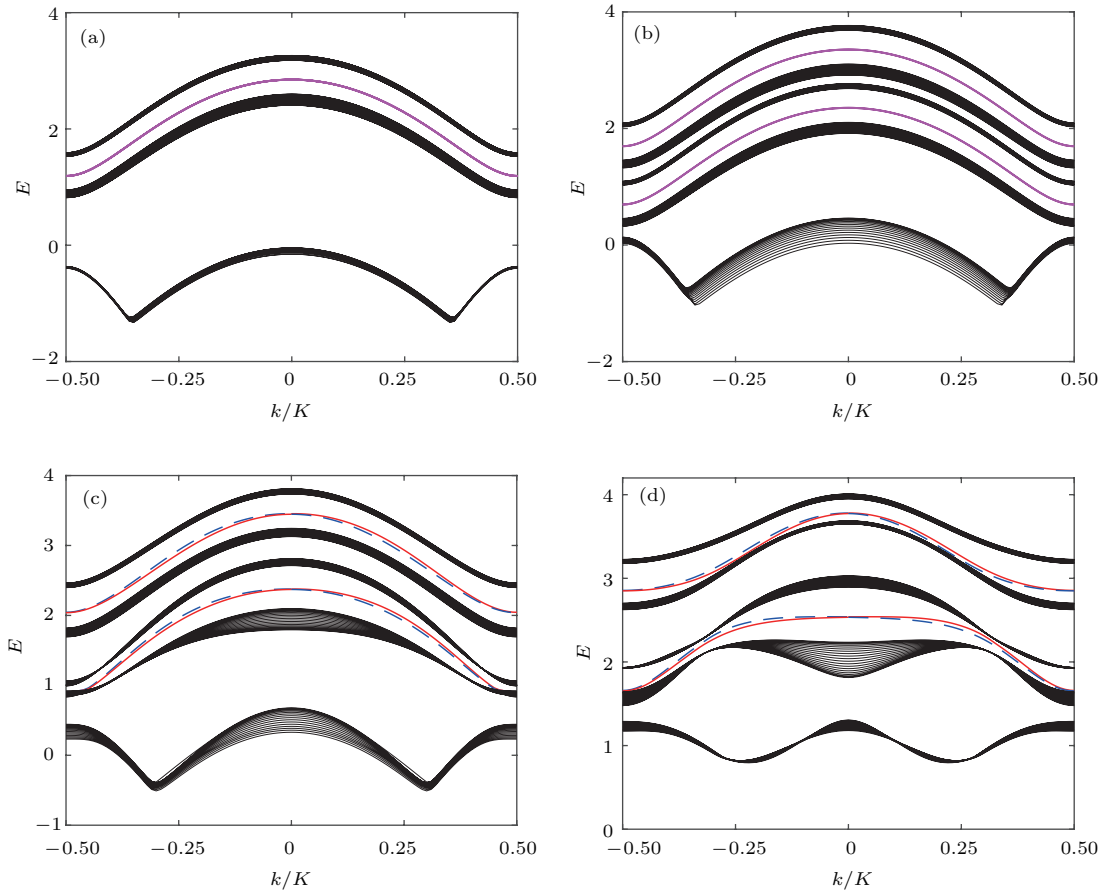


图4 图3(a)所示的二维晶格的能量本征谱 (a) $\beta = 0$, $\Omega = 0$; (b) $\beta = 0$, $\Omega = 0.5$; (c) $\beta = 0.15$, $\Omega = 0.5$; (d) $\beta = 0.3$, $\Omega = 0.5$; 图中红色实线代表局域在晶格右侧的边缘态, 蓝色虚线代表局域在晶格左侧的边缘态

Fig. 4. The eigen-energy spectrum of two-dimensional array shown in Fig. 3(c): (a) $\beta = 0$, $\Omega = 0$; (b) $\beta = 0$, $\Omega = 0.5$; (c) $\beta = 0.15$, $\Omega = 0.5$; (d) $\beta = 0.3$, $\Omega = 0.5$. Red-solid lines stand for the edge modes localized at the right-end of the lattice, while blue-dashed lines stand for those at the left-end.

所示(该图 y 方向仅显示了三个周期)。显然, 此时原来局域在一维晶格末端的拓扑零能模有可能通过在 y 方向上的耦合而沿着 y 轴移动起来, 从而实

现一维拓扑零能模。

为了研究这个问题, 考虑图3(a)所示结构所支持的在 x 方向局域而在 y 方向周期的本征

模, 即假定 $\psi_{\pm}(x, y, t) = u_{\pm}(x, y)e^{iky + iEt}$, 其中 $u_{\pm}(x, y) = u_{\pm}(x, y + L_y)$, $u_{\pm}|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, k 是 y 方向归一化的 Bloch 动量. 将上述形式的 Bloch 波代入方程 (2), 并选取 42 个微腔组成的阵列作为一个基元 (图 3(a) 显示了三个这样的基元), 求解在满足边界条件下的本征谱 $E(k)$, 所得结果如图 4 所示. 图 4(a) 给出了 $\beta = \Omega = 0$ 时的谱, 可以看到在前两个能带的接近中间的位置, 出现了一条边缘态能带. 除了在特殊的动量点 $k = 0, \pm 0.5K$ ($K = 2\pi/L_y$) 外, 该能带反映群速度 $dE/dk \neq 0$, 表明这种拓扑零能模可以在 y 方向上沿着晶格边缘以相应的群速度移动, 即它们是以一维形式存在的拓扑零能模, 这是传统的零维零能模在二维晶格中的推广.

注意, 图 4(a) 中的每一个能级其实都对应着

两个简并的自旋能级. 施加 Zeeman 场 $\Omega = 0.5$ 后, 能级的自旋简并得以解除 (图 4(b)). 不过, 当 $\beta = 0$ 时, 系统的时间反演对称性仍旧得以保持. 这使得能带结构中, 对于任意一对波矢 $(k, -k)$, 都有 $E(-k) = E(k)$, 这种能级关于波矢的对称性确实体现在图 4(a) 和图 4(b) 中.

现在让 $\beta \neq 0$ ($\Omega = 0.5$), 即打破系统的时间反演对称性. 此时系统能谱如图 4(c) 和图 4(d) 所示: 图中的红色实线代表的是局域在二维晶格右侧的边缘态, 蓝色虚线则代表局域在左侧的边缘态. 这两类边缘态典型的模式分布见图 3(b)–(e) (所示为 $k = 0.25K$ 的波形图). 从能谱图中可以看到两个特点: 第一, 除在时间反演对称不变点 ($k = 0, \pm 0.5K$) 之外, 左右两侧的边缘态能量不再简并; 第二, 除在时间反演不变点之外, 一般地

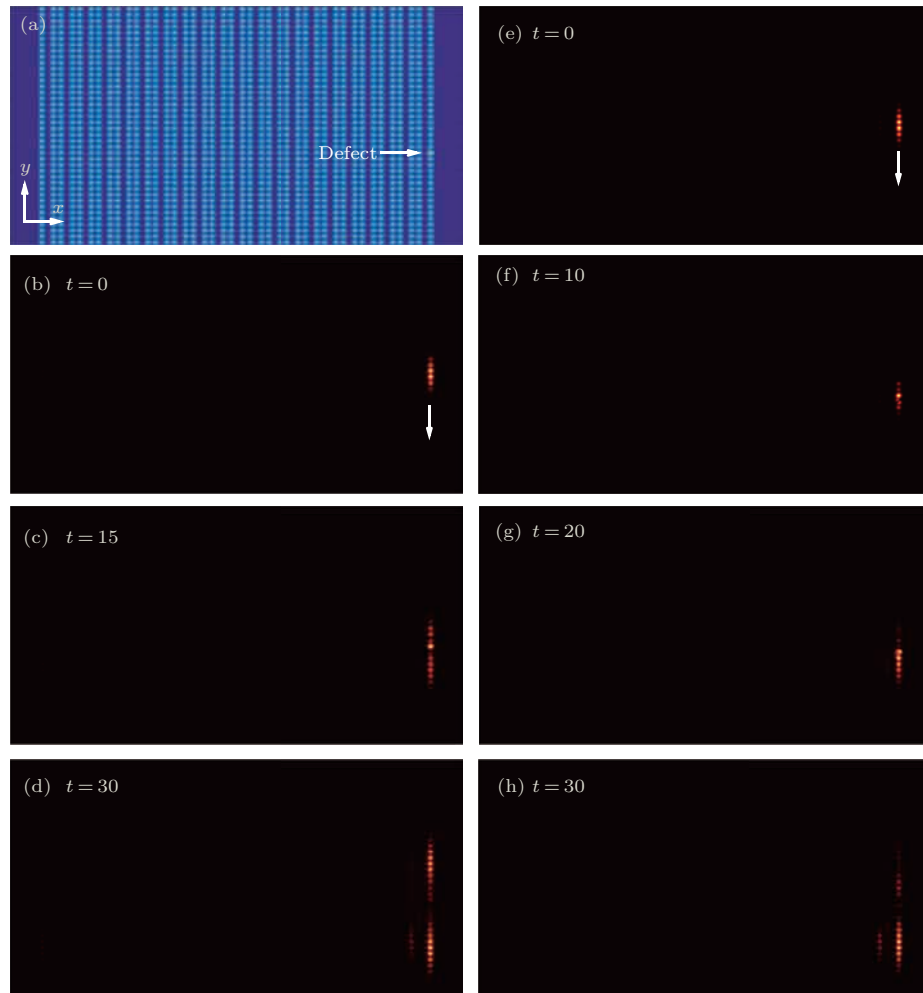


图 5 (a) 二维微腔阵列结构, 在阵列右侧边缘处设置有一缺陷势阱 $p = 16$, 而其他所有势阱 $p = 8$; (b), (c), (d) 自旋轨道耦合强度 $\beta = 0$ 时, 波包在演化过程中三个时间点的振幅图; (e), (f), (g), (h) 在自旋轨道耦合 $\beta = 0.15$ 情况下, 波包在演化过程中四个时间点的振幅图

Fig. 5. (a) Schematics of two-dimensional array with a defected potential well $p = 16$ positioned at the structure edge, while all other potentials wells having $p = 8$; (b), (c), and (d) show the evolution of edge state at three moments of time when $\beta = 0$; (e), (f), (g) and (h) show the evolution of edge state at four moments of time when $\beta = 0.15$.

有 $E(-k) \neq E(k)$, 即波矢相反的一对 Bloch 波其能量并不相同, 或者, 能量相同的一对 Bloch 波其波矢大小并不相同. 这两个特点都是系统的时间反演对称性破缺在能带图上的直接体现. 值得一提的是, 考虑到半导体微腔技术水平目前所能达到的自旋轨道耦合强度的限制, 这种由于时间反演对称性破缺导致的一对相应的左右边缘态或一对反向传播的 Bloch 波的能级分裂程度较为微弱. 即便如此, 仍能产生足够明显的效应.

为了说明这一点, 模拟了边缘态在边缘含有障碍物的晶格中的传输. 如图 5(a) 所示, 用边缘处设置一缺陷微腔来模拟障碍物, 该缺陷微腔的势阱深度被设定为其他理想微腔势阱深度的两倍, 即缺陷微腔 $p = 16$, 而其他所有微腔 $p = 8$ (缺陷程度达 100%). 系统的初始激发条件设定为受高斯包络调制的 Bloch 波, 即 $\psi_{\pm}(x, y)|_{t=0} = u_{\pm}(x, y; k) \exp(-y^2/w^2)$, 其中 $u_{\pm}(x, y; k)$ 表示动量为 k 的 Bloch 波 (边缘态), 参数 w 为高斯函数的宽度. 分别选取图 4(b) 和图 4(c) 上 $k = 0.25K$ 处的 Bloch 波, 并取 $w = 4$, 用分步傅里叶算法求解方程 (2), 以模拟这种初始激发分别在时间反演对称 (图 5(b)—(d)) 和不对称 (图 5(e)—(h)) 系统中的演化行为. 可以发现, 当 $\beta = 0$ 时, 波包在向下传输的过程中, 当遭遇缺陷微腔时, 一部分能量绕过去后继续向下移动, 但还有一部分产生了严重的反射. 在这个具体的实例中, 约有 50% 的能量被反射. 与此形成鲜明对比的是, 在时间反演对称性破缺的系统中, 绝大部分能量绕过了缺陷微腔之后继续向前传播, 仅有 8% 的能量被障碍物反射了回来. 这是因为在 $\beta \neq 0$ 时, $k = 0.25K$ 前行波无法耦合到 $k = -0.25K$ 的反射波上 ($E(-k) \neq E(k)$), 而只能耦合到与它能量一样的 $k = -0.23K$ 反射波上. 这种相互作用模式的动量失配, 使得模式的重叠积分和相互耦合明显减弱, 从而导致了拓扑零能模传输时的极强的绕异性.

4 结论与展望

本文以半导体微腔阵列中光子-激子形成的准粒子为例, 研究了其在自旋轨道耦合与外加 Zeeman 场的双重作用下, 时间反演对称性破缺对拓扑零能模的影响. 发现时间反演对称性破缺的体系依然支持拓扑零能模, 但其能量本征值随着自旋轨道

耦合的出现, 开始偏离能隙的中心位置发生移动. 自旋向上和自旋向下的边缘态在能隙中移动的方向恰好相反. 本文还发现了沿着二维晶格边缘处传输的拓扑零能模, 提出了一维零能模的概念. 时间反演对称性的破缺解除了一维拓扑零能模的前向和反向传输模式的能量简并, 从而使得它们在传输过程中具有极强的绕过障碍物的能力. 这种具有稳定传输特性的拓扑零能模可能在信息传输和处理中具有较好的应用优势.

最后简单地展望未来的相关工作. 首先, 在本工作中, 时间反演破缺带来的能级分裂的程度较为微弱, 除自旋轨道耦合强度不能取得太大之外, 这种情况和所用的方形晶格也密切相关. 未来可以考虑其他形式的二维晶格 (如类石墨烯晶格 [30,31]、Lieb [32] 晶格、Kagome 晶格等 [33]), 通过晶格参数的调整, 以期实现较大程度的能级分裂, 这对于进一步增强拓扑零能模传输的绕异性大有裨益. 其次, 本文采用的方形晶格属于拓扑平庸的 Chern Insulator (通过陈数的计算可以证实该点), 因此, 在工作中并未发现连接上下能带的拓扑边缘态. 未来可以考虑采用其他形式的二维晶格得到拓扑不平庸的 Chern Insulator, 此时两种形式的边缘态——独立于主能带的拓扑零能模和连接主能带的拓扑边缘态——能否同时出现, 是一个值得研究的有趣课题. 最后, 从图 5 所示的波包传输模拟图可以发现, 波包在沿着晶格边缘传输时由于色散效应会慢慢展宽. 未来可以将本文工作中忽略的非线性效应考虑进来, 用非线性平衡色散, 以期得到波形保持不变的稳定传输的边缘态孤子. 拓扑保护是否会传递给边缘态孤子? 非线性是否会影响系统的拓扑性? 在未来的工作中将研究这些有趣的问题.

参考文献

- [1] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [2] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [3] Haldane F D M, Raghu S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013904
- [4] Wang Z, Chong Y, Joannopoulos J D, Soljačić M 2009 *Nature* **461** 772
- [5] Lu L, Joannopoulos J D, Soljačić M 2014 *Nat. Photon.* **8** 821
- [6] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698
- [7] Longhi S 2013 *Opt. Lett.* **38** 3716
- [8] Cheng Q, Pan Y, Wang Q, Li T, Zhu S 2015 *Laser Photon. Rev.* **9** 392

- [9] Ge L, Wang L, Xiao M, Wen W, Chan C T, Han D 2015 *Opt. Express* **23** 21585
- [10] Slobozhanyuk A P, Poddubny A N, Miroshnichenko A E, Belov P A, Kivshar Y S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 123901
- [11] Sinev I S, Mukhin I S, Slobozhanyuk A P, Poddubny A N, Miroshnichenko A E, Samusev A K, Kivshar Y S 2015 *Nanoscale* **7** 11904
- [12] Schomerus H 2013 *Opt. Lett.* **38** 1912
- [13] Malkova N, Hromada I, Wang X, Bryant G, Chen Z 2009 *Opt. Lett.* **34** 1633
- [14] Xiao M, Zhang Z Q, Chan C T 2014 *Phys. Rev. X* **4** 021017
- [15] Deng H, Chen X, Panoiu N C, Ye F 2016 *Opt. Lett.* **41** 4281
- [16] Christodoulides D N, Lederer F, Silberberg Y 2003 *Nature* **424** 817
- [17] Teo J C Y, Hughes T L 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 047006
- [18] Benalcazar W A, Teo J C Y, Hughes T L 2014 *Phys. Rev. B* **89** 224503
- [19] Noh J, Benalcazar W A, Huang S, Collins M J, Chen K, Hughes T L, Rechtsman M C 2016 arXiv: 1611.02373v1
- [20] Nalitov A V, Solnyshkov D D, Malpuech G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 116401
- [21] Bardyn C E, Karzig T, Refael G, Liew T C 2015 *Phys. Rev. B* **91** 161413
- [22] Karzig T, Bardyn C E, Lindner N H, Refael G 2015 *Phys. Rev. X* **5** 031001
- [23] Bleu O, Solnyshkov D D, Malpuech G 2016 *Phys. Rev. B* **93** 085438
- [24] Milićević M, Ozawa T, Andreakou P, Carusotto I, Jacqmin T, Galopin E, Amo A 2015 *2D Mater.* **2** 034012
- [25] Sich M, Krizhanovskii D N, Skolnick M S, Gorbach A V, Hartley R, Skryabin D V, Santos P V 2012 *Nat. Photon.* **6** 50
- [26] Kartashov Y V, Skryabin D V 2016 *Optica* **3** 1228
- [27] Li Y M, Li J, Shi L K, Zhang D, Yang W, Chang K 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 166804
- [28] Flayac H 2012 *Ph. D. Dissertation* (Clermont-Ferrand: Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II)
- [29] Joannopoulos J D, Johnson S G, Winn J N, Meade R D 2008 *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light* (2nd Ed.) (New Jersey: Princeton University Press) p25
- [30] Peleg O, Bartal G, Freedman B, Manela O, Segev M, Christodoulides D N 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 103901
- [31] Li Y M, Zhou X, Zhang Y Y, Zhang D, Chang K 2017 *Phys. Rev. B* **96** 035406
- [32] Guzmán-Silva D, Mejía-Cortés C, Bandres M A, Rechtsman M C, Weimann S, Nolte S, Vicencio R A 2014 *New J. Phys.* **16** 063061
- [33] Schulz S A, Upham J, O' Faolain L, Boyd R W 2017 *Opt. Lett.* **42** 3243

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Topological zero-energy modes in
time-reversal-symmetry-broken systems*Zhang Wei-Feng¹⁾ Li Chun-Yan¹⁾ Chen Xian-Feng¹⁾
Huang Chang-Ming²⁾ Ye Fang-Wei^{1)†}¹⁾ (State Key Laboratory of Advanced Optical Communication Systems and Networks, School of Physics and Astronomy,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)²⁾ (Department of Physics of Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

(Received 3 August 2017; revised manuscript received 28 September 2017)

Abstract

The well-known Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model predicts that a chain of sites with alternating coupling constant exhibits two topological distinct phases, and at the truncated edge of the topological nontrivial phase there exists topologically protected edge modes. Such modes are named zero-energy modes as their eigenvalues are located exactly at the midgaps of the corresponding bandstructures. The previous publications have reported a variety of photonic realizations of the SSH model, however, all of these studies have been restricted in the systems of time-reversal-symmetry (TRS), and thus the important question how the breaking of TRS affects the topological edge modes has not been explored. In this work, to the best of our knowledge, we study for the first time the topological zero-energy modes in the systems where the TRS is broken. The system used here is semiconductor microcavities supporting exciton-polariton quasi-particle, in which the interplay between the spin-orbit coupling stemming from the TE-TM energy splitting and the Zeeman effect causes the TRS to break. We first study the topological edge modes occurring at the edge of one-dimensional microcavity array that has alternative coupling strengths between adjacent microcavity, and, by rigorously solving the Schrödinger-like equations (see Eq. (1) or Eq. (2) in the main text), we find that the eigen-energies of topological zero-energy modes are no longer pinned at the midgap position: rather, with the increasing of the spin-orbit coupling, they gradually shift from the original midgap position, with the spin-down edge modes moving toward the lower band while the spin-up edge modes moving towards the upper band. Interestingly enough, the mode profiles of these edge modes remain almost unchanged even they are approaching the bulk transmission bands, which is in sharp contrast to the conventional defect modes that have an origin of bifurcation from the Bloch mode of the upper or lower bands. We also study the edge modes in the two-dimensional microcavity square array, and find that the topological zero modes acquire mobility along the truncated edge due to the coupling from the adjacent arrays. Importantly, owing to the breaking of the TRS, a pair of counterpropagating edge modes, of which one has a momentum $\mathbf{k}$ and the other has $-\mathbf{k}$, is no longer of energy degeneracy; as a result the scattering between the forward- and backward-propagating modes is greatly suppressed. Thus, we propose the concept of the one-dimensional topological zero-energy modes that are propagating along the two-dimensional lattice edge, with extremely weak backscattering even on the collisions of the topological zero-energy modes with structural defects or disorder.

Keywords: topological insulators, topological zero-energy mode, edge mode, spin-orbit coupling**PACS:** 02.10.Yn, 33.15.Vb, 98.52.Cf, 78.47.dc**DOI:** 10.7498/aps.66.220201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11104181, 61475101) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (Grant No. 20110073120074).

† Corresponding author. E-mail: fangweiye@sjtu.edu.cn

Dirac 光子晶体

王海啸 徐林 蒋建华

Dirac photonic crystal

Wang Hai-Xiao Xu Lin Jiang Jian-Hua

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 220302 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.220302

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.220302>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

谐振子系统的量子-经典轨道、Berry 相及 Hannay 角

Correspondences between quantum and classical orbits Berry phases and Hannay angles for harmonic oscillator system

物理学报.2015, 64(24): 240302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.240302>

非线性系统的非对角 Berry 相

Off-diagonal Berry phase in nonlinear systems

物理学报.2013, 62(11): 110302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.110302>

Born-Oppenheimer 近似下谐振子场驱动电磁模系统的 Berry 相和 Hannay 角

Berry phase and Hannay's angle of an electromagnetic mode system driven by harmonic field with Born-Oppenheimer approximation

物理学报.2013, 62(10): 100302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.100302>

人工规范势下三阱玻色-爱因斯坦凝聚系统的动力学研究

Dynamics of Bose-Einstein condensate trapped in a triple-well with synthetic gauge field

物理学报.2012, 61(23): 230304 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.230304>

具有三体相互作用的自旋链系统中的几何相位与量子相变

Berry phase and quantum phase transition in spin chain system with three-site interaction

物理学报.2012, 61(22): 220302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.220302>

专题: 拓扑经典波动

Dirac光子晶体^{*}王海啸^{1)†} 徐林¹⁾ 蒋建华^{1)2)‡}¹⁾(苏州大学物理与光电·能源学部, 苏州 215006)²⁾(苏州大学, 2011 苏州纳米科技协同创新中心, 苏州 215006)

(2017 年 8 月 15 日收到; 2017 年 10 月 31 日收到修改稿)

Dirac 费米子作为粒子物理中的基本粒子之一, 其理论在近年来蓬勃发展的拓扑电子理论领域中被广泛提及并用来刻画具有 Dirac 费米子性质的电子态. 这种特殊的能态通常被称为 Dirac 点, 在能谱上表现为两条不同能带之间的线性交叉点. 由于 Dirac 点往往是发生拓扑相变的转变点, 因而也被视为实现各种拓扑态的重要母态. 作为可与拓扑电子体系类比的拓扑光子晶体因其独特的潜在应用价值也受到人们的广泛关注, 实现包含 Dirac 点的光子能带已成为研究拓扑光子晶体的核心课题. 本文基于电子的拓扑理论, 简要地回顾了 Dirac 点在光子系统中的研究进展, 特别介绍了如何在光子晶体中利用不同晶格对称性实现在高对称点/线上的 Dirac 点, 以及由 Dirac 点衍生的 Weyl 点.

关键词: 光子晶体, Dirac 点, 拓扑能带, 量子自旋霍尔效应**PACS:** 03.65.Vf, 41.20.Jb, 42.25.Gy**DOI:** 10.7498/aps.66.220302

1 引言

1928 年, Dirac^[1] 给出了自旋为 1/2 的粒子在相对论量子力学下的波动方程, 方程的解代表着——类基本粒子, 称为 Dirac 费米子 (包含电子和正电子). 特别地, 当粒子的质量为零时, 粒子的能量与动量呈现出线性关系. 通常人们将具有这种线性色散关系的粒子称为无质量 Dirac 费米子. 在凝聚态物理中, 无质量 Dirac 费米子的色散关系也用于描述某些特殊的电子态, 这些电子态被称为 Dirac 点. 其中最为人们所熟悉的就是石墨烯, 它的能带结构在布里渊区边界 $K(K')$ 处具有线性色散关系^[2]. 这种电子态具有一些非常奇特的传输性质, 例如室温量子霍尔效应^[3] 和 Klein 隧穿^[4] 等.

近年来拓扑电子理论在凝聚态领域的迅速发展使得 Dirac 方程又重新焕发出活力, 系统的研究表明 Dirac 方程对理解拓扑绝缘体和拓扑超导体的

性质和相变具有重要意义^[5]. 人们发现, 在连续变化下只要能带之间的带隙不闭合, 那么系统的拓扑性质就不会发生改变. 换言之, 能带拓扑性质的改变总是需要经历能带闭合-打开的过程. Dirac 点作为能带的线性交叉点, 是能带闭合-打开的转变点, 无疑在拓扑能带理论中占据着举足轻重的地位. 历史上, Dirac 点是获得非平庸拓扑能带的一个重要途径. 早在 1988 年, 普林斯顿大学的霍尔丹 (F. D. M. Haldane) 首次在六角蜂窝晶格中给出了量子反常霍尔效应 (quantum anomalous Hall effect) 的玩具模型^[6]. 这个模型可以无需借助外磁场而实现具有非平庸陈数的拓扑能带, 其性质类似于外磁场为零的量子霍尔效应, 对应系统的边界上有一个单向传输的边界态出现. 在 Haldane 模型中, 从平庸能带到非平庸能带的转变就是通过打开蜂窝晶格中 Dirac 点的能隙实现的. 需要说明的是, 在 Haldane 模型中只有两种打开 Dirac 点能隙的方式: 第一种

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 11675116) 和苏州大学科研启动基金资助的课题.[†] 通信作者. E-mail: xiked20072862@163.com[‡] 通信作者. E-mail: joejhjiang@hotmail.com

方式是破缺空间反映对称性, 它导致一个平庸的能带; 第二种方式是破缺时间反演对称性, 它导致一个拓扑非平庸的能带.

然而, Haldane 模型并未考虑电子的自旋. 直到 2005 年, 宾夕法尼亚大学的凯恩 (C. L. Kane) 和米尔 (E. J. Mele) 在石墨烯系统中发现把 Haldane 模型扩展到包含电子自旋自由度后, 系统可以出现新的拓扑相, 称之为 Z_2 拓扑相^[7,8]. 这种特殊的拓扑相并不破缺时间反演对称性, 却在系统边界上也存在着一对传播方向相反, 自旋极化相反的边界态. 由于时间反演对称性的保护, 它们能相互稳定共存, 即使在无序系统中它们仍然能够保持单向传输且不发生背向散射. 这是另一个打开 Dirac 点的能隙之后导致非平庸的拓扑能带的例子. 此后, 人们又发现三维的拓扑绝缘体也可以通过打开三维 Dirac 点的能隙来实现^[9].

由以上这些例子可见, 在 Dirac 方程中引入非零质量项而打开 Dirac 点能隙, 可以使系统发生拓扑相变. 那么, 如果不打开 Dirac 点的能隙能否实现系统的拓扑相变呢? 答案是肯定的. 早在 Dirac 方程被提出的第二年, Weyl 就指出 Dirac 方程无质量的解描述的是一对新粒子, 这一对新粒子具有相反的手性, 也就是今天人们常说的 Weyl 费米子^[10]. 所以, 具有四重简并 (包含自旋和轨道两个自由度) 的 Dirac 点也可以看成是一对具有相反手性的 Weyl 点组合而成; 而当系统不再具有某种对称性时, 手性相反的 Weyl 费米子的能谱将不再重叠, Dirac 点也就会退化成为一对手性相反的 Weyl 点.

由此可见, 无论是拓扑绝缘体, 还是近来广受关注的 Weyl 拓扑节点, 都可以通过 Dirac 点来实现, 因此, Dirac 点作为拓扑态的一个母态, 对于研究拓扑物质态和拓扑相变具有极其重要的意义.

Dirac 点在电子系统中的广泛研究也吸引了光学领域研究人员的注意^[11–20]. 因为从能带图像和布洛赫定理来看, 光子晶体和原子晶体具有很多的相似性. 然而需要指出的是, 电子作为费米子具有自旋 1/2 的独特内禀属性. 由于此独特的性质, Kramers 定理导致电子在时间反演对称的波矢下具有天然的二重简并, 而光子作为玻色子则不具有这样的二重简并. 事实上, 实现光子拓扑态的核心挑战之一就是要实现光子能带的二重简并.

为此, 人们首先根据光特有的偏振特性, 利用 TE+TM/TE-TM (TE 和 TM 分别表示横向电场

和横向磁场模式)^[14] 混合模式、TM/TE 模式^[15], 左旋光/右旋光^[16] 等在光学系统中实现了特殊材料/超材料中的二重简并, 并借助光子晶体实现了光学系统中的 Dirac 点和拓扑物质态. 我们把利用光学系统的偏振自由度实现二重简并的拓扑光子系统以及实现具有陈数的光子系统的研究^[12,13] 称为拓扑光子学研究的第一阶段. 由于这些研究往往需要具有特殊性质的材料, 如磁光材料、具有磁电耦合的材料, 具有电磁对偶对称性的材料等, 而难以有广阔的应用前景. 从 2015 年开始, 人们开始提出各种具有特别晶格对称性的光子晶体^[18–22], 这些光子晶体并不需要特殊的材料, 只用普通的介质材料即可实现光子的拓扑态. 与以往利用光偏振特性的研究不同, 利用晶格对称性可以有效地实现光子能谱在特殊波矢上的二重简并, 并进而实现光子的 Dirac 点. 通过打开 Dirac 点可以实现特殊的拓扑光子态. 本文着重介绍基于点群和非点群的对称性来实现光子晶体中的 Dirac 点和拓扑光子态的方法, 首先讨论二维的光子晶体, 再扩展到三维的光子晶体.

在开始之前, 需要先澄清用词方面的一些混淆. 本文中的 Dirac 点是具有四重简并的线性能谱交叉点. 因为 Dirac 的原始论文考虑的正是一个具有四重自由度的系统: 正电子有两重自由度 (自旋 1/2), 电子也有两重自由度, 一共有四重自由度. 与此相对的, Weyl 点指的是具有两重简并的线性交叉点 (也可以是抛物线交叉点, 这里暂不考虑). 在二维系统中, 由于无法定义 Weyl 点, 称所有的线性色散交叉点为 Dirac 点. 若二维系统具有四重简并的 Dirac 点, 那么就称之为双 Dirac 点.

2 二维 Dirac 光子态

2.1 双 Dirac 点及相图

理论上最早给出二维介质光子晶体拓扑绝缘体的是日本国家材料科学研究所 (NIMS) 的 Hu 研究组^[18], 他们在蜂窝点阵结构中, 通过能带折叠的方式将 K 和 K' 点的 Dirac 点折叠到布里渊区中心, 获得了双 Dirac 点. 通过变形点阵结构可以打开双 Dirac 点的带隙, 并实现能带反转, 由此实现光子的量子自旋霍尔效应. 这里双 Dirac 点出现的条件是晶格具有 C_6 旋转对称性. 因为在二维点群中, 只有具有 C_6 对称性的三角晶格系统才会在布里渊区中心出现双 Dirac 点^[23,24].

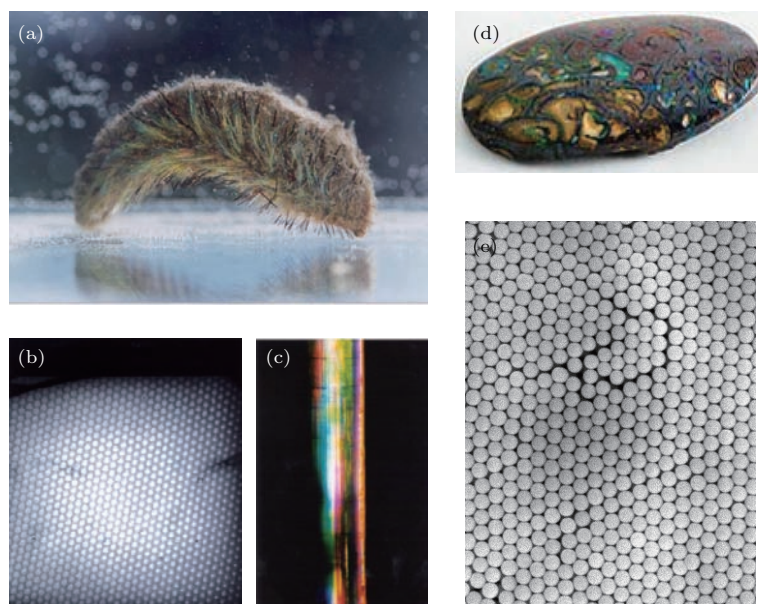


图1 自然界中广泛存在的核壳结构 (a) 海鼠; (b) 海鼠体表刺的透射电子显微像; (c) 海鼠体表的刺; (d) 蛋白石头; (e) 蛋白石胶体晶体的扫描电子显微像

Fig. 1. Hexagonal photonic crystals in nature: (a) The sea mouse (Aphroditidae); (b) the transmission electron micrograph of the sea mouse spine; (c) images of a sea mouse spine illuminated with light; (d) opal; (e) the SEM images of the colloidal crystal in opal.

2016年, Xu等^[20]利用核-壳结构的二维光子晶体给出了另一种实现光子的量子自旋霍尔效应的例子. 核-壳结构构成的三角晶格广泛存在于自然界中, 包括胶体晶体及海鼠皮肤表面凸起的晶格结构^[25,26], 都是这种结构(图1).

为方便表述二维核-壳结构光子晶体的拓扑相变机理, 在这里核-壳的内径和外径分别设为 R_1 和 R_2 , 晶格常数为 $a = 1$, 核壳结构及背景材料的介电常数分别为 $\varepsilon_1 = 1$ 和 $\varepsilon_2 = 12$ (见图2(a)插图). 利用基于有限元计算方法的COMSOL软件可以计算二维光子晶体的能带结构及其场图, 不同宇称能带之间的偶然简并可以通过调节核壳结构的内外径来实现. 特别地, 当结构参数 $R_2/R_1 = 0.26/0.45$ 时, 在 Γ 点出现了p带和d带的四重简并态, 就是系统发生拓扑转变的双Dirac点(图2(b)). 具体而言, 奇宇称的两个简并态是两个p波, 如 p_x 和 p_y 态; 而偶宇称的两个简并态是两个d波, 如 $d_{x^2-y^2}$ 和 d_{xy} 态. 一个更好的表象是把它们重新组合成如下的形式: 奇宇称的两个态 $p_+ = p_x + ip_y$ 和 $p_- = p_x - ip_y$, 二者可以通过时间反演对称操作相互联系, 类比电子系统中的自旋上和自旋下的两个简并态, 将其称为p带的赝自旋. 类似地, 偶宇称的两个态可以表示 $d_+ = d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ 及 $d_- = d_{x^2-y^2} - id_{xy}$, 分别对应d带的赝自旋上态和赝自旋下态^[18].

由于 Z_2 拓扑相是打开双Dirac点得到的, 所以我们有必要采用电子能带论发展起来的 $k \cdot p$ 理论来讨论这些能带之间(p带和d带)的相互作用($k \cdot p$ 理论在Maxwell方程中的正确应用及其对量子自旋霍尔效应的解释请参考文献^[20]). 首先, TM模式下的Maxwell方程可以写成:

$$\nabla \times \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{h}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\omega_n^2}{c^2} \mathbf{h}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

这里的 n 是光子的能带指标, $\mathbf{h}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 是光子磁场的布洛赫函数, 它的归一化表达式是

$$\int_{\text{u.c.}} d\mathbf{r} \mathbf{h}_{n',\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \delta_{nn'},$$

积分区域u.c. 代表的是一个原胞单元. (1)式中的厄密算符 $\nabla \times \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times$ 可以作为光子系统的哈密顿量(目前有一些论文在 $k \cdot p$ 方法中使用的光子“哈密顿量”不是厄密算符, 正确的 $k \cdot p$ 方法见文献^[20]), 将布洛赫函数 $\mathbf{h}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 在 Γ 点展开, 可以得到系统的 $k \cdot p$ 哈密顿量:

$$H_{nn'}(\mathbf{k}) = \frac{\omega_{n,0}^2}{c^2} \delta_{nn'} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_{nn'} - \int_{\text{u.c.}} \frac{d\mathbf{r}}{\varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{h}_{n,0}^*(\mathbf{r}) \cdot [\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{h}_{n',0}(\mathbf{r}))], \quad (2)$$

这里的 $\omega_{n,0}$ 表示第 n 条能带在 Γ 点的本征频率, 动量 $\mathbf{P}$ 矩阵元的表达式为

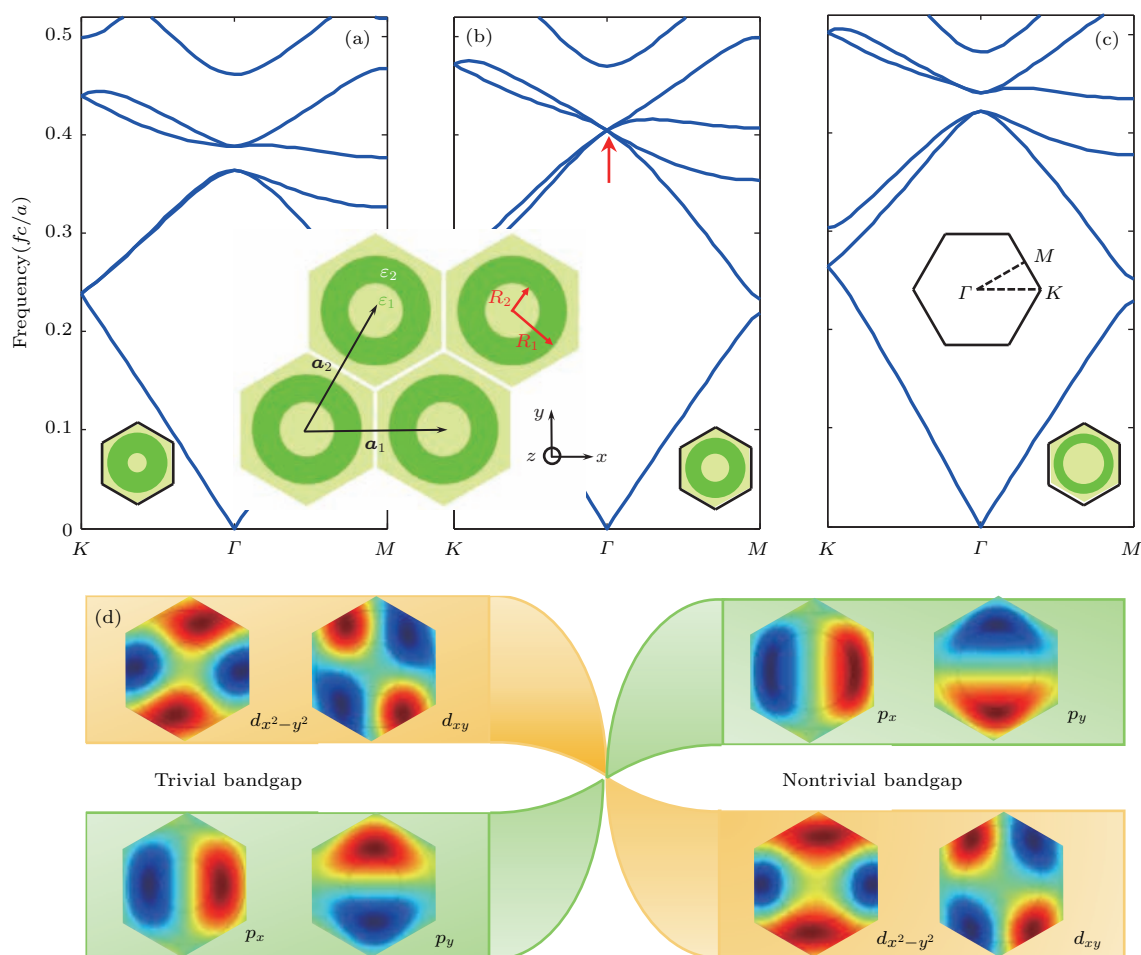


图2 核-壳结构的能带图及拓扑相变示意图 (a) $R_2/R_1 = 0.2/0.45$, 正常的光子绝缘态; (b) $R_2/R_1 = 0.26/0.45$, Dirac 光子态; (c) $R_2/R_1 = 0.3/0.45$, 量子自旋光子霍尔态; (d) 相变示意图, 左侧为能带图(a)的第2, 3与4, 5条能带在 Γ 点的电场场图, 右侧为能带图(c)的第2, 3与4, 5条能带在 Γ 点的电场场图

Fig. 2. The band structure of core-shell photonic crystal and the schematic of topological phase diagram: (a) $R_2/R_1 = 0.2/0.45$, normal photonic insulator state; (b) $R_2/R_1 = 0.26/0.45$, Dirac photonic state; (c) $R_2/R_1 = 0.3/0.45$, quantum spin hall state; (d) schematic of topological phase transfer diagram, left panel is electric field pattern of the 2nd, 3rd and 4th, 5th band at Γ point in (a); right panel is electric field pattern of the 2nd, 3rd and 4th, 5th band at Γ point in (c).

$$P_{nn'}(\mathbf{k}) = \int_{\text{u.c.}} \frac{d\mathbf{r}}{\varepsilon(\mathbf{r})} [\mathbf{h}_{n,0}^*(\mathbf{r}) \times (\mathbf{i}\nabla \times \mathbf{h}_{n',0}(\mathbf{r})) + (\mathbf{i}\nabla \times \mathbf{h}_{n',0}(\mathbf{r})) \times \mathbf{h}_{n,0}(\mathbf{r})]. \quad (3)$$

注意到只有当第 n 和第 n' 条能带的宇称不同时, 动量 P 的矩阵元才不等于零. 根据 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ 理论, 有效哈密顿量在 $(p_+, d_+, p_-, d_-)^T$ 表象下的形式是:

$$H = \begin{pmatrix} \omega_p^2/c^2 & Ak_+ & 0 & 0 \\ A^*k_- & \omega_d^2/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_p^2/c^2 & A^*k_- \\ 0 & 0 & Ak_+ & \omega_d^2/c^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

式中的 $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$, A 是不同态之间的耦合系数; 显然, 只有相同的自旋极化方向的 p 态 (d 态) 之间 (即 p_+ 与 p_- , d_+ 与 d_-) 才会有耦合. 需要指出的

是, (4) 式给出的哈密顿量与电子系统中 Bernevig-Hughes-Zhang (BHZ) 模型^[27] 给出的哈密顿量相似, 其中的两个方块子矩阵分别对应赝自旋上和赝自旋下的有质量的 Dirac 方程. 这一对赝自旋光子对是由时间反演对称操作来联系的, 这保证了整个系统仍然满足时间反演对称性. 所以, 若把 p 带作为价带, d 带作为导带, 那么类比电子系统中的 BHZ 模型, 对应的 (4) 式就可以描述光子的量子自旋霍尔效应: 当 $\omega_p < \omega_d$ 时系统对应的就是拓扑平庸态; 当 $\omega_p > \omega_d$ 时, 系统在 Γ 点处发生了 pd 宇称反转, 这就直接导致了光子的 Z_2 拓扑态; 当 $\omega_p = \omega_d = \omega_0$ 时, 在 Γ 点就会出现一个四重简并点, 对应于双 Dirac 点, 即拓扑相变点.

虽然增加或者减小 R_2/R_1 的比值时均会打

开 p 带和 d 带之间的能隙, 但根据以上的理论模型分析, 有一种类型的能隙是平庸的, 另一种类型的能隙则是拓扑的, 其关键的点就是看系统是否发生宇称反转 (p-d 反转). 如图 2(d) 所示, 当 $R_2/R_1 < 0.25/0.46$, p 带的频率较低 ($\omega_p < \omega_d$), 系统对应于普通光子绝缘体; 当 $R_2/R_1 > 0.25/0.46$ 时, d 带的频率较低 ($\omega_p > \omega_d$), 对应光子拓扑绝缘体.

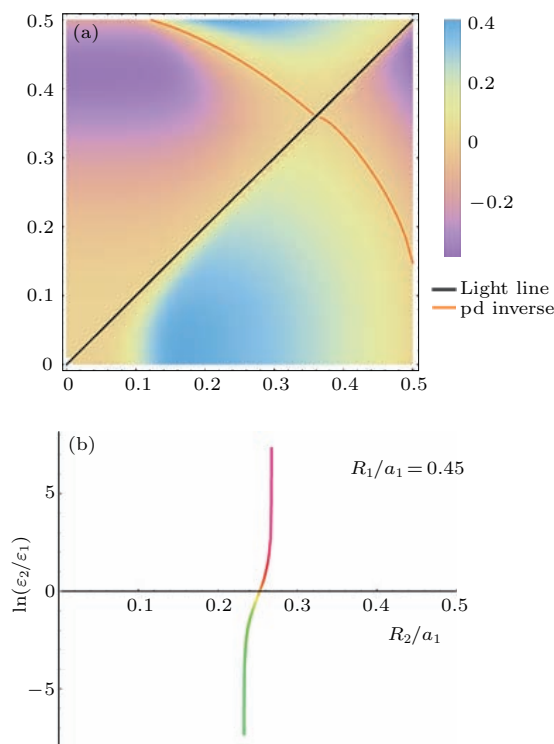


图3 核-壳结构的相图 (a) p-d 反转导致的光子 Z_2 拓扑绝缘体在 R_1 - R_2 参数空间的相图, 对角线以上及以下分别表示正结构及反结构; 橙色区域表示 p-d 正常, 对应于正常光子绝缘态, 蓝色区域表示 p-d 反转, 对应量子自旋霍尔态, 橙色实线表示 p-d 四重简并态, 即双 Dirac 点; (b) 固定外径 $R_1 = 0.45a$, 出现双 Dirac 点对应的介电常数的比率 $\ln(\epsilon_1/\epsilon_2)$ 与内径 R_2 的关系

Fig. 3. Phase diagram of core-shell structure: (a) Phase diagram of the p-d inversion-induced photonic Z_2 topological insulator in the R_1 - R_2 parameter space, the diagonal line represents the homogenous limit which separates the normal and reversed structures in the upper and lower triangular regions, the orange region represents that the p bands are lower than the d band at Γ point, whereas the blue region stands for the photonic analog of the Z_2 topological insulators with the p bands above the d bands at Γ point, the p-d band degeneracy at the Γ point is labeled by black line; (b) relationship between $\ln(\epsilon_1/\epsilon_2)$ and the critical inner radius R_2 where the double Dirac cone emerges, the outer radius of the hollow cylinder is fixed at $R_1 = 0.45a$.

考虑到可以通过结构参数实现光子能带的反转, 为使结果更具有普遍性, 我们也讨论了 R_1 和 R_2 独立改变对能带反转的影响, 得到了能带反转

的相图(图3(a)), 图中蓝色区域表示 p-d 反转, 橙色区域表示 p-d 正常. 由此可见, 二维三角晶格的拓扑相变在很大的参数范围内具有可调性, 甚至在反结构(这里定义 ϵ_1 和 ϵ_2 交换的结构为反结构, 即 $\epsilon_1 = 12 > \epsilon_2 = 1$)中也能实现能带宇称的反转. 同时, 我们还讨论了 ϵ_1 和 ϵ_2 的比值对双 Dirac 点出现时的几何参数 R_1 和 R_2 的影响(图3(b)). 通常情况下, 光子晶体的能隙会随着不同介质的介电常数比值的增加而增加; 但有意思的是, 当固定外径 $R_1 (= 0.45a)$ 调节内径 R_2 及 ϵ_1/ϵ_2 以获得双 Dirac 点时, 我们发现内径的临界值在 ϵ_1/ϵ_2 很大的一段范围变化很小, 这说明对介电常数对双 Dirac 点的影响远小于几何参数.

需要注意的是, 这里的物理和文献[18]中考虑的蜂窝晶格很不一样, 蜂窝晶格一定会出现双 Dirac 点, 可以把这种对称性导致的双 Dirac 点称之为必然简并点. 然而, 核-壳结构中双 Dirac 点的出现具有一定的偶然性, 不受简单因素的决定. 对于二维核壳光子晶体, 可以认为每个核壳都是一个共振腔, 其中的局域态可以认为是 Mie 散射造成准局域态[28]. 该光子晶体中的光子能带可以看成是相邻格点中的准局域态之间的相互耦合 / 杂化导致的. 通过调节球壳结构的内径和外径, 可以有效地调节 p 态和 d 态的能量和场分布, 由此有效地调节 p 带和 d 带的能量, 从而实现宇称反转的拓扑光子态.

2.2 边界态及赝自旋选择的单向传输

现在我们来讨论光子拓扑绝缘体的边界态性质. 在上述核-壳系统中, 我们可以选取两种能隙匹配且具有不同拓扑性质的光子晶体实现具有拓扑保护的边界态, 它的 Z_2 拓扑相受到了赝时间反演对称性的保护, 该赝时间反演对称算符可以表示成 $T_p = i\sigma_y K$ (K 表示复共轭算符), 其中的 σ_y 项可以写成 C_6 对称操作的线性组合使得 $T_p^2 = -1$. 这里需要说明的是, 只要系统具有二重简并态, 我们总是可以构造出这种反么正算符. 因此, 若要在光子晶体中模拟 Z_2 的拓扑, 关键就是要找到两种不同宇称的双重简并态. 在这里, 我们选取两种尺寸相近、拓扑性质不同的光子晶体 ($Z_2 = 0$ 与 $Z_2 = 1$) 来产生边界态(图4(a)与图4(b)).

从图4可以看到, A 点对应边界态的场图的坡印廷矢量方向是顺时针, 代表自旋上; B 点对应边

界态场图的坡印廷矢量方向是逆时针, 代表自旋下; 他们是由时间反演对称性联系的. 值得注意的是在图 4(c) 中, 由于 Γ 点处的 p 态及 d 态的二重简并是由点群对称性保护的, 而在由不同结构组成的边界明显地破坏了 C_6 的对称性, 这使得原本是线性交叉的边界态打开了一个微小的能隙, 计算模拟

表明这个打开的能隙与边界破坏 C_6 对称性的程度有密切的关系. 虽然表面态打开了一个小的能隙, 然而这些光子晶体能带的拓扑性质是没有歧义的 (虽然目前的理论还没有严格证明这一点, 我们最新的基于 Berry phase 的计算已经证明了非平庸的拓扑数).

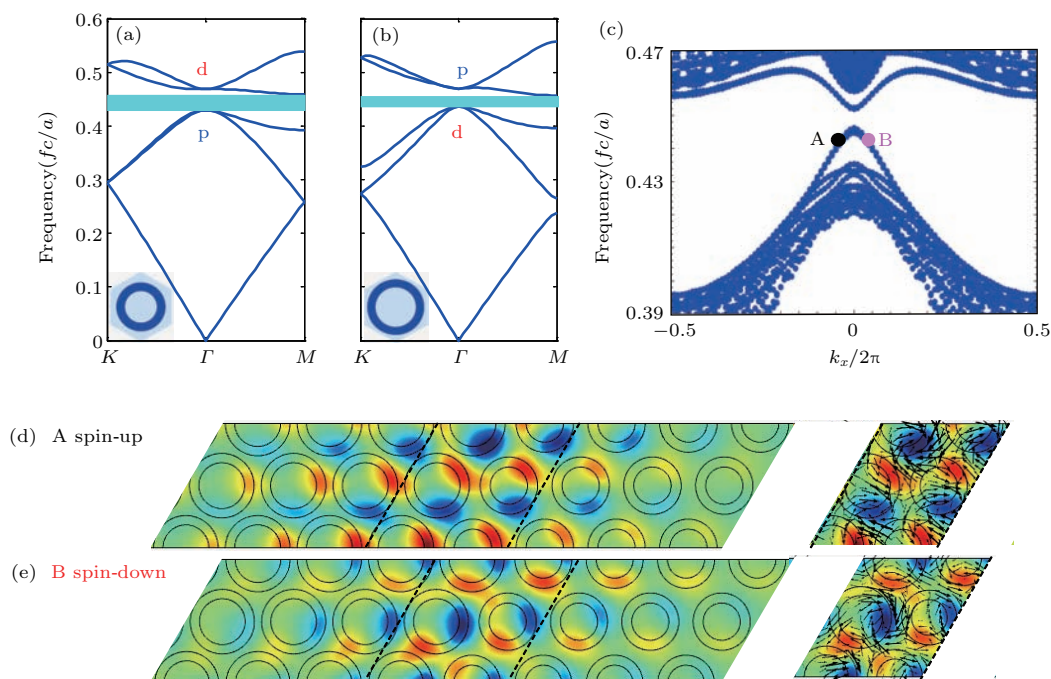


图 4 拓扑边界态 (a) p-d 正常态的能带结构, $R_1 = 0.4a$, $R_2 = 0.26a$; (b) p-d 反转态的能带结构, $R_1 = 0.45a$, $R_2 = 0.32a$, 共同能隙由青色的区域标出; (c) 两种不同光子晶体构成的投影能带; (d) A 点对应边界处的电场分布, 对应的坡印廷矢量方向为顺时针, 代表自旋向上; (e) B 点对应边界处的电场分布, 对应的坡印廷矢量方向为逆时针, 代表自旋向下

Fig. 4. Topology-induced edge states: (a) The normal band structure with $R_1 = 0.4a$ and $R_2 = 0.26a$; (b) the normal band structure with $R_1 = 0.45a$ and $R_2 = 0.32a$, the common complete band gap is marked with the cyan ribbon; (c) the projected band structure of two photonic crystals with oblique line edge, A and B mostly comprise of the pseudo-spin-up and spin-down edge states, respectively; (d) and (e) are the E_z field pattern of A and B.

3 三维 Dirac 光子态

3.1 受点群对称性保护的三维第一类 Dirac 光子态

在二维情况下, 我们利用点群对称性制造光子的自旋自由度, 成功地实现光子的量子自旋霍尔效应, 那么有没有可能将上述结果推广到三维系统中呢? 答案是肯定的. 因着真正的材料总是三维, 在三维光子系统中实现 Dirac 点具有重要的现实意义. 然而, 若要类比电子系统在光子晶体实现三维 Dirac 点至少有两个问题亟待解决: 1) 电子与光子两种粒子的性质不同, 光子是玻色子, 缺少自旋自由度; 2) 光子能带形成的机理与电子也不同, 电子

能带可以被认为是不同局域原子轨道混合的结果, 光子能带是由多重布拉格散射造成的结果, 缺少局域轨道自由度的图像.

为此, 我们在二维核-壳结构的基础上, 提出了由两个中空介质柱组成结构单位, 构成三维六角晶格光子晶体 (图 5(a) 和 (b)). 根据文献 [28], 光子系统中的 Mie 散射共振看作是光子的局域轨道, 不同的光子能态可以看作是不同波之间的 Mie 散射共振. 这里将中空柱子的 Mie 散射共振看作是光子的局域轨道; 那么, 类比二维的情况, 光子的 p 带和 d 带就可以被认为是来自 p 波和 d 波的 Mie 散射共振. 需要再次强调的是, 只有 C_{6v} 对称群包含两个二重简并的表象, 并且这两个二重表象具有相反的宇称. 根据宇称的选择定则, 两个宇称相反的态之

间的相互作用必定导致线性色散. 因此, 对三维情况而言, 只有在动量空间满足六重旋转对称操作的不变高对称线上, 才可能出现稳定的 Dirac 点. 事实上, 我们发现在 ΓA 这条高对称线上 p 带及 d 带是二重简并的 (图 5(c)), 这与上述的判断是一致的. 不仅如此, 理论计算也发现三维 Dirac 点总是出现在 ΓA 或 KH 这条线上; 甚至移除两个中空圆柱之间的六根柱子后, 在 ΓA 或 KH 这条线上的 Dirac 点也是存在的. 这是因为在六角晶格中 ΓA 和 KH 都是动量空间中满足六重旋转不变的高对称线. 需要特别指出的是, 光子晶体中的这种性质与电子系统具有巨大的差异: 在电子系统中, 具有 C_3 , C_4 和 C_6 对称操作的结构都可以出现稳定的 Dirac 点 [29].

由于在布里渊区高对称点处的四重简并态总是不稳定的, C_6 点群对称性的引入使得 Dirac 点变得相当的稳定.

为证明以上的判断, 我们仿照二维的例子, 选取 $(d_+, p_+, d_-, p_-)^T$ 作为系统 $k \cdot p$ 哈密顿量的基变量. 首先, 根据 $|p_x\rangle$, $|p_y\rangle$, $|d_{x^2-y^2}\rangle$, $|d_{xy}\rangle$ 波函数的对称性及动量算符 P_x 和 P_y 的作用形式, 可以得到

$$\begin{aligned}\langle p_x | P_x | d_{x^2-y^2} \rangle &= \langle p_x | P_y | d_{xy} \rangle = \langle p_y | P_x | d_{xy} \rangle \\ &= -\langle p_y | P_y | d_{x^2-y^2} \rangle,\end{aligned}$$

因此, $\langle p_+ | H | d_+ \rangle = \langle p_- | H | d_- \rangle^* = A_{||} k_{||} e^{i\theta_k}$, 这里 $\theta_k = \text{Arg}[k_x + ik_y]$ 是 x - y 平面内的幅角, $A_{||} = \langle p_x | P_x | d_{x^2-y^2} \rangle$.

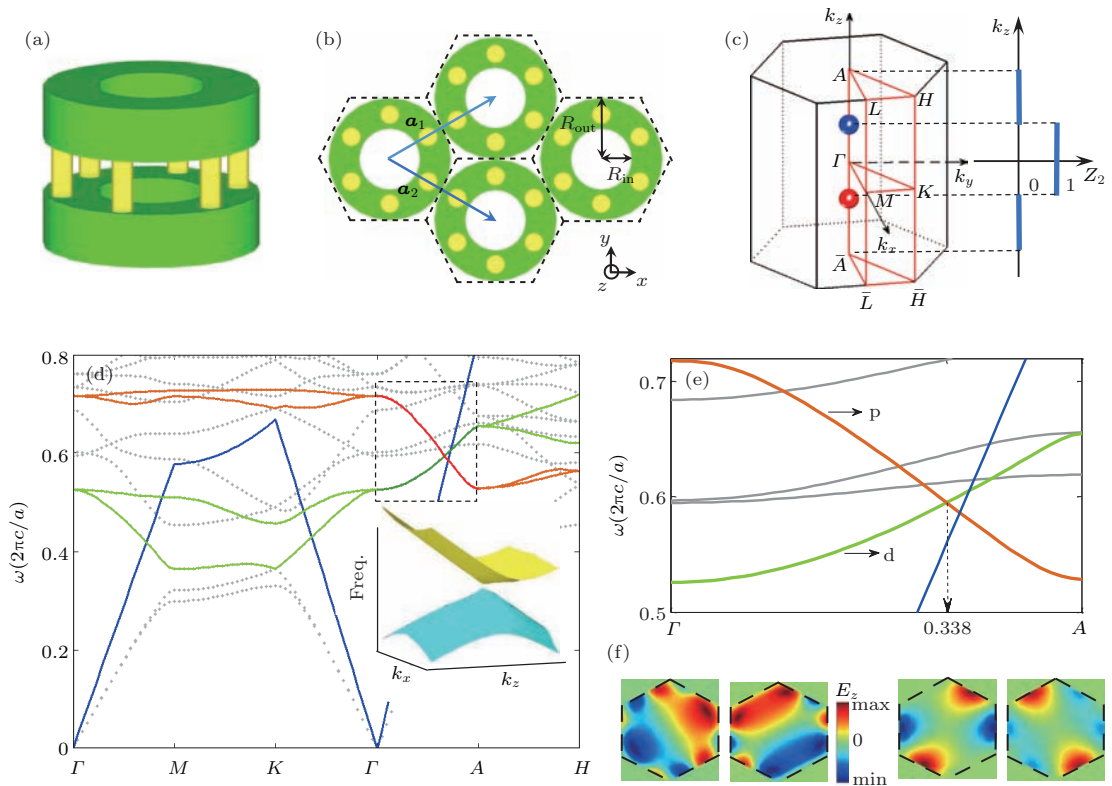


图 5 点群对称性导致的三维 Dirac 光子晶体 (a) 实空间六角晶格结构光子晶体原胞, 中空圆柱及六根柱子均是用相同介质构成; (b) 六角晶格结构的俯视图, 其中 a 是 xy 平面内的晶格常数, a_1 和 a_2 是晶格的基矢量. 高度为 $h = 0.6a$, 外径和内径分别为 $R_{\text{out}} = 0.5a$ 和 $R_{\text{in}} = 0.45a$, 高度为 $0.4a$; (c) 倒空间中的第一布里渊区, 红色及蓝色小球分别代表不同拓扑电荷的 Dirac 点; (d) 六角晶格光子能带; 插图是 Dirac 点三维色散结构; (e) ΓA 高对称线上的能带, 其中红线代表的 p 带和绿线代表的 d 带在 $K_z = 0.338 \frac{2\pi c}{h}$ 处相交; (f) Γ 点 p 带和 d 带在 xy 平面内的场图

Fig. 5. Three dimensional Dirac photonic crystal induced by point group symmetry: (a) Structure in real-space unit cell of hexagonal photonic crystals, hollow cylinder and micropillars are made of the same material with isotropic permittivity; (b) top-down view of hexagonal photonic crystal, a_1 and a_2 are the two lattice vectors in the xy plane, the height of each unit cell is $h = 0.6a$, the outer and inner radii of the hollow cylinder are $R_{\text{out}} = 0.5a$ and $R_{\text{in}} = 0.45a$, respectively, whereas its height is $0.4a$; (c) first Brillouin zone with a pair of Dirac points along the Γ - A line, a Dirac point with different topological charge is labeled as a red and blue point; (d) photonic band structure of a hexagonal photonic crystal with C_6 and inversion symmetry, inset is the dispersion of Dirac point with $K_z > 0$; (e) band structure along line, the p bands (red) cross the d bands (green) at $(0, 0, K_z)$ with $K_z = 0.338$; (f) E_z field profile in the xy plane of p bands and d bands.

最终, 系统在基矢量 $(d_+, p_+, d_-, p_-)^T$ 表象下的 $k \cdot p$ 哈密顿量:

$$H(\mathbf{k}) = \frac{2\omega_0}{c^2} \times \begin{pmatrix} \frac{\omega_d^2(\mathbf{k})}{2\omega_0} & v_{||} k_{||} e^{-i\theta_k} & 0 & 0 \\ v_{||}^* k_{||} e^{i\theta_k} & \frac{\omega_p^2(\mathbf{k})}{2\omega_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_d^2(\mathbf{k})}{2\omega_0} & v_{||}^* k_{||} e^{i\theta_k} \\ 0 & 0 & v_{||} k_{||} e^{-i\theta_k} & \frac{\omega_p^2(\mathbf{k})}{2\omega_0} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中 ω_0 表示 Dirac 点对应的频率, $v_{||} = \frac{A_{||}^* c^2}{2\omega_0}$ 是在 x - y 平面内的群速度分量, 它是 k_z 的函数, 可以发现对每一个给定的 k_z , (5) 式都是代表一种拓扑平庸或非平庸的系统: 当 $|k_z| > K_z$ 时, $\omega_{p,0}(k_z) < \omega_{d,0}(k_z)$, 在 Γ 点 p 态频率比 d 态频率要低, 系统对应的将是拓扑平庸态 (普通绝缘体); 当 $|k_z| < K_z$ 时, $\omega_{p,0}(k_z) > \omega_{d,0}(k_z)$, 在 Γ 点 p 态频率比 d 态频率要高, 系统对应的将是拓扑态; 当 $|k_z| = K_z$ 时, $\omega_{p,0}(k_z) = \omega_{d,0}(k_z)$, 即 Dirac 点. 需要注意的是, 虽然这种 Dirac 点是一种偶然简并导致的四重简并点, 其位置 K_z 是随着结构参数的改变而改变的, 但只要 p 带和 d 带在 Γ 点交换频率顺序, 这种偶然简并将会是不可避免的. 以三维 Dirac 点作为临界点, 在 $|k_z| = K_z$ 的两边将会出现两种不同拓扑性质的绝缘体. 由此可见, 三维 Dirac 点是相应二维系统拓扑相变临界点.

3.2 受非点群对称性保护的三维第二类 Dirac 光子态

通过点群对称性, 我们已经得到了相当稳定的三维 Dirac 点. 在这部分, 我们将介绍基于非点群对称性引入的三维 Dirac 点, 所谓非点群对称操作包括旋转 (或镜面) 加上平移 (小于晶格常数距离) (图 6(a)). 作为例子, 我们给出了的原胞中都有两个垂直且完全相同的介质块 (图 6(b)), 对应的介电常数 ϵ_b , 背景填充材料的介电常数 ϵ_m 的三个方向上的晶格常数都为 $a = 1$, 该结构关键的对称性包括: 1) 二重旋转对称性 $S_x := (x, y, z) \rightarrow (0.5 + x, 0.5 - y, 0.5 - z)$ 及 $S_y := (x, y, z) \rightarrow (0.5 - x, 0.5 + y, 0.5 - z)$; 2) 绕着 z 轴 180° 旋转的 $C_2 := (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$; 3) 时间反演对称性 $T : t \rightarrow -t$; 4) 三个方向的镜面对

称性 $M_1 := (x, y, z) \rightarrow (y, x, z)$; $M_2 := (x, y, z) \rightarrow (-y, -x, z)$; $M_3 := (x, y, z) \rightarrow (y, x, -z)$. 在此, 我们采用 MIT Photonic Band (MPB) 软件包来计算三维光子晶体的能谱, 结果显示, 能谱在 $k_x = \pi$ 面上都具有二重简并度 (图 6(c)), 并且在高对称线 MA 上具有两个四重简并点 (Dirac 点), 对应的光子态态呈现出 p 态和 d 态 (图 6(d)).

为了说明在 $k_x = \pi$ ($k_y = \pi$) 面上的二重简并, 构造以下反么正算符: $\Xi_i = S_i * T$ ($i = x, y$), 其中的 T 是时间反演算符, 相当于对光子的布洛赫波函数做复共轭运算; 可以发现 $\Xi_x^2 = S_x^2 = T_{100}$, 就是相当于一个空间平移矢量 $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, 那么作用两次算符在布洛赫的波函数上, 即 $\Xi_x^2 \psi_{nk}(\mathbf{r}) = e^{ikx} \psi_{nk}(\mathbf{r})$. 显然在 $k_x = \pi$ 的平面上, $\Xi^2 = -1$, 根据 Kramers 简并条件, 所有在 $k_x = \pi$ 的平面上的布洛赫态将是二重简并态. 类似地, 也可以证明, 所有在 $k_y = \pi$ 的平面上的布洛赫态将也是二重简并态. 这表明利用非点群对称性也可以增加光子能带的简并度, 以此获得光子赝自旋的自由度.

另一方面, 实现三维光子晶体 Dirac 点还要给出宇称反转的图像. 在这里通过二重旋转轴 C_2 来定义 xy 平面内的宇称; 注意到两个正交的旋转对称算符满足如下对易关系是: $S_x S_y = T_{010} C_2$ 及 $S_x S_y = T_{100} C_2$. 因此, 在 MA 这条高对称线上, 我们可以得到对易关系式 $\Xi_y \Xi_x = \Xi_x \Xi_y = -C_2$, 也就是说在 MA 这条高对称线上 Ξ_x 算符与 Ξ_y 算符和 C_2 对称操作都是对易的. 所以, 任意两个简并态都会具有相同的 C_2 的本征值 c_2 , 而这个本征值 $c_2 = \pm 1$ 就可以被我们用来标记 xy 平面内的宇称. 由此, 当任意两个在 MA 线上具有不同宇称的能带的交叉点就是三维的 Dirac 点, 对应 Dirac 点的拓扑电荷 [30] 为 $N_{DP} = \frac{1}{2} [c_2^-(k_0^+) - c_2^-(k_0^-)]$, 这里的 c_2^- 表示 Dirac 点较低频率能带的宇称, k_0 表示 Dirac 点所对应波矢. 根据图 6 在最低的六条能带中总共有四个拓扑电荷 $N_{DP} = \pm 1$ 的 Dirac 点, 他们都是由双重简并的 p 波及 d 波的能带线性交叉形成的.

值得说明的是, 这种利用非点群对称性引入得的三维 Dirac 点并不十分依赖于结构单位的形状大小以及介质的参数, 任意两种不同宇称的能带交叉点都是 Dirac 点. 由此可见, 基于非点群对称的结构设计是一种非常有效的方法来实现三维 Dirac 点.

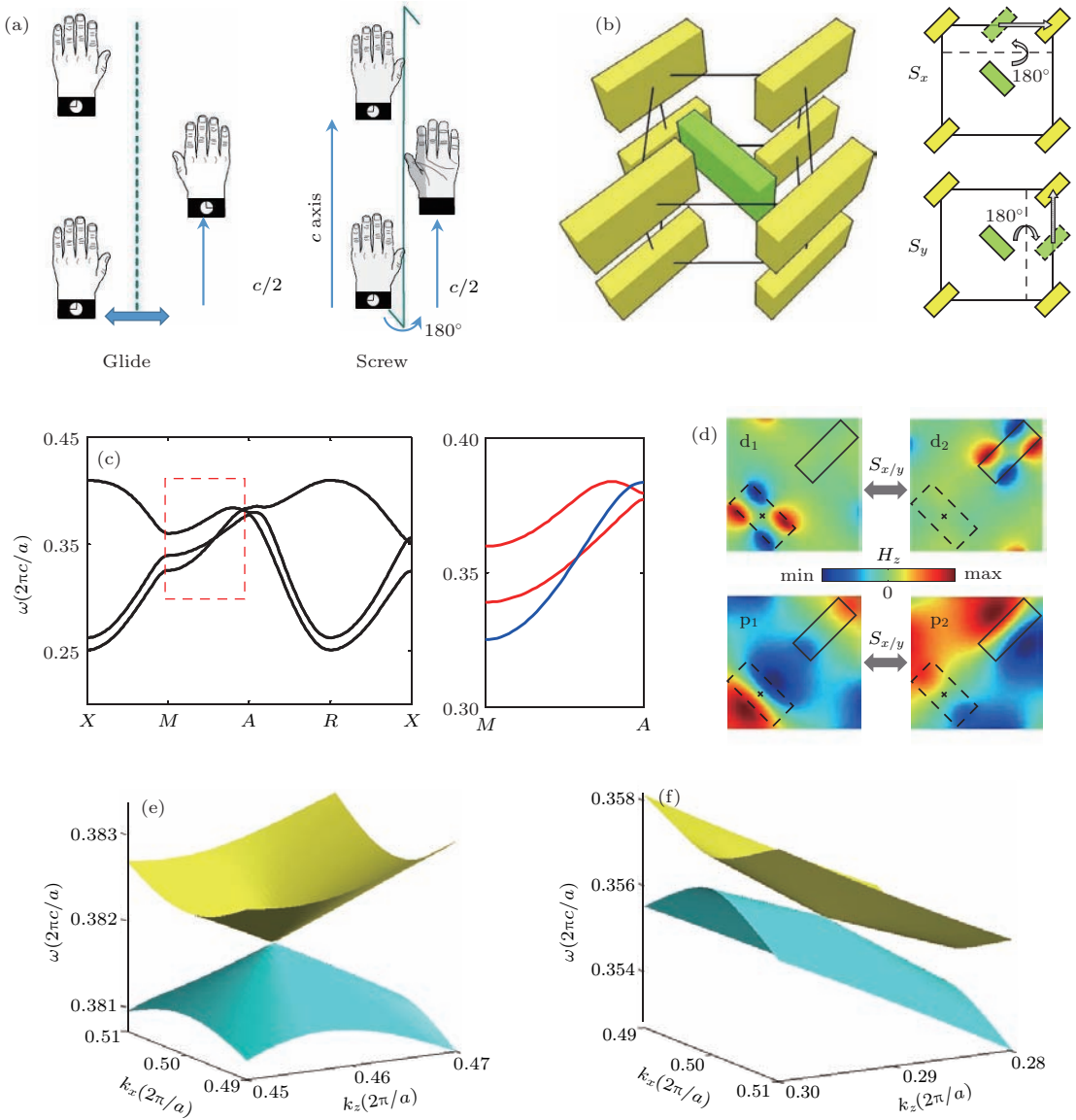


图6 非点群对称性导致的三维 Dirac 光子晶体 (a) 非点群操作示意图; (b) 左侧为三维结构原胞 (边界有黑色实线标注), 右侧为两种正交旋转对称操作 S_x 和 S_y 的示意图; (c) $k_x = \pi$ 光子能带, 右侧为高对称线 MA 上的 Dirac 点; (d) p 带和 d 带的二重简并的磁场场图; 相关参数 $l = 0.5a$, $w = 0.2a$, $h = 0.5a$, 材料的介电常数分别是 $\epsilon_b = 16$, $\epsilon_m = 1.9$; (e) I 型 Dirac 点的三维色散; (f) II 型 Dirac 点的三维色散

Fig. 6. Three dimensional Dirac photonic crystal induced by non-symmorphic symmetry: (a) Schematic of non-symmorphic symmetry operation; (b) left is 3D structure of a unit cell (boundaries are indicated by black lines), right is Illustration of the two orthogonal screw symmetries S_x and S_y in top-down view; (c) photonic band structure with $k_x = \pi$, parity inversion on the MA line; (d) left and right are magnetic field profiles of the p and d wave doublet, respectively, parameters $l = 0.5a$, $w = 0.2a$, $h = 0.5a$, and permittivity $\epsilon_b = 16$ and $\epsilon_m = 1.9$; (e) 3D dispersion of type-I Dirac point; (f) 3D dispersion of type-II Dirac point.

4 三维 Weyl 光子态

在 2013 年, 麻省理工学院的 Lu 等^[31] 在破缺空间反映对称性的螺旋二十四面体光子晶体中发现了 Weyl 点. 然而, 在这种依赖于特定结构的 Weyl 点并不具有普遍性. 另一方面, 我们知道三维

Dirac 点可看作是由一对手性相反的 Weyl 点构成. 因此, 在破缺系统的某些对称性后, 三维 Dirac 点将会演化为一对手性相反的 Weyl 点, 相应的拓扑不变量也将由 Z_2 数变为陈数. 根据这个思路, 我们以上述两种受对称性保护的三维 Dirac 点为例, 来阐述如何由 Dirac 点得到 Weyl 点.

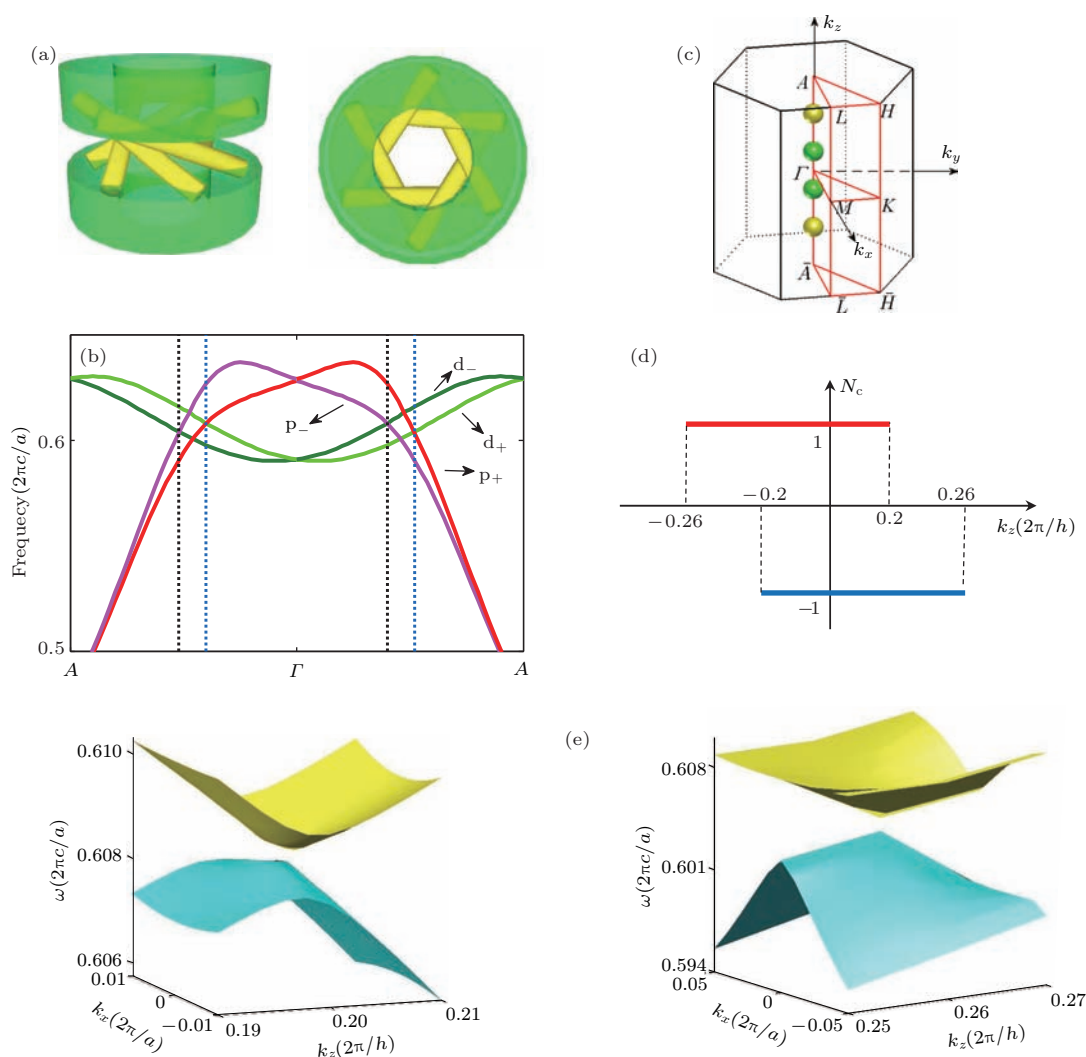


图7 保持 C_6 对称性且破缺空间反演对称性后的六角晶格光子晶体 (a) 原胞结构的侧视图及俯视图; (b) k_z 方向上的光子能带 (忽略其他不相干的能带), 存在着两对 Weyl 点; (c) 第一布里渊区内 Weyl 点的示意图, 绿色和黄色小球分别代表手性不同的 Weyl 点; (d) 陈数分布图: 红线表示 p_- - d_- 的能带, 蓝线表示 p_+ - d_+ 的能带; (e) 两个 Weyl 点的附近光子三维色散

Fig. 7. Inversion symmetry broken hexagonal photonic crystal with C_6 symmetry: (a) Lateral (left) and top-down (right) views of the structure in a real-space unit cell; (b) photonic bands along the k_z -direction, two pairs of Weyl points are found; (c) depicting the four Weyl points in the first Brillouin zone, green (yellow) spheres denote Weyl points with chirality $-1(+1)$; (d) Chern number N_c for the p_+ - d_+ bands below the Weyl points (blue) and for the p_- - d_- bands below the Weyl points (red); (e) photonic spectrum near the two Weyl points, left for WP at $(0, 0, K_{z1})$; right for Weyl points at $(0, 0, K_{z2})$.

4.1 受点群对称性保护的 Weyl 光子态

对于由点群对称性保护的三维 Dirac 点, 我们知道 ΓA 高对称线上具有二重简并的 p 带和 d 带是由 C_6 及 z 方向上的反映对称性保护的, 因此通过破坏旋转连接两个中空圆柱的六根棍子来破坏系统的空间反映对称性, 使得 p_+ 带和 p_- 带及 d_+ 带和 d_- 带解简并, 同时由于系统仍然存在 C_6 的对称性, 使得具有不同 C_6 操作本征的四条能带将仍然彼此交叉, 所以空间反演对称性的破坏相当于在原来的系统中引入一个质量项. 这时, 一对 Dirac 点

将会分裂形成四个 Weyl 点, 这时描述系统的拓扑不变量就是陈数, 根据图 7 在 $0.2 < |k_z| < 0.26$ 的范围内, 总的陈数是非零的, 这种陈数的分布是 Z_2 Dirac 点导致的显著特征. 这一影响也使得边界态成为单向传输的边界态.

4.2 受非点群对称性保护的 Weyl 光子态

对于由非点群对称性保护的 Dirac 点, 为了获得 Weyl 点所需要破缺对称性包括: 旋转对称性 (S_x 及 S_y), 三个镜面对称性 (M_1, M_2, M_3) 以及系统的

空间反演对称性 P , 而只保留 180° 旋转对称性. 显然, 破坏了系统的旋转对称性会解除在 MA 高对称性上的二重简并性; 另一方面, 180° 旋转对称性仍然保证在 MA 这条高对称线上不同宇称能带的偶

然线性交叉, 这种线性交叉就是 Weyl 点. 从图 8 可以发现总共有三对 Weyl 点, 包括两对 II 型的 Weyl 点和一对 I 型的 Weyl 点, 其中最低频率 d 带与其他能带交叉导致的 Weyl 点的三维色散由图 8 给出.

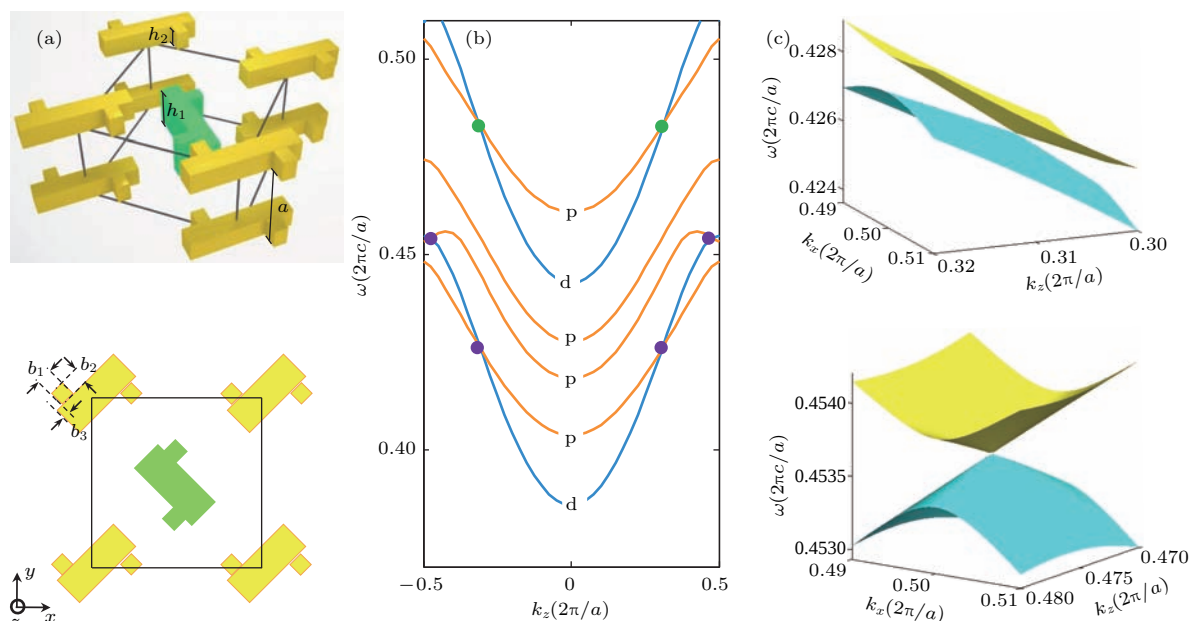


图 8 由 Dirac 点衍生得到的 Weyl 点 (a) 对称性破缺的原胞结构, 上图为原胞结构放大的俯视图, 下图为沿 $[110]$ 方向的侧视图, 几何结构参数为 $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.11$, $b_3 = 0.094$, $h_1 = 0.5$, $h_2 = 0.3$; (b) k_z 方向上的光子能带图, 对应的能带交叉点就是 Weyl 点; (c) Weyl 点的三维色散图, 上图为 II 型的 Weyl 点, 下图为 I 型的 Weyl 点

Fig. 8. Weyl points derived from Dirac points: (a) Unit cell structure of the symmetry-broken, upper panel is 3D view with zoom in illustration of structure deformation, lower panel is side view from $[110]$ direction, the geometry parameters are $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.11$, $b_3 = 0.094$, $h_1 = 0.5$, and $h_2 = 0.3$, the z coordinates of the centers of the two types of dielectric blocks are 0 and $0.65a$; (b) band structure of MA line for lowest six bands, the crossing points are Weyl points; (c) 3D dispersion of Weyl points, upper panel is type-II Weyl point, lower panel is type-I Weyl point.

5 结 论

光子晶体中的 Dirac 点作为实现各种拓扑态的一种重要母态, 对光子拓扑理论的研究具有重要的指导意义, 如何在光子晶体中实现 Dirac 点无疑是光子拓扑理论中的一个核心研究课题. 通常人们根据光特有的偏振特性来模拟电子系统中的自旋简并态, 然而这种方式往往受限于材料的特殊要求 (通常只能在特殊频率范围实现, 在光学和近红外频率范围往往失效) 而不具备普适性. 本文介绍了利用包括非点群对称性在内的晶格对称性来实现 Dirac 光子晶体的方法, 涵盖了二维及三维光子晶体, 实现了在高对称点/高对称线上的相对稳定的 Dirac 点. 由于利用晶格对称性的方法并不需要考虑研究对象的粒子属性, 可以预见这种方法具有很好的可移植性, 包括拓扑声子/弹性波系统在内的

经典体系均可以通过这种方式来实现. 由此可见, 受对称性保护的 Dirac 点在拓扑系统中的应用仍然值得人们深入研究.

参考文献

- [1] Dirac P A M 1928 *Proc. R. Soc. London A* **118** 351
- [2] Castro Neto A H, Guinea F, Peres N M R, Novoselov K S, Geim A K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 109
- [3] Novoselov K S, Jiang Z, Zhang Y, Morozov S V, Stormer H L, Zeitler U, Maan J C, Boebinger G S, Kim P, Geim A K 2007 *Science* **315** 1379
- [4] Katsnelson M I, Novoselov K S, Geim A K 2006 *Nat. Phys.* **2** 620
- [5] Shen S Q 2012 *Topological Insulators: Dirac Equation in Condensed Matters* (London, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag)
- [6] Haldane F D M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015
- [7] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [8] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 226801

- [9] Fu L, Kane C L, Mele E J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 106803
- [10] Weyl H Z 1929 *Physik* **56** 330
- [11] Haldane F D M, Raghu S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013904
- [12] Wang Z, Chong Y D, Joannopoulos J D, Soljacic M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013905
- [13] Ao X Y, Lin Z F, Chan C T 2009 *Phys. Rev. B* **80** 033105
- [14] Khanikaev A B, Hossein M S, Tse W K, Kargarian M, MacDonald A H, Shvets G 2013 *Nat. Mater.* **12** 233
- [15] Ma T, Khanikaev A B, Hossein M S, Shvets G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 127401
- [16] Chen W J, Jiang S J, Chen X D, Zhu B C, Zhou L, Dong J W, Chen C T 2014 *Nat. Commun.* **5** 5782
- [17] He C, Sun X C, Liu X P, Lu M H, Chen Y L, Feng L, Chen Y F 2016 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **113** 4924
- [18] Wu L H, Hu X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 223901
- [19] Sabyaschi B, Hirokazu M, Wade D, Edo E, Mohammad H 2016 *New J. Phys.* **18** 113013
- [20] Xu L, Wang H X, Xu Y D, Chen H Y, Jiang J H 2016 *Opt. Express* **24** 18059
- [21] Wang H X, Xu L, Chen H Y, Jiang J H 2016 *Phys. Rev. B* **93** 235155
- [22] Wang H X, Chen Y G, Hang Z H, Kee H Y, Jiang J H 2017 *npj Quantum Materials* **2** 54
- [23] Sakoda K 2004 *Optical Properties of Photonic Crystals* (Berlin: Springer)
- [24] Sakoda K 2012 *Opt. Express* **20** 25181
- [25] McPhedran R C, Nicorovici N A, McKenzie D R, Botten L C, Parker A R, Rouse G W 2001 *Aust. J. Chem.* **54** 241
- [26] Sanders J V 1964 *Nature* **204** 1151
- [27] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [28] Lidorikis E, Sigalas M M, Economou E N, Soukoulis C M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1405
- [29] Yang B J, Nagaosa N 2014 *Nat. Commun.* **5** 4898
- [30] Yang B J, Morimoto T, Furusaki A 2015 *Phys. Rev. B* **92** 165120
- [31] Lu L, Joannopoulos J D, Soljacic M 2013 *Nat. Photon.* **7** 294

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Dirac photonic crystal*

Wang Hai-Xiao^{1)†} Xu Lin Jiang Jian-Hua^{1)2)‡}

1) (*Department of Physics, Optoelectronics and Energy, Soochow University, Suzhou 215006, China*)

2) (*Collaborative Innovation Center of Suzhou Nano Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006, China*)

(Received 15 August 2017; revised manuscript received 31 October 2017)

Abstract

Dirac Fermion, as one of the basic particles in the particle physics, nowadays have been widely used to describe the electronic states with the behavior of Dirac fermion in the topological electronics. These exotic electronic states are called Dirac point, which exhibited as a linear crossing point in the band structure. Usually Dirac point is the topological phase transition point and thus viewed as the mother state of various topological states. As an analogue of topological electronics, topological photonics, also attracted a great deal of interest due to its potential application. One of the key topic in topological photonics is to realize photonic bands with Dirac point. In this review, we briefly introduce the progress of Dirac point in the photonic system and focus on the realization method of Dirac point in photonic crystal by take advantage of lattice symmetry. We also discuss Weyl point in the photonic crystal as an extension of the Dirac point.

Keywords: photonic crystal, Dirac point, topological band, quantum spin Hall effect

PACS: 03.65.Vf, 41.20.Jb, 42.25.Gy

DOI: 10.7498/aps.66.220302

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11675116) and the Faculty Startup Funding of Soochow University.

† Corresponding author. E-mail: xikeda20072862@163.com

‡ Corresponding author. E-mail: joejhjiang@hotmail.com

圆环结构磁光光子晶体中的拓扑相变

沈清玮 徐林 蒋建华

Topological phase transitions in core-shell gyromagnetic photonic crystal

Shen Qing-Wei Xu Lin Jiang Jian-Hua

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 224102 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.224102

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.224102>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于石墨烯的太赫兹波散射可调谐超表面

[Graphene based tunable metasurface for terahertz scattering manipulation](#)

物理学报.2017, 66(20): 204101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.204101>

高极化纯度的超表面透镜设计与应用

[Design and application of high polarized purity metasurface lens](#)

物理学报.2017, 66(20): 204102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.204102>

可用于拓宽光波单向传输带宽的光子晶体异质结构界面

[Interface of photonic crystal heterostructure for broadening bandwidth of unidirectional light transmission](#)

物理学报.2017, 66(20): 204103 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.204103>

基于超材料的吸波体设计及其波导缝隙天线应用

[Design of metamaterial absorber and its applications for waveguide slot antenna](#)

物理学报.2012, 61(18): 184101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.184101>

一种基于光子晶体结构的坦克涂层设计

[The design of tank coating based on photonic crystal](#)

物理学报.2012, 61(16): 164102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.164102>

专题: 拓扑经典波动

圆环结构磁光光子晶体中的拓扑相变*

沈清玮¹⁾ 徐林¹⁾ 蒋建华^{1)2)†}¹⁾ (苏州大学物理与光电·能源学部, 苏州 215006)²⁾ (苏州大学, 2011 苏州纳米科技协同创新中心, 苏州 215006)

(2017 年 8 月 30 日收到; 2017 年 11 月 8 日收到修改稿)

二维圆环结构的三角晶格磁光光子晶体中可以呈现多重拓扑相. 在不同的几何参数和磁场下, 这些拓扑相包括正常光子带隙相、量子自旋霍尔相和反常量子霍尔相. 与文献 [1] 类似, 该结果展现了二维光子晶体丰富的拓扑相变现象.

关键词: 光子晶体, 拓扑相变, 拓扑边界态

PACS: 41.20.Jb, 03.65.Vf, 42.25.Gy

DOI: 10.7498/aps.66.224102

1 引言

1879 年, 美国物理学家 Hall 发现电流通过有垂直磁场的导体时会产生侧向电压, 这一现象被称为霍尔效应 [2]. 大约在 100 年后, 也就是 1980 年, 德国物理学家 von Klitzing 实验观测到在强磁场下, 二维电子气的霍尔电导呈现出阶梯化的变化, 被称为整数量子霍尔效应 [3]. 1982 年, Thouless 等 [4] 指出这种整数化的霍尔效应是由于能带的非平庸拓扑性质导致的. 根据他们的理论, 量子霍尔效应中的整数对应一种被称为第一类陈数的拓扑量子数. 1988 年, Haldane 提出了在周期交错的磁场下获得量子化电导的方法. 由于该方法总的磁通量为零, 因而被称为反常量子霍尔效应 (quantum anomalous Hall effect, QAH effect) [5]. 反常量子霍尔效应通常用来指没有朗道能级图像的量子霍尔效应系统, 特别是有磁性系统的量子霍尔效应 [6]. 虽然这个办法不需要外加磁场, 但是局域范围内体系的时间反演对称性是被破坏的 (time-reversal broken, TRB). 2005 年和 2006 年, Kane 和 Mele [7], 以及 Zhang 等 [8] 分别提出了受时间反演对称性保护的二维量子自旋霍尔效应 (quantum spin Hall

effect, QSHE) 和三维拓扑绝缘体. 量子自旋霍尔效应和三维拓扑绝缘体由一种新的拓扑量子数描述, 称为 Z_2 拓扑数 (有时可以表示为“自旋陈数”, 实际上是第二类陈数). 随后, 在 2011 年拓扑晶体绝缘体 [9] 和 Floquet 拓扑绝缘体 [10] 相继被提出.

从量子霍尔效应和反常量子霍尔效应到量子自旋霍尔效应, 体系的时间反演对称性质从无到有. 在量子霍尔效应中, 由于时间反演不对称, 只有单向传输的手性边界态 (chiral edge state). 而在量子自旋霍尔效应中, 由于电子是费米子, 时间反演对称性保证了 Kramers 二重简并 (自旋简并), 从而导致了自旋反向的双向导通螺旋边界态 (helical edge states): 自旋上的电子朝一个方向运动, 自旋下的电子朝相反的方向运动. 如果在自旋量子霍尔效应中引入微小的时间反演不对称, 原有的 Kramers 二重简并将会出现分裂, 但只要体系的带隙不闭合, 双向导通的边界态仍然存在. 这样的体系可称之为时间反演破坏的量子自旋霍尔效应 (TRB QSHE). 如果进一步加大时间反演不对称性, 体系将会发生拓扑相变, 带隙会先闭合再打开, 进入一个新的拓扑相, 反常量子霍尔效应相 (QAH). QAH 相存在单向导通的边界态, 所以拓扑相变的

* 国家自然科学基金 (批准号: 11675116) 和苏州大学科研启动基金资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jhjiang@hotmail.com

一个重要结果就是边界态性质的改变. 通过改变时间反演对称性破坏的程度, 体系可以经过 QSHE 到 TRB QSHE, 再到 QAH 的转变过程.

在光子晶体学领域中, 光子能带的拓扑现象最早由 Haldane 和 Raghu 在 2008 年提出 [11,12]. 他们在磁光光子晶体系统给出了实现光学的量子霍尔效应的方案. 随后更多的光学的量子霍尔效应和单向边界态被人们广泛地研究并在实验上实现 [13–15]. 由于光子属于玻色子, 没有 Kramers 二重简并, 无法直接将量子自旋霍尔效应和拓扑绝缘体的概念推广到光子晶体. 虽然如此, 但是人们还是通过其他对称性质加上玻色系统的时间反演对称构造了类似电子系统的赝时间反演对称和对应的赝自旋 1/2 态. 这样的赝自旋 1/2 态有利用光子偏振特性的 TE+TM/TE-TM 混合模式 [16,17] 和 TE/TM 模式 [18] 实现的二重简并, 也有利用空间对称性质的顺时针/逆时针能流态 [19] 构成的. 因为时间反演对称操作在电子自旋 1/2 态的作用数学上等价于赝时间反演对称操作在赝自旋 1/2 态的作用, 所以可以将电子的自旋量子霍尔效应的拓扑上的结论映射到光子晶体体系中来. 与此同时, 通过连续破坏时间反演对称性, 也可以研究在光子体系中的拓扑相变的问题.

最近, Chen 等 [1] 报道了在二维蜂窝状晶格磁光光子晶体中, 通过调控原胞的几何结构和外加磁场破坏时间反演对称性质, 可以实现光学中的自旋量子霍尔效应相到时间反演破坏的自旋量子霍尔

效应相, 再到反量子霍尔效应的相变过程. 本文研究了在二维圆环结构的磁光光子晶体中的拓扑相变问题. 根据之前的工作 [20] 可知, 无外磁场时, 在三角晶格 C_6 点群和真实的 TR 对称构造的赝 TR 对称的保护下, 通过调节圆环内外径大小, 可以实现二维光子晶体的自旋量子霍尔态或者普通的绝缘态. 基于此, 当逐渐增加外磁场时, 由于磁光介质的法拉第效应, 破坏了体系的时间反演对称, 二维光子晶体将经历自旋量子霍尔效应到时间反演破坏的自旋量子霍尔效应, 再到反量子霍尔效应的相变过程. 数值计算的能带和拓扑边界态证实了相变过程. 本文的工作丰富了调控二维光子晶体的拓扑相变的方法.

2 光子晶体的结构和相变

考虑的二维光子晶体是圆环磁光材料摆成的三角晶格体系. 如图 1(a) 所示, 晶格常数为 a , 磁光材料的圆环内外半径分别为 R_1 和 R_2 . 磁光材料为钇铁石榴石 (YIG), 它的介电常数是 $\varepsilon_1 = 15.26\varepsilon_0$,

它的磁导率张量为 $\hat{u}_1 = \begin{bmatrix} u & i\kappa & 0 \\ -i\kappa & u & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{bmatrix}$. 这个张量

取决于外磁场和光子频率. 它的取值由 Drude 模型决定 [21], 其中饱和磁化率 $4\pi M_s = 1884$. 通常在 1600 Gauss 的磁场和 4.28 MHz 下, YIG 磁导率的张量元分别取 $\kappa = 12.4u_0$ 和 $u = 14u_0$.

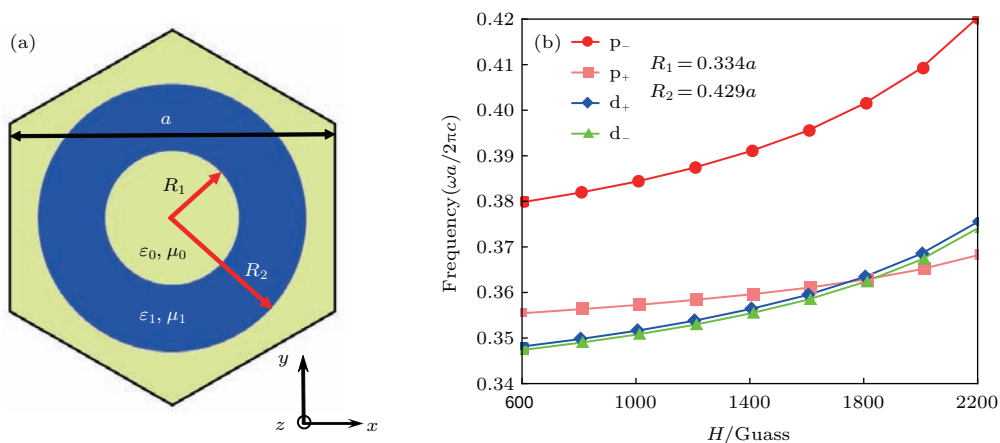


图 1 二维光子晶体原胞结构示意图和能带相变图 (a) 三角晶格晶格常数为 a , 背景是空气, 介电常数和真空磁导率分别为 ε_0 和 μ_0 , 圆环结构的内外半径 R_1 和 R_2 是可调控的; (b) 在 $R_1 = 0.334a$ 和 $R_2 = 0.429a$ ($a = 0.013$ m) 的原胞结构时, 无外加磁场下, 光子晶体是 QSHE 的相, 随着外加磁场 H 的增大, 体系发生了拓扑转变

Fig. 1. The structure of unit cell and phase transition of two dimensional photonic crystal: (a) Lattice constant is a , dielectric constant and permeability of vacuum is ε_0 and u_0 respectively, the radius of ring structure R_1 and R_2 are tunable; (b) When $R_1 = 0.334a$ and $R_2 = 0.429a$ ($a = 0.013$ m) without external magnetic field, photonic crystal is in QSHE. When external magnetic field is increasing, the topology of this system is changing.

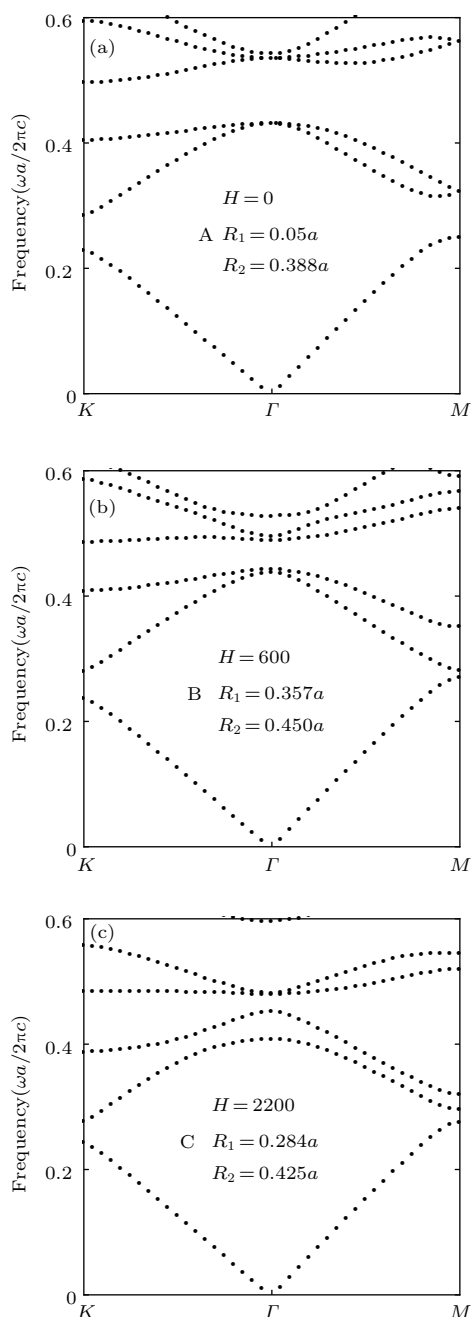


图2 不同二维光子晶体能带 (a) 在无外磁场、 $R_1 = 0.005a$ 和 $R_2 = 0.388a$ 的原胞结构 A 时, 光子晶体在频率为 0.46 附近是普通的绝缘相; (b) 在外磁场 $H = 600$, $R_1 = 0.357a$ 和 $R_2 = 0.450a$ 的原胞结构 B 时, 光子晶体在频率为 0.46 附近是时间反演破坏的自旋量子霍尔效应相; (c) 在外磁场 $H = 2200$, $R_1 = 0.284a$ 和 $R_2 = 0.425a$ 的原胞结构 C 时, 光子晶体在频率为 0.46 附近是 QAH 相

Fig. 2. Different band structures in two dimensional photonic crystal: (a) When $R_1 = 0.005a$ and $R_2 = 0.388a$ without external magnetic field, photonic crystal is conventional insulator phase near the frequency of 0.46; (b) when $R_1 = 0.357a$ and $R_2 = 0.450a$ with external magnetic field $H = 600$, photonic crystal is TRB a quantum spin Hall phase near the frequency of 0.46; (c) when $R_1 = 0.284a$ and $R_2 = 0.425a$ with external magnetic field $H = 2200$, photonic crystal is QAH near the frequency of 0.46.

现在考虑横向磁场(TM)模式的光子晶体本征态问题. 由于三角晶格具有 C_6 对称性, 所以光子晶体的能带在 Γ 点处存在两个二维不可约表示, 分别为 E_1 和 E_2 [22]. 根据宇称的不同, E_1 的两个本征基态函数记为 p_x 和 p_y , 简并频率对应 ω_1 ; 而 E_2 的两个本征基态函数记为 d_{xy} 和 $d_{x^2-y^2}$, 简并频率对应 ω_2 . 两个 p 态和 d 态可以分别构成两个赝自旋 1/2 态, 即 $p_{\pm} = (p_x \pm ip_y)/\sqrt{2}$ 和 $d_{\pm} = (d_{xy} \pm id_{x^2-y^2})/\sqrt{2}$. 对于普通的绝缘相而言, d 态的频率高于 p 态. 但是通过调节内外半径大小和材料的电介质参数, 可以实现 p 态和 d 态的偶然简并, 甚至能带的反转 [20], 这样就实现了光子的自旋量子霍尔相. 如果普通的绝缘相和自旋量子霍尔相具有共同的带隙, 那么在它们的边界上可以找到受体态拓扑性质保护的拓扑边界态.

加入外加磁场后, 原来简并的赝自旋态的能级会劈裂. 如图 1 (b) 所示, 在 $H = 0$ 时, 光子晶体是自旋量子霍尔效应相, p 态的频率高于 d 态. 随着外加磁场的增加, 体系变成时间反演破坏的自旋量子霍尔效应相. 在 H 到达 1700 Gauss 时, 体系变成了反常量子霍尔效应相. 本文的能带结构和边界态是由商业软件 COMSOL MULTIPHYSICS 计算的. 考虑到所关心的能带频率处于 10 GHz 到 14 GHz 之间, 对于有效的 Drude 参数, 采取该频率段的平均值. 晶格常数选取 $a = 0.013$ m 来讨论能带结构的拓扑相变.

图 2 展现了 3 种不同拓扑相的能带图. 其中 A 和 B 分别为普通的绝缘相和时间反演破坏的自旋量子霍尔效应相, 它们在 0.46 附近有共同的带隙. 体系 C 是 QAH 相.

3 拓扑边界态

图 2 所示的三种不同拓扑相 A, B 和 C 有共同的带隙. 由于 A 和 B 的能带具有不同的陈数, 根据拓扑能带理论中体态边界态的对应关系, 如果 A 和 C 放在一起, 将会在它们的边界上出现受拓扑性质保护的单向传输的手性边界态. 我们用 32 个原胞构成长条状的超原胞, 如图 3 (a), 并计算得到该超原胞的投影能带图. 在投影能带图中可以看出 0.46 频率点附近有表面态的色散关系. 图 3 (b) 和图 3 (c) 分别展示了在 s_1 和 s_2 交面处 $k_y = \pm 0.2\pi/a$ 表面态的 E_z 的场分布. 可以看出两者是同一种模式, 只是在不同的交面而已, 它们是单向传输的.

因而单向传输的边界态的存在说明了A和B的能带陈数的不同.

交面并非完全等价, 且在边界上的赝TR对称性被破坏, 因而造成两个边界态的能量的不同.

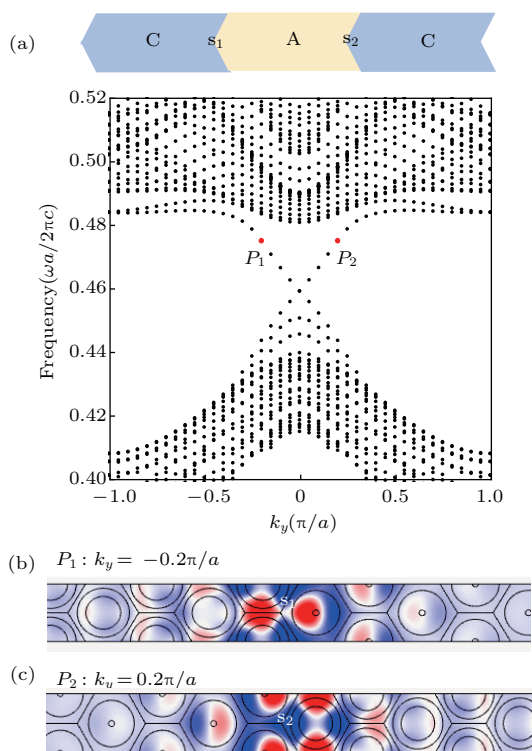


图3 投影能带和陈数不同所导致的拓扑边界态 (a) 计算由图2中A和C两种光子晶体各16个原胞构成的长条状的超原胞的投影能带, s_1 和 s_2 为左右两个界面; (b) 在能带 P_1 点处, $k_y = -0.2\pi/a$ 时, s_1 界面处拓扑边界态 E_z 的场分布; (c) 在能带 P_2 点处, $k_y = 0.2\pi/a$ 时, s_2 界面处拓扑边界态 E_z 的场分布

Fig. 3. Projected band structure and topological edge states induced by the difference of Chern number: (a) Super cell consists of 16 unit cell A and 16 unit cell C of Fig. 2. Projected band structure is calculated with two different interfaces s_1 and s_2 ; (b) E_z field of topological edge state at interface s_1 of P_1 with $k_y = -0.2\pi/a$; (c) E_z field of topological edge state at interface s_2 of P_2 with $k_y = 0.2\pi/a$.

类似地, 由于A和B分别为普通的绝缘相和时间反演破坏的自旋量子霍尔效应相, 因而它们的能带具有不同的 Z_2 拓扑数. 如果A和B放在一起, 将会在它们的边界上出现受拓扑性质保护的一对螺旋边界态. 我们用32个原胞构成长条状的超原胞, 如图4(a), 并计算得到该超原胞的投影能带图. 在投影能带图中可以看出0.46频率点附近有表面态的色散关系. 图4(b)和图4(c)分别展示了在 s_1 交面处 $k_y = \mp 0.2\pi/a$ 表面态的 E_z 的场分布, 构成该体系的一对螺旋边界态. 通常该对螺旋边界态的能量是一样的, 但是本文的体系中由于 s_1 交面和 s_2

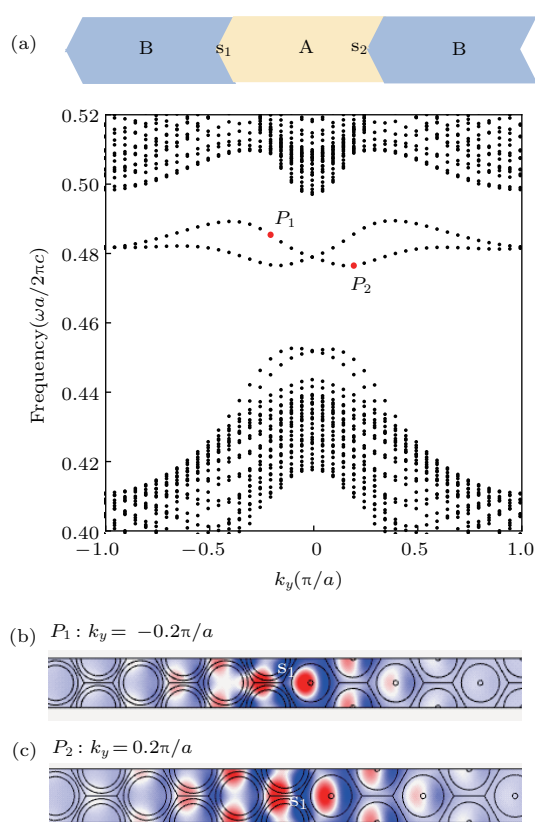


图4 投影能带和 Z_2 拓扑数不同所导致的拓扑边界态 (a) 计算由图2中A和B两种光子晶体各16个原胞构成的长条状的超原胞的投影能带, s_1 和 s_2 为左右两个界面; (b) 在能带 P_1 点处, $k_y = -0.2\pi/a$ 时, s_1 界面处拓扑边界态 E_z 的场分布; (c) 在能带 P_2 点处, $k_y = 0.2\pi/a$ 时, s_1 界面处拓扑边界态 E_z 的场分布

Fig. 4. Projected band structure and topological edge states induced by the difference of Z_2 topological number: (a) Super cell consists of 16 unit cell A and 16 unit cell B of Fig. 2. Projected band structure is calculated with two different interfaces s_1 and s_2 ; (b) E_z field of topological edge state at interface s_1 of P_1 with $k_y = -0.2\pi/a$; (c) E_z field of topological edge state at interface s_1 of P_2 with $k_y = 0.2\pi/a$.

4 结 论

利用磁光材料在三角晶格光子晶体中实现了多重拓扑相变. 通过改变原胞的结构和外磁场的大小, 三角晶格光子晶体可以具有正常光子带隙、量子自旋霍尔相和反常量子霍尔相, 并且得到了手性边界态和螺旋边界态. 本文空心圆环的结构比文献[1]的结构更为简单, 因此为实现光子晶体的拓扑相变提供了更多的方法.

参考文献

- [1] Chen Z G, Mei J, Sun X C, Zhang X, Zhao J, Wu Y 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043827
- [2] Hall E H 1879 *Am. J. Math.* **2** 287
- [3] Klitzing K, Dorda G, Pepper M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 494
- [4] Thouless D, Kohmoto M, Nightingale M, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [5] Haldane F D M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015
- [6] Xiao D, Chang M C, Niu Q 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1959
- [7] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 226801
- [8] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [9] Fu L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 106802
- [10] Lindner N H, Refael G, Galitski V 2011 *Nat. Phys.* **7** 490
- [11] Haldane F, Raghu S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013904
- [12] Raghu S, Haldane F 2008 *Phys. Rev. A* **78** 033834
- [13] Lu L, Joannopoulos J D, Soljačić M 2014 *Nat. Photon.* **8** 821
- [14] Wang Z, Chong Y, Joannopoulos J, Soljačić M 2009 *Nature* **461** 772
- [15] Wang Z, Chong Y, Joannopoulos J D, Soljačić M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013905
- [16] Chen W J, Jiang S J, Chen X D, Zhu B, Zhou L, Dong J W, Chan C 2014 *Nat. Commun.* **5** 5782
- [17] Khanikaev A B, Mousavi S H, Tse W K, Kargarian M, MacDonald A H, Shvets G 2013 *Nat. Mater.* **12** 233
- [18] Ma T, Khanikaev A B, Mousavi S H, Shvets G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 127401
- [19] Wu L H, Hu X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 223901
- [20] Xu L, Wang H X, Xu Y D, Chen H Y, Jiang J H 2016 *Opt. Express* **24** 18059
- [21] Pozar D M 2009 *Microwave Engineering* (Hoboken: John Wiley & Sons)
- [22] Sakoda K 2004 *Optical Properties of Photonic Crystals* (Berlin: Springer Science & Business Media)

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Topological phase transitions in core-shell gyromagnetic photonic crystal^{*}

Shen Qing-Wei¹⁾ Xu Lin¹⁾ Jiang Jian-Hua^{1)2)†}

1) (*Department of Physics, Optoelectronics and Energy, Soochow University, Suzhou 215006, China*)

2) (*Collaborative Innovation Center of Suzhou Nano Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006, China*)

(Received 30 August 2017; revised manuscript received 8 November 2017)

Abstract

We found that core-shell gyromagnetic photonic crystal of two-dimensional triangular lattice exhibit topological phases. In a certain parameters and magnetic field, those phases could be a conventional insulator phase, a quantum spin Hall phase, and a quantum anomalous Hall phase. Different from the structure of Ref[1], phase transitions in our core-shell structure does not involve changes of space symmetry, which depend on parameters of our structure and the broken of time reverse symmetry. Our result shows the variety of topological phase transitions in photonic crystals.

Keywords: photonic crystal, topological phase transition, topological edge state

PACS: 41.20.Jb, 03.65.Vf, 42.25.Gy

DOI: 10.7498/aps.66.224102

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11675116) and the Faculty Startup Funding of Soochow University.

[†] Corresponding author. E-mail: jhjiang@hotmail.com

人工带隙材料的拓扑性质

孙晓晨 何程 卢明辉 陈延峰

Topological properties of artificial bandgap materials

Sun Xiao-Chen He Cheng Lu Ming-Hui Chen Yan-Feng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 224203 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.224203

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.224203>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

厚金属 Ag 膜的磁光法拉第旋转效应的增强

Magneto-optical Faraday rotation effect enhancement of a thick metal Ag

物理学报.2012, 61(16): 164210 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.164210>

利用介质光子晶体提高红光发光二极管的光通量的研究

Research of dielectric photonic crystal on red LED to increase luminous flux

物理学报.2012, 61(15): 154213 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.154213>

含特异材料的光量子阱频率特性研究

Properties of photonic quantum well structures containing left-handed materials

物理学报.2012, 61(13): 134210 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.134210>

基于宽度抛物线型和渐变孔径的超高 Q 低 V 一维光子晶体纳米梁腔的设计

Ultrahigh-Q small-V photonic crystal nanobeam cavities based on parabolic-shaped width and taper holes

物理学报.2012, 61(13): 134209 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.134209>

一维函数光子晶体的研究

Research on one-dimensional function photonic crystals

物理学报.2012, 61(13): 134208 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.134208>

专题: 拓扑经典波动

人工带隙材料的拓扑性质*

孙晓晨¹⁾ 何程¹⁾²⁾ 卢明辉^{1)2)†} 陈延峰¹⁾²⁾

1)(南京大学, 固体微结构国家实验室, 材料科学与工程系, 南京 210093)

2)(人工微结构科学与技术协同创新中心, 南京 210093)

(2017年9月20日收到; 2017年11月6日收到修改稿)

近年来, 人工带隙材料(如声子晶体和光子晶体)由于其优异的性能, 已成为新一代智能材料的研究焦点. 另一方面, 材料拓扑学由凝聚态物理领域逐渐延伸到其他粒子或准粒子系统, 而研究人工带隙材料的拓扑性质更是受到人们的广泛关注, 其特有的鲁棒边界态, 具有缺陷免疫、背散射抑制和自旋轨道锁定的传输等特性, 潜在应用前景巨大. 本文简要介绍拓扑材料特有的鲁棒边界态的物理图像及其物理意义, 并列举诸如光/声量子霍尔效应、量子自旋霍尔效应、Floquet 拓扑绝缘体等相关工作; 利用 Dirac 方程, 从原理上分析光/声拓扑性质的由来; 最后对相关领域的发展方向和前景进行了相应的讨论.

关键词: 人工带隙材料, 拓扑, Dirac 方程

PACS: 42.70.Qs, 03.65.Vf

DOI: 10.7498/aps.66.224203

1 引言

剑仙手中掐诀, 提起御剑之气, 足下宝剑载其飘行于湖面之上. 湖畔一片竹林, 眼见剑锋一股真气溢出, 排开竹海, 竟从林间撕开一条去路. 竹林外, 一块大石挡住去路. 那剑气仿佛有灵气一般, 邻近大石一个急转, 贴着石壁绕了过去.

浩浩乎如凭虚御风而不知其所止, 飘飘乎如遗世独立羽化而登仙. 受“摩尔时代即将终结”这一世纪难题所困惑的科学家们希望在导电材料中做出犹如仙侠小说中描述般的御剑之术. 它们一往无前不受外界干扰, 能够穿越杂质, 绕行障碍物. 这样一来, 电流在电子器件的沟壑中穿行时, 其传输效率将大大提高, 热量消耗大大减小. 这不仅可以提高器件性能, 更可以极大地降低器件材料的需求加工难度, 甚至可以实现更丰富的性能, 让人们可以在器件功能上发挥更丰富的想象力. 科学家经过

多年研究发现, 如果物理学中真的有御剑之术, 那么保护电子不受外物干扰的御剑之气, 就是拓扑. 受到拓扑保护的材料, 其内部电流不受杂质、无序结构影响, 可以实现快速、高效、低能耗的信号传输.

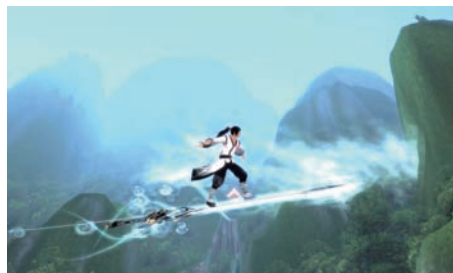


图1 御剑术 (来自百度图片, 出自游戏《天下》)

Fig. 1. Control the sword (From Baidu Picture, Game “TIANXIA”)

拓扑是一个数学概念. 通俗来讲, 对物体进行连续形变, 而不“剪开”或者“黏连”, 物体的某些性能指标将会保持不变, 而变换前后的物体“拓扑等价”. 举个具体的例子, 一个球拓扑等价于一个碗;

* 国家重点研发计划 (批准号: 2017YFA0303702)、国家自然科学基金 (批准号: 11134006, 11474158, 11404164)、国家自然科学基金杰出青年基金 (批准号: 11625418)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK20140019) 和江苏高校优势学科建设工程项目 (批准号: PAPD) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: luminghui@nju.edu.cn

一个面包圈拓扑等价于一个水杯。但是, 球和面包圈拓扑不等价。也就是说, 球和面包圈具有不同的拓扑数, 如图 2 所示。在凝聚态物理领域, 随着晶体能带理论的发展, 人们发现以矢量 k 为底流形的倒空间结构(动量-能量关系, 即能带), 也同样可以视为类似球体或者面包圈的流形, 从而具有不同的拓扑数。如果系统的某种性质——例如电子输运性能——只和这个拓扑数有关, 那么除非这个系统变化大到颠覆了拓扑数, 否则电子输运性能总会保持不变, 例如手征性、无损耗、电流方向等。遵循着这一思路, 1984 年 Berry 把几何相位的概念正式引入到物理领域, 在前人工作的基础上^[1], 提出了“Berry phase”的概念^[2,3]。这个概念迅速引领了拓扑相, 以及拓扑相变的蓬勃发展^[4]。其中最典型的例子就是 QH 家族。

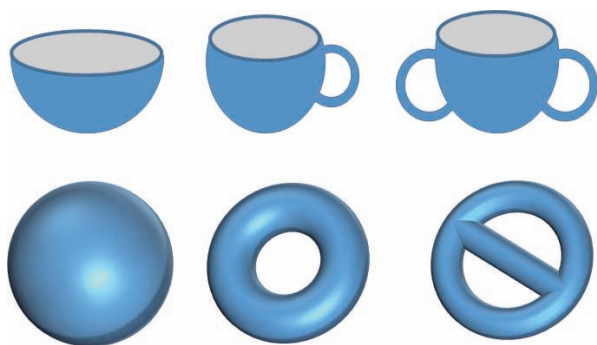


图 2 不同的拓扑类^[5]

Fig. 2. Different topology classes^[5].

1879 年, 美国物理学家 Hall 在研究金属导电机理时发现了霍尔效应: 电流垂直于外加磁场 (B) 通过导体时, 载流子发生偏转, 垂直于电流和磁场的方向出现电势差。如果用霍尔电阻 (R_H) 表示这种互相垂直的电势差和输入电流之比, 会发现其数值随 B 线性增加^[6], 如图 3 (a) 所示。1980 年, 德国物理学家 von Klitzing 发现了整数量子霍尔效应^[7]: 在低温强磁场下, 二维电子气被限制在一层极薄的层状材料之内运动。此时的霍尔电阻与垂直磁场 B 的关系在总体上升趋势中会出现数值为 $R_H = h/(ne^2)$ (n 为整数) 的平台。在平台处, 霍尔电阻对载流子浓度、迁移率大小等均不敏感, 即具有某种量子化的特性。1982 年, Thouless 等指出: 这种量子化特性的根源来自系统能带整体具有的拓扑不变量 n , 并且引入陈数 (Chern number, 即陈省身数) 来描述这个拓扑不变量。进一步, 这种体能带拓扑性质对量子化霍尔电导的影响被总结

成为 Thouless-Kohmoto-Nightingale-Nijs (TKNN) 关系^[8]。具有量子霍尔效应的拓扑非平庸系统陈数非零, 而真空或普通绝缘体等平庸系统陈数为零。他们还指出, 这种存在于能带中的阶梯状“鲁棒”特性可以直接对应于边界态传输时的“拓扑保护”现象: 材料表面电子将会单向传输, 且完全“背散射抑制”——电流不会被材料表面的杂质、缺陷散射掉——这就是凝聚态物理中的“御剑之气”。从此, 拓扑物态的研究成为凝聚态物理研究中的重要方向, 拓扑材料研究也蓬勃发展。历代科学家为拓扑现象扩展实验平台、降低实验难度前赴后继地努力着。1988 年, Haldane^[9] 提出了一种在周期性磁通中实现整数量子霍尔效应的方法, 在理论上克服了拓扑性质依赖于外界强磁场的瓶颈。尽管总磁通为零, 电子依然会形成非零的边界电导^[10]。值得一提的是, Thouless 和 Haldane 凭借在拓扑相物质和拓扑相变方面的贡献, 与 Kosterlitz 一起三人分享了 2016 年诺贝尔物理学奖。2005 年和 2006 年, Kane 和 Zhang 等分别提出, 利用电子自旋轨道耦合, 可以在零磁场下得到一对共轭的自旋相反的无能隙边界态。这对自旋边界态可以视为一对量子反常霍尔效应的结合, 它们在体能带能隙中简并, 并受到时间反演对称性保护。这就是量子自旋霍尔效应 (二维)^[11]。这一现象于 2007 年在 HgTe 量子阱实验体系中得以实现^[12]。类似量子霍尔效应, 这种系统可以用另外一类拓扑不变量来描述: Z_2 拓扑不变量^[13] 或自旋陈数 (spin Chern number)^[14]。在最近十年的发展中, 凝聚态拓扑学逐渐由二维系统扩展到三维系统。2009 年, 遵循 2D 量子自旋霍尔效应的原则, 科学家们提出了一种 3D 拓扑绝缘体^[15], 并在实验中观测到了其特征: 位于体能带能隙中的 Dirac 型表面态色散^[16]。2011 年, 哈佛大学 Fu^[17] 提出可通过晶格对称性构造一种三维拓扑晶体绝缘体。不同于一般拓扑绝缘体, 其不需要自旋轨道耦合, 拓扑性质受到晶格对称性 (比如镜面对称性) 而非时间反演对称性保护, 并随后在实验上得以证实^[18]。2011 年, 南京大学 Wan 等^[19] 考虑 Dirac 方程对称性破缺后的 Weyl 方程, 提出并设计了一类拓扑半金属材料, 即 Weyl 半金属。另外, 一类以准能量和时间周期性 Floquet 定理为标志的 Floquet 拓扑绝缘体也通过电磁波诱导得以实验实现^[20]。

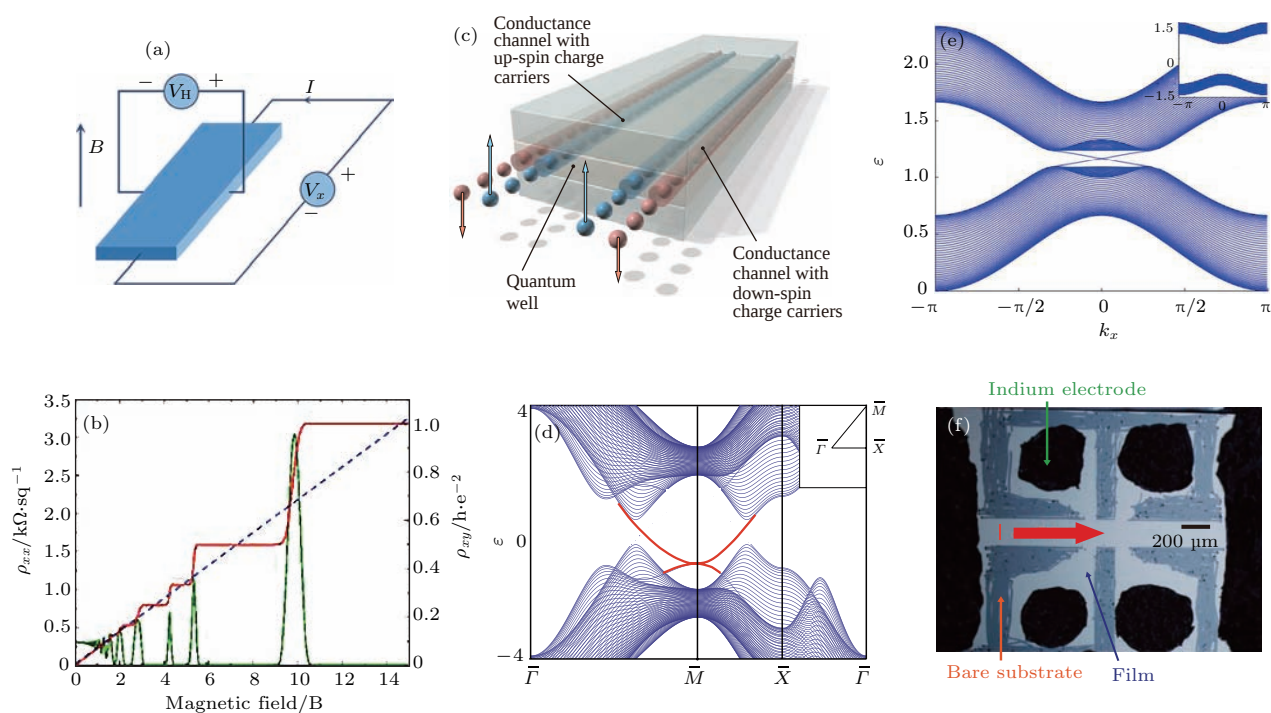


图3 霍尔效应家族 (a) 霍尔效应; (b) 整数量子霍尔效应^[7]; (c) 量子自旋霍尔效应^[12]; (d) 拓扑晶绝缘体^[17]; (e) Floquet 拓扑绝缘体^[20]; (f) 反常量子霍尔效应实验^[21]

Fig. 3. Hall effect family: (a) Hall effect; (b) integer quantum Hall effect^[7]; (c) quantum spin Hall effect^[12]; (d) topological crystalline insulators^[17]; (e) Floquet topological insulator^[20]; (f) the experiment of anomalous quantum Hall effect^[21].

然而, 拓扑材料从理论到实践的跨越异常艰难. 由于电子体系本身情况复杂, 杂质影响难以忽略, 而且能带论所要求的单电子假设不可能完美实现, 所以前面提到的种种优美的物理现象很难在实验中轻易观测到. 以量子反常霍尔效应为例, 直到2013年, 清华大学的Xue教授研究组^[21]才在实验中观测到这一效应, 据Haldane提出这一现象已经过去了25年. 而另一方面, 人工带隙材料——包括光子晶体声子晶体等——因为其玻色子相互作用弱, 是一类纯净的系统. 人工带隙材料具有更易制备的平台、更易于调控的能带结构, 因而受到人们的重视. 作为人工带隙材料的重要代表, 光/声子晶体是把光/声介质材料按照周期性排列成晶格状得到的材料体系, 其中的光/声流完全类似于电子系统中的电流. 利用这种人工周期性系统实现电子能带拓扑性质具有可行性: 1) 能带的形成来源于晶格的平移对称性; 2) 量子化现象的本质来源于能带拓扑性质. 电子系统本身特有的费米统计对电子能带拓扑现象并无影响. 于是可以考虑利用声/光子晶体实现量子化的拓扑态. 不仅如此, 用人工带隙材料实现拓扑性质, 具有自身独到的优点: 1) 人工带隙材料通常为玻色系统, 于是可以无视电子系统

中费米能级的限制, 选取最合适的频段进行研究; 2) 在声光系统中, 可以更方便准确地引入杂质或者无序, 大大提高了实验灵活性; 3) 从实验的角度来看, 光声系统具有更高的加工精度, 因此可以进行更精准的调控^[22]; 4) 相比电子系统, 光子和声子系统更容易实现高时空分辨的振幅和相位测量.

本文简要介绍几种具有代表性的光/声拓扑材料, 并在理论上阐释拓扑现象的产生根源, 从数学角度简要探讨拓扑材料产生的物理机理; 首先介绍具有拓扑保护边界态的光/声整数量子霍尔效应; 接着介绍具有成对出现的拓扑保护自旋流的光/声量子自旋霍尔效应; 然后, 以光/声Floquet拓扑绝缘体为代表, 介绍具有不同形式边界态的拓扑材料; 再拓展到介绍一维、三维的光/声拓扑材料; 作为深化总结, 从数学角度简要探讨拓扑材料产生的物理机理; 最后是总结与展望.

2 光/声整数量子霍尔效应

先来回顾拓扑现象. 拓扑材料往往具有不导电的体态, 以及可以导电的表面态或者边界态. 就像一个绝缘的陶瓷杯, 表面镀了一层金, 便具有了表

面的导电性. 不过, 这两者有着本质的不同, 拓扑材料的表面特性源于材料的内禀性质, 缺陷和杂质都不会影响它. 宛如静水流深却又波涛汹涌的海面, 内里波澜不惊, 表面上却可以风起云涌. 而电流导通与否的本质在于能带. 提取出系统中所有的可以存在的布洛赫波模式的波矢和频率, 可以构成一个二维色散图, 这就是能带, 如图 4(a) 所示. 可以看到, 图中有些频率不对应任何模式, 也就是说系统不允许这个频段的波通过, 这就是带隙. 对于材料内运动的电子, 如果其频率刚好在这个带隙以内, 那么就相当于进入了一个“绝缘体”, 不会产生电流. 然而, 真实的材料具有表面, 有些时候波可以在材料表面传播. 这种表面态在能带上体现为一些孤立的色散曲线. 如果系统参数选择得当, 将会存在一种非常特殊的表面态色散: 它联通了上下两段体态能带, 贯穿了整个能隙, 如图 4(b) 所示.

具有这种特征的表面态色散往往具有拓扑特征. 在这条表面态色散曲线以下的体态色散曲线, 构成了类似“面包圈”的非平庸拓扑能带. 如果用一个特征指标来描述, 可以说其“陈数”为 1. 而这条贯穿体态能隙的表面态色散, 就像被上下体能带分别牵住了两头, 相对小的参数调整都不会让它断开. 回到体系导通性质上, 就会看到刚好处于体能带带隙中的波输入材料时, 无法在体块内部传播, 但是可以在表面传播. 不仅如此, 表面上的加工不均匀, 或者形貌弯折, 都不会改变材料的拓扑性质, 也就不会改变这个表面态的传输. 这就是整数量子霍尔效应所具有的“鲁棒”边界态. 对应的材料, 被称为“陈拓扑绝缘体”.

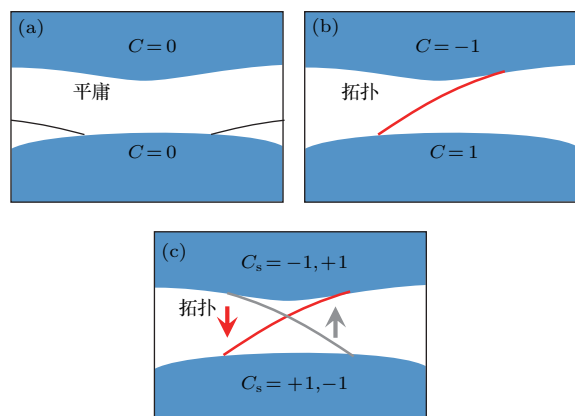


图 4 (a) 能隙与平庸边界态; (b) 整数量子霍尔效应中的拓扑边界态; (c) 量子自旋霍尔效应中的拓扑边界态

Fig. 4. (a) Band gap and trivial edge state; (b) the topological state of integral quantum Hall effect; (c) the topological state of quantum spin Hall effect.

回到我们关注的光/声系统中来. 由于同样具有周期性结构, 光子晶体/声子晶体中光/声的色散曲线同样会构成“能带”. 那么在光/声系统中能否实现拓扑呢? 2005 年, Haldane 和 Raghu^[23] 首次提出了光子晶体领域的量子拓扑现象. 他们在理论上指出, 应该首先在能带中构造 Dirac 简并, 即色散关系满足无质量 Dirac 方程, 而后在方程中添加质量项使简并破缺, 方能实现光量子霍尔效应. 破缺对称的方式包括破坏系统空间反演对称性, 以及时间反演对称性. 经过计算, 他们发现, 只有当打破时间反演对称性时, 两个不等价 Dirac 点才会具有符号相同的 Berry curvatures (可以视为陈数在整个布里渊区随波矢 $\mathbf{k}$ 的分布). 于是, 可以使得整条能带具有非零的陈数. 反之, 破缺空间反演对称性, 而保持时间反演不变性的系统, Berry curvatures 符号相反, 能带具有的陈数将会互相抵消.

2008 年, Wang 等^[24] 绕开了构造 Dirac 简并的步骤, 直接破缺系统二次简并, 提出了实现光量子霍尔效应的具体方案. 他们引入各向异性, 给系统的介电常数矩阵 ϵ 引入了含有虚部的非对角项. 这种含有虚部的非对角项对应于一个等效磁场, 遵循了 Haldane 提出的破缺时间反演对称性的原则. 值得一提的是, 两篇论文为了实现非零陈数, 都利用了含质量项的 Dirac 方程, 区别仅在于破缺对称性方式不同. 基于 Wang 等在 2008 年的设计实验, 麻省理工学院课题组在实验上利用金属墙包围的旋磁光子晶体介质材料首次观测到了单通拓扑光子态, 如图 5(a) 所示^[25]. 类似电子系统的量子霍尔效应, 这种单通光子态传播时对各种障碍物及缺陷无散射, 即具有鲁棒特性. 此外, 如果调整这种边界态落在空气线以外, 就会形成无需金属介质限制的边界模式^[26]. 这一单通效应很快在其他诸多平台上得以实现, 例如耦合腔 (coupled cavities)^[27]、旋磁光子晶体板 (gyromagnetic photonic crystal slab)^[28] 以及超光子簇 (gyrotropic photonic clusters)^[29] 等. 值得注意的是, 破缺简并点的个数将会直接影响边界态的个数^[30].

相比之下, 声学量子霍尔效应研究起步较晚. 这是因为陈拓扑绝缘体要求时间反演破缺, 而声场受磁场影响较小, 难以在其中引入时间反演破缺. 如图 5(b) 所示, 2014 年, Alu 等^[31] 巧妙地在声

波环形腔中引入了气流, 实现了声学隔离器. 在他们的设计中, 不同运动方向的环形腔模式感受到的气流影响正类似于不同自旋感受到的磁场影响. 这给了人们很多启示: 是否可以将气流等效视为声

学系统中的磁势场呢? 2016年, Yang等^[32]以及Ni等^[33]分别考虑在环形腔中引入气流作为等效势场, 破缺了时间反演对称性, 从而实现了声学陈绝缘体.

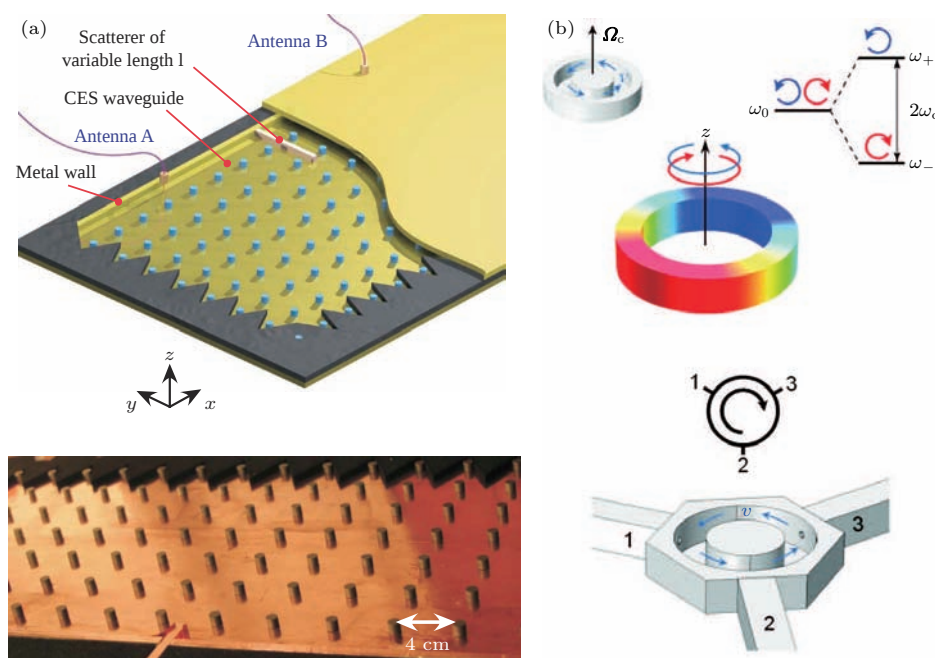


图5 (a) 实验实现光子晶体量子霍尔效应^[25]; (b) 在声学环形腔中引入气流作为等效势场^[31]
Fig. 5. (a) Experimental realization of photonic quantum Hall effect^[25]; (b) introducing airflow as effective potential field in the acoustic annular cavity^[31].

3 光/声量子自旋霍尔效应

中国古代讲究太极阴阳调和, 剑法中也有君子剑淑女剑双剑合璧. 类似地, 凝聚态系统中, 电子也具有成对的“自旋”这个内禀属性. 如果在系统中引入自旋轨道耦合, 那么两种不同自旋的电子, 将会“感受”到两个相反方向的磁场. 对应地, 拓扑材料表面将会形成一对流向相反的边界态, 分别对应两种自旋. 2005年和2006年, Kane和Zhang等分别提出, 利用电子强自旋轨道耦合, 可以在零磁场下得到一对共轭的自旋相反的无能隙边界态. 这一对自旋相反的共轭态能流大小相等方向相反, 分别满足一对共轭的含质量项Dirac方程. 在能带上看, 这对边界态将会在布里渊区中心发生简并, 如图4(c)所示. 与整数量子霍尔效应不同的是, 这种量子自旋霍尔效应, 需要保持时间反演对称性来保证边界态的鲁棒特性.

同样地, 光子也具有自旋. 除去自旋为零的虚光子态, 光子本征值为正负一的自旋态分别对应的

左右旋光态刚好可以构成一对共轭态. 实际上, 可以在光/声玻色系统中找到多种类似左右旋光这样成对的态——称之为“赝自旋”态——进而考虑研究光/声量子自旋霍尔效应. 量子自旋霍尔效应的核心效应是成对出现的受到时间反演对称性保护的鲁棒拓扑边界态, 其关键是实现边界态在能隙中的简并, 即Kramers简并. 电子作为费米子, 时间反演对称性刚好可以使之满足这一简并条件. 而光和声作为玻色系统, 其时间反演对称性与作为费米子的电子有本质的不同, 无法构造Kramers简并. 这一现状给科学家以启发: 如果时间反演对称性不能在玻色系统中构造Kramers简并, 那么其他对称性能否构造Kramers简并? 换言之, 在玻色系统中实现量子自旋霍尔效应, 其鲁棒特性是否必须由时间反演对称性保护?

2013年, 德克萨斯大学奥斯汀分校Khanikaev等^[34]在理论上提出了一种利用双各向异性介质实现的二维光拓扑绝缘体, 如图6所示. 他们构造了六角晶格, 并采用在高对称点附近TE+TE/TE-TM线偏振作为赝自旋态. 这篇文章提到的系统的

确具有时间反演对称性, 且作者也证明了系统的鲁棒特性. 但是, 他们并没有验证系统鲁棒特性与对称性的一一对应关系, 也就是说, 这种鲁棒特性是否与时间反演对称性直接相关仍然存疑. 2014 年, 南京大学卢明辉、陈延峰研究小组在 arXiv 上撰文, 理论上提出了一种基于压电/压磁超晶格构成的光拓扑绝缘体模型. 作者采用四方晶格, 并且以左右旋光 LCP/RCP 为赝自旋对. 与文献 [34] 的模型不同, 该系统破缺时间反演, 仅保留一种电磁对偶与时间反演叠加的对称性——称之为赝时间反演对称性. 作者系统地论证了这种鲁棒特性实际上是受

到赝时间反演对称性保护的, 而时间反演对称的存在, 只是用来描述“磁场”或者“内禀磁矩”的影响. 至此, 抛开了玻色子时间反演对称性的约束, 可以采用多种自由度角度进行研究, 从而可以在玻色系统中构造更易于实现和调控的新型拓扑光子态. 该文章于 2016 年正式发表 [35].

在实验方面, 2014 年, 中山大学董建文教授课题组验证了此类拓扑边界态的传输特性 [36]. 他们利用星形和圆盘形超构材料构造匹配参数在微波频段观测到了以 TE+TE/TE-TM 线偏振作为赝自旋态量子自旋霍尔效应.

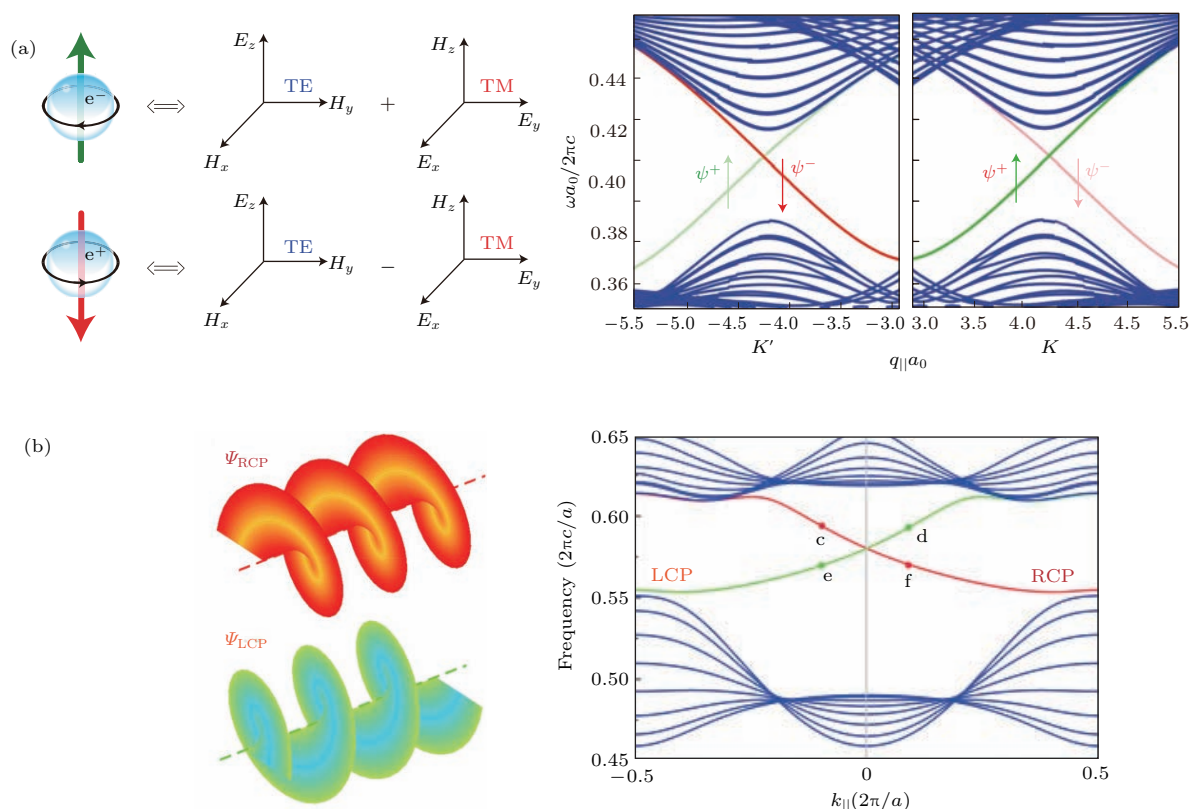


图6 光拓扑绝缘体 (a) 以 TE+TM/TE-TM 为赝自旋的时间反演对称保持的光拓扑绝缘体 [34]; (b) 以 LCP/RCP 为自旋的时间反演对称破缺的光拓扑绝缘体 [35]

Fig. 6. Photonic topological insulator: (a) Photonic topological insulator taking TE+TM/TE-TM modes as pseudospin with time-reversal symmetry [34]; (b) photonic topological insulator taking LCP/RCP modes as pseudospin with no time-reversal symmetry [35].

通过上述文献, 已经发现, 构造量子自旋霍尔效应的关键在于赝时间反演对称性. 基于此原理, 甚至可以考虑让空间点群对称性来扮演这个角色.

2015 年, 日本 NIMS 研究人员 Hu 等 [37] 在理论上提出可通过复式六方晶格中的 C_{6v} 对称性在各向同性介质材料中构造出光量子自旋霍尔态. 其赝时间反演对称性来自晶格的对称性, 对称操作包括

旋转 60° 和 120° 组合等. 他们利用能带的折叠, 将本来处于布里渊区顶点的 Dirac 简并折叠至布里渊区中心, 从而形成双重 Dirac 点 (取非初基元胞), 如图 7(a) 所示. 而通过从拉伸到压缩晶格的过程, 可实现 p 轨道和 d 轨道间的能带反转, 使能带经历从 Dirac 点简并到破缺的过程, 如图 7(b) 所示. 在简并破缺后的体能带能隙中, 可以观测到以杂化轨道

为赝自旋的鲁棒自旋边界态. 该设计不同于之前工作需要考虑复杂的偏振耦合, 仅仅利用纯介电光子晶体就可以构造光拓扑绝缘体, 因而更容易在实际中得到应用.

需要指出的是, 这种拓扑模型利用的是二维平面内的晶体对称性, 因此可以看作 3D 拓扑晶体绝缘体^[17](将在下一章介绍) 在 2D 情况的推广. 虽然它具有非平庸的体拓扑数, 但由于波导左右两边布洛赫态并不完全相同, 所以其边界态在理论上讲并不是完全无能隙的. 因此, 严格地讲, 背散射只是被抑制并不是完全免疫. 但此模型微带隙可根据需要调节得无限小, 因而能够满足应用需要.

除此之外, 这种构造赝时间反演对称性的思路, 还被拓展到了机械学^[39]、声学等领域, 为 QSH

的多平台实现提供了有力的工具. 2016 年, 南京大学卢明辉、陈延峰小组在实验上验证了基于声子晶体偶然简并的双重狄拉克点附近的能带反转构造声学量子自旋霍尔效应^[38]. 该系统选择 pd 波的不同线性组合作为两种赝自旋. 但是不同于文献^[37]的能带折叠机理, 该系统提供了一种通过调节占空比实现 Dirac 点由简并到破缺的过程. 实验证明, 在该系统具有鲁棒特性, 声波在波导中的传播体现出具有背散射抑制现象. 这是在实验上首次实现的声学量子自旋霍尔效应模型. 特别值得一提的是, 该文解决了拓扑绝缘体经常面临的单一自旋声源制备困难问题, 十分巧妙地构造了一种“X”型分路器模型, 在空间上自然分离出两类赝自旋声子, 如图 7(c) 所示.

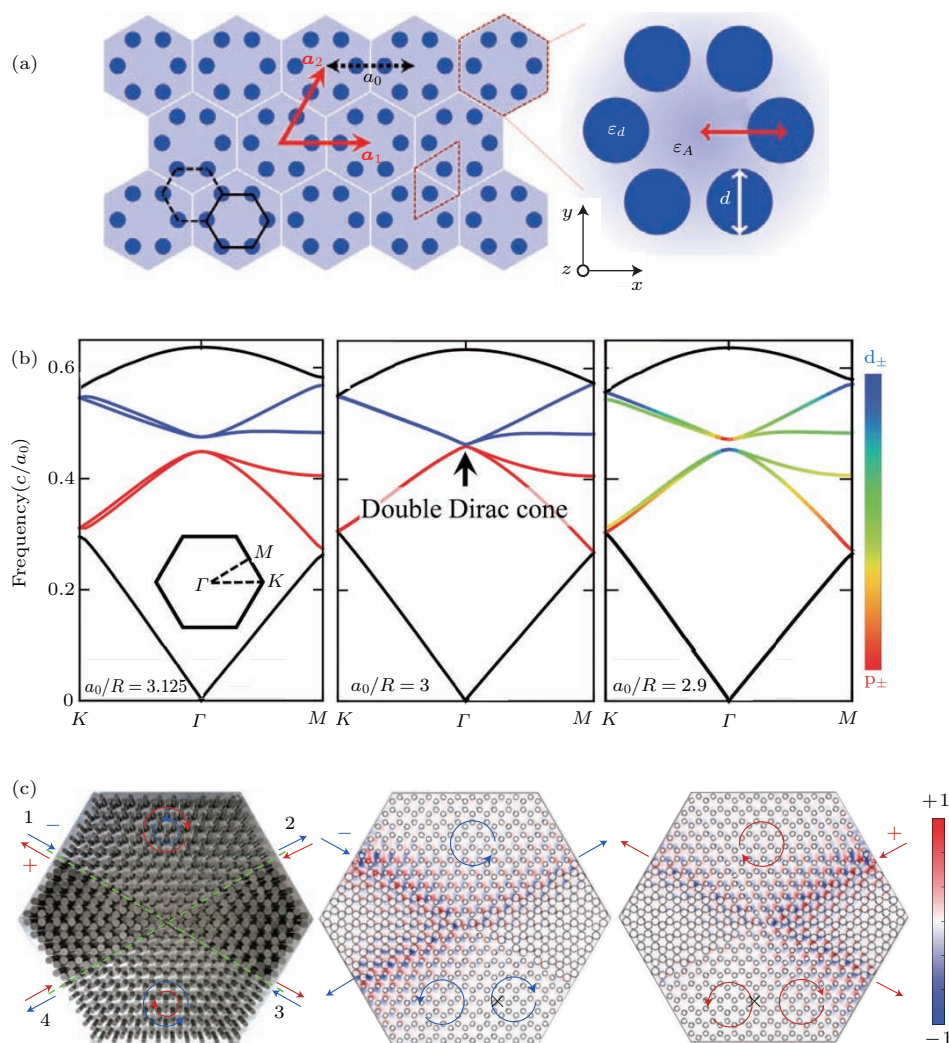


图 7 (a) 六角晶格结构; (b) K, K' 点的简并折叠到 Γ 点上, 并且随着元胞内原子间距的调整, d/p 波能带反转^[37]; (c) 声学量子自旋霍尔效应分路器^[38]

Fig. 7. (a) Hexagonal lattice; (b) Energy band folding. d/p band inversion with the increasing of the distance between atoms^[37]; (c) Cross-waveguide splitter realized by topological phononic crystals^[38].

4 光/声 Floquet 拓扑绝缘体

人工带隙材料是一门善于学习的学科. 既然电子系统中有自旋, 那么就可以有光/声赝自旋; 有时间反演对称性, 就可以有“赝时间反演对称性”. 同样, 对于整数量子霍尔效应中破坏时间反演对称性的磁场, 可以考虑一种具有同样效果的“赝磁场”, 或者说由引入等效矢势的方式获得的有效磁场. 由于引入有效势的方式往往要用到周期调制, 而周期调制的系统, 其运动方程满足 Floquet 原理 (例如固体物理中的 Bloch 波, 就是 Floquet 定理的直接结论), 并且这种系统在能带上具有准能量的特征, 所以将其统一归类为 Floquet 拓扑绝缘体 [20].

2012 年, 斯坦福大学 Fan 研究组理论上指出:

可以利用光相位动态调制的方法来实现有效磁场, 认为破缺时间反演, 达到破缺 Dirac 简并的目的 [40,41]. 他们提出 (如图 8 (a) 所示), 用含时调制的方法, 使得两个具有不同共振频率小球间横向不耦合, 而纵向耦合相位随周期数线性增加. 如此一来, 光经过一个小元格 (plaquette) 后将会获得一个相位 ϕ , 也就相当于经历了一个有效规范势. 利用 AB 效应原理, 这等效于一个规范磁场

$$B_{\text{eff}} = \frac{1}{a^2} \int A_{\text{eff}} dl = \frac{\phi}{a^2}. \quad (1)$$

在上述系统中, 耦合强度随时间成周期性变化 $V(t) = V \cos(\Omega t + \phi_{ij})$, 其中 ϕ_{ij} 为相位因子. 此时整个系统随时间呈现周期性变化, 其哈密顿量满足 $H(t+T) = H(t)$, $T = 2\pi/\Omega$, 满足 Floquet 定理的应用条件. 于是其波函数可写为 $\psi(t) = e^{-i\epsilon t} \phi(t)$, 其中 $\phi(t) = \phi(t+T)$ 满足周期性

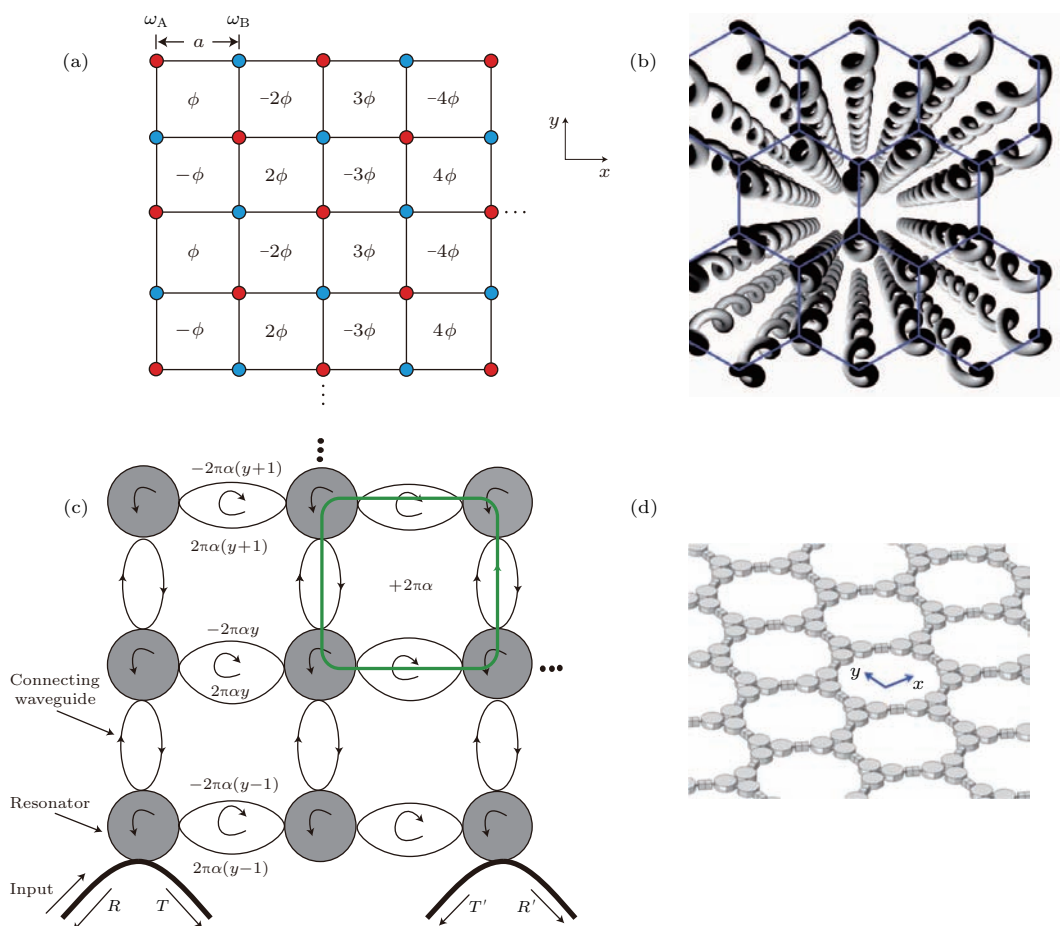


图 8 (a) 通过时间调制引入有效势 [41]; (b) 通过空间调制引入有效势 [42]; (c) 耦合共振腔结构实现鲁棒的光学拓扑延迟线的理论设计 [43]; (d) 声学 Floquet 拓扑绝缘体 [58]

Fig. 8. (a) Introducing effective potential [41]; (b) introducing effective potential with spatial modulation [42]; (c) theoretical design of robust optical delay lines with coupled resonator optical waveguides [43]; (d) phononic Floquet topological insulator [58].

(类比于布洛赫定理中随坐标空间周期性变化). 于是, 可以把 ε 视为准能量, 且满足 $(H(t) - iI\partial_t)\phi(t) = \varepsilon\phi(t)$. 由此可以得到准能量动量空间的体能带. 进一步分析可以发现, 能带的运动方程又是含有质量项的 Dirac 方程 (有效势刚好提供了质量项). 进一步分析其拓扑性质, 得到无能隙的拓扑边界态.

然而, 实现耦合强度周期性的准确含时调制在实验上有一定难度. 2013 年, 以色列理工学院 Rechtsman 等^[42] 提出了一种方案, 以空间维度上的周期性几何调制 (z 方向) 来代替时间的周期调制, 并在实验上实现了光 Floquet 拓扑绝缘体, 如图 8(b) 所示. 这个模型属于 3D 光子系统, 在下一节中会进一步介绍. 但是, 这种构造 Floquet 定理的设计方式给了 2D 系统很重要的启发.

2011 年, 美国马里兰大学 Hafezi 等^[43,44] 理论设计, 并随后 (2013 年) 在实验上实现了一种环形微腔中的单向边界传播态^[43,44]. 他们把顺时针和逆时针传播模式为赝自旋, 如图 8(c) 所示. 顺(逆)时针传播模式经过一个小元格会产生符号相反的有效规范势. 实验上证实, 该模型中通讯波段光 (1539 nm) 具有单向传输和背散射抑制的鲁棒特性. 之后的研究表明, 这种基于共振耦合微腔的结构可以对应于准能量动量系统, 从而完全对应于网格模型下的 Floquet 拓扑绝缘体^[45]. 此外, 基于这种有效场理论或者网络模型的其他 Floquet 拓扑绝缘体设计被不断提出^[46–57].

对于声学系统, 同样可以考虑时间调制, 或者设计网格模型, 利用顺时针、逆时针的声学传播模式构造声赝自旋. 但是, 与光学不同, 声学材料阻抗失配较大, 导致耦合系数极低, 在实验上较难观测到明显现象. 因此, 需要较高的加工精度来支持声学实验. 如图 8(d) 所示, 2016 年, Alú 等^[58] 利用时间调制声学晶格, 在理论和模拟上提出了声学 Floquet 效应. 紧接着, 利用网格模型的水声环耦合模型^[59] 以及超构材料波导耦合模型相继提出, 在实验上实现了声学 Floquet 拓扑绝缘体^[60].

5 一维/三维的光/声拓扑材料

本文开篇以湖面飞剑场景, 简单描述了拓扑边界态的性质. 实际上, 这个场景更像是在描述 3D 拓扑绝缘体的表面态. 除了最初获得成功的 2D 系

统, 科学家们也对其他维度, 例如 1D/3D 拓扑材料进行了研究. 可以从前面讨论过的二维系统, 以及贯穿其中的 Dirac 方程出发, 对 1D/3D 系统进行分类.

对于 1D 系统, 首先, 把 2D 系统向 1D 投影, 可以得到“1D 准周期系统”, 其模型包括: Haper (Aubry-Andre) 模型^[61,62], 以及对角 Fibonacci 模型^[63] 等. 通过引入特定分布的势场, 可以在 1D 结构中构造满足要求的紧束缚近似模型. 2012, Kraus 等^[64] 理论计算并实验验证了一维准晶系统表现出具有拓扑保护性质的边界态, 其拓扑不变量可以视为 2D 陈数的投影. 2013 年, Verbin 等^[65] 利用 1D 光学晶格实现准晶系统, 观测到了拓扑相变, 其实验激光位于红外波段, 如图 9(a) 所示.

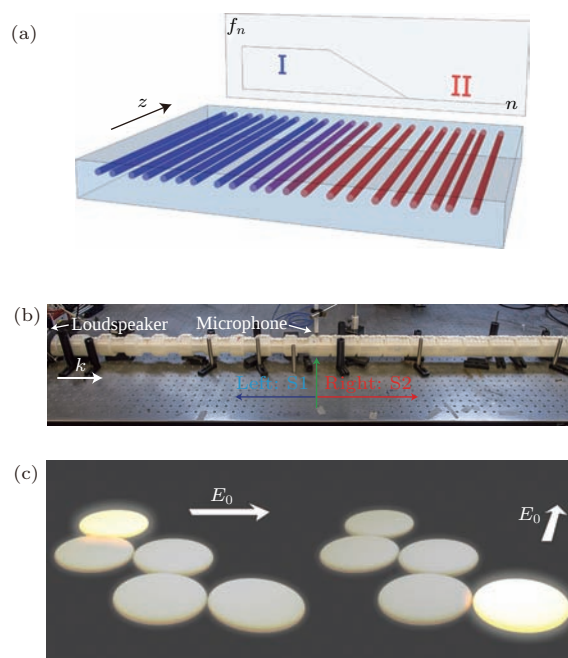


图 9 1D 拓扑系统 (a) 一维光学晶格准晶拓扑系统^[65]; (b) 一维光子晶体中的 Zak 相位^[69]; (c) 等离激元 Majorana 费米子^[71]

Fig. 9. 1D topological system: (a) Quasi-crystal topology system in 1D photonic crystal^[65]; (b) Zak phase in 1D photonic crystal^[69]; (c) plasmonic Majorana Fermions^[71].

其次, 把 2D 几何相位陈数向 1D 推广就得到了 Zak 相位^[66], 代表性的模型是 SSH 模型^[67]. 2014 年, 香港科技大学的陈子亭研究小组通过调节结构参数光学构造阻抗匹配, 理论上实现几何相位控制的拓扑边界态^[68]. 2015 年, 他们又在声学领域取得突破, 从理论上和实验上提出了收到 Zak 相位控制的声学一维拓扑边界态^[69], 如图 9(b) 所示.

最后, 把视线退回到Dirac方程的本源, 选取不同的表象, 可以得到Dirac费米子、Weyl费米子、或者Majorana费米子. 其中Weyl费米子将在三维系统中详细描述, 而Majorana费米子对应的Kitaev模型^[70], 可以在1D系统中实现. 2014年, Poddubny等^[71]利用纳米颗粒组成“zigzag”型阵列, 根据入射光极化方向的不同, 激发了不同的等离激元模式, 进而得到了不同的边界模式, 如图9(c)所示.

对于3维系统, 仍然从Dirac方程出发来考察.

首先, 一个最直接的思路是: 在三维系统中构造2D Dirac方程. 于是可以利用2D系统中的各种结论进一步分析三维系统, 这就是前面提到过的Floquet拓扑绝缘体^[20,42]. 如图10(a)所示, 利用螺旋形波导管组成六角晶格, 并用空间坐标 Z 等效地代替时间左边, 从而构造了含有等效势场的运动方程

$$i\partial_{z'}\psi' = -\frac{1}{2k_0}(\nabla' + i\mathbf{A}(z'))^2\psi' - \frac{k_0 R^2 \Omega^2}{2}\psi' - \frac{k_0 \Delta n(x', y')}{n_0}\psi', \quad (2)$$

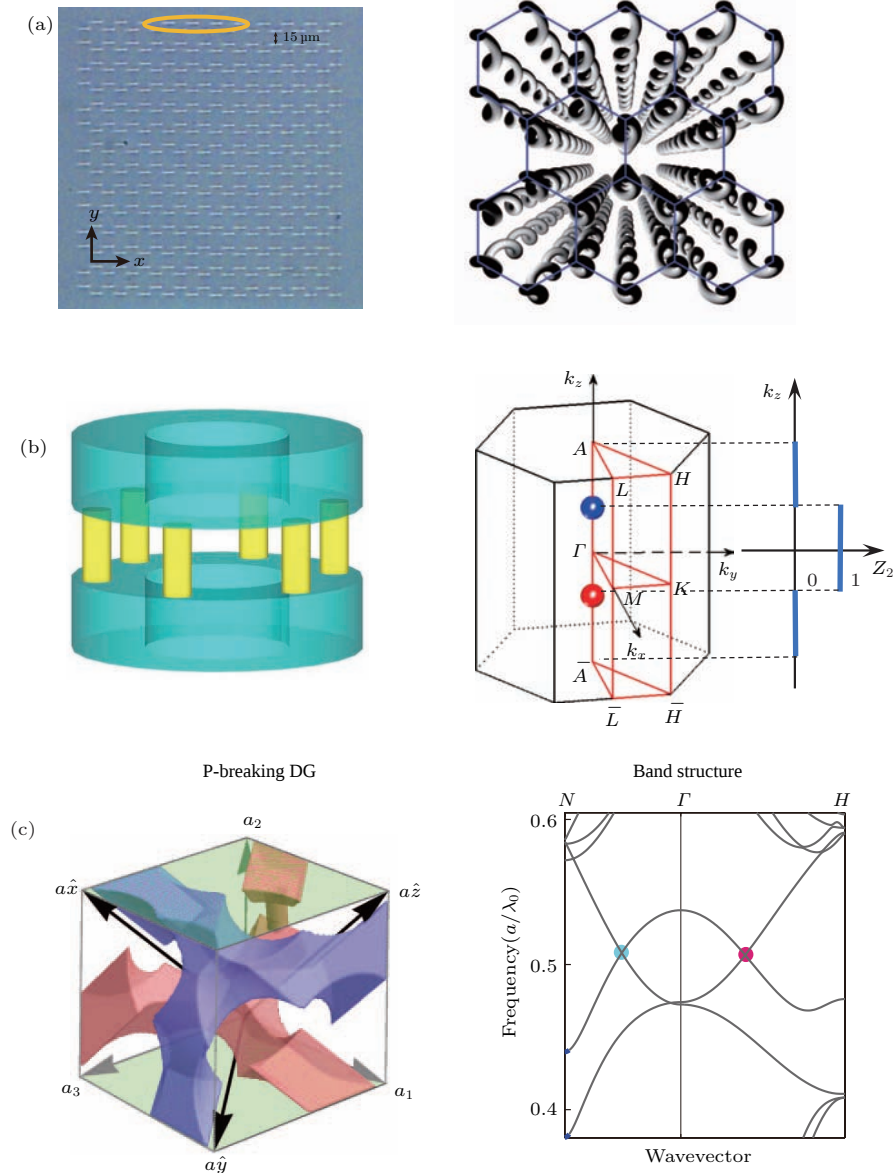


图10 (a) 光学Floquet拓扑绝缘体^[42]; (b) 利用晶格对称性实现光学Dirac点^[73]; (c) 光学Weyl点^[75]

Fig. 10. (a) Photonic Floquet topological insulator^[42]; (b) realizing photonic Dirac point with lattice symmetry^[73]; (c) photonic Weyl point^[75].

其中, 矢势项

$$\mathbf{A}(z') = k_0 R \left(\frac{2\pi}{Z} \right) \left[\sin \left(\frac{2\pi z'}{Z} \right), -\cos \left(\frac{2\pi z'}{Z} \right), 0 \right],$$

可具有有效磁场 $\mathbf{B}_{\text{eff}} = \nabla \times \mathbf{A}$. 而其中 ψ' 是 z 方向的周期函数, 可用 Floquet 定理表示为 $\psi'(z') = e^{-i\epsilon t} \psi'(z')$. 同理, 准能量可表示为 Bloch 波矢 (k_x, k_y) 的函数, 即 Floquet 能带图. 那么, 则可得无能隙的拓扑边界态. 实验表明, 光 (633 nm) 可沿 z 方向绕其边界无背散射传播 (单向螺旋上升), 具有一定的缺陷免疫能力.

另一方面, 上述这种用空间代替时间的方式启发我们重新审视时间反演对称性在整个系统中扮演的角色, 考虑是否可以用其他对称性取代其位置, 于是就有了拓扑晶绝缘体的概念^[17]. 在 2D 系统中, 已经看到了取代时间反演对称性的赝时间反演对称性取得的成果^[39,37,38]. 对于 3D 系统, 在 2016 年, 麻省理工学院 Lu 等^[72] 提出了一种受到晶体对称性——非点群滑移反射保护, 而非时间反演对称性保护的表面态 Dirac 点. 他们给铁磁材料施加外磁场打开了体能带带隙, 可以在微波段实现 3D 光拓扑绝缘体. 同年, Jiang 等^[73] 提出了利用全电介质材料实现点群保护的三维光拓扑绝缘体的方法, 在能带中发现了成对出现的 Dirac 点, 如图 10(b) 所示.

由于相较于 2D 系统增加了一个维度, 3D Dirac 点不同于 2D Dirac 点的独立出现, 将会在倒空间中形成一个“线模式”(“line node”), 在二维空间观察仍然是线性色散. 仍然按照二维系统的思路, 通过破缺对称性的方式试图打开简并. 此时线模式退化, 在三维空间中形成线性简并点——Weyl 点. 不同于二维的 Dirac 简并, 此处的 Berry 曲率完全类似磁单极子磁场分布. 即该点自带非零陈数, 因而在该点处, 系统具有丰富的拓扑物理性质^[19]. 2013 年, 麻省理工学院 Lu 等^[74,75] 提出了利用 gyroid 材料实现光子 Weyl 点, 并在随后的实验中观察到对应的现象, 如图 10(c) 所示. 在声学领域, 2015 年, 香港科技大学陈子亭研究小组提出了一种堆叠状的声学模型. 通过调控层间耦合参数, 实现了三维声学 Weyl 点^[76]. 进一步研究表明, 前面研究的 Weyl 点, 其色散关系的二维投影是椭圆. 而 Dirac 点在退化为 Weyl 点是, 可能形成双曲线形色散, 这就是第二类 Weyl 点. 对应的光学声学拓扑系统也已经先后被设计

提出^[77,78].

6 Dirac 方程的拓扑性质

御剑之气从何而来? 通过前面几章的讨论, 我们发现, 一个拓扑系统中往往隐藏着一个含有质量项的 Dirac 方程. 实际上, Dirac 方程正是拓扑效应的关键所在. 这里将利用数学工具, 详细讲解这一关系. 首先从光/声动力学模型出发, 得到 Dirac 方程. 之后, 分析 Dirac 方程所引发的边界态. 最后, 讨论 Dirac 方程所具有的拓扑性质, 也就是几何相位.

6.1 从光/声系统到 Dirac 方程

首先来看他们的运动方程.

光学系统基本运动方程为 Maxwell 方程组. 以二维系统为例, 对于各向同性介质, 相对介电常数和磁导率是 $\vec{\epsilon} = \text{diag}\{\epsilon_{xx}, \epsilon_{xx}, \epsilon_{\perp}\}$, $\vec{\mu} = \text{diag}\{\mu_{xx}, \mu_{xx}, \mu_{\perp}\}$ 于是运动方程表达式为

$$\left[\partial_x \left(\frac{1}{\mu_{xx}} \right) \partial_x + \partial_y \left(\frac{1}{\mu_{xx}} \right) \partial_y \right] E_z = \epsilon_{\perp} \frac{\omega^2}{c^2} E_z. \quad (3)$$

把 E_z 视为波函数 ϕ , 前面的运算视为哈密顿算子 H , 本征频率 ω^2/c^2 视为波函数本征值, 可以得到一个等效的单电子哈密顿方程

$$H\phi_n(x) = E_n\phi_n(x). \quad (4)$$

声学系统运动方程形式比较多样, 但是同样可以写出一套与电子系统类似的单粒子运动方程, 形式同上.

于是系统的波函数可以表示为

$$\psi(x) = \sum_n c_n \phi_n(x), \quad (5)$$

二次量子化使之成为算符. 则系统的总哈密顿量可以表示为

$$\begin{aligned} H_0 &= \int \psi^\dagger(x) H \psi(x) dx \\ &= \sum_{n,m} \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_m \int \phi_n(x) H \phi_m(x) dx \\ &= \sum_{n,m} \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_m t_{nm}, \end{aligned} \quad (6)$$

我们把本征波函数取为每一个元胞内的本征波函数, 并且只保留最近邻项就得到了二次量子化后的

有效哈密顿量

$$H_0 = \sum_{i,\alpha,\beta} \epsilon_0 \hat{c}_{i\alpha}^\dagger \hat{c}_{i\beta} + \sum_{\langle i,j \rangle, \alpha, \beta} t_{i\alpha, j\beta} \hat{c}_{i\alpha}^\dagger \hat{c}_{j\beta}, \quad (7)$$

其中 i, j 表示元胞位置, α, β 表示元胞中的不同波函数. 例如在石墨烯结构中, α, β 代表同一晶格中两个不同原子的波函数; 而在四方中, 它们可以用来表示轨道角动量 s 波 p 波. 对产生湮没算符进行傅里叶变换可以得到

$$H_0 = \sum_{k, \alpha, \beta} \hat{c}_{k\alpha}^\dagger H_k^{\alpha\beta} \hat{c}_{k\beta},$$

$$H_k^{\alpha\beta} = \sum_{\delta} H_{\delta}^{\alpha\beta} e^{-ik\delta}, \quad (8)$$

其中 δ 代表最近邻的耦合. 以一维系统为例, 具体展示如何变换得到 Dirac 方程. 一维原子链的耦合情况如图 11 所示.

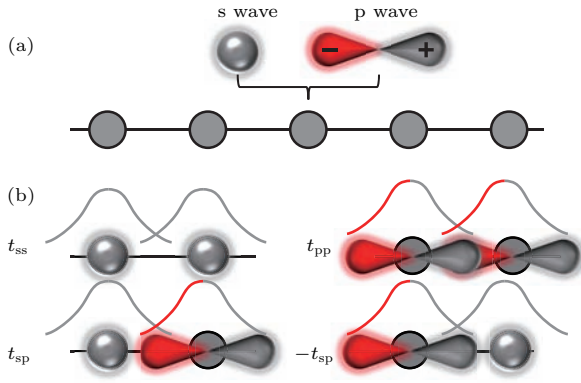


图 11 一维原子链

Fig. 11. 1D chain of atoms

我们可以得到

$$H_k^{ss} = \epsilon_s + 2t_{ss} \cos k, \quad H_k^{pp} = \epsilon_p + 2t_{pp} \cos k,$$

$$H_k^{sp} = -2it_{sp} \sin k, \quad (9)$$

其中

$$\epsilon_s = \langle s, m | H | s, m \rangle,$$

$$\epsilon_p = \langle p, m | H | p, m \rangle,$$

$$t_{ss} = \langle s, m | H | s, m-1 \rangle$$

$$= \langle s, m | H | s, m+1 \rangle,$$

$$t_{pp} = \langle p, m | H | p, m-1 \rangle$$

$$= \langle p, m | H | p, m+1 \rangle,$$

$$t_{sp} = \langle s, m+1 | H | p, m \rangle$$

$$= -\langle s, m | H | p, m-1 \rangle. \quad (10)$$

假设能带带隙围绕 $k = 0$ 点, 可以把哈密顿量在 $k = 0$ 处展开到 k 的线性项, 得到

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_s + 2t_{ss} & -2it_{sp}k \\ 2it_{sp}k & \epsilon_p + 2t_{pp} \end{pmatrix}$$

$$= \epsilon_0 + m_0 v_f^2 \tau_z + \hbar v_f k \tau_y, \quad (11)$$

这刚好是 Dirac 方程的基本形式.

下面考察 Dirac 方程的基本性质.

6.2 Dirac 方程与边界态

1928 年, Dirac 提出了一个用于描述电子运动的相对论量子力学波动方程.

$$H = c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta, \quad (12)$$

其中 c 代表光速, $\mathbf{p}$ 是动量, m 是粒子质量项, $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 是 Dirac 矩阵. 由于必须满足质能方程, 它们需要满足如下关系:

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1,$$

$$\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i,$$

$$\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i. \quad (13)$$

显然泡利矩阵满足上述关系

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (14)$$

在一维和二维空间中, 可以选择泡利矩阵作为 Dirac 矩阵. 方便起见, 一维情况可以取

$$\alpha_x = \sigma_x, \quad \beta = \sigma_z, \quad (15)$$

二维情况

$$\alpha_x = \sigma_x, \quad \alpha_y = \sigma_y, \quad \beta = \sigma_z. \quad (16)$$

然而, 单纯的 Dirac 方程并不足以描述我们的问题. 原因如下: 1) 假设我们的材料边界处于真空之中, 如图 12 所示. 对于真实的材料体系, 需要在开放边界条件 $\psi(x=0) = 0$ 以及无限距离边界条件 $\psi(x=\infty) = 0$, Dirac 方程的解无法同时满足上述要求; 2) 对于单纯的 Dirac 方程, 具有质量对称性, 进行一个么正变换之后, 质量项符号可以变化, 这使得拓扑平庸与非平庸的判断并不能仅仅基于特定参数 m , 而需要依赖另一个附加参数, 这并不符合“拓扑是物质的内禀性质”的预期. 于是, 我们

需要在质量项上增加一个动量的二次项来实现我们的目的,

$$H = v_f \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} + (mv_f^2 - B|\mathbf{p}|^2) \beta, \quad (17)$$

在这里, 把光速 c 换为粒子速度 v_f . 这样首先打破了 m 进行么正变换时可以变成 $-m$ 的对称性, 后面将会看到它会完全满足边界条件.

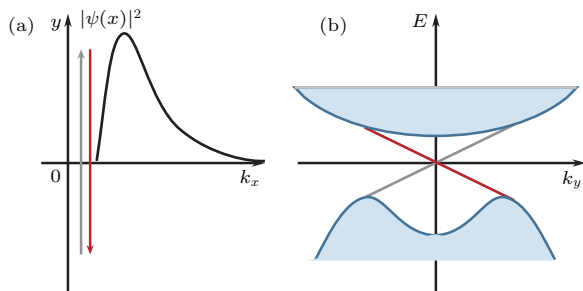


图 12 (a) 波函数在材料与真空环境的界面上, 可以观测到一对运动方向相反的边界态, 其对应能带如图 (b) 所示
Fig. 12. (a) Wave function in the interface between material and vacuum, there are a pair of edge states, which has different direction, the energy band is shown in (b).

对于一维情形

$$H_{1\text{MD}} = (mv_f^2 - Bp_x^2) \tau_z + v_f p_x \tau_x. \quad (18)$$

考虑能量 E 对应的本征解 ψ , $H\psi = E\psi$. 显然有 $H\tau_y\psi = -\tau_y H\psi = -E\tau_y\psi$, 也就是说, $\psi' = \tau_y\psi$ 将会是能量 $-E$ 对应的本征解. 我们发现系统总会具有一个零能量解 $E = 0$. 下面重点来考察这个特殊的零能量解 (实际上, 对于单纯 Dirac 方程, 这也是边界态连续性的要求). 代入试探解 $\psi(x) \sim e^{\lambda x} \xi$, 其中 ξ 是与 x 无关的二分量波函数, 于是得到

$$(mv_f^2 + B\hbar^2 \lambda^2) \xi = \lambda \hbar v_f \tau_y \xi. \quad (19)$$

于是 ξ 必须是 τ_y 的本征波矢 $\tau_y \xi_s = s \xi$ ($s = \pm 1$). 对应的 λ 可以求解得到

$$\lambda_{s,\pm} = \frac{v_f}{2B\hbar} (s \pm \sqrt{1 - 4Bm}). \quad (20)$$

利用边界条件 $\psi(x=0) = 0$, 解的一般形式可以写作

$$\psi(x) = \sum_s c_s (e^{\lambda_{s,+} x} - e^{\lambda_{s,-} x}) \xi_s. \quad (21)$$

再利用边界条件 $\psi(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, 需要 $\lambda_{s,\pm} < 0$ 或者 $\lambda_{s,\pm} > 0$ 此时 $\lambda_{-s,\pm} < 0$. 这就等价于

$\lambda_{s,+} \lambda_{s,-} \sim m/B \sim mB > 0$, 这就是拓扑现象中经常提到的“能带反转”. 在这个条件下, 可以得到

$$\psi_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} (e^{\lambda_+ x} - e^{\lambda_- x}) \begin{pmatrix} \text{sgn}(B) \\ i \end{pmatrix}, \quad (22)$$

其中 $\lambda_\pm = \frac{v_f}{2|B|\hbar} (-1 \pm \sqrt{1 - 4Bm})$, $\eta = \text{sgn}(B)$, 此处假设 $\hbar v_f > 0$.

下面考虑二维情形. 先讨论量子反常霍尔效应模型 (quantum anomalous Hall effect, QAH), 因为量子自旋霍尔效应实际上可以视为两个 QAH 模型的叠加.

$$H_{\text{QAH}} = (mv_f^2 - Bp^2) \tau_z + v_f (p_x \tau_x + p_y \tau_y). \quad (23)$$

把方程 $H_{\text{QAH}}\psi(x) = E\psi(x)$ 分离变量可以得到

$$\begin{aligned} (mv_f^2 - B\hbar^2 k_y^2 + B\hbar^2 \partial_x^2) \tau_z \psi(x) \\ + (-i\hbar v_f \partial_x) \tau_x \psi(x) = 0, \\ \hbar v_f k_y \tau_y \psi(x) = E \psi(x). \end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式的第一式与一维情况完全类似, 解存在条件为 $B(mv_f^2 - Bk_y^2) > 0$.

然而, 此时必须保证第二式与第一式同时成立. 好在第二式与第一式一样, 要求 ψ 是 σ_y 的本征波函数, 于是, 可以把一维情况下的解原样复制到二维情况.

$$\psi_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} (e^{\lambda_+ x} - e^{\lambda_- x}) \begin{pmatrix} \text{sgn}(B) \\ i \end{pmatrix} e^{ip_y y/\hbar}, \quad (25)$$

其中 $\lambda_\pm = \frac{v_f}{2|B|\hbar} (-1 \pm \sqrt{1 - 4Bm + 4B^2 p_y^2/v_f^2})$, $\eta = \text{sgn}(B)$. 这个边界模式仅沿一个方向传输, 我们说它具有“手性”(Chiral).

下面把这段推导推广到量子自旋霍尔效应.

$$\begin{aligned} H_{\text{QSH}} &= \begin{pmatrix} H_{\text{QAH}}(k) & 0 \\ 0 & H_{\text{QAH}}^*(-k) \end{pmatrix} \\ &= (mv_f^2 - Bp^2) \tau_z \otimes \sigma_0 \\ &\quad + v_f (k_y \tau_y \otimes \sigma_0 + k_x \tau_x \otimes \boldsymbol{\sigma}_z), \end{aligned} \quad (26)$$

那么对应的解为

$$\psi_\uparrow(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} (e^{\lambda_+ x} - e^{\lambda_- x}) \begin{pmatrix} \text{sgn}(B) \\ i \end{pmatrix} e^{ip_y y/\hbar} |\uparrow\rangle,$$

$$\psi_{\downarrow} = T\psi_{\uparrow}(x) = -\frac{1}{\sqrt{N}} (e^{\lambda+x} - e^{\lambda-x}) \begin{pmatrix} \text{sgn}(B) \\ -i \end{pmatrix} \times e^{-ip_y y/\hbar} |\downarrow\rangle. \quad (27)$$

色散关系为

$$E_{\uparrow} = -\hbar v_f k_y, \quad E_{\downarrow} = \hbar v_f k_y. \quad (28)$$

这一对边界态的传播方向与自旋方向相互锁定, 称为“螺旋边界态”(helical edge state).

6.3 Dirac 方程的几何相位

综上我们发现, 通过 Dirac 方程可以得到一个螺旋性的边界态, 并且把 Dirac 方程与我们熟悉的晶格运动方程联系了起来. 下面, 分别用 TKNN 方法, 以及 Dirac 运动方程, 考察这个边界态的拓扑性质.

对于周期性晶格结构, 有

$$H(\mathbf{r}) = H(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \quad |\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} |u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle, \quad (29)$$

其中, $u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$. 把 $H(\mathbf{r})$ 展开到 k 空间 $H(\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} H(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 有

$$H(\mathbf{k}) |u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle = E_{n,\mathbf{k}} |u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle. \quad (30)$$

利用 TKNN 方法可以得到霍尔电导率表示为

$$\sigma_{\alpha\beta} = i \frac{e^2}{\hbar} \int_{\text{BZ}} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} [\langle \partial_{k_\alpha} u_n | \partial_{k_\beta} u_n \rangle - \langle \partial_{k_\beta} u_n | \partial_{k_\alpha} u_n \rangle], \quad (31)$$

其中 α, β 代表方向指标, 引入一个矢势 $\mathbf{A}$, 其分量满足

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \langle u_n | \nabla_{\mathbf{k}} | u_n \rangle. \quad (32)$$

对应的场强 (也就是 Berry 曲率)

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}, \quad (33)$$

于是霍尔电导率可以表示为

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= i \frac{e^2}{\hbar} \int_{\text{BZ}} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} F_{xy} \\ &= i \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} d\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} \\ &= i \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} d^2 \mathbf{k} (\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A})_z. \end{aligned} \quad (34)$$

而在数学上, 积分项刚好对应“陈数”,

$$C \equiv \frac{i}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial A_\mu}{\partial k_\nu} dk_\nu \wedge dk_\mu. \quad (35)$$

于是霍尔电导率可以表示为

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} C. \quad (36)$$

而另一方面, 从 Dirac 方程出发, 霍尔电导率可以表示为

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\hbar} \int_{\Omega} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} d \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial k_x} \times \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial k_y} \right). \quad (37)$$

其中 $\mathbf{d}$ 是狄拉克方程中的各个分量,

$$H = \mathbf{d} \cdot \hat{\tau}, \quad d_x = \hbar v_f \sin k_y, \quad d_y = \hbar v_f \sin k_x, \quad d_z = m v_f^2 + B (\cos k_x + \cos k_y). \quad (38)$$

进一步推导可得

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} C, \quad C = \pm (\text{sgn}(m) + \text{sgn}(B))/2. \quad (39)$$

当 $mB > 0$ 时, $C \neq 0$ 此时存在拓扑非平庸边界态; 当 $mB < 0$ 时, $C = 0$, 此时系统处于拓扑平庸状态. 上述推导与之前得出的边界态存在条件完全一致. 于是, 我们从 Dirac 方程出发, 得出了与 TKNN 方法一样的霍尔电导率, 更进一步证明了可以通过分析 Dirac 方程, 预测系统的拓扑性质.

7 总结与展望

拓扑人工带隙材料因其独特的鲁棒边界态越来越受到人们的关注. 本文简要撷取了近年来备受关注的研究方向, 包括光/声整数量子霍尔效应, 量子自旋霍尔效应, Floquet 拓扑绝缘体以及 1 维/3 维拓扑系统等. 我们对这些现象进行了简要的描述, 并且列举了相应的具有代表性的研究成果. 除此之外, 在第六章对这种拓扑性质的由来进行了理论探讨, 说明了 Dirac 方程可以视为拓扑现象的产生根源.

鲁棒边界态具有免疫缺陷、背散射抑制、性能稳定等优异特性, 具有巨大的潜在应用价值. 首先, 利用拓扑材料制成的光/声器件, 将会具有极高的信噪比, 大大提高器件性能; 其次, 由于免疫缺陷, 拓扑材料对加工精度的要求并不苛刻, 科学家对光/声器件的研究不再强烈依赖极端的实验室环境, 这便于产业推广以及实验室普及; 最后, 由于传输性能稳定, 科学家们可以放开思路, 把研究的重点转移到其他原本受到稳定性限制的新性能研究上. 例如纠缠或非线性效应作用下光/声拓扑态的情况、拓扑保护的单向传播光子晶体光纤、光量子计算等.

理论研究方面, 后续的拓扑研究工作可以全面围绕Dirac方程展开. 作为连接量子力学与相对论的重要纽带, Dirac方程具有多种表象, 对应各种不同的解的形式, 包括Weyl费米子、Majorana费米子、Dirac费米子等. 考虑到人工带隙材料的可设计性、可调谐、不易受杂质影响等特性, 可以把它作为实验平台, 实现这些电子系统中虽有预言、但是难以获得的准粒子. 另一方面, Dirac方程对应的简并与简并破缺, 直接影响了能带的拓扑性质, 或者说几何相位. 以往的拓扑学分析, 通常要求系统具有厄米性质, 且往往局限于单粒子方程. 我们可以试图在理论上将Dirac方程与几何相位推广到非厄米体系, 或者多粒子体系. 如在拓扑声/光学系统中引入增益损耗, 实现具有实本征值的非厄米系统, 或者引入非线性参数, 构造相互作用模型等.

综上所述, 进行人工带隙材料拓扑性质的研究无论是对理论研究发展, 还是对于最终转化为实际产品都有着重要指导作用. 光/声子晶体拓扑态及其相关领域的研究对未来拓扑光/声子学的发展具有里程碑式的意义, 终将成为现代光/声子学里的一个重要组成部分.

参考文献

- [1] Pancharatnam S 1956 *Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A* **44** 398
- [2] Berry M V 1984 *Proc. Royal Soci. London A: Math. Phys. Engineer. Sci.* **392** 45
- [3] Tomita A, Chiao R Y 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 937
- [4] Asorey M 2016 *Nat. Phys.* **12** 616
- [5] "The 2016 Nobel Prize in Physics-Press Release." from http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laur-eates/2016/press.html.
- [6] Hall E H 1879 *Am. J. Math.* **2** 287
- [7] Klitzing K V, Dorda G, Pepper M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 494
- [8] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [9] Haldane F D M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015
- [10] Shen S Q 2012 *Topological Insulator*. (Springer, Berlin)
- [11] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [12] König M, Wiedmann S, Brüne C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
- [13] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [14] Sheng L, Sheng D N, Ting C S, Haldane F D M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 136602
- [15] Zhang H J, Liu C X, Qi X L, Dai X, Fang Z, Zhang S C 2009 *Nat. Phys.* **5** 438
- [16] Chen Y L, Analytis J G, Chu J H, Liu Z K, Mo S K, Qi X L, Zhang H J, Lu D H, Dai X, Fang Z, Zhang S C, Fisher I R, Hussain Z, Shen Z X 2009 *Science* **325** 178
- [17] Fu L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 106802
- [18] Hsieh T H, Lin H, Liu J, Duan W, Bansil A, Fu L 2012 *Nat. Commun.* **3** 982
- [19] Wan X, Turner A M, Vishwanath A, Savrasov S Y 2011 *Phys. Rev. B* **83** 205101
- [20] Cayssol J, Dora B, Simon F, Moessner R 2013 *Phys. Status Solidi Rapid Res. Lett.* **7** 101
- [21] Chang C Z, Zhang J, Feng X, Shen J, Zhang Z, Guo M, Li K, Ou Y, Wei P, Wang L L, Ji Z Q, Feng Y, Ji S, Chen X, Jia J, Dai X, Fang Z, Zhang S C, He K, Wang Y, Lu L, Ma X C, Xue Q K 2013 *Science* **340** 167
- [22] Lu L, Joannopoulos J D, Soljacic M 2016 *Nat. Phys.* **12** 626
- [23] Haldane F D M, Raghu S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013904
- [24] Wang Z, Chong Y D, Joannopoulos J D, Soljacic M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013905
- [25] Wang Z, Chong Y, Joannopoulos J D, Soljacic M 2009 *Nature* **461** 772
- [26] Poo Y, Wu R X, Lin Z, Yang Y, Chan C T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 093903
- [27] Yannopapas V 2011 *Phys. Rev. B* **84** 195126
- [28] Liu K, Shen L, He S 2012 *Opt. Lett.* **37** 4110
- [29] Asatryan A A, Botten L C, Fang K, Fan S, McPhedran R C 2013 *Phys. Rev. B* **88** 035127
- [30] Skirlo S A, Lu L, Igarashi Y, Yan Q, Joannopoulos J, Soljačić M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 253901
- [31] Fleury R, Sounas D L, Sieck C F, Haberman M R, Alù A 2014 *Science* **343** 516
- [32] Yang Z, Gao F, Shi X, Lin X, Gao Z, Chong Y, Zhang B 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 114301
- [33] Ni X, He C, Sun X C, Liu X P, Lu M H, Feng L, Chen Y F 2015 *New J. Phys.* **17** 053016
- [34] Khanikaev A B, Mousavi S H, Tse W K, Kargarian M, MacDonald A H, Shvets G 2013 *Nat. Mater.* **12** 233
- [35] He C, Sun X C, Liu X P, Lu M H, Chen Y, Feng L, Chen Y F 2016 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **113** 4924
- [36] Chen W J, Jiang S J, Chen X D, Zhu B, Zhou L, Dong J W, Chan C T 2014 *Nat. Commun.* **5** 5782
- [37] Wu L H, Hu X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 223901
- [38] He C, Ni X, Ge H, Sun X C, Chen Y B, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Nat. Phys.* **12** 1124
- [39] Susstrunk R, Huber S D 2015 *Science* **349** 47
- [40] Fang K, Yu Z, Fan S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 153901
- [41] Fang K, Yu Z, Fan S 2012 *Nat. Photon.* **6** 782
- [42] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, Lumer Y, Podolsky D, Dreisow F, Nolte S, Segev M, Szameit A 2013 *Nature* **496** 196
- [43] Hafezi M, Demler E A, Lukin M D, Taylor J M 2011 *Nat. Phys.* **7** 907
- [44] Hafezi M, Mittal S, Fan J, Migdall A, Taylor J M 2013 *Nat. Photon.* **7** 1001

- [45] Liang G Q, Chong Y D 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 203904
- [46] Petrescu A, Houck A A, Le Hur K 2012 *Phys. Rev. A* **86** 053804
- [47] Rechtsman M C, Zeuner J M, Tunnermann A, Nolte S, Segev M, Szameit A 2013 *Nat. Photon.* **7** 153
- [48] Wang Y H, Steinberg H, Jarillo-Herrero P, Gedik N 2013 *Science* **342** 453
- [49] Guzmán-Silva D, Mejía-Cortés C, Bandres M A, Rechtsman M C, Weimann S, Nolte S, Segev M, Szameit A, Vicencio R A 2014 *New J. Phys.* **16** 063061
- [50] Lin Q, Fan S 2014 *Phys. Rev. X* **4** 031031
- [51] Mittal S, Fan J, Faez S, Migdall A, Taylor J M, Hafezi M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 087403
- [52] Ozawa T, Carusotto I 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 133902
- [53] Terças H, Flayac H, Solnyshkov D D, Malpuech G 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 066402
- [54] Tzuang L D, Fang K, Nussenzveig P, Fan S, Lipson M 2014 *Nat. Photon.* **8** 701
- [55] Hu W, Pillay J C, Wu K, Pasek M, Shum P P, Chong Y D 2015 *Phys. Rev. X* **5** 011012
- [56] Schmidt M, Kessler S, Peano V, Painter O, Marquardt F 2015 *Optica* **2** 635
- [57] Gao F, Gao Z, Shi X, Yang Z, Lin X, Xu H, Joannopoulos J D, Soljacic M, Chen H, Lu L, Chong Y, Zhang B 2016 *Nat. Commun.* **7** 11619
- [58] Fleury R, Khanikaev A B, Alù A 2016 *Nat. Commun.* **7** 11744
- [59] He C, Li Z, Ni X, Sun X C, Yu S Y, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Appl. Phys. Lett.* **108** 031904
- [60] Peng Y G, Qin C Z, Zhao D G, Shen Y X, Xu X Y, Bao M, Jia H, Zhu X F 2016 *Nat. Commun.* **7** 13368
- [61] Harper P G 1955 *Proc. Phys. Soci. Sec. A* **68** 874
- [62] Aubry S, André G 1980 *Ann. Israel Phys. Soc.* **3** 18
- [63] Kohmoto M, Kadanoff L P, Tang C 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1870
- [64] Kraus Y E, Lahini Y, Ringel Z, Verbin M, Zilberberg O 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 106402
- [65] Verbin M, Zilberberg O, Kraus Y E, Lahini Y, Silberberg Y 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 076403
- [66] Zak J 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 2747
- [67] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698
- [68] Xiao M, Zhang Z Q, Chan C T 2014 *Phys. Rev. X* **4** 021017
- [69] Xiao M, Ma G, Yang Z, Sheng P, Zhang Z Q, Chan C T 2015 *Nat. Phys.* **11** 240
- [70] Kitaev A Y 2001 *Physics-Uspekhi* **44** 131
- [71] Poddubny A, Miroshnichenko A, Slobozhanyuk A, Kivshar Y 2014 *ACS Photon.* **1** 101
- [72] Lu L, Fang C, Fu L, Johnson S G, Joannopoulos J D, Soljacic M 2016 *Nat. Phys.* **12** 337
- [73] Wang H, Xu L, Chen H, Jiang J H 2016 *Phys. Rev. B* **93** 235155
- [74] Lu L, Fu L, Joannopoulos J D, Soljacic M 2013 *Nat. Photon.* **7** 294
- [75] Lu L, Wang Z, Ye D, Ran L, Fu L, Joannopoulos J D, Soljačić M 2015 *Science* **349** 622
- [76] Xiao M, Chen WJ, He W Y, Chan C T 2015 *Nat. Phys.* **11** 920
- [77] Yang Z, Zhang B 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 224301
- [78] Noh J, Huang S, Leykam D, Chong Y D, Chen K P, Rechtsman M C 2017 *Nat. Phys.* **13** 611

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Topological properties of artificial bandgap materials*

Sun Xiao-Chen¹⁾ He Cheng¹⁾²⁾ Lu Ming-Hui¹⁾²⁾† Chen Yan-Feng¹⁾²⁾

1) (*National Laboratory of Solid State Microstructures, Department of Materials Science and Engineering,
Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

2) (*Collaborative Innovation Center of Advanced Microstructures, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

(Received 20 September 2017; revised manuscript received 6 November 2017)

Abstract

Recently, artificial bandgap materials (such as photonic crystals and phononic crystals) have been becoming the research hotspot of the next generation intelligent materials, because of its extremely designable, tunable and controllable capacity of classical waves. On the other hand, topological material phase, originally proposed and first demonstrated in Fermionic electronic systems, has been proposed in more and more Bosonic systems. In this review paper, we first focus on some of the representative photonic/phononic topological models, and four common types of topological photonic system are discussed: 1) photonic/phononic quantum Hall effect with broken time-reversal symmetry; 2) photonic topological insulator and the associated pseudo-time-reversal symmetry protected mechanism; 3) time/space periodically modulated photonic Floquet topological insulator; 4) a summary and outlook including a brief introduction of Zak phase in one-dimensional systems and Weyl point in three-dimensional systems. Finally, the underlying Dirac model is analyzed.

Keywords: artificial bandgap material, topology, Dirac equation

PACS: 42.70.Qs, 03.65.Vf

DOI: 10.7498/aps.66.224203

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2017YFA0303702), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11134006, 11474158, 11404164, 11625418), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20140019), and the support from Academic Program Development of Jiangsu Higher Education (Grant No. PAPD).

† Corresponding author. E-mail: luminghui@nju.edu.cn

二维声子晶体中简单旋转操作导致的拓扑相变

王健 吴世巧 梅军

Topological phase transitions caused by a simple rotational operation in two-dimensional acoustic crystals

Wang Jian Wu Shi-Qiao Mei Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 224301 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.224301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.224301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于二维 Helmholtz 腔阵列的低频宽带隔声结构实验研究

A broadband low-frequency sound insulation structure based on two-dimensionally inbuilt Helmholtz resonator

物理学报.2017, 66(1): 014307 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.014307>

基于绝缘体上硅的一种改进的 Mach-Zehnder 声光调制器

An improved Mach-Zehnder acousto-optic modulator on a silicon-on-insulator platform

物理学报.2016, 65(1): 014304 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014304>

基于等效参数反演的敷设声学覆盖层的水下圆柱壳体声散射研究

Investigation of underwater sound scattering on a cylindrical shell coated with anechoic coatings by the finite element method based on an equivalent parameter inversion

物理学报.2016, 65(1): 014305 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014305>

声子晶体中的半狄拉克点研究

Semi-Dirac points in two-dimensional phononic crystals

物理学报.2015, 64(19): 194301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194301>

稳态损耗因子的衰减法识别研究

Estimation of steady loss factor with decay rate method

物理学报.2015, 64(18): 184301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184301>

专题: 拓扑经典波动

二维声子晶体中简单旋转操作导致的拓扑相变*

王健 吴世巧 梅军†

(华南理工大学物理与光电学院, 广州 510641)

(2017年7月24日收到; 2017年9月19日收到修改稿)

构建了一种简单的二维声子晶体: 由两个横截面为三角形的钢柱所组成的复式元胞按三角点阵的形式排列在空气中, 等效地形成了一个蜂巢点阵结构. 当三角形钢柱的取向与三角点阵的高对称方向一致时, 整个体系具有 C_{6v} 对称性. 研究发现: 在保持钢柱填充率不变的条件下, 只需要将所有三角柱绕着自己的中心旋转 180° , 就可实现二重简并的 p 态和 d 态在布里渊区中心 Γ 点处的频率反转, 且该能带反转过程实质上是一个拓扑相变过程. 通过利用 Γ 点的 p 态和 d 态的空间旋转对称性, 构造了一个赝时间反演对称性, 并在声学系统中实现了类似于电子系统中量子自旋霍尔效应的赝自旋态. 随后通过 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ 微扰法导出了 Γ 点附近的有效哈密顿量, 并分别计算了拓扑平庸和非平庸系统的自旋陈数, 揭示了能带反转和拓扑相变的内在联系. 最后通过数值模拟演示了受到拓扑不变量保护的声波边界态的单向传输行为和对缺陷的背向散射抑制. 文中所研究的声波体系, 尽管材料普通常见, 但其拓扑带隙的相对宽度超过 21%, 比已报道的类似体系的带隙都要宽, 且工作原理涵盖从次声波到超声波的很大频率范围, 从而在实际应用上具有较大的优势和潜力.

关键词: 声子晶体, 拓扑相变, 能带反转, 赝自旋

PACS: 43.40.+s, 43.20.+g, 46.40.-f, 46.40.Cd

DOI: 10.7498/aps.66.224301

1 引言

量子霍尔效应 (quantum hall effect, QHE) [1–3] 和量子自旋霍尔效应 (quantum spin hall effect, QSHE) [4–7] 的发现不仅开启了凝聚态物理中拓扑绝缘体 [8,9] 研究的新篇章, 而且也使得数学中抽象的拓扑概念在物理学中受到越来越多的关注和重视. 拓扑态有许多新奇的特性, 比如: 单向传输的边界态, 对缺陷不敏感的背向散射抑制等, 这些有趣的现象都引起了人们极大的研究兴趣. 但是在电子体系中, 拓扑非平庸系统的实现在实验条件上要求比较高, 比如说 QHE 往往需要在低温和强磁场中才能实现, 这就给实验和应用造成了很大的困难.

光子晶体和声子晶体是由不同性质的材料在空间中做周期性排列而形成的人工结构, 电磁波

和声波在其中的传输特性与自然晶体中的电子波类似, 都可用能带结构和带隙的概念加以描述. 存在外加磁场的情况下, 由于破坏了时间反演对称性, 光子晶体中可实现沿边界单向传输的边界态 [10–12]. 但对于声子晶体, 由于常见材料的声学性质对磁场不敏感, 无法像光子晶体那样直接引入磁场来打破时间反演对称性. 于是, 有学者建议通过加入旋转的背景气流 [13–17], 起到类似磁场的效果, 来打破时间反演对称性, 从而实现单向传播的边界态. 还有学者通过时空调制 [18,19]、耦合共振 [20–22] 等方式也在声波系统中实现了受拓扑保护的边界态. 也有学者另辟蹊径, 通过构造具有特定对称性的光子晶体 [23,24] 或声子晶体结构 [25–27], 使相应体现的带结构在布里渊区中心或边界产生狄拉克锥, 再通过改变填充率或降低对称性的方法, 使狄拉克锥打开一个带隙, 进而研究体带隙中产生的边界态是否具有拓扑性质. 例如, 利用布里

* 国家自然科学基金 (批准号: 11274120, 11574087) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: phjunmei@scut.edu.cn

渊区中心的 C_{6v} 对称性, 以及 C_{6v} 点群的两个二维不可约表示, 在一定条件下在 Γ 点可产生偶然的四重简并态和双狄拉克锥^[28-31]. 在此基础上通过调节散射体的几何参数, 可实现带隙从打开到关闭再到打开的拓扑相变过程, 从而在经典波领域实现了类似于电子系统中的 QSHE. 此外, 通过构建具有 C_{3v} 对称性的三角晶格, 使得布里渊区边界上 K 和 K' 点不等价^[32], 然后将 K 点的对称性降低为 C_3 , 就会在 K 和 K' 点的狄拉克锥中打开一个带隙, 从而实现具有谷拓扑性质的边界态^[33,34].

本文构建了一种结构简单的二维声子晶体系统: 由两个三角形钢柱组成的复式元胞按三角点阵形式排列在空气中, 并使整个系统具有 C_{6v} 对称性. 与现有研究方法不同的是, 本文方法不需要改变钢柱子的填充率, 也不必移动钢柱子在元胞中的位置来降低体系的对称性, 而只需要将每个柱子绕自己中心旋转 180° 就可以实现能带反转. 有趣的是, 旋转前后的结构分别是拓扑平庸和拓扑非平庸的, 尽管它们的填充率是完全一样的, 尽管每个柱子中心的位置也没有改变. 而且, 通过这种简单旋转的方法实现的拓扑非平庸带隙的相对宽度可以超过 21%, 显著地超过已知类似体系的带隙, 这就给实验测量和实际应用带来了很大的方便, 因为只需要较小的样品就可以观察到受拓扑保护的边界态, 而且该表面态的鲁棒性也很好.

2 研究的体系

2.1 体系的设计

将截面为正三角形的 2 个钢柱子组成一个复式元胞, 然后按照三角晶格形式排列在空气中, 于是就从整体上形成了蜂巢晶格的结构, 如图 1 所示. 三角形柱子的中心位于六边形元胞的六个顶点上, 且所有三角柱子的朝向都与晶格点阵的高对称方向重合. 我们发现, 即使每个柱子的朝向都与相邻的柱子不同, 还是有两种排列方式可以确保整个晶格具有 C_{6v} 对称性, 这两种排列方式分别命名为 P 型和 N 型, 如图 1 所示. r 为三角柱的顶点到其中心的距离, L 为相邻两个三角柱中心的距离. 复式元胞的晶格常数 $a = \sqrt{3}L$, 基矢量

$$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}a}{2}\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}a}{2}\mathbf{j}.$$

在这样的体系中传播的声波方程为

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_r(\mathbf{x})} \nabla \psi \right) = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\psi}{B_r(\mathbf{x})}, \quad (1)$$

其中 ψ 是声压; $\rho_r = \rho/\rho_0$ 和 $B_r = B/B_0$ 分别表示相对质量密度和相对体弹性模量; $\rho = \rho(\mathbf{x})$ 和 $B = B(\mathbf{x})$ 是空间中某一点 $\mathbf{x}$ 处的质量密度和体弹性模量; ω 为角频率; B_0 和 ρ_0 表示基体的质量密度和体弹性模量, $c_0 = \sqrt{B_0/\rho_0}$ 为基体中的声波速度. 在本文中基体为空气, 散射体为钢柱, 由于两者密度和纵波速度都相差甚大, 所以可以忽略散射体中剪切波的影响, 把钢柱当作刚体来处理. 事实上, 只要是散射体和基体的阻抗相差很大, 下面的计算结果和结论都依然成立. 本文中计算和模拟都是采用 COMSOL Multiphysics(一种基于有限元法的数值模拟仿真软件)来完成的.

2.2 能带反转

具有 C_{6v} 对称性的晶格结构, 在布里渊区中心 Γ 点的本征态有 2 个二维不可约表示: E_1 和 E_2 . 二重简并的偶极子态, 如图 2 中的 p_x 和 p_y , 对应于 E_1 不可约表示, 具有奇宇称, 简称为 p 态. 二重简并的四极子态, 如图 2 中的 $d_{x^2-y^2}$ 和 d_{2xy} , 对应于 E_2 不可约表示, 具有偶宇称, 简称为 d 态. 这里所谓 p 态和 d 态的叫法都是来源于量子系统中的电子波函数.

对于 P 型声子晶体, 位于 Γ 点的二重简并的 p 态和 d 态的频率随几何参数 r/L 的变化情况如图 1 的蓝色点线所示. 可以看到, 当 $r = r_c = 0.31L$ 时(红点位置处), p 态和 d 态在 Γ 点偶然简并成为一四重简并态, 此时带结构在布里渊区中心形成了双狄拉克锥线性色散关系^[25-27]; 在其他情况下, p 态和 d 态之间都存在着一个带隙. 通过考察不同 r 时的本征频率, 发现当 $r < r_c$ 时, p 态的频率比 d 态高, 二者之间有一个拓扑非平庸的带隙; 而当 $r > r_c$ 时, p 态的频率比 d 态低, 二者之间有一个拓扑平庸的带隙. 也就是说, p 态和 d 态的本征频率, 在经过 $r_c = 0.31L$ 时, 它们的相互位置发生了改变. 这称之为能带反转, 意味着拓扑相变^[23,25-27]. 但从图 1 中可以看到, 对 P 型声子晶体而言, 能带反转前后, 带隙频率的重合部分很小, 这不利于拓扑边缘态的产生和利用, 因此我们将采用另外一种方式来实现能带反转.

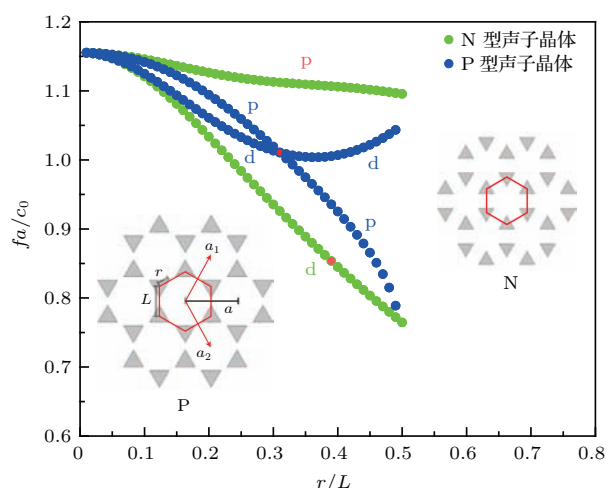


图1 P型和N型声子晶体在 Γ 点的两个双重简并态的频率随结构参数 r/L 的变化曲线。嵌入的两幅图分别为P型和N型声子晶体的结构示意图,红色的正六边形表示一个元胞,每个元胞包含2个钢柱, f 为频率

Fig. 1. Frequencies of doublydegenerate p states and d states at the Γ point as functions of the geometrical parameter (r/L) for both P-type and N-type acoustic crystals (ACs). Insets schematically show the structure of P-type and N-type ACs, where the red hexagon represents one unit cell, which is composed of two identical steel rods.

将P型声子晶体中的每个三角柱绕着自己的中心旋转 180° ,就变成了N型声子晶体,此时 C_{6v} 对称性依然得以保留。N型声子晶体的p态和d态的频率随参数 r/L 的变化情况如图1的绿色点线所示。通过观察其本征频率,发现N型声子晶体永远都是p态在d态上面,无论怎么改变 r 都不可能发生拓扑相变。但如果比较P型和N型两种声子晶体,就会发现在 $0.31 < r/L < 0.50$ 的范围内,N型声子晶体拓扑非平庸的带隙(p态在d态上面)总是包含着P型声子晶体拓扑平庸的带隙(p态在d态下面)。因此,下文中将利用N型声子晶体的非平庸带隙和P型声子晶体的平庸带隙来构造和研究边界态。

作为例子,图2(a)和图2(b)中,分别给出了P型和N型声子晶体在 $r/L = 0.45$ 时的带结构。在图2(a)中, Γ 点有两个二重简并态,且在它们之间有个很大的带隙 $fa/c_0 = (0.865 - 1.022)$,带隙相对宽度,即带隙频宽与带隙中间频率之比,达到了16.6%,这比已报道的类似体系的拓扑带隙^[25-27]都要宽。嵌入的四个图分别表示这两个二重简并态的本征场,可以看出在带隙下方的二重简并态为p态,带隙上方的为d态,因此这个带隙是拓扑平庸的。在图2(b)中, Γ 点也有两个二重简并态,且它

们之间的带隙更大 $fa/c_0 = (0.803 - 0.996)$,带隙相对宽度甚至达到了21.4%。注意这里由于第四条带的最低点不在 Γ 点而在M点,所以实际的绝对带隙为 $(0.803 - 0.996)$,而不是 Γ 点两个双重简并态之间的频率间隔 $(0.803 - 1.102)$ 。并且p态在带隙上方,d态在带隙下方,因此这个带隙是拓扑非平庸的。也就是说,与图2(a)相比,p态和d态在 Γ 点实现了反转。

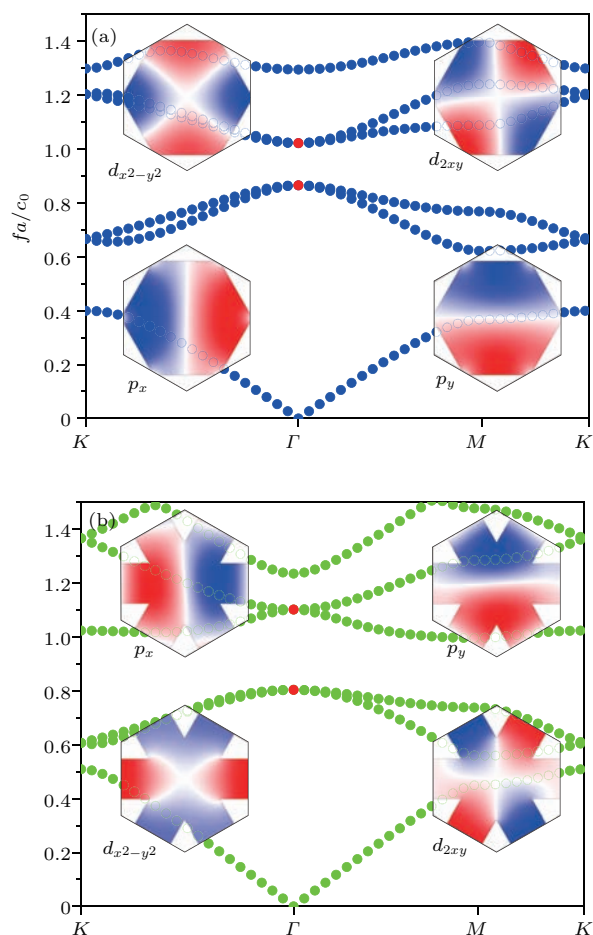


图2 P型和N型声子晶体在 $r/L = 0.45$ 时的带结构,嵌入的图为 Γ 点(红点处)的两个双重简并态(p态和d态)的声压场 (a) P型声子晶体的拓扑平庸的带结构; (b) N型声子晶体的拓扑非平庸的带结构

Fig. 2. Band structures of P-type and N-type ACs when $r/L = 0.45$: (a) The band gap of P-type AC is topologically trivial; (b) the band gap of N-type AC is topologically nontrivial. In both (a) and (b), insets show the acoustic pressure fields of the doublydegenerate p states and d states at the Γ point.

2.3 时间反演对称性与自旋

前文已提到, C_{6v} 点群有2个二维不可约表示: E_1 和 E_2 。 $\{p_x, p_y\}$ 对应于 E_1 表示,而 $\{d_{x^2-y^2}, d_{2xy}\}$ 对应于 E_2 表示。根据 E_1 和 E_2 表

示基函数的旋转对称性, 可以构造一个赝时间反演算符 $T = UK$, 其中 $U = -i\sigma_y$ 是一个反么正算符, K 为复共轭算符^[23,25-27]. T 算符具有如下性质:

$$\begin{cases} Tp_+ = -ip_-, \\ Tp_- = ip_+, \end{cases} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} T^2p_+ = -p_+, \\ T^2p_- = -p_-. \end{cases} \quad (2b)$$

可以看出, T 算符的角色完全类似于电子系统中真实的时间反演算符, 所以 T 称之为赝时间反演算符. 显然, 两个赝自旋态 $p_{\pm} = (p_x \pm ip_y)/\sqrt{2}$ 都是 T 的本征态: 它们在 T 的作用下能互相转换. p_+ 和 p_- 分别表示赝自旋向上和赝自旋向下的态. 同样的道理, 根据 d 态的旋转对称性, 也能构造出类似的赝自旋态 $d_{\pm} = (d_{x^2-y^2} \pm id_{2xy})/\sqrt{2}$.

2.4 哈密顿量与自旋陈数

为了研究 Γ 点附近的色散关系, 根据 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ 微扰理论^[23-26,29,30,35-37], 可以只考虑两个二重简并态的贡献. 此时, 体系的有效哈密顿量在基矢 $(|p_x\rangle, |p_y\rangle, |d_{x^2-y^2}\rangle, |d_{2xy}\rangle)^T$ 下可写为

$$H_{ij}^{\text{eff}} = H'_{ij} + \sum_n \frac{H'_{in}H'_{nj}}{\varepsilon_i - \varepsilon_n} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad (3)$$

其中 $H'_{ij} = \langle \Gamma_i | H' | \Gamma_j \rangle$ 为不同本征态 Γ_i 和 Γ_j 之间的交叠积分, $H' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = i\mathbf{k} \cdot (2\rho_r^{-1}\nabla + \nabla\rho_r^{-1})$ 是声波波动方程的微扰项. $\Gamma_i = \{|p_x\rangle, |p_y\rangle, |d_{x^2-y^2}\rangle, |d_{2xy}\rangle\}$ 表示四个本征态, 它们的频率 $\varepsilon_i = \{\varepsilon_p, \varepsilon_p, \varepsilon_d, \varepsilon_d\}$. 由于 $|p_x\rangle$ 和 $|p_y\rangle$ 具有奇宇称, $|d_{x^2-y^2}\rangle$ 和 $|d_{2xy}\rangle$ 具有偶宇称, 所以 H'_{ij} 的分块对角项为零. 变换到新基矢 $(|p_+\rangle, |d_+\rangle, |p_-\rangle, |d_-\rangle)^T$ 下, 可得有效哈密顿量为

$$H^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} M - Bk^2 & Ak_+ & 0 & 0 \\ A^*k_- & -M + Bk^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M - Bk^2 & Ak_- \\ 0 & 0 & A^*k_+ & -M + Bk^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中 $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$, $M = (\varepsilon_d - \varepsilon_p)/2$, A 来自一阶微扰项 H'_{ij} 的非对角项. B 来自二阶微扰项的对角项, 且小于零.

为了描述体系的拓扑序, 可通过下面的式子来计算自旋陈数 (spin Chern number)^[4,38]:

$$C_s = \pm \frac{1}{2} [\text{sgn}(M) + \text{sgn}(B)]. \quad (5)$$

显然, 如果 $BM < 0$, $C_s = 0$, 对应于拓扑平庸态; 如果 $BM > 0$, $C_s = \pm \text{sgn}(M)$, 对应于拓扑非平庸态. 在本文的体系中, 对于 P 型声子晶体, d 态频率在 p 态之上 ($\varepsilon_d > \varepsilon_p$), $M > 0$, $C_s = 0$, 所以带隙是拓扑平庸的. 但对于 N 型声子晶体, d 态频率在 p 态之下 ($\varepsilon_d < \varepsilon_p$), $M < 0$, $C_s = \pm 1$, 带隙则是拓扑非平庸的.

无论是有效哈密顿量, 自旋陈数, 还是拓扑相变机理, 本文的声子晶体系统都类似于 CdTe/HgTe/CdTe 量子阱系统中的 Bernevig-Hughes-Zhang 模型^[4], 因此完全有理由相信, 在本文的声子晶体系统可以出现一个类似电子 QSHE 的声学自旋霍尔效应.

2.5 自旋依赖的拓扑边界态

既然体态受到自旋陈数的保护, 根据体态-边界态对应原则, 在非平庸声子晶体的边界上会出现受到拓扑保护的单向传播边界态. 将上面的 P 型和 N 型声子晶体拼接在一起, 形成一种三明治结构: 厚度为 10 层的 N 型声子晶体被厚度为 10 层的 P 型声子晶体从两边夹在一起, 如图 3(b) 所示. 计算了该超胞结构沿 ΓM 方向的投影带结构, 结果如图 3(a) 所示, 其中黑点表示体态, 蓝点表示边界态. 可以看出, 边界态 (蓝色) 出现在体态带隙的地方, 且边界态将体态连接起来. 值得注意的是, 图中边界态 (蓝色) 上的每一点都为二重简并, 这是由于在同一波矢同一频率处永远都有赝自旋向上和赝自旋向下两个态同时存在所导致的. 而且, 这两个同频率的边界态分别位于 N 型声子晶体的左侧和右侧边界上. 为了更直观地显示结果, 在图 3(a) 中选取了 A, B 两个代表点, 将其所对应的边界态的场图绘于图 3(b) 中.

B 点的场图绘于图 3(b) 的上方, 可以看出: 左侧边界上能流是逆时针旋转的, 对应赝自旋垂直纸面朝上, 该边界态向下 ($-y$ 方向) 传播; 右侧边界上能流是顺时针旋转的, 对应赝自旋垂直纸面朝下, 该边界态也向下 ($-y$ 方向) 传播. A 点的场图与 B 点类似, 只不过能流方向、赝自旋方向和传播方向均与 B 点相反: 左侧边界上能流是顺时针旋转的,

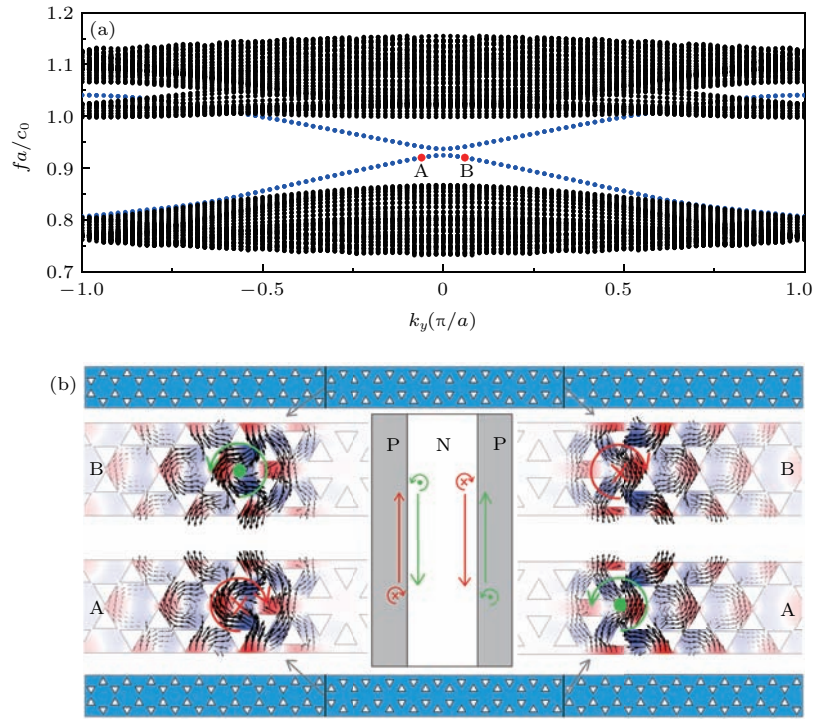


图3 P型/N型声子晶体界面上的拓扑边界态 (a) 表示PNP三明治结构(由10层N型结构被10层P型结构从两边包夹而组成)沿着 ΓM 方向的投影带结构,黑色的点表示体态,蓝色的点表示边界态;(b)蓝色矩形代表计算所用到的超胞结构,上面两个场图画出了B点的边界态,下面两个场图为A点的边界态,其中黑色箭头表示时间平均后的能流密度矢量,逆时针旋转的能流对应赝自旋方向垂直纸面朝外,用绿色的旋转箭头表示,顺时针旋转的能流对应赝自旋垂直纸面朝内,用红色的旋转箭头表示;中间的示意图表示在每个界面上携带某个赝自旋分量的声波边界态只能沿着一个固定的方向传播,体现了边界态的手性

Fig. 3. (a) The projected band structure along the ΓM direction for a ribbon of a N-type AC (10 unit cells) sandwiched by two P-type ACs (10 unit cells) from both sides, black and blue dots represent bulk and edge states, respectively; (b) the blue rectangle represents the supercell used in the calculation, acoustic pressure field distributions at edge states A and B are shown, where the wave energy is obviously localized around the interface between N-type/P-type ACs, black arrows represent the time-averaged Poynting vectors, the counterclockwise and clockwise rotational behaviors of the Poynting vectors are consistent with the spin-up and spin-down orientations of the pseudospin components.

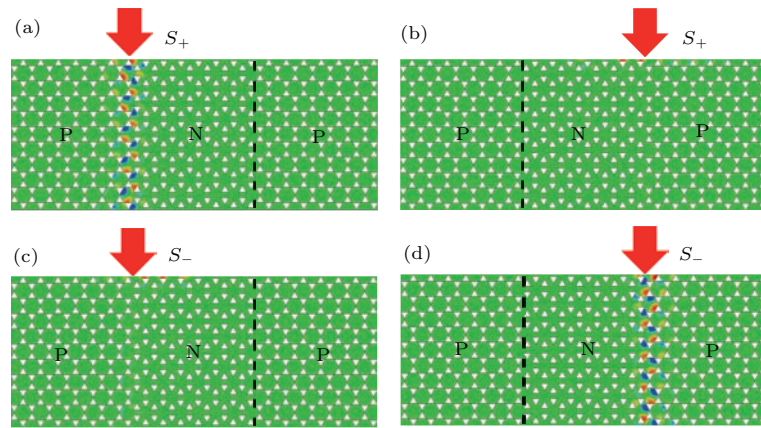


图4 (a)赝自旋向上(S_+)的声波能沿着左侧的P/N边界向下传播,但不能沿着右侧的N/P边界向下传播(b);(c)赝自旋向下(S_-)的声波不能沿着左侧P/N边界向下传播,但能沿着右侧的N/P边界向下传播(d)

Fig. 4. (a), (b) When excited by a pseudospinup source (S_+), there exists an edge mode that can propagate along the left hand side P/N interface, but no edge state exists along the right hand side N/P interface; (c), (d) when excited by a pseudospin-down source (S_-), there exists an edge mode that can propagate along the right hand side N/P interface, but no edge state exists along the left hand side P/N interface.

质自旋垂直纸面朝下, 该边界态向上(+ y 方向)传播; 右侧边界上能流是逆时针旋转的, 质自旋垂直纸面朝上, 该边界态也向上(+ y 方向)传播. 这样就在每条边界上(不管是左侧边界还是右侧边界), 同时都存在2个边界态, 每个边界态都有一个确定的传播方向, 且锁定一个确定的质自旋方向. 因此, 这种边界态是手性的(helical).

为了验证手性边界态的性质, 图4展示了不同质自旋态的声波沿两种边界传输的情况. 图4(a)和图4(b)模拟的是质自旋朝上(S_+)的声波从样品上方入射到两个边界的情况, 可以看出声波可以沿左侧边界(P/N边界)无损耗传输, 但无法通过右侧边界(N/P边界). 图4(c)和图4(d)模拟的是质自旋朝下(S_-)的声波从样品上方入射到两个边界的情况, 同样可以看到, 声波只能沿其中一个边界传输, 但与前一种情况刚好相反: 质自旋朝下的声波能通过右侧边界(N/P边界), 但不能通过左侧边界(P/N边界). 边界态的这种行为与电子系统中的QSHE完全一致.

2.6 缺陷免疫

拓扑边界态的一个重要性质就是它的鲁棒性: 它对缺陷是免疫的, 不管是弯曲边界, 还是边界上

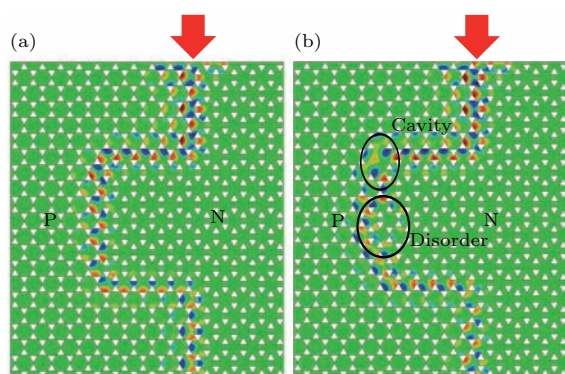


图5 (a) 平面波入射到一个具有弯曲通道的PN型声子晶体中, 可以发现声波几乎没有阻碍的传播过去; (b) 在(a)图的基础上引入了空穴和无序的缺陷, 但声波绕过这些缺陷传播了过去, 与(a)相比只是相位有所改变; 红色箭头代表入射波方向

Fig. 5. (a) The edge mode can propagate unidirectionally along the interface with almost no backscattering even when there are four 90-degree bends at the interface; (b) similar to (a) but with two more defects (a cavity defect and a disorder defect) are introduced into the interface. It can be seen that the acoustic wave can go round all these defects with little back-scattering. Red arrows represent the incident waves.

存在空穴(cavity)和无序(disorder)等缺陷, 受拓扑保护的边界态都可以绕过这些缺陷传输过去, 并且几乎没有反射. 图5(a)模拟的是平面波从上方入射到一条有四个直角转弯的边界上, 可以发现声波没有阻碍地沿着边界传输过去, 几乎没有反射, 就像在直边界上传播一样. 图5(b)是在图5(a)的基础上在边界中加入了空穴和无序的缺陷, 同样让平面波从上方入射, 可以发现声波很轻易地就绕过了这些缺陷向下传输了过去, 就像这些缺陷不存在一样. 值得注意的是, 边界态之所以具有这么好的鲁棒性, 是因为本文所设计的系统具有很宽的拓扑带隙. 如前所述, 带隙的相对宽度达到了21%, 比已报道的类似体系的带隙都要宽, 这使得边界态对缺陷很不敏感, 从而在实际应用上具有较大的优势和潜力.

3 讨论与结论

设计了两种具有 C_{6v} 对称性的二维声子晶体: 它们是由两个三角形钢柱组成的复式元胞按三角点阵的形式排列在空气中所形成的. 只需将所有三角柱绕着自己的中心旋转 180° , 这两种声子晶体就能简单地完成互相转变. 这样就在保持晶格对称性和填充率不变的条件下实现拓扑相变. 通过利用 Γ 点二重简并的p态和d态的空间对称性, 构造了一个质时间反演对称性, 从而在声学系统中实现了类似于电子系统中QSHE的质自旋态. 接着通过 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ 简并微扰法导出了 Γ 点附近的有效哈密顿量, 并计算了P型和N型两种声子晶体带结构的自旋陈数, 揭示了能带反转和拓扑相变的联系. 然后又通过数值模拟证实了具有自旋取向依赖的单向传输的边界态, 该边界态具有很好的鲁棒性, 对直角弯曲、空穴和无序等缺陷是免疫的. 虽然该类型的声子晶体用到的都是普通常见材料, 但拓扑带隙很宽, 结构也并不复杂, 其基本原理适用于从次声波到超声波的很大频率范围的声波, 在实际应用上具有较大的优势和潜力.

参考文献

- [1] Klitzing K V, Dorda G, Pepper M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 494
- [2] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405

- [3] Laughlin R B 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1395
- [4] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [5] Bernevig B A, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 106802
- [6] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 226801
- [7] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [8] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [9] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [10] Wang Z, Chong Y D, Joannopoulos J D, Soljačić M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013905
- [11] Wang Z, Chong Y D, Joannopoulos J D, Soljačić M 2009 *Nature* **461** 772
- [12] Fang Y T, He H Q, Hu J X, Chen L K, Wen Z 2015 *Phys. Rev. A* **91** 033827
- [13] Fleury R, Sounas D L, Sieck C F, Haberman M R, Alù A 2014 *Science* **343** 516
- [14] Yang Z J, Gao F, Shi X H, Lin X, Gao Z, Chong Y D, Zhang B L 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 114301
- [15] Ni X, He C, Sun X C, Liu X P, Lu M H, Feng L, Chen Y F 2015 *New J. Phys.* **17** 053016
- [16] Chen Z G, Wu Y 2016 *Phys. Rev. Appl.* **5** 054021
- [17] Khanikaev A B, Fleury R, Mousavi S H, Alù A 2015 *Nat. Commun.* **6** 8260
- [18] Fleury R, Sounas D L, Alù A 2015 *Phys. Rev. B* **91** 174306
- [19] Fleury R, Khanikaev A B, Alu A 2016 *Nat. Commun.* **7** 11744
- [20] Peng Y G, Qin C Z, Zhao D G, Shen Y X, Xu X Y, Bao M, Jia H, Zhu X F 2016 *Nat. Commun.* **7** 13368
- [21] He C, Li Z, Ni X, Sun X C, Yu S Y, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Appl. Phys. Lett.* **108** 031904
- [22] Wei Q, Tian Y, Zuo S Y, Cheng Y, Liu X J 2017 *Phys. Rev. B* **95** 094305
- [23] Wu L H, Hu X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 223901
- [24] Wang H X, Xu L, Chen H Y, Jiang J H 2016 *Phys. Rev. B* **93** 235155
- [25] Mei J, Chen Z G, Wu Y 2016 *Sci. Rep.* **6** 32752
- [26] He C, Ni X, Ge H, Sun X C, Chen Y B, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Nat. Phys.* **12** 1124
- [27] Zhang Z W, Wei Q, Cheng Y, Zhang T, Wu D J, Liu X J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 084303
- [28] Chen Z G, Ni X, Wu Y, He C, Sun X C, Zheng L Y, Lu M H, Chen Y F 2014 *Sci. Rep.* **4** 4613
- [29] Li Y, Mei J 2015 *Opt. Express* **23** 12089
- [30] Li Y, Wu Y, Mei J 2014 *Appl. Phys. Lett.* **105** 014107
- [31] Dai H Q, Liu T T, Jiao J R, Xia B Z, Yu D J 2017 *J. Appl. Phys.* **121** 135105
- [32] Lu J Y, Qiu C Y, Ke M Z, Liu Z Y 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 093901
- [33] Ma T, Shvets G 2016 *New J. Phys.* **18** 025012
- [34] Lu J Y, Qiu C Y, Ye L P, Fan X Y, Ke M Z, Zhang F, Liu Z Y 2017 *Nat. Phys.* **13** 369
- [35] Mei J, Wu Y, Chan C T, Zhang Z Q 2012 *Phys. Rev. B* **86** 035141
- [36] Wu Y 2014 *Opt. Express* **22** 1906
- [37] Lu J Y, Qiu C Y, Xu S J, Ye Y T, Ke M Z, Liu Z Y 2014 *Phys. Rev. B* **89** 134302
- [38] Shen S Q, Shan W Y, Lu H Z 2011 *Spin* **1** 33

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Topological phase transitions caused by a simple rotational operation in two-dimensional acoustic crystals*

Wang Jian Wu Shi-Qiao Mei Jun[†]

(School of Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

(Received 24 July 2017; revised manuscript received 19 September 2017)

Abstract

We design a two-dimensional acoustic crystal (AC) to obtain topologically protected edge states for sound waves. The AC is composed of a triangular array of a complex unit cell consisting of two identical triangle-shaped steel rods arranged in air. The steel rods are placed on the vertices of the hexagonal unit cell so that the whole lattice possesses the C_{6v} symmetry. We show that by simply rotating all triangular rods around their respective centers by 180 degrees, a topological phase transition can be achieved, and more importantly, such a transition is accomplished with no need of changing the fill ratios or changing the positions of the rods. Interestingly, the achieved topologically nontrivial band gap has a very large frequency width, which is really beneficial to future applications. The topological properties of the AC are rooted in the spatial symmetries of the eigenstates. It is well known that there are two doubly-degenerate eigenstates at the Γ point for a C_{6v} point group, and they are usually called the p and d states in electronic system. By utilizing the spatial symmetries of the p and d states in the AC, we can construct the pseudo-time reversal symmetry which renders the Kramers doubling in this classical system. We find pseudospin states in the interface between topologically trivial and nontrivial ACs, where anticlockwise (clockwise) rotational behaviors of time-averaged Poynting vectors correspond to the pseudospin-up (pseudospin-down) orientations of the edge states, respectively. These phenomena are very similar to the real spin states of quantum spin Hall effect in electronic systems. We also develop an effective Hamiltonian for the associated bands to characterize the topological properties of the AC around the Brillouin zone center by the $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ perturbation method. We calculate the spin Chern numbers of the ACs, and reveal the inherent link between the band inversion and the topological phase transition. With full-wave simulations, we demonstrate the one-way propagation of sound waves along the interface between topologically distinct ACs, and demonstrate the robustness of the edge states against different types of defects including bends, cavity and disorder. Our design provides a new way to realize acoustic topological effects in a wide frequency range spanning from infrasound to ultrasound. Potential applications and acoustic devices based on our design are expected, so that people can manipulate and transport sound waves in a more efficient way.

Keywords: acoustic crystals, topological phase transition, band inversion, pseudospin

PACS: 43.40.+s, 43.20.+g, 46.40.-f, 46.40.Cd

DOI: 10.7498/aps.66.224301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11274120, 11574087).

[†] Corresponding author. E-mail: phjunmei@scut.edu.cn

一维颗粒声子晶体的拓扑相变及可调界面态

王青海 李锋 黄学勤 陆久阳 刘正猷

The topological phase transition and the tunable interface states in granular crystal

Wang Qing-Hai Li Feng Huang Xue-Qin Lu Jiu-Yang Liu Zheng-You

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 224502 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.224502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.224502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

二维颗粒堆积中压力问题的格点系统模型

[Lattice model for pressure problems in two-dimensional granular columns](#)

物理学报.2017, 66(20): 204501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.204501>

颗粒样品形变对声波传播影响的实验探究

[Experimental study on the influence of granular shear deformation on sound propagation](#)

物理学报.2017, 66(15): 154502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.154502>

水平激励下颗粒物质的有效质量及耗散功率的研究

[Effective mass spectrum and dissipation power of granular material under the horizontal and vertical excitation](#)

物理学报.2016, 65(23): 234501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.234501>

基于离散元方法的颗粒材料缓冲性能及影响因素分析

[Buffer capacity of granular materials and its influencing factors based on discrete element method](#)

物理学报.2016, 65(10): 104501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.104501>

振动驱动颗粒气体体系的局域态本构关系的实验验证

[Experimental study on the local equation of state for vibrated granular gases](#)

物理学报.2013, 62(16): 164503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.164503>

专题: 拓扑经典波动

一维颗粒声子晶体的拓扑相变及可调界面态*

王青海¹⁾ 李锋¹⁾ 黄学勤¹⁾ 陆久阳¹⁾ 刘正猷^{2)†}¹⁾(华南理工大学物理与光电学院, 广州 510640)²⁾(武汉大学物理科学与技术学院, 武汉 430072)

(2017年8月18日收到; 2017年10月24日收到修改稿)

基于 Su-Schrieffer-Heeger 模型, 构造了一种一维非线性声子晶体, 通过调控外加在声子晶体上的预紧力, 可调控声子晶体的拓扑态, 从而实现拓扑相变. 利用这一效应, 将该非线性声子晶体与另一线性声子晶体形成异质结构, 可以实现一种新型声学开关: 通过调节预紧力即调控非线性声子晶体的拓扑相, 可以实现异质结构中界面态从无到有的转变, 从而实现了开关效应. 利用该效应可望开发新型声学器件, 如可调谐振器、可调滤波器、可调隔振器等.

关键词: 界面态, 可调, 拓扑相变, 颗粒声子晶体**PACS:** 45.70.-n, 05.45.-a, 46.40.Cd**DOI:** 10.7498/aps.66.224502

1 引言

声子晶体是一种质量密度和弹性系数周期性分布的新型功能材料, 它具有能带结构、缺陷模式、负折射等特性, 在减振降噪、声学成像及声学器件等方面具有应用前景^[1]. 到目前为止所研究的声子晶体大多为被动型, 不能主动调节^[2]. 为了实现声子晶体的更多功能, 人们提出了可调性声子晶体的概念^[3-6]. 可调性声子晶体调节的主要方法一是改变材料尺寸、改变晶格结构^[3]等; 二是使用对磁场或者温度等敏感的材料^[4,5]; 三是引入非线性^[6].

本文研究的颗粒声子晶体 (granular phononic crystals) 或颗粒晶体是一种非线性声子晶体. 颗粒晶体的非线性源于颗粒间的赫兹接触. 当用一定的预紧力将两个颗粒挤压在一起时, 两个颗粒物间的挤压形变与预紧力是一种非线性关系, 这就是赫兹接触^[7]. 颗粒晶体就是将这些离散颗粒按照某种周期进行排列而形成的晶体, 颗粒之间具有非线性赫兹接触. 由于颗粒晶体的色散关系可以通过预紧力动态调节, 因此颗粒声子晶体是一种可调声子晶

体^[8,9].

此外, 随着拓扑理论的发展, 人们发现在拓扑非平庸体系和拓扑平庸体系的界面处会出现局域态. 由于这种局域态受拓扑保护, 因而具有鲁棒性. Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型作为一种经典的模型, 虽然其结构十分简单, 但却蕴含着丰富的物理现象^[10-14], 比如它是一维拓扑绝缘体, 存在着非线性现象和拓扑保护束缚态. 因此, 将可调性声子晶体与 SSH 模型结合研究具有重要意义.

本文将非线性与拓扑概念结合, 提出了利用调控外加预紧力实现颗粒声子晶体拓扑相变, 由此设计一种新型声学开关. 通过预紧力调节颗粒声子晶体能带和拓扑相位, 进而实现界面态从无到有的变化, 基于此可望开发非线性可调新型功能器件, 如可调谐振器、可调滤波器、可调隔振器^[15]等.

2 理论背景和研究模型

当用一定大小的预紧力 F 挤压两个宏观弹性颗粒时, 相比于未受到挤压时的颗粒形状大小, 由于预紧力 F 的挤压导致了这两个颗粒物间

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2015CB755500)、国家自然科学基金 (批准号: 61271139, 11572318, 11604102, 11374233)、广东省引进创新创业团队项目 (批准号: 2016ZT06C594) 和博士后创新人才支持计划 (批准号: BX201600054) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zyliu@whu.edu.cn

的接触面积发生改变,由此产生了一个挤压形变 δ .对于圆柱形颗粒物,当相邻圆柱的轴夹角 $\alpha \neq 0^\circ$ 时,在静态预紧力 F 的作用下,

$$F = \begin{cases} \beta \delta^{3/2}, & \delta > 0 \\ 0, & \delta \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

颗粒间的挤压形变 δ 与 F 满足赫兹定律^[7].

上式中, β 是圆柱形颗粒物的刚度系数,它与圆柱半径、泊松比、杨氏模量有关,还与相邻圆柱轴夹角 α 有关.当相邻颗粒挤压形变 δ 较小时,可以将挤压形变 δ 与施加的预紧力 F 间的关系线性化成 $F \approx K\delta$,其中, K 为固体弹性颗粒间的等效刚度系数:

$$K = \frac{3}{2}\beta\delta^{1/2}. \quad (2)$$

从(2)式可以看出,两个相互挤压接触的颗粒物间的等效刚度系数 K 与材料的体刚度系数 β 和挤压形变 δ 都有关.联立(1)和(2)可得施加的预紧力 F 与等效刚度系数 K 的关系为

$$K = \frac{3}{2}\beta^{2/3}F^{1/3}. \quad (3)$$

从(3)式可以看出,如果相邻圆柱轴夹角 α 不为零,等效刚度系数 K 与随着预紧力 F 单调递增,

但不是线性增加.由于挤压形变 δ 较小,等效刚度系数 K 与材料的体刚度系数 β 相比小得多.因此,当相邻圆柱轴夹角 α 不为零时,相互挤压接触的两个圆柱形颗粒物产生的形变行为可以等效为:在预紧力 F 作用下,连接着两个质点的等效刚度系数 K 的非线性弹簧所产生的形变.下文中将一维颗粒晶体体系抽象简化为一维无限长“弹簧-质点”体系^[15],且用 k_1, k_2, k_3, k_4 代表材料的等效刚度系数.

研究模型如图1(a)所示.这个一维链由100个圆柱形颗粒排列而成.制作圆柱形颗粒物所用的材料都是有机玻璃(PMMA),它的密度为1186 kg/m³,杨氏模量为4.75 GPa,泊松比为0.35.所有的粗圆柱形颗粒的半径 $R = 12$ mm,长度 $L = 12$ mm.在界面左边,两个互相挤压接触的圆柱形颗粒的轴夹角 $\alpha = 5^\circ$,它们之间是赫兹接触,可以等效为连接两质点的非线性弹簧 k_1 ;夹在两粗圆柱形颗粒间的细圆柱(所用材料为PMMA),它的半径 $R = 1$ mm,长度 $L = 2$ mm,可以等效为线性弹簧 k_2 .在界面右边,夹在两粗圆柱形颗粒间的一种细圆柱(所用材料为PMMA),它的半径 $R = 1$ mm,长度 $L = 1.5$ mm,可以等效为线性

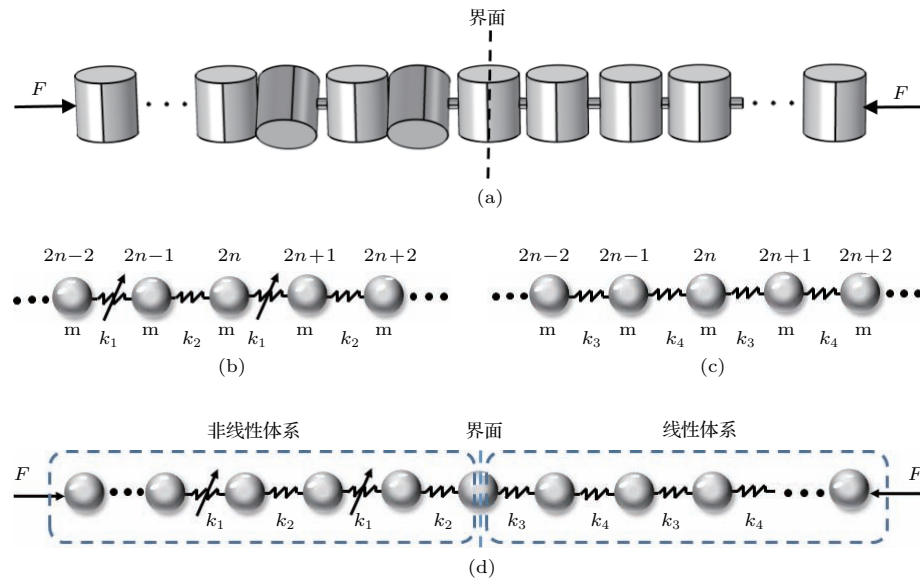


图1 研究模型及其简化模型 (a) 研究模型; (b) 由研究模型中界面左边简化而来,等效刚度系数 k_1 的弹簧随着预紧力变化而变化,等效刚度系数 k_2 的弹簧不随预紧力变化; (c) 由研究模型中界面右边简化而来,等效刚度系数 k_3 和 k_4 的弹簧不随预紧力变化; (d) 研究模型的简化模型

Fig. 1. A schematic of experiment setup, the 1D diatom granular crystal model and the simplification of our model: (a) A schematic of experiment setup; (b) the simplification of the experiment setup in the left of interface, the chain is composed with nonlinear springs whose equivalent stiffness coefficient k_1 can be changed by external force and linear springs with constant k_2 ; (c) the simplification of the experiment setup in the right of interface, 1D diatom granular crystal model is composed of two types of linear springs with constant k_3 and k_4 ; (d) the simplification of experiment setup.

弹簧 k_3 ; 夹在两粗圆柱形颗粒间的另一种细圆柱 (所用材料为 PMMA), 它的半径 $R = 1 \text{ mm}$, 长度 $L = 2.5 \text{ mm}$, 可以等效为线性弹簧 k_4 . 初始时刻, 加载在体系两端的预紧力 $F = 12 \text{ N}$.

仿照 SSH 模型^[10-14], 我们将图 1(a) 简化为两个一维双原子颗粒声子晶体体系, 如图 1(b) 和图 1(c) 所示. 在这两个一维双原子链上, 所有质点的质量都为 m , 其中一种链上连接最近邻原子间的弹簧的等效刚度系数交错地为 k_1 和 k_2 , 另一种链上连接最近邻原子间的弹簧的等效刚度系数交错地为 k_3 和 k_4 . 界面左边简化为图 1(b)——由“非线性弹簧-质点-线性弹簧”原胞所组成的一维无限长双原子链, 当加载在体系两端的预紧力为 F 时, 其中一个弹簧是非线性弹簧, 其等效刚度系数 k_1 随预紧力 F 的变化而变化, 即 $k_1 = 3\beta^{2/3}F^{1/3}/2$ ($\alpha = 5^\circ$); 另一个弹簧是线性弹簧, 其等效刚度系数 k_2 不随预紧力 F 的变化而变化. 界面右边简化为图 1(c)——由原胞“线形弹簧-质点-线性弹簧”所组成, 两个弹簧是都线形弹簧, 其等效刚度系数 k_3 和 k_4 都不随预紧力 F 变化. 如图 1(d) 所示, 简化后的研究模型中, 界面左侧是一个非线性体系 (图示见 1(b)), $m = 6.40 \text{ g}$, 开始时使施加外力 $F = 603F_0/1000$ (其中 $F_0 = 19.91 \text{ N}$); k_2 为线性弹簧, 根据胡克定律 $F/S = E\delta/L$ (其中, F , S , E , L 分别代表力、截面积、杨氏模量、长度) 及 $F = k_2\delta$ 可得, $k_2 = 7.46 \times 10^6 \text{ N/m}$; k_1 为非线性弹簧, 它的 k_1 随着预紧力 F 单调变化, 且当 $F = F_0$ 时, $k_1 = k_2$. 研究模型中, 界面右侧是一个线性体系 (见图 1(c)), $m = 6.40 \text{ g}$; 它的 k_3 , k_4 都不随着预紧力 F 的变化而变化, 根据胡克定律同理可得: $k_3 = 9.95 \times 10^6 \text{ N/m}$, $k_4 = 5.97 \times 10^6 \text{ N/m}$.

3 颗粒晶体体系中的色散关系和拓扑相位

首先研究图 1(b) 中的一维双原子颗粒晶体第 n 个原胞 (即第 $2n$ 和第 $2n+1$ 个颗粒以及连接它们的弹簧) 的动力学行为. 用 a 表示都处在平衡位置时的相邻两颗粒物质心间的距离; 用 u_{2n} , u_{2n+1} 表示第 n 个原胞中两个颗粒沿着链的方向运动时偏离初始平衡位置的位移; 用 β_{2n} , β_{2n+1} 代表第 n 个原胞中的两颗粒物的刚度系数; 用 k_{2n} , k_{2n+1} 代表第 n 个原胞中两颗粒在初始静态预紧力 F 的作用下两颗粒间的等效刚度系数, 且

$k_{2n} = k_1$, $k_{2n+1} = k_2$; 用 $\delta_{2n,0}$, $\delta_{2n+1,0}$ 代表第 n 个原胞中的两个颗粒在静态预紧力为 F 时的偏离平衡位置的初始形变; 从 (1) 式也可以看出, 颗粒晶体有一个鲜明的特点, 就是其相邻颗粒之间的无拉伸形变 δ , 简记为 $[\delta]_+$. 在忽略损耗的条件下, 根据牛顿第二定律, 则第 n 个原胞中两个颗粒物的质心的运动方程^[15] 为:

$$\begin{aligned} mu_{2n}'' &= \beta_{2n-1} [\delta_{2n,0} + u_{2n-1} - u_{2n}]_+^{3/2} \\ &\quad - \beta_{2n} [\delta_{2n+1,0} + u_{2n} - u_{2n+1}]_+^{3/2}, \quad (4) \\ mu_{2n+1}'' &= \beta_{2n} [\delta_{2n+1,0} + u_{2n} - u_{2n+1}]_+^{3/2} \\ &\quad - \beta_{2n+1} [\delta_{2n+2,0} + u_{2n+1} - u_{2n+2}]_+^{3/2}. \quad (5) \end{aligned}$$

将 (4) 和 (5) 式的右边部分按幂级数展开, 当颗粒物质心偏离平衡位置的位移大小远小于颗粒物的初始形变时, 即满足 $|u_{2n-1} - u_{2n}| \ll \delta_{2n,0}$ 和 $|u_{2n} - u_{2n+1}| \ll \delta_{2n+1,0}$ 时, 可以只保留 (3) 和 (4) 式右边部分幂级数展开项中的简谐近似项. 令等效刚度系数 $k_1 = 3\beta_{2n}\delta_{2n}^{1/2}/2$, $k_2 = \beta_{2n+1}$, 于是, 将方程 (3) 和 (4) 线性化, 可得

$$mu_{2n}'' = k_2(u_{2n-1} - u_{2n}) - k_1(u_{2n} - u_{2n+1}), \quad (6)$$

$$mu_{2n+1}'' = k_1(u_{2n} - u_{2n+1}) - k_2(u_{2n+1} - u_{2n+2}). \quad (7)$$

(6), (7) 式在简谐振动时有下列形式的格波解^[16]:

$$u_{2n} = A e^{i[\omega t - (2n)ak]}, \quad u_{2n+1} = B e^{i[\omega t - (2n+1)ak]}.$$

引入 $\psi_k = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$,

则 (5) 和 (6) 式可以改写为

$$H(k)\psi_k = \omega^2\psi_k, \quad (8)$$

其中:

$$H(k) = \begin{pmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m} & \frac{-k_1 e^{-ika} - k_2 e^{ika}}{m} \\ \frac{-k_1 e^{ika} - k_2 e^{-ika}}{m} & \frac{k_1 + k_2}{m} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

可解得 (8) 式的色散关系为

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m} \pm \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \cos 2ka}}{m}}, \\ k &\in \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right). \quad (10) \end{aligned}$$

由(10)式可知: 无论是 $k_1 < k_2$ 还是 $k_1 > k_2$, 带隙的上、下限都在 $k = \pi/2a$ 处取得, 能带的截止频率都在 $k = 0$ 处取得, 能带在 $k_1 = k_2$ 时闭合. 因此, 可以根据实际需要方便地设计带隙范围, 并且可以设计能带的带隙宽度.

此外, 在凝聚态体系中, 人们用拓扑相位刻画和区分拓扑物态. 通常情况下, 人们通过研究晶格倒空间(即动量空间)中能带的拓扑性质来标记拓扑物态^[17]. 在一维系统中, 人们通常用表征材料体能带的几何性质的 Zak 相位来描述动量空间中能带所对应的拓扑不变量^[18]. 下面推导所研究模型中的能带的 Zak 相位.

引入如下矩阵和算符:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

(9)式可以改写为

$$\begin{aligned} H(k) &= \frac{k_1 + k_2}{m} \mathbf{I} - \frac{(k_1 + k_2) \cos ka}{m} \sigma_x \\ &\quad - \frac{(k_1 - k_2) \sin ka}{m} \sigma_y. \end{aligned} \quad (12)$$

由于 $H(k)$ 中的单位矩阵 $\mathbf{I}$ 只是上下平移频带, 对并不影响体系的拓扑, 因此讨论体系的能带拓扑时, 可以忽略此项. 由 Zak 相位的定义^[18]:

$$\theta^{\text{Zak}} = \int_{-\frac{\pi}{2a}}^{+\frac{\pi}{2a}} \psi_k^* i \partial_k \psi_k dk. \quad (13)$$

由于一维双原子颗粒晶体只有两条能带——声学支能带和光学支能带, 我们用 γ_- 代表它的声学支能带的 Zak 相位, 用 γ_+ 代表它的光学支能带的 Zak 相位. 计算可得: 当 $k_1 < k_2$ 时, $\gamma_- = \pi$, $\gamma_+ = \pi$; 当 $k_1 > k_2$ 时, $\gamma_- = 0$, $\gamma_+ = 0$. 对于图 1(c), 由于 k_3, k_4 都不随着预紧力 F 变化且 $k_3 > k_4$, 同理可以计算得, $\gamma_- = 0$, $\gamma_+ = 0$.

4 预紧力的改变导致能带反转和拓扑相变

从(10)式可以得知, 决定所研究模型的色散关系的因素有三个: m, k_1 和 k_2 . 因此, 如果要调节该体系的色散关系, 就要从调节这三个参数着手. 对于图 1(b) 所示的一维双原子颗粒晶体模型, 其等效刚度系数 k_1 的弹簧随着预紧力 F 变化而变化, 等效刚度系数 k_2 的弹簧不随预紧力 F 变化, 因此,

改变预紧力 F 将导致 k_1, k_2 的相对大小发生改变, 从而导致其色散曲线的改变. 这样, 对于图 1(b) 所示的一维双原子颗粒晶体, 通过预紧力 F 也就能实现调节能带和改变能带带隙的目标.

设 $k_1 = k_2$ 时, 预紧力 F 大小为 $F = F_0$. 那么, 当 $k_1 < k_2$ 时, $F < F_0$; 当 $k_1 > k_2$ 时, $F > F_0$. 因此, 结合(10)式可以得到: 当 $F = F_0$ 时, 此时能带带隙闭合; 当 $F < F_0$ 时或者当 $F > F_0$ 时, 体系能带带隙将打开. 将上述三种 F 情形下体系的色散关系标注在图 2(a)—(c) 中.

由于不同的拓扑相位标志着不同的拓扑物态, 调节能带的拓扑相位以实现拓扑相变, 也是调节材料性能的一个思路. 一维体系中, 实现拓扑相变的其中一种方式是实现能带反转^[12,19]. 因此, 可以通过调节一维双原子颗粒晶体的色散关系, 从而改变能带的 Zak 相位, 进而实现拓扑相变. 结合上文可知: 当 $F < F_0$ 时, $\gamma_- = \pi$, $\gamma_+ = \pi$; 当 $F > F_0$ 时, $\gamma_- = 0$, $\gamma_+ = 0$. 这样, 通过改变预紧力 F 也能在一维双原子颗粒晶体中实现拓扑相变的目标. 将 $F < F_0$ 和 $F > F_0$ 这两种情形下一维双原子颗粒晶体能带的 Zak 相位也标注在图 2(a) 和图 2(c) 中.

对于所研究的一维双原子颗粒晶体, 其带隙下的能带是声学支能带. 可知, 当 $F < F_0$ 时, 声学支能带 Zak 相位 $\gamma_- = \pi$; 当 $F > F_0$ 时, 声学支能带 Zak 相位 $\gamma_- = 0$. 这也意味着, 改变预紧力 F 将可能导致声学支能带 Zak 相位的改变, 从而将导致能带的拓扑性质的改变. 声学支能带的 Zak 相位随预紧力 F 的变化关系如图 3(a) 所示. 由于带隙的拓扑性质与该带隙之下的体能带拓扑相位之和有关^[19], 所以, 当 $F < F_0$ 时, 带隙是拓扑非平庸的; 当 $F > F_0$ 时, 带隙是拓扑平庸的. 因此, 在 $F = F_0$ 前和后, 不仅能带的 Zak 相位发生了变化, 而且带隙的拓扑性质也发生了变化. 其带隙随预紧力 F 的变化如图 3(b) 所示. 这里 $m = 6.40 \text{ g}$, $k_2 = 7.46 \times 10^6 \text{ N/m}$, $F_0 = 19.91 \text{ N}$.

此外, 研究发现, 在两种不同材料的界面处是否存在界面态与界面两边的材料的阻抗有密切关系. 因此, 要确认两种不同材料的界面处是否有界面态, 利用它们的阻抗信息是一种重要判断思路. 文献^[19]严格地证明了带隙的阻抗与该带隙下 Zak 相位之间有关, 且体系带隙的阻抗符号与该带隙下的拓扑相位间的数学关系为:

$$\text{sgn}[\zeta^{(n)}] = (-1)^l (-1)^n \exp \left(i \sum_{m=0}^{n-1} \theta_m^{\text{Zak}} \right), \quad (14)$$

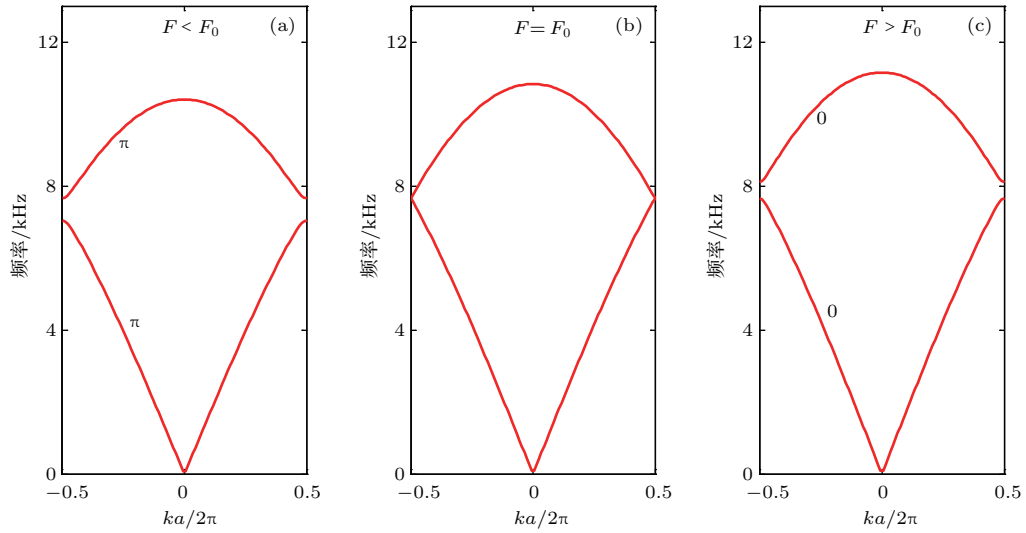


图2 不同预紧力情形下, 一维双原子颗粒晶体的能带和 Zak 相位 (a) $F = 603F_0/1000$ 时; (b) $F = F_0$ 时; (c) $F = 1406F_0/1000$ 时; (a), (b), (c) 情形下两颗粒物的质量 $m = 6.40$ g, $k_2 = 7.46 \times 10^6$ N/m, $F_0 = 19.91$ N; (a), (c) 情形下的体系的能带 Zak 相位分别标注在对应的能带上

Fig. 2. Dispersion relationship and the Zak phase of the 1D diatom granular crystal at different precompression F : (a) $F = 603F_0/1000$; (b) $F = F_0$; (c) $F = 1406F_0/1000$. The mass of the all granular is $m = 6.40$ g, equivalent stiffness coefficient $k_2 = 7.46 \times 10^6$ N/m, $F_0 = 19.91$ N. The Zak phase under disparate condition are marked on the respective energy band.

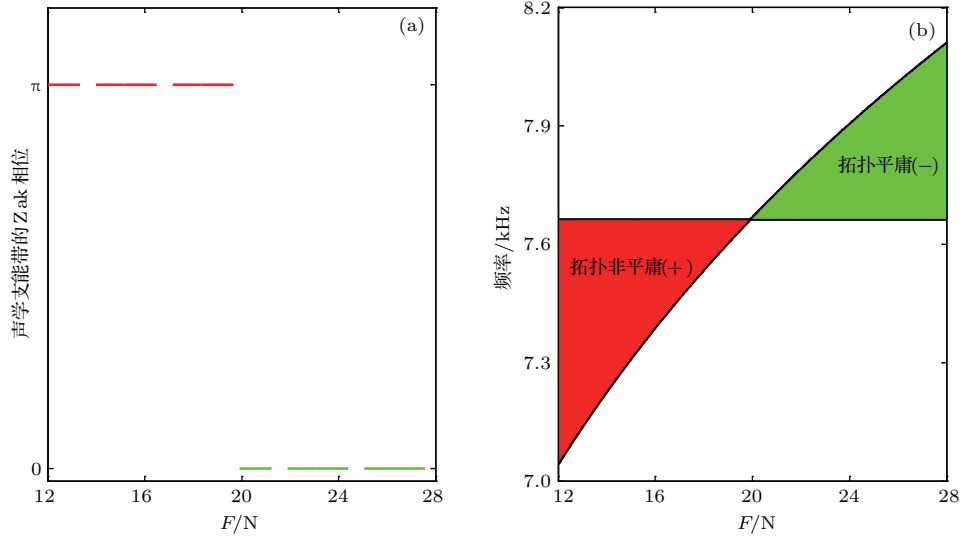


图3 预紧力改变导致的拓扑相变 (a) 声学支能带的 Zak 相位随预紧力 F 的变化情况; (b) 一维二原子颗粒晶体能带带隙上下限随预紧力 F 的变化情况

Fig. 3. Topological phase transition caused by F : (a) The Zak phase of the acoustic band change along with F ; (b) the band gap is tuned by precompression F .

式中, $\zeta^{(n)}$ 为第 n 个带隙的阻抗符号, θ_m^{Zak} 为第 n 带隙以下其中第 m 条能带的 Zak 相位, l 为第 n 带隙以下相交的能带个数. 由于在 $F = F_0$ 前和后, 能带的 Zak 相位发生了变化, 因此, 当 $F < F_0$ 时, 带隙的阻抗符号为“+”; 当 $F > F_0$ 时, 带隙的阻抗符号为“-”. 将带隙的阻抗符号也标记在图 3(b) 中. 从上文可知, 由于 k_3, k_4 都不随着预紧力 F 变化, $\gamma_- = 0, \gamma_+ = 0$. 因此, 不论预紧力 F 如何变化,

图 1(c) 所示的模型的带隙始终是拓扑平庸的, 带隙的阻抗符号始终为“-”.

5 预紧力调节界面态

通常, 有两种方法可以判断体系界面处是否有界面态存在. 一种方法是利用阻抗, 即在经典波中, 当入射波从其中一种介质入射到另一种介质时, 如

果界面两边的介质的阻抗大小相等、符号相反,那么在两种介质的界面处就会存在界面态.另一种方法是利用拓扑的概念,即拓扑性质不同的两种材料,如果它们存在着公共带隙,那么在这两材料相互接触的界面处也存在界面态^[20].下文中结合这两种方法来确认界面态的有和无.

拓扑绝缘体^[20]理论上的创新也使得人们意识到,除了时间反演对称性可以导致拓扑界面态,空间群对称性也可以导致对称性保护的拓扑物态^[21]出现.因此,构建具有镜面对称性的一维双原子颗粒晶体体系,也可以构造出界面态.然而,如果两颗粒物挤压接触,从(3)式可知,这两颗粒物间的等

效刚度系数随着预紧力增加而单调递增,那么,要想在颗粒晶体体系中实现界面态调节,就需要不同颗粒物间的等效刚度系数随预紧力变化程度有较大差别(有一个等效刚度系数不随预紧力变化).图1(d)中(简化的研究模型),体系界面左侧的等效刚度系数按照 k_1, k_2 的顺序交替分布,体系界面右侧的等效刚度系数按照 k_2, k_1 的顺序交替分布.体系界面处的类型有两种,一种为“ k_1-k_4 ”,另一种为“ k_2-k_3 ”.对于上述任一情形,由于界面两边体系的Zak相位不同,从上述的分析可知,不论界面处是哪一种类型,界面处一定存在界面态,下文中只研究其中一种情形,另一种情形的研究方法和得出的

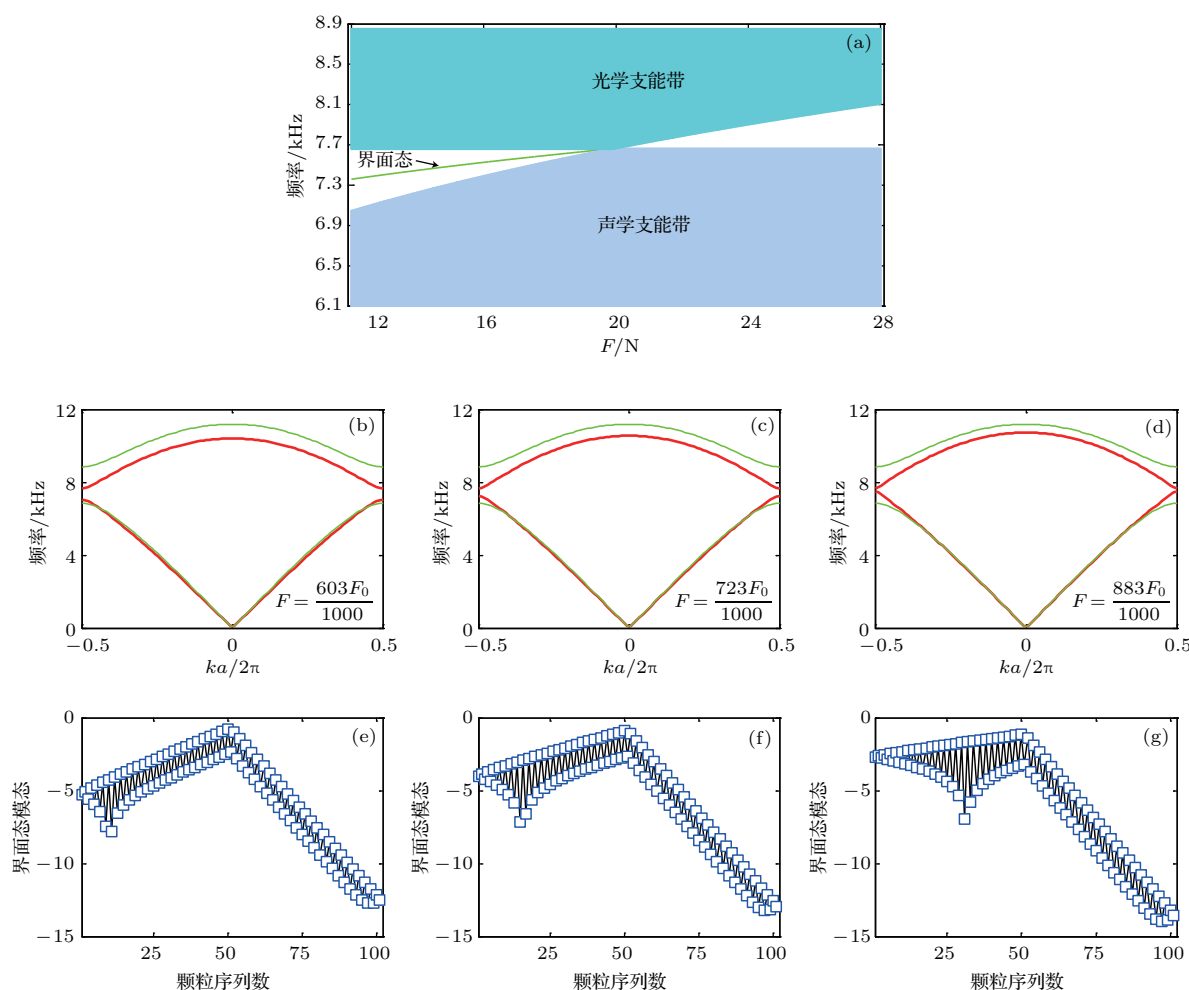


图4 体系界面两边的能带和界面态模态(取log后)随着预紧力 F 的变化情况 (a)体系的频率谱(只给出了我们所关注的涵盖公共带隙的一部分)随着预紧力 F 的变化情况,当 $F < F_0$,界面态(绿色实线标记)存在;当 $F > F_0$ 时,界面态消失; (b), (c), (d) 界面态体系左边的能带用红色实线表示,随着预紧力 F 的增加而不断抬高;体系右边的能带用绿色实线表示,随着预紧力 F 的增加而保持不变; (e), (f), (g) 当 $F < F_0$ 时,界面态模态随着预紧力 F 的增加而局域程度下降

Fig. 4. The energy bands on the left or right of the interface and the log of amplitude of the interface modes at the interface change along with F . When $F < F_0$, the interface modes (marked in green solid line) exists in the frequency spectrum; when $F > F_0$, the interface modes disappear, as shown in (a); the red solid line label the the energy bands on the left of the interface, and its change when F varies, as shown in (b), (c), (d); the green solid line label the the energy bands on the right of the interface, and remian unchanged when F varies, as shown in (b), (c), (d); when $F < F_0$, the local level of interface modes drop continuously as F increased, as shown in (e), (f), (g).

结论类似. 因此, 设定下面分析该体系中界面处的界面态随着预紧力 F 增加的变化情况.

图 4(a) 展示了整个体系的频率谱随预紧力 F 的变化情况. 可以看到, 当 $F < F_0$ 时 ($F_0 = 19.91 \text{ N}$), 界面态 (绿色实线标记) 存在于体系的公共带隙中; 当 $F > F_0$ 时, 界面态消失了. 图 4(b)—(d) 进一步说明了当 $F < F_0$ 时, 界面左右两侧的能带随预紧力的变化情况, 由图可见, 开始时使施加一定的预紧力, 然后缓慢增加预紧力 F , 体系左边的能带 (红色实线表示) 会缓慢上移, 体系右边的能带 (绿色实线表示) 保持原状不变, 这样, 随着预紧力的增加, 界面两边体系的公共能带带隙逐渐减小. 当 $F < F_0$ 时, 体系左边的能带的带隙的阻抗符号为 “+”, 带隙是拓扑非平庸的; 体系右边的能带的带隙阻抗符号为 “-”, 带隙是拓扑平庸的. 因此, 当 $F < F_0$ 时, 此时体系中存在界面态. 当 $F > F_0$ 时, 体系左边的带隙的阻抗符号为 “-”, 带隙是也变为拓扑平庸的; 体系右边的阻抗符号始终为 “-”, 带隙是也始终为拓扑平庸的. 那么, 当 $F > F_0$ 时, 体系界面处的界面态将会消失. 这样, 在不改变结构的情况下, 仅仅通过改变预紧力 F , 就可以使界面态先出现后消失, 从而实现了界面态的调节.

为了说明界面态的局域程度随预紧力 F 的变化关系, 选取几个预紧力 F 做图, 见图 4(e)—(g). 实际上, 虽然 $F < F_0$ 时, 图 4(b)—(d) 所示情形下, 体系界面处都存在界面态, 但是随着预紧力 F 的增加, 界面两边体系 (对应于图 1(b) 与图 1(c) 所示的颗粒晶体链) 的公共带隙不断变小 (见图 4(b)—(d)), 界面态的局域程度也随之下落; 并且由于界面左边的体系的能带不断抬升, 而界面右边的体系的能带保持不变, 界面态模式对应的频率也处在界面右边体系的带隙中, 这就导致了界面态在界面右边衰减的要比界面左边更快. 当 $F > F_0$ 时, 体系界面处界面态消失. 从这些图可以看出, 随着预紧力 F 的增加, 界面态的空间局域程度不断下降, 最后消失. 这样, 通过改变加载在体系两端的预紧力 F , 实现了界面态的有无的调节.

6 结 论

本文研究了一维圆柱形颗粒组成可调颗粒声子晶体, 并通过调节预紧力在该体系中实现了界面态的开关效应. 由于两个相互挤压接触的颗粒物间是赫兹接触, 两颗粒物间等效刚度系数会随着预紧

力的增加而增加、随着预紧力的减小而减小. 因此, 改变预紧力可以调节颗粒晶体的色散关系. 基于 SSH 模型, 构造了一维颗粒声子晶体体系, 并将其简化为“质点-弹簧”模型. 在不改变体系结构的情况下, 改变预紧力能够动态调节颗粒晶体的色散关系, 改变预紧力就可以在一维颗粒晶体体系实现拓扑相变, 由此可以实现颗粒晶体体系界面态的动态调节, 并实现界面态从有到无的调节. 本文的研究可以促进拓扑和非线性的相关研究, 为开发可调声学器件 (如可调谐振器、可调滤波器、可调隔振器) 打下理论基础.

参考文献

- [1] Ma G C, Sheng P 2016 *Sci. Adv.* **2** e1501595
- [2] Yang S X, Page J H, Liu Z Y, Cowan M L, Chan C T, Sheng P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 024301
- [3] Wu F G, Liu Z Y, Liu Y Y 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046628
- [4] Wu L Y, Yang W P, Chen L W 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2701
- [5] Matar O B, Robillard J F, Vasseur J O, Hennion A C H, Deymier P A, Pernod P, Preobrazhensky V 2012 *J. Appl. Phys.* **111** 054901
- [6] Boechler N, Theocharis G, Daraio C 2011 *Nat. Mater.* **10** 665
- [7] Porter M A, Kevrekidis P G, Daraio C 2015 *Phys. Today* **68** 44
- [8] Li F, Ngo D, Yang J Y, Daraio C 2012 *Appl. Phys. Lett.* **101** 171903
- [9] Garcia M S, Lydon J, Daraio C 2016 *Phys. Rev. E* **93** 010901
- [10] Sinev I S, Mukhin I S, Slobozhanyuk A P, Poddubny A N, Miroshnichenko A E, Samuseva A K, Kivshar Y S 2015 *Nanoscale* **7** 11904
- [11] Weimann S, Kremer M, Plotnik Y, Lumer Y, Nolte S, Makris K G, Segev M, Rechtsman M C, Szameit A 2017 *Nat. Mater.* **10** 4811
- [12] Xiao M, Ma G C, Yang Z Y, Sheng P, Zhang Z Q, Chan C T 2015 *Nat. Phys.* **11** 240
- [13] Xiao Y X, Ma G C, Zhang Z Q, Chan C T 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 166803
- [14] Kane C L, Lubensky T C 2014 *Nat. Phys.* **10** 2835
- [15] Theocharis G, Boechler N, Daraio C 2013 *Nonlinear Phononic Periodic Structures and Granular Crystals* (Berlin Heidelberg: Springer) p217
- [16] Huang K, Han R Q 1988 *Solid State Physics* (Beijing: Higher Education Press) p93 (in Chinese) [黄昆 著, 韩汝琦 改编 1988 固体物理学 (北京: 高等教育出版社) 第 93 页]
- [17] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. Lond. A* **392** 45
- [18] Zak J 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 2747
- [19] Xiao M, Zhang Z Q, Chan C T 2014 *Phys. Rev. X* **4** 021017
- [20] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [21] Chen X, Gu Z C, Liu Z X, Wen X G 2013 *Phys. Rev. B* **87** 155114

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

The topological phase transition and the tunable interface states in granular crystal^{*}

Wang Qing-Hai¹⁾ Li Feng¹⁾ Huang Xue-Qin¹⁾ Lu Jiu-Yang¹⁾ Liu Zheng-You²⁾[†]

1) (Department of Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

2) (Department of Physics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

(Received 18 August 2017; revised manuscript received 24 October 2017)

Abstract

Topological phase is a new degree of freedom to describe the state of matter in condensed matter physics. One could predict the existence of the interface state between two topological different phononic crystals. The band structures of phononic crystal depend on the characteristics of their composite and their combination, such as geometry, filling fraction, and stiffness. However, after the phononic crystal is fabricated out, it is relatively difficult to tune their band structure and its topology. In order to broaden the application scope of phononic crystals, different kinds of tunable phononic crystals have been proposed. One method to achieve this tunability is to introduce nonlinearity into the phononic crystals. Granular crystals is one type of tunable nonlinear material, whose nonlinearity stems from nonlinear Hertzian contact. By changing the static precompression, the dispersion of granular crystals can be tuned. In this paper, by combining topology with nonlinear we create a new type of interface state switch without changing the experimental setup. Based on the Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model—an example of a one dimensional (1D) topological insulator, we present a 1D nonlinear granular crystal, to realize the topological transition by precompression. First, we construct a 1D mechanical structure, which is made up of nonlinear granular crystal and linear phononic crystal. The 1D nonlinear granular crystal is simplified as a “mass-spring” model with tunable elastic constant and invariable elastic constant. By calculating the band topology—the Zak phase, we found that the Zak phase of the two bands can switch from π to 0. There exist a critical precompression F_0 , when $F < F_0$ the Zak phase of the band is π , when $F > F_0$ the Zak phase is 0. The granular crystal vary from nontrivial bandgap to trivial one as precompression gradually increase. This effect enables us to design interface state switch at the interface between granular crystals with trivial and nontrivial band gap. Furthermore, when $F < F_0$, we find that the localization of interface state decreases as the applied precompression increases. Thus, we investigate existence of the interface state under different precompression and found that the interface state can be controlled freely. We anticipate these results to enable the creation of novel tunable acoustic devices.

Keywords: interface state, tunability, topological phase transition, granular crystal

PACS: 45.70.-n, 05.45.-a, 46.40.Cd

DOI: 10.7498/aps.66.224502

^{*} Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2015CB755500), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61271139, 11572318, 11604102, 11374233), Guangdong Innovative and Entrepreneurial Research Team Program, China (Grant No. 2016ZT06C594), and the National Postdoctoral Program for Innovative Talents, China (Grant No. BX201600054).

[†] Corresponding author. E-mail: zyliu@whu.edu.cn

拓扑声子与声子霍尔效应

邢玉恒 徐锡方 张力发

Topological phonons and phonon Hall effects

Xing Yu-Heng Xu Xi-Fang Zhang Li-Fa

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 226601 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.226601

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.226601>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

谐振子系统的量子-经典轨道、Berry 相及 Hannay 角

Correspondences between quantum and classical orbits Berry phases and Hannay angles for harmonic oscillator system

物理学报.2015, 64(24): 240302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.240302>

分形结构纳米复合材料热导率的分子动力学模拟研究

Molecular dynamics simulation on thermal conductivity of nanocomposites embedded with fractal structure

物理学报.2014, 63(23): 236601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.236601>

非线性系统的非对角 Berry 相

Off-diagonal Berry phase in nonlinear systems

物理学报.2013, 62(11): 110302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.110302>

Born-Oppenheimer 近似下谐振子场驱动电磁模系统的 Berry 相和 Hannay 角

Berry phase and Hannay's angle of an electromagnetic mode system driven by harmonic field with Born-Oppenheimer approximation

物理学报.2013, 62(10): 100302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.100302>

人工规范势下三阱玻色-爱因斯坦凝聚系统的动力学研究

Dynamics of Bose-Einstein condensate trapped in a triple-well with synthetic gauge field

物理学报.2012, 61(23): 230304 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.230304>

专题: 拓扑经典波动

拓扑声子与声子霍尔效应*

邢玉恒 徐锡方 张力发†

(南京师范大学物理科学与技术学院, 南京 210023)

(2017年9月28日收到; 2017年11月6日收到修改稿)

拓扑学与物理的结合是近几十年物理学蓬勃发展的一个新领域, 它不仅活跃在量子场理论以及高能物理中, 更广泛地存在于凝聚态物理体系中, 包括量子(反常、自旋)霍尔效应和拓扑绝缘体(超导体)等. 声子是凝聚态体系中热输运的主要载体; 最近由于各种声子器件的发现, 声子学得到了广泛的关注. 本文介绍了声子的拓扑性质以及声子的霍尔效应现象, 分别评述了在破坏时间反演对称、破坏空间反演对称、以及同时破坏时间和空间反演对称三种情况下所产生的声子霍尔效应、声子谷霍尔效应等相关物理研究进展. 最后对拓扑学在其他声学体系中的应用做了简单介绍, 并进一步讨论了其未来的发展方向.

关键词: 拓扑学, Berry 相位, Berry 曲率, 声子霍尔效应**PACS:** 66.70.-f, 03.65.Vf, 72.10.Bg, 72.15.Gd**DOI:** 10.7498/aps.66.226601

1 引言

拓扑学是近代发展起来的一个数学分支, 主要研究几何图形或空间在连续改变形状后还能保持不变的一些性质的学科. 早在十七世纪科学家就提出了“位置几何学”和“相位分析”学说. 1984年, 英国布里斯托大学的科学家 Michael Berry 就提出了关于量子力学中的“几何相”概念^[1], 主要描述了当一个量子体系在参数空间沿着闭合路径缓慢变化时, 系统本征态所发生的变化, 即系统的哈密顿量在参数空间发生绝热演化时体系的本征态的变化. Berry 相在拓扑物理学领域是一个重要的概念^[2], Berry 曲率由于揭示了量子力学中绝热过程的奥秘且最近因其在量子计算机的实现中的重要用途而引起了科学家们的广泛兴趣^[3]. Berry 曲率最早出现在带有布洛赫电子的单带的动力学中, 在应用于量子霍尔体系时, 其半经典理论可以解释霍尔电流和量子霍尔电导率^[4]. 近几年来, Berry 相效应在解决铁磁材料中的反常霍尔效应时起到了重要的作用^[5,6], 这也使 Berry 曲率在拓扑材料应

用中的研究得到科学家们的广泛关注. 由于在拓扑物理方面原创性的贡献, Thouless, Haldane 和 Kosterlitz 被授予 2016 年诺贝尔物理学奖. 拓扑和物理的巧妙结合, 带动了凝聚态物理的快速发展, 比较有代表性的就是其近十年来逐渐兴起的一个分支——拓扑绝缘体^[7,8], 即在绝缘体中带隙中存在拓扑保护的边界态.

由于热二极管、热晶体管、热逻辑门等^[9-11]的相继提出, 最近几十年我们见证了声子学的飞速发展, 从而使得利用声子进行热流控制和信息处理成为可能. 由于声子作为一种中性的准粒子不能像电子一样可以通过洛伦兹力直接和磁场耦合, 因此当 Rikken 等^[12]科学家在顺磁介质样品中发现声子霍尔效应现象时, 物理学家们普遍感到很惊奇, 即在有热流通过的样品薄膜的垂直方向上施加磁场时可以观察到横向热流, 由于电子对热流贡献可以忽略, 所以把这种现象称之为声子霍尔效应. 此实验被 Inyushkin 和 Taldenkov^[13]所重复. 从那以后, 科学家们提出了几种理论来解释这一现象^[14]. 对于各种量子、自旋或反常霍尔效应的电子输运性质,

* 国家自然科学基金(批准号: 11574154)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: phyzlf@njnu.edu.cn

拓扑理论已经成功地解释了一些潜在的机理, 那么对于声子的输运性质是否也可以运用拓扑理论来进行研究呢?

2010年, Zhang等^[15]将声子的霍尔热导率和声子谱的Berry曲率联系起来, 揭示了声子的拓扑性质, 并发现了其中的拓扑相变, 从而开创了拓扑声子学的研究. 其后, 在2012年, Qin等^[16]从能量磁化的角度对声子霍尔热导提出了修正. 当磁场作用在具有自旋声子相互作用的体系上时, 时间反演对称性会发生破缺, 从而产生声子霍尔效应. 在非磁性体系中, 空间反演对称破缺而时间反演对称性得到保护, 可以观察到谷声子霍尔效应^[17]. 在2016年, Zhang研究组又继续通过半经典波包动力学方法统一研究了电子、声子、磁子等热霍尔效应, 并得出了霍尔热导率在拓扑理论框架下的通用公式^[18]. 最近Liu等^[19]研究了时间反演对称性和空间反演对称性同时破缺的体系中的拓扑声子输运现象.

本文以Berry曲率为切入点, 着重讨论Berry相以及Berry曲率的基本理论与性质. 通过研究在单独破坏时间反演对称、破坏空间反演对称以及同时破坏时间反演对称和空间反演对称的声子体系中Berry曲率的变化对声子输运的影响. 在本文的第二部分介绍了Berry相的基本理论知识, 了解Berry曲率与拓扑结构之间的关系; 第三部分介绍了破坏时间反演对称时所产生的声子霍尔效应, 研究其中的Berry曲率对拓扑结构性质的影响; 第四部分介绍了破坏空间反演对称后形成的声子谷霍尔效应; 第五部分主要介绍同时破坏时间和空间反演对称时对拓扑结构的影响; 第六部分简单介绍了Berry相效应在其他声学体系中的应用; 第七部分对拓扑声子学的应用做了简单展望.

2 Berry相及拓扑结构

Berry相位由三个至关重要的部分构成, 这三个关键的特性决定了其在拓扑学中的重要地位. 第一, Berry相位是规范不变的, 其本征波函数由线性齐次方程定义, 这个性质使得Berry相位更加的物理化, 早期的实验研究也是通过这个性质进行的. 第二, Berry相位具有独特的几何性质, Berry相可以表示为在闭合参数空间的线性积分, 且与实际路径的变化率无关, Berry曲率的这种独特的性质使得其得到了广泛的应用. 第三, Berry相位与规范

场论和微分几何有着密切的联系, 这使得Berry相成为一种直观且意义十分重大的物理概念, 尤其在今天的霍尔效应以及拓扑物理学的研究中具有重要的意义^[7].

2.1 绝热循环演化

波函数的整体相位不会对物理观测造成影响, 然而量子态之间的相对相位与很多的物理现象有关系. 1984年, 英国布里斯托大学的科学家Michael Berry提出了关于量子力学中的“几何相”概念, 为了更好地诠释这个相位的物理意义, 以下对这个相位进行简单的推导.

当物理系统沿着参数空间中任意闭合回路做绝热演化, 其非简并本征态的变化除了一个额定的相位之外, 必然回到其本身, 该相位就称为Berry相位. 设体系的哈密顿量算符 $\hat{H}$ 是一组参量的 $\mathbf{R}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_D)$ 函数:

$$\hat{H} = \hat{H}(\mathbf{R}_1(t), \mathbf{R}_2(t), \dots, \mathbf{R}_D(t)), \quad (1)$$

而 $\mathbf{R}$ 随着时间做周期性变化

$$\mathbf{R}_i(t+T) = \mathbf{R}_i(t). \quad (2)$$

$\mathbf{R}(t)$ 的周期变化在参量空间定义了一条闭合曲线 C , 假设此时周期 T 足够大, 以致哈密顿算符随时间的变化非常缓慢, 从而使得这一过程被称为绝热演化过程, 致使系统在每一瞬间都是静止的. 于是, 对于某一瞬时 t , 瞬时定态薛定谔方程成立. 在绝热条件下, 瞬时本征波函数的含时薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |n(\mathbf{R}(t))\rangle = E_n(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (3)$$

乘以 $\langle m(\mathbf{R}(t)) |$ 化简后得

$$i\hbar \langle m(\mathbf{R}(t)) | \frac{\partial}{\partial t} |n(\mathbf{R}(t))\rangle = E_n(\mathbf{R}(t)) \xi_{mn}. \quad (4)$$

考虑一般含时薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(\mathbf{R}(t)) |\psi(t)\rangle, \quad (5)$$

在绝热近似条件下, 将本征函数归一化条件求导可得

$$\langle \dot{m}(\mathbf{R}(t)) | m(\mathbf{R}(t)) \rangle + \langle m(\mathbf{R}(t)) | \dot{m}(\mathbf{R}(t)) \rangle = 0. \quad (6)$$

所以绝热近似下式含时薛定谔方程的解为

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_m(t)} e^{i\gamma_m(t)} |m(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (7)$$

在引入 $\mathbf{R}(t)$ 的空间“矢势”后, Berry相位可以写成

$$\gamma_m = \oint_C \mathbf{A}_m(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{A}_m(\mathbf{R}) \\
 &= \iint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_m(\mathbf{R}) = \Phi_m, \quad (8)
 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{B}_m(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A}_m(\mathbf{R})$ 称为参数空间的“磁场强度”。

从上式可以看到: 第一, Berry 相位 γ_m 是实量; 第二, Berry 相位是一个规范不变的量, 即在物理上是一个可以观测的量; 第三, Berry 相位不依赖于系统参数演化的快慢, 只与演化的路径有关; 第四, 对于一维的参数空间, Berry 相位为零, 但是对于高维的参数空间, Berry 相位不为零; 第五, Berry 相位是不可积的, 也就是说它不能写成一个关于参数 R 的连续函数^[20]. 故 Berry 相位仅与闭合回路或者闭合曲面的几何性质有关, 与参数随时间的变化率无关, 因此, Berry 相位又称为几何相位。

2.2 Berry 曲率

通过 (8) 式以及下面恒等式:

$$\begin{aligned}
 &\langle m(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle \\
 &= \frac{\langle m(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} H(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R}) \rangle}{(\varepsilon_n(\mathbf{R}) - \varepsilon_m(\mathbf{R}))}, \quad m \neq n, \\
 &\sum_m |m(\mathbf{R})\rangle \langle m(\mathbf{R})| = 1. \quad (9)
 \end{aligned}$$

所以 Berry 曲率可以写成本征态的求和^[21]:

$$\begin{aligned}
 &B_{\mu\nu}^n(\mathbf{R}) \\
 &= i \sum_{n' \neq n} \frac{\left\langle n \left| \frac{\partial H}{\partial R^\mu} \right| n' \right\rangle \left\langle n' \left| \frac{\partial H}{\partial R^\nu} \right| n \right\rangle - (\nu \leftrightarrow \mu)}{(\varepsilon_n - \varepsilon_{n'})^2}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

在这里, 通常将 $\mathbf{A}$ 称为 Berry 联络 (Berry connection), 将 $\mathbf{B}$ 称为 Berry 曲率 (Berry curvature)。

在上述的公式推导过程中, 最重要的就是绝热假设, 即参数变化的足够缓慢从而使体系一直约束在某个能级上. 也就是说此时的取值空间已经从整个完备的希尔伯特空间投影到某一个特定的能级上, 这就是产生 Berry 相位的本质。

2.3 Berry 曲率与对称性的关系

上述已经写出的 Berry 曲率的表达式

$$B_{k_x k_y}^\sigma = \frac{\partial}{\partial k_x} A_{k_y}^\sigma - \frac{\partial}{\partial k_y} A_{k_x}^\sigma$$

$$= \sum_{\sigma', \sigma' \neq \sigma} B_{k_x k_y}^{\sigma \sigma'}, \quad (11)$$

满足时间反演对称时

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = -\mathbf{B}(-\mathbf{k}), \quad (12)$$

满足空间反演对称时

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \mathbf{B}(-\mathbf{k}), \quad (13)$$

若同时满足空间和时间反演对称

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = 0. \quad (14)$$

2.4 布洛赫能带中的 Berry 相位

以上介绍了用哈密顿算子描述通用体系 Berry 相位的基本概念, 现在考虑它在晶体中的实现. 我们知道, 晶体的能带结构为研究 Berry 相效应提供了一个天然的平台. 在孤立电子近似下, 首先可以写出单电子情况下的哈密顿量:

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (15)$$

其中 $V(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = V(\mathbf{r})$, $\mathbf{a}$ 是布拉伐晶格的格矢, 通过布洛赫定理, 周期性的哈密顿量的本征态满足以下条件:

$$\psi_{n\mathbf{q}}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}} \psi_{n\mathbf{q}}(\mathbf{r}), \quad (16)$$

这里 n 是能带的数目, $\hbar\mathbf{q}$ 是晶体的动量, 通过进一步变换可得

$$H(\mathbf{q}) = e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} H e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + \hbar\mathbf{q})^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (17)$$

在这里, $u_{n\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \psi_{n\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ 是布洛赫函数的周期性部分, 满足严格的周期性边界条件 $u_{n\mathbf{q}}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = u_{n\mathbf{q}}(\mathbf{r})$. Berry 相位以及 Berry 曲率可以写成:

$$\gamma_n = \oint_c d\mathbf{q} \cdot \langle u_n(\mathbf{q}) | i \nabla_{\mathbf{q}} | u_n(\mathbf{q}) \rangle, \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_n(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \times \langle u_n(\mathbf{q}) | i \nabla_{\mathbf{q}} | u_n(\mathbf{q}) \rangle. \quad (19)$$

3 声子霍尔效应

3.1 霍尔效应的发现

霍尔效应是电磁效应的一种, 这一现象是美国物理学家霍尔于 1879 年在研究金属的导电机理时发现的: 即当电流垂直于外磁场通过导体时, 载流子发生偏转, 在垂直于电流和磁场的方向会产生一

附加电场, 从而在导体的两端产生电势差, 这个电势差也被称为霍尔电势差.

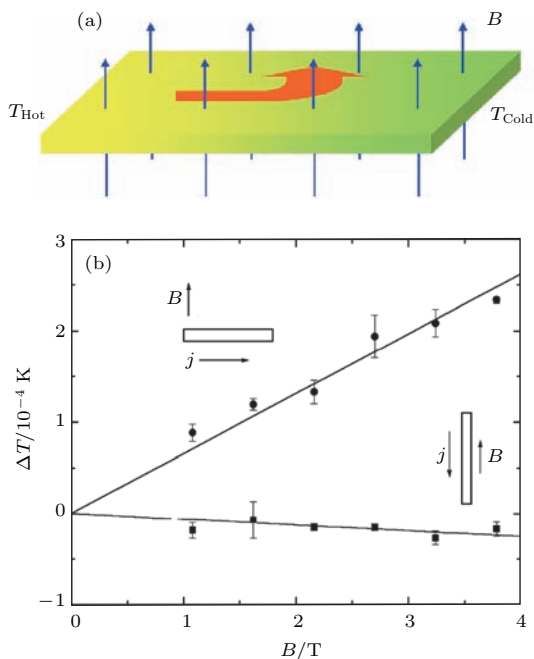


图1 (a) 声子霍尔效应示意图, 热流方向在磁场作用下发生偏转^[24]; (b) 在 $\text{Tb}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ 薄膜样品测得的横向温差随磁场大小和方向的变化关系^[12]

Fig. 1. (a) Phonon Hall effect: the direction of the heat flow is deflected by the magnetic field^[24]; (b) magnetotransverse temperature difference in a nonoriented sample of $\text{Tb}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ for heat currents perpendicular (circles) and parallel to the field (squares)^[12].

近些年来, 半导体材料和低维物理学的发展推动了许多霍尔效应的发展. 在电绝缘的晶体中, 声子是热流的载体, 由于声子不能直接和磁场相互作用, 所以通常认为不存在声子霍尔效应. 最近, Strohm 等^[12]在顺磁介质 $\text{Tb}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ 薄膜样品中发现了声子霍尔效应现象, 如图1所示, 即在有纵向温度梯度的顺磁绝缘体薄膜上, 加上垂直于薄膜平面的磁场后, 测得横向温度差. 当磁场方向平行于纵向热流时, 横向温度差可以忽略, 然而当磁场方向垂直于纵向热流 (纵向温差为1 K) 时, 可以观察到200 μK 的温度差. 由于电子不参与热运输, 所以 Strohm 等将之命名为声子霍尔效应. 此后该实验并被 Inyushkin 和 Taldenkov^[13]所重复. 科学家们试图提出几种理论来解释这一现象^[14,22], 但是相对复杂并且有相互矛盾之处. 另外, 文献^[23]利用非平衡态格林函数方法研究了具有自旋声子相互作用的四终端的二维薄膜的声子霍尔温差, 从另一角度解释了声子霍尔效应. Zhang 等^[15]的工作

从拓扑特性的角度首次对声子霍尔效应进行了揭示, 下面首先从声子霍尔体系的哈密顿量讲起.

3.2 哈密顿量以及二次量子化

在有磁场存在的情况下^[14], 离子晶体中晶格格点的动能可以写成

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha |\dot{\mathbf{r}}_\alpha|^2 = \frac{1}{2m_\alpha} |\mathbf{p}_\alpha \sqrt{m_\alpha} - q_\alpha \mathbf{A}_\alpha|^2, \quad (20)$$

这里 $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha / \sqrt{m_\alpha}$, $\mathbf{R}_\alpha$ 是第 α 个格点处离子的平衡坐标位置; $\mathbf{p}_\alpha$ 是相应的动量除以质量 m_α 的平方根; q_α 是位点 α 处离子的电荷量; $\mathbf{A}_\alpha$ 表示电磁矢势, 通过洛伦兹变换条件我们可以得到:

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{u}_\alpha / \sqrt{m_\alpha}. \quad (21)$$

所以, 上式可以写成

$$T_\alpha = \frac{1}{2} \left| \mathbf{p}_\alpha - \frac{q_\alpha}{2m_\alpha} \mathbf{B} \times \mathbf{u}_\alpha \right|^2. \quad (22)$$

如果此时沿 z 方向施加强度为 $\mathbf{B}$ 的磁场, 前提是只考虑二维情况下的运动 (即只沿 x 和 y 方向), 此时离子 α 的动能可以写成:

$$T_\alpha = \frac{1}{2} (p_\alpha - \Lambda_\alpha u_\alpha)^T (p_\alpha - \Lambda_\alpha u_\alpha), \quad (23)$$

这里 $p_\alpha = (p_{\alpha x}, p_{\alpha y})^T$, $u_\alpha = (u_{\alpha x}, u_{\alpha y})^T$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & h_\alpha \\ -h_\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $h_\alpha = -q_\alpha B / 2m_\alpha$, 对于一般的顺磁介质离子, 正离子的质量大于负离子的质量. 例如, 上述的实验中用到的 $\text{Tb}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$, 在基本原胞中正负离子质量的比值为 $m_{(+q)} / m_{(-q)} = 4.3$, 因此, 负离子将在对 h_α 的贡献中占主导地位, 这使得 h_α 具有与施加的磁场 $\mathbf{B}$ 相同的符号. 在平均场近似下, 我们可以令 $h_\alpha = h$. 所以均匀外部磁场中离子晶格的哈密顿量可以写成^[25]

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u})^T (\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}, \quad (24)$$

其中, $\tilde{\mathbf{A}}$ 是具有块对角元素 Λ 的反对称实数矩阵, $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{p}$ 分别是表示所有格点的位移和动量的列向量, $\mathbf{K}$ 是力常数矩阵. 故我们可以得到:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{K} - \tilde{\mathbf{A}}^2) \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p}. \quad (25)$$

之前的理论中, 科学家们考虑到拉曼相互作用的影响, 基于量子理论和基本对称性的自旋-声子相互作用^[26-28], 得到了 $H_1 = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{p})$, 这里 $\mathbf{h} = g c \mathbf{M}$, $\mathbf{M}$ 与磁场 $\mathbf{B}$ 成正比. 如果磁场沿 z 方向的作用, 此时自旋-声子相互作用可以写

成 $H_I = \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p}$, 所以整个晶格的哈密顿量可以写成 [29]

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T K \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p},$$

这和 (25) 式类似. 然而此哈密顿量并不总是正定的, 我们应该选用 (25) 式, 其始终是正定的.

哈密顿量是关于 u 和 p 二次型方程, 可以写出线性运动方程:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\left(K - \tilde{\mathbf{A}}^2\right) \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p}, \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u}. \quad (27)$$

此时坐标的运动方程为: $\ddot{\mathbf{u}} + 2\tilde{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = 0$, 由于晶格是周期性的, 通过布洛赫定理, $u_l = \varepsilon e^{i(\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{k} - \omega t)}$. 本征矢量满足 $[(-i\omega + A)^2 + D]\varepsilon = 0$, 其中动力学矩阵 $D(\mathbf{k}) = -A^2 + \sum_{l'} K_{ll'} e^{i(\mathbf{R}_{l'} - \mathbf{R}_l) \cdot \mathbf{k}}$. 通过上式有 $\varepsilon_{-k}^* = \varepsilon_k$, $\omega_{-k} = -\omega_k$. 在这里用 $k = (\mathbf{k}, \sigma)$ 来简记指定波矢和声子分支, 且 $-k = (-\mathbf{k}, -\sigma)$. 在晶格动力学问题处理中, 常常令 $\sigma, \omega \geq 0$, 以此可以得到 $\omega_{\sigma, \mathbf{k}} = \omega_{\sigma, -\mathbf{k}}$, 但由于自旋声子相互作用破坏时间反对称, 所以 $\omega_{\sigma, \mathbf{k}} = \omega_{\sigma, -\mathbf{k}}$ 不成立. 如果频率采用正负值结合的方式, 再结合 (28) 式, 可以得出动量和位移本征矢量 $(\mu_{\mathbf{k}}, \varepsilon_{\mathbf{k}})$ 满足方程:

$$\mu_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} + A \varepsilon_{\mathbf{k}}. \quad (28)$$

上式并不是标准的本征值问题, 重新定义一个新的向量 $\mathbf{x} = (\mu, \varepsilon)^T$. 然后, 通过布洛赫定理, (28) 式可以写成 [15]:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x} = H_{\text{eff}} \mathbf{x}, \quad H_{\text{eff}} = i \begin{pmatrix} -A & -D \\ I & -A \end{pmatrix}, \quad (29)$$

I 是单位矩阵. 因此, 上式的本征值问题可以写成

$$H_{\text{eff}} \mathbf{x}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} \mathbf{x}_{\mathbf{k}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^T H_{\text{eff}} = \omega_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^T. \quad (30)$$

在这里, 由于该有效哈密顿量是非厄米的, 需要计算右本征矢量为 $\mathbf{x}_{\mathbf{k}}$ 和左本征矢量 $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^T$, 有 $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}^T = (\varepsilon_{\mathbf{k}}^\dagger, -\mu_{\mathbf{k}}^\dagger) / (-2i\omega_{\mathbf{k}})$, 即 $\tilde{\mathbf{x}}_{\sigma, \mathbf{k}}^T x_{\sigma', \mathbf{k}} = \delta_{\sigma, \sigma'}$ [23], 对于本征矢 $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ 的归一化条件即为

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^\dagger \varepsilon_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^\dagger A \varepsilon_{\mathbf{k}} = 1. \quad (31)$$

对于上式中的本征值问题, 可知完备基包括负的分支等. 从声子霍尔效应的拓扑性质可知 [15], 声子霍尔热导率的公式可以写成包括正负频的所有分支的贡献形式, 为了简化符号, 对

于所有的分支, 定义 $a_{-k} = a_{\mathbf{k}}^\dagger$, 含时算子变换为 $a_{\mathbf{k}}(t) = a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$, $a_{\mathbf{k}}^\dagger(t) = a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}$. 变换关系为 $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \text{sign}(\sigma)$, 故由以上可以得到 [15]:

$$\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle = f(\omega_{\mathbf{k}}) \text{sign}(\sigma), \quad (32)$$

$$\langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle = [1 + f(\omega_{\mathbf{k}})] \text{sign}(\sigma), \quad (33)$$

这里的 $f(\omega_{\mathbf{k}})$ 为玻色-爱因斯坦分布方程.

在上述变化后, 位移和动量运算符可以用二次量子化算符写成 [30]:

$$u_l = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2N|\omega_{\mathbf{k}}|}} a_{\mathbf{k}}, \quad (34)$$

$$p_l = \sum_{\mathbf{k}} \mu_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2N|\omega_{\mathbf{k}}|}} a_{\mathbf{k}}, \quad (35)$$

这里 $|\omega_{\mathbf{k}}| = \omega_{\mathbf{k}} \text{sign}(\sigma)$. 通过上述, 系统的哈密顿量可以写成

$$H = \frac{1}{2} \sum_{l, l'} \tilde{\chi}_l^T \begin{pmatrix} A \delta_{l, l'} & K_{l, l'} - A^2 \delta_{l, l'} \\ -I_{nd} \delta_{l, l'} & A \delta_{l, l'} \end{pmatrix} \chi_{l'}. \quad (36)$$

通过一系列变换后, 哈密顿量最终可以化为 [30]

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar}{2N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', l} e^{i\mathbf{R} \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k})} \tilde{c}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}'} \tilde{x}_{\mathbf{k}}^T \begin{pmatrix} A & D(\mathbf{k}') \\ -I_{nd} & A \end{pmatrix} \\ &\quad \times x_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \\ &= \frac{\hbar}{2N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', l} e^{i\mathbf{R} \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k})} \tilde{c}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}'} \tilde{x}_{\mathbf{k}}^T i H_{\text{eff}} x_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \hbar |\omega_{\mathbf{k}}| a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (37)$$

系统的热流可以写为 [30]

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2V} \sum_{l, l'} (\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_{l'}) u_l^T K_{ll'} \dot{u}_{l'}, \quad (38)$$

这里 V 是 N 个基本原胞的总体积. 通过对上述式的求导并引入 Berry 联络 $\mathbf{A} = i \tilde{\mathbf{x}}^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{k}}$, 得出最终的热流公式:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{i\hbar}{4V} \sum_{\sigma, \sigma', \mathbf{k}} \tilde{c}_{\sigma, \mathbf{k}} c_{\sigma', \mathbf{k}} a_{\sigma, \mathbf{k}}^\dagger a_{\sigma', \mathbf{k}} \\ &\quad \times \left(\frac{\partial \Omega^2}{\partial \mathbf{k}} + [-i\mathbf{A}, \Omega^2] \right)_{\sigma, \sigma'} a_{\sigma', \mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (39)$$

通过格林-库珀公式, 可以计算得到霍尔热导线性

响应贡献 κ^{Kubo} :

$$\kappa_{xy}^{\text{Kubo}} = \frac{\hbar}{8VT} \sum_{k, \sigma \neq \sigma'} f(\omega_\sigma) (\omega_\sigma + \omega_{\sigma'})^2 B_{k_x k_y}^{\sigma \sigma'}, \quad (40)$$

其中:

$$B_{k_x k_y}^{\sigma \sigma'} = \frac{i}{4\omega_\sigma \omega_{\sigma'}} \frac{\varepsilon_\sigma^\dagger \frac{\partial D}{\partial k_x} \varepsilon_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'}^\dagger \frac{\partial D}{\partial k_y} \varepsilon_\sigma - \varepsilon_\sigma^\dagger \frac{\partial D}{\partial k_y} \varepsilon_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'}^\dagger \frac{\partial D}{\partial k_x} \varepsilon_\sigma}{(\omega_\sigma - \omega_{\sigma'})^2} \quad (41)$$

是 σ 带到 σ' 带的对 Berry 曲率的贡献. 另外我们还必须考虑能量磁化贡献 $M_E^{[16]}$, 总的霍尔热导率可以写为

$$\kappa_{xy}^{\text{tr}} = \kappa_{xy}^{\text{Kubo}} + \frac{2M_E^z}{TV}, \quad (42)$$

最终可以得到声子热导率公式^[16]

$$\kappa_{xy}^{\text{tr}} = -\frac{(\pi k_B)^2}{3\hbar} Z_{\text{ph}} T - \frac{1}{T} \int d\varepsilon \varepsilon^2 \sigma_{xy}(\varepsilon) \frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad (43)$$

这里^[16]

$$Z_{\text{ph}} = \frac{2\pi}{V} \sum_{k; i=1}^{3r} B_{ki}^z, \quad \sigma_{xy}(\varepsilon) = -\frac{1}{V\hbar} \sum_{\hbar\omega_{ki} \leq \varepsilon} B_{ki}^z. \quad (44)$$

从上述公式中可以看出声子的霍尔热导率由其色散关系和 Berry 曲率所决定, 这与量子霍尔电导有一定的类比性^[4].

此外, 通过半经典的波包动力学方法, 可以研究热霍尔效应, 包括电子热霍尔效应、磁振子霍尔效应以及声子霍尔效应. 在热霍尔效应中, 可以定义粒子磁矩为

$$\mathbf{m}_n^N(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \langle W_0 | (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{v} | W_0 \rangle. \quad (45)$$

故体系的能量和热磁矩分别为

$$\mathbf{m}_n^E(\mathbf{q}) = \varepsilon_n(\mathbf{q}) \mathbf{m}_n^N(\mathbf{q}), \quad \mathbf{m}_n^Q(\mathbf{q}) = \mathbf{m}_n^E(\mathbf{q}) - \mu \mathbf{m}_n^N(\mathbf{q}), \quad (46)$$

这里 ε_n 是布洛赫能带的能量, μ 是化学势. 类比于电子轨道磁化, 热轨道磁化 $\mathbf{M}_Q$ 有两个部分, 一个来自于波包的自转有关, 记为 $\mathbf{M}_Q^{\text{self}}$; 另一个是波包中心的运动的贡献, 将其表示为 $\mathbf{M}_Q^{\text{edge}}$ ^[18].

$$\mathbf{M}_Q^{\text{self}} = \frac{1}{V} \sum_{n, \mathbf{q}} f(\mathbf{q}) \mathbf{m}_n^Q(\mathbf{q}),$$

$$\mathbf{M}_Q^{\text{edge}} = -\frac{1}{V\hbar} \sum_{n, \mathbf{q}} \int_{\varepsilon_n(\mathbf{q})}^{\infty} (\varepsilon - \mu) f(\varepsilon) d\varepsilon \mathbf{B}_n(\mathbf{q}). \quad (47)$$

可以得到总的热流为

$$\mathbf{J}_Q^{\text{total}} = \frac{1}{V} \sum_{n, \mathbf{q}} [g(\mathbf{r}, \mathbf{q}) (\varepsilon - \mu) \dot{\mathbf{r}}_C + \nabla \times g(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \mathbf{m}_n^Q(\mathbf{q})]. \quad (48)$$

该总热流包括磁化热流 $\mathbf{J}_Q^{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}_Q$ 和传导热流 $\mathbf{J}_Q^{\text{tr}}$ 两部分, 而只有传导热流对霍尔热导有贡献,

所以 $\kappa_H = -\frac{\partial \mathbf{J}_Q^{\text{tr}}}{\partial T}$ 可以写成^[18]

$$\kappa_H = \frac{\partial \mathbf{M}_Q^{\text{edge}}}{\partial T} = \frac{1}{V\hbar T} \sum_{n, \mathbf{q}} \left[\int_{\varepsilon_n(\mathbf{q})}^{\infty} (\varepsilon - \mu)^2 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \right] \mathbf{B}_n(\mathbf{q}), \quad (49)$$

此公式是电子霍尔热导、磁振子霍尔热导以及声子霍尔热导的通用公式. 其中对于声子可以进一步写成:

$$\kappa_H = \frac{1}{2V\hbar T} \sum_{\mathbf{q}, m=1, 2nd} \left[\int_{\varepsilon_m(\mathbf{q})}^{\infty} \varepsilon^2 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \right] \mathbf{B}_m(\mathbf{q}), \quad (50)$$

其中 n, d 分别是原胞内的原子数和每一个原子的自由度.

3.3 声子霍尔效应的拓扑性质

由于本征矢量的波矢依赖性, 可以计算其 Berry 相效应. 通过 Berry 近似, 首先设 $x(t) = e^{i\gamma_\sigma(t) - i \int_0^t dt' \omega_\sigma[\mathbf{k}(t')]} x_\sigma[\mathbf{k}(t)]$, 并代入上式中. 由于 Berry 相 $\gamma_\sigma = \oint \mathbf{A}_\sigma^z d\mathbf{k}$, 且 $\mathbf{A}_\sigma^z = i\dot{x}_\sigma^T \frac{\partial x_\sigma}{\partial \mathbf{k}}$, 所以 Berry 曲率可写成

$$B_{\mathbf{k}_x \mathbf{k}_y}^\sigma = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}_x} A_{\mathbf{k}_y}^\sigma - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}_y} A_{\mathbf{k}_x}^\sigma = \sum_{\sigma', \sigma' \neq \sigma} B_{\mathbf{k}_x \mathbf{k}_y}^{\sigma \sigma'}. \quad (51)$$

然后通过将第一布里渊区域上的 Berry 曲率整合得到相关的拓扑陈数:

$$C^\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{BZ}} d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y B_{\mathbf{k}_x \mathbf{k}_y}^\sigma = \frac{2\pi}{L^2} \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}_x \mathbf{k}_y}^\sigma. \quad (52)$$

如果没有拉曼自旋声子的影响, 也就是说当 $\hbar = 0$ 时, 此时 Berry 曲率 $B_{\mathbf{k}_x \mathbf{k}_y}^\sigma$ 处处为零, 声子的霍尔热导率消失. 当外加磁场作用时, Berry

曲率不为零, 因此, 声子霍尔效应也随之出现. 另外研究发现, 如果体系出现对称性满足 $SDS^{-1} = D$, $SAS^{-1} = -A$, 此时声子的霍尔热导为零^[31], 此时 $B_{\mathbf{k}_x \mathbf{k}_y}^{\sigma\sigma'} = 0$. 如果磁场改变了,

Berry 曲率也会改变, 但是陈数在很大的范围内并不改变. 尽管陈数被量化了, 但是由于 (40) 式中 $f(\omega_\sigma)(\omega_\sigma + \omega_{\sigma'})^2$ 项的存在, 声子的霍尔热导率并没有被量化.

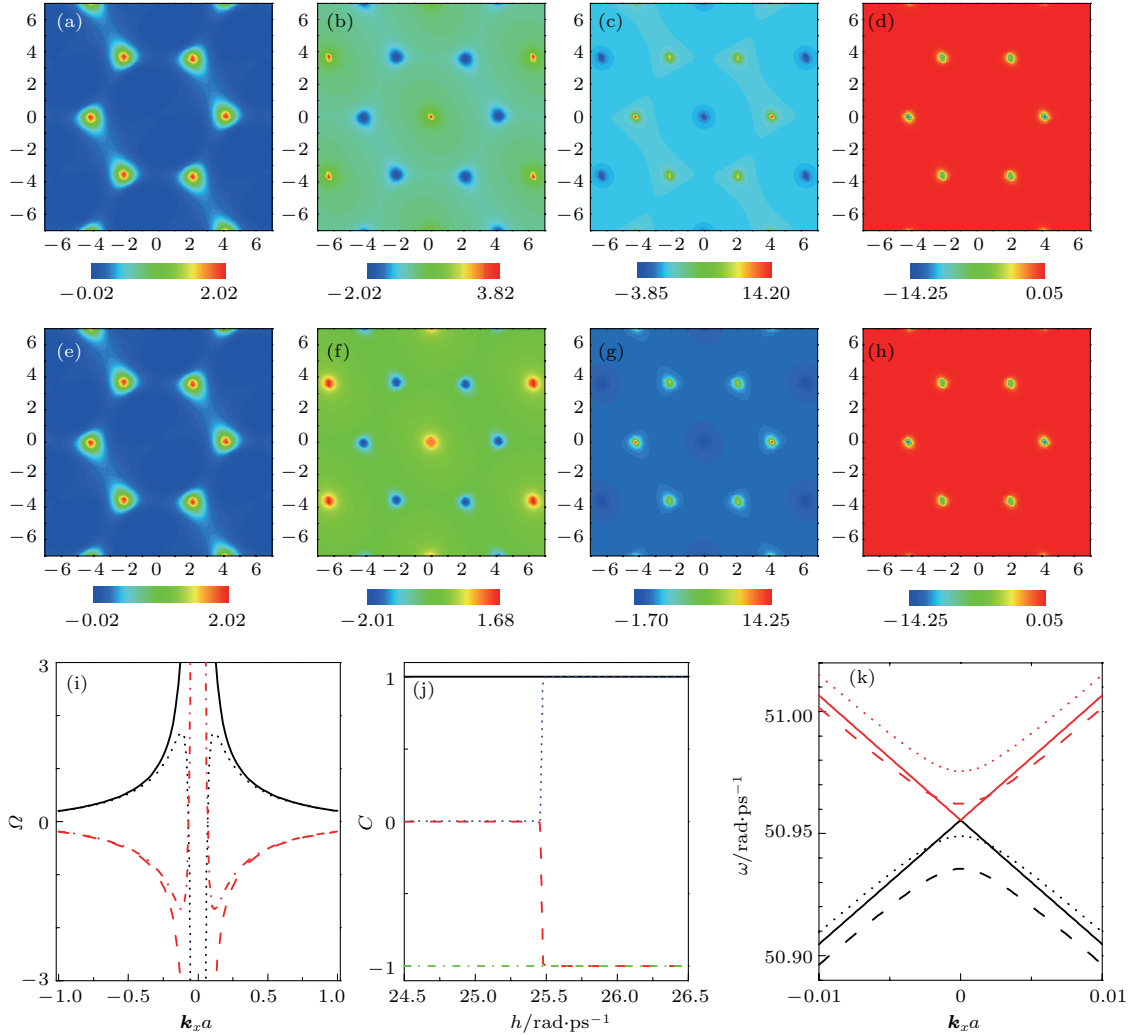


图2 (a)–(d) 当临界磁场 $h_{c-} = h_c - 10^{-2}$ rad/ps 时能带 1 到 4 的 Berry 曲率轮廓图; (e)–(h) 当临界磁场 $h_{c+} = h_c + 10^{-2}$ rad/ps 时能带 1 到 4 的 Berry 曲率轮廓图; 从 (a)–(h) 水平轴和垂直轴分别对应于波矢 $\mathbf{k}_x$ 和 $\mathbf{k}_y$; (i) 在不同磁场中的 Berry 曲率, 实线和虚线分别对应于在临界磁场为 h_{c-} 时 Ω^2 和 Ω^3 , 相应的实点和虚点分别对应于临界磁场为 h_{c+} 时 Ω^2 和 Ω^3 ; (j) 四种能带的陈数 C^1 (实线), C^2 (虚线), C^3 (点线), C^4 (虚点线); (k) 在临界磁场为 h_c 附近的不同磁场上能带 2 和能带 3 的色散关系图, 其中虚线、实线以及点线分别对应于在临界磁场为 h_{c-}, h_c, h_{c+} 时的带^[15]

Fig. 2. (a)–(d) The contour map of Berry curvatures for bands 1–4 at $h_{c-} = h_c - 10^{-2}$ rad/ps; (e)–(h) the contour map of Berry curvatures for bands 1–4 at $h_{c+} = h_c + 10^{-2}$ rad/ps; for (a)–(h), the horizontal and vertical axes correspond to wave vector $\mathbf{k}_x$ and $\mathbf{k}_y$; (i) Ω at different magnetic fields, the solid and dashed lines correspond to Ω^2 and Ω^3 at h_{c-} , respectively, while dotted and dash-dotted lines correspond to those at h_{c+} ; (j) Chern numbers of four bands, C^1 (solid line), C^2 (dashed line), C^3 (dotted line), and C^4 (dashdotted line); (k) the dispersion relation of bands 2 and 3 at different magnetic fields in the vicinity of h_c , the dashed, solid and dotted lines correspond to the bands at h_{c-}, h_c and h_{c+} , respectively^[15].

随着磁场的增加, 在临界磁场 h_c 的附近, 发现存在拓扑相变. 不同频带在靠近临界磁场的 Berry 曲率由图 2(a)–(f) 给出, 当 h_c 附近磁场变化非常小时, 在 Γ 点附近的能带 2 和能带 3 的 Berry 曲率几乎是完全不同的, 而能带 1 和能带 4 却保持不变.

如图 2(i) 所示, 在临界磁场上方和下方 Berry 曲率发生了急剧的变化, 从而导致能带 2 和 3 的陈数发生跳跃, 如图 2(j) 所示, 这个跳跃表明两条带的拓扑结构在临界磁场下突然改变, 这与能带结构的相变有着重要的联系^[15].

为了进一步研究声子拓扑带结构变化的机理, 同样给出了在临界磁场附近的声子的色散关系图, 如图 2(k) 所示, 可以看到当磁场增加到 h_c 时, 在 Γ 点附近能带 2 和能带 3 彼此的相互靠近. 同样, 在临界磁场区域, 两条能带发生了简并且两条带的形状出现了锥形. 而在临界点 h_c 上方, 两条能带发生了分裂. 也就是说在临界磁场附近的声子的色散关系直接影响了 Berry 曲率, 从而导致拓扑相变.

这里提出的声子霍尔热导率的拓扑学方法是一般的, 可以应用于低温下的真实材料. 最近的研究发现它也可以用于磁霍尔效应 [32]. 从拓扑性质和色散关系来解释的声子霍尔效应相变也可以推广到研究其他霍尔效应或非平衡运输中的相变.

4 声子谷霍尔效应

4.1 谷电子霍尔效应

由于空间反演对称性的破坏, 动量空间里分开的等价能谷 K , K' , 通过 Berry 曲率或轨道磁矩可以来描述这种不等价性. 因此这两处不等价的能谷便构成了除电荷和自旋以外电子的另一个自由度, 这也导致了能谷电子学的出现.

自然界大量存在类似于石墨烯的六角蜂窝状晶格层状材料, 例如氮化硼、硒化镓、过渡金属二硫化物等. 不同于石墨烯, 这些材料中的 A 和 B 子格是由不同的原子构成, 从而体系破坏了空间反演对称性. 这些材料也为研究能谷电子学提供了条件.

在 A/B 堆积的双层石墨烯材料中, 通过施加垂直与二维平面的电场来打破石墨烯的空间反演对称性, 从而在 K 和 K' 能谷处产生大小相等但反向的并且与能谷相关的 Berry 曲率及轨道磁矩 [33]. 因此也带来了一系列新奇的效应, 如能谷霍尔效应 [34]. 如图 3, 在非零的 Berry 曲率和外加面内电场的作用下, 谷电子获得反常的大小与 Berry 曲率成正比 [35,36] 的横向速度, 不同的谷电子偏转方向相反. 因此在样品两端可探测到谷极化电流, 图中 Berry 曲率的反差使得 K 和 K' 能谷电子在垂直外加电场方向的运动发生横向相反方向的偏转, 这就是谷电子霍尔效应. 最近, 实验上已经在单层二硫化钼三极管 [37] 和石墨烯超晶格 [38] 中观测到了谷电子霍尔效应.

通过对称性分析可知, 破坏时间反演对称性或破坏空间反演对称性的系统中声子携带非零的角

动量. 在这一部分, 我们引入非磁性的六角 AB 晶格体系, 即破坏空间反演对称性, 但保留时间反演对称性. 在两个不等价的能谷处手性的声子大量集中, 即谷上的声子是左旋或者右旋圆极化的, 且非简并的声子模可以用量子的赝角动量标记 [17]. 所以, 类比谷电子霍尔效应, 对于谷声子, 自然要提出两个问题: 谷声子的 Berry 曲率是否为零? 如果 Berry 曲率是非零的, 是否存在谷声子霍尔效应?

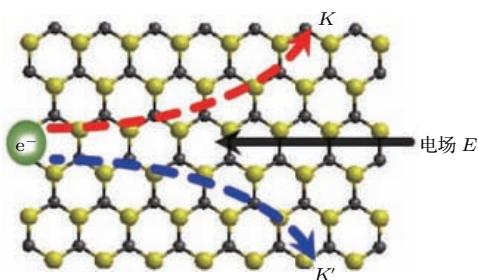


图 3 谷电子霍尔效应示意图 [34]

Fig. 3. Valley electronic Hall effect diagram [34].

4.2 声子 Berry 曲率

之前计算声子的 Berry 曲率, 采用传统的晶格动力学周期解

$$u_{l,\alpha} = m_{\alpha}^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{k}}, \quad (53)$$

这里的 u 和 ε 是维度为 2 (二维运动) 或 3 (三维运动) 的列向量. 接着可以得到运动方程

$$\omega_{\mathbf{k},\sigma}^2 \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{k}, \sigma) = D_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}) \varepsilon'_{\alpha'}(\mathbf{k}, \sigma). \quad (54)$$

而实际上, 为了准确地得到声子的 Berry 曲率, 必须考虑到原胞内格点的相位差, 因此这里采取布洛赫波形式的声子波函数

$$u_{l,\alpha} = m_{\alpha}^{-\frac{1}{2}} \varepsilon'_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{r}_{l,\alpha} \cdot \mathbf{k}}, \quad (55)$$

$$\mathbf{r}_{l,\alpha} = \mathbf{R}_l + \mathbf{d}_{\alpha},$$

其中 $\mathbf{d}_{\alpha}$ 是第 α 原子相较于第 l 个原胞的平衡位置, 因此可以得出

$$\varepsilon'_{\alpha} = e^{-i\mathbf{d}_{\alpha} \cdot \mathbf{k}} \varepsilon_{\alpha}, \quad (56)$$

所以动力学矩阵变为

$$D'_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}'_l - \mathbf{R}_l} \frac{K_{l\alpha,l'\alpha'}}{\sqrt{m_{\alpha}m_{\alpha'}}} e^{i(\mathbf{R}'_l - \mathbf{R}_l + \mathbf{d}'_{\alpha'} - \mathbf{d}_{\alpha}) \cdot \mathbf{k}}, \quad (57)$$

此时的运动方程为

$$\omega_{k,\sigma}^2 \varepsilon'_{\alpha}(\mathbf{k}, \sigma) = D'_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}) \varepsilon'_{\alpha'}(\mathbf{k}, \sigma), \quad (58)$$

这与之前的运动方程是等价的, 它们具有相同的色散关系, 仅仅是波函数相差了一个相位.

在第二节已经计算过声子的 Berry 曲率, 这里由于具有时间反演对称性, 只需考虑所有正的声子模.

由于 $\varepsilon(\mathbf{k}, \sigma) = \varepsilon^*(-\mathbf{k}, -\sigma)$, 在时间反演对称性的保护下, 有 $\varepsilon(\mathbf{k}, \sigma) = \varepsilon^*(-\mathbf{k}, \sigma)$, 所以 $\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{-\sigma}$, $\varepsilon'_{\sigma} = \varepsilon'_{-\sigma}$, 因此 $B_{k_x k_y}^{\sigma, -\sigma} = 0$.

类比于电子的 Berry 曲率计算 $H\psi_n = E_n\psi_n$, 声子的 Berry 曲率为

$$\begin{aligned} & B_{k_x k_y}^{\sigma, \sigma'} + B_{k_x k_y}^{\sigma, -\sigma'} \\ &= \left(\frac{i}{4\omega_{\sigma}\omega_{\sigma'}(\omega_{\sigma} - \omega_{\sigma'})^2} - \frac{i}{4\omega_{\sigma}\omega_{\sigma'}(\omega_{\sigma} + \omega_{\sigma'})^2} \right) \\ & \times \left(\varepsilon'_{\sigma} \frac{\partial D'}{\partial k_x} \varepsilon'_{\sigma'} \varepsilon'_{\sigma'} \frac{\partial D'}{\partial k_y} \varepsilon'_{\sigma} - (k_x \leftrightarrow k_y) \right), \end{aligned} \quad (59)$$

即

$$B_{k_x k_y}^{\sigma} = i \sum_{\sigma' \neq \sigma} \frac{1}{(\omega_{\sigma}^2 - \omega_{\sigma'}^2)^2} \left[\varepsilon'_{\sigma} \frac{\partial D'}{\partial k_x} \varepsilon'_{\sigma'} \varepsilon'_{\sigma'} \frac{\partial D'}{\partial k_y} \varepsilon'_{\sigma} \right]$$

$$- (k_x \leftrightarrow k_y) \Big], \quad (60)$$

这一形式也与第二节所给的声子 Berry 曲率相符合.

4.3 谷声子霍尔效应

非磁性的六角 A/B 晶格体系破坏了空间反演对称性, 如图 4(a), 在能谷处观察到了非零的声子 Berry 曲率. 能带 1 和能带 4 在能谷处拥有较大的 Berry 曲率, 而能带 2 和能带 3 在能谷处的 Berry 曲率较小. 正因为能谷处存在非零的 Berry 曲率, 施加纵向的应变梯度 $\mathbf{E}_{\text{strain}}$, 类比于谷电子霍尔效应, 会出现与应变梯度和 Berry 曲率的叉矢成正比的反常速度, $\mathbf{v}_{\text{anom}} \propto -\mathbf{E}_{\text{strain}} \times \mathbf{B}$. 因此, 被左旋或者右旋极化光子激发的位于不同能谷处的声子会沿横向移动. 如图 4(b) 和图 4(c), 如果光子的极性反转, 那么横向声子流的方向也会翻转. 随着声子在某条边的积累, 可以测得横向的温度差. 很显然, 如果圆极化的受激光子极性反转, 则横向温差也会相反.

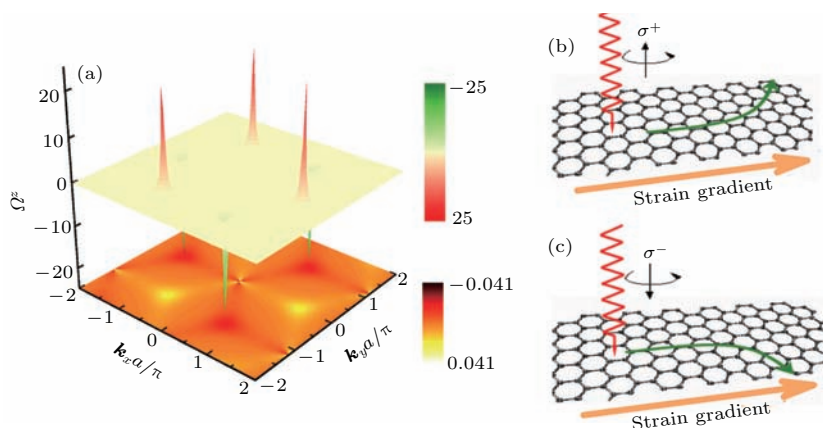


图4 六角 A/B 晶格的声子贝里曲率和谷声子霍尔效应 (a) 能带 1(底部二维图)和能带 2(顶部三维图)的 Berry 曲率; (b), (c) 谷声子被右旋或左旋极化光激发 (霍尔热流由红色箭头标出), 在应力梯度下产生相应的声子^[17]

Fig. 4. Phonon Berry curvature and valley phonon Hall effect in a honeycomb of A/B lattice: (a) Berry curvature of band 1 (bottom contour plot) and band 2 (top 3D plot); (b), (c) schematic of the valley phonon hall effect (the Hall current denoted by the olive curve arrows) under a strain gradient (the orange arrows), where valley phonons are excited by a ray of right-handed or left-handed polarized light (the red wave lines)^[17].

声子霍尔效应已在实验上证实^[39], 在顺磁绝缘体中, 磁场可以改变声子的输运, 因此可以测得横向的温度差, 但是其效应受限于及其微弱的自旋声子相互作用. 在破坏空间反演对称性而保持时间反演对称性的体系中, 非零的 Berry 曲率诱发的谷声子霍尔效应确实广泛存在于六角晶格中, 将会有更大范围的应用.

5 同时破坏时间和空间反演对称的声子模型

由于时间反演对称破缺会产生具有非零拓扑陈数的声子态, 即声子霍尔效应, 其具有单向导通的不受散射的声子边界模式; 空间反演对称破缺会

产生具有非零的 Berry 相的谷, 可用作调控声子输运的新型量子自由度, 即谷声子霍尔效应; 如果两种对称性破缺同时存在, 则能产生新的拓扑相变并演生出丰富的声子拓扑量子态.

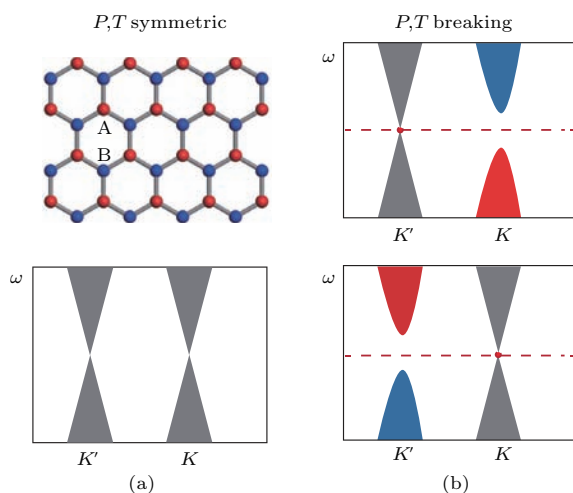


图 5 (a) 由 A/B 晶格组成的蜂窝状晶格示意图, 以及在 K 和 K' 声子谷附近的狄拉克锥; (b) 当同时破坏掉时间反演和空间反演对称两个谷的频率不变, 其中 A/B 晶格声子态 A 由红色标出, B 由蓝色标出 [19]

Fig. 5. (a) A honeycomb lattice composed of A/B sublattices, and the Dirac cones of phonons near the K and K' valleys; (b) the two valleys that are non-degenerate in frequency caused by breaking P and T simultaneously [19].

Liu 等 [19] 的最新研究中, 利用类似于 Haldane 蜂窝晶格模型, 研究并探索 Berry 相与声子的拓扑效应. 在这种晶格中, 纵向光学和声学模式在 K 处形成线性交叉条带和 Dirac 点, 如图 5 所示. 当破坏空间反演对称性以及时间反演对称时, 哈密顿量可以写成:

$$H' = m_I \sigma_z + m_T \sigma_z \tau_z. \quad (61)$$

在上述的介绍中, 我们已经了解了单独破坏时间反演对称或者空间反演对称对 Berry 曲率的影响, 此时 Berry 通量在每个谷中的值为 $\pm\pi$, 且陈数 $C_{K(K')} = \pm 1/2$. 由于 $C = C_K + C_{K'}$, 故在单独破坏时间反演时, Berry 曲率 $B(k) = B(-k)$, 陈数为 $C = \pm 1$, 此系统中可以观测到声子霍尔效应; 在单独破坏空间反演对称时, $B(k) = -B(-k)$, 陈数 $C = 0$, 可以观测到谷声子霍尔效应. 如图 5 所示, 当同时破坏时间反演和空间对称性时, 两声子谷之间的频率简并消失, K 和 K' 之间的能带带隙打开且相互独立, 即在极端情况下, 只能在一个谷

中实现零带隙能带, 这种发现可以应用在声子谷滤波器中.

6 Berry 相效应在其他声学体系中的应用

近几年, 关于 Berry 曲率在声学体系中的应用的研究很多, 例如在低温的情况下, 磁绝缘体中的自旋激发的热导率可超过声子的自发激发的热导率, 但由于其电荷为中性的, 故自旋波不会产生相应的热霍尔效应. 然而, 在戈薇晶格, Berry 曲率与热导率之间有着紧密的联系, 在实验中观察到 κ 随着温度或磁场的变化而发生符号反转, 其与金属带之间的陈数通量的符号交替相关 [40]. 其次, 在电子和声子相互作用的系统中, 量子霍尔效应与无耗散电流情况下霍尔电导率之间也有着紧密的联系, 最近已经观察到, 当电流增加到一个临界值时, 对应于声速的载波漂移速度出现了一个戏剧性的耗散 [41]. 在反转对称性破坏的非磁性系统中, Berry 曲率诱导横向谷声子霍尔效应将产生一些新的应用.

对于谷赭自旋, 由于其作为新型信息载体的潜力巨大且在动量空间中能标注能量极值的量子状态而引起了人们的关注 [37,38,42,43]. 在最近的一项研究中, 武汉大学刘正猷研究组从实验上在声波晶体中观察到了声音的拓扑谷输运现象 [44], 他们除了通过声场的空间扫描直接观察谷选择性边缘模式之外, 还在急剧弯曲的界面中观察到抗反射现象. 与传统声波导相比, 拓扑保护的声子传输与其明显不同, 这一发现可以作为设计具有非常规功能设备的基础.

另外, 近期刘正猷教授研究组在声子晶体中首次引入谷自由度的概念, 预测了声学谷态所具有的涡旋声场分布并提出了产生特定手性声涡旋场的方法, 在此基础上, 他们进一步实现了谷束分离和基于谷态的粒子操控. 可以预期其潜在的应用与声学涡旋及物质的异乎寻常的相互作用, 例如触发俘获的微粒的旋转而不接触. 这一发现具有重要的科学意义 [45].

此外, 通过刚性键或者弹簧连接起来的质点组成的框架或格子模型构造在结构工程、建筑和材料科学等不同领域有着重要的应用. 在这类晶格中, 刚性键的数量与格子自由度之间的差异决定了它

们的“零频率”软盘模式的数量. 当这些平衡时, 系统处于机械不稳定的边缘, 被称为等静压. 由于某些扩展的等静压晶格在其边界的软盘模式呈现局部化, 这些边界模式对局部扰动不敏感, 似乎具有拓扑起源, 可联想到在量子霍尔效应和拓扑绝缘子中发生的受保护的电子边界模式. 由此科学家们建立了拓扑机械模式和电子系统的拓扑带理论之间的联系, 并预测了具有不同边界模式的新的拓扑大体积机械相的存在^[46].

最近, 科学家在机械拓扑绝缘子中观察到声子的螺旋边缘态, 这一发现使得利用表面声子的稳定性设计可靠的波导的拓扑声学材料成为可能^[47]. 在具有单向弹性边缘波的拓扑声子晶体中, 科学家们通过使用陀螺惯性效应来打破时间反演对称, 实现电子量子(反常)霍尔效应的声子模拟, 研究结果激发了新型表面波器件的设计热潮, 将广泛应用于电子、电信和声学成像^[48].

7 展 望

拓扑物理学是一个方兴未艾的领域, 有着很广泛的前景等待着科学家们去开发. 自从量子霍尔效应发现以来, 凝聚态物理中的拓扑现象层出不穷, 如拓扑绝缘体、拓扑超导体等. 拓扑与声子学的结合才刚刚开始, 已有的相关研究工作中已可看到很大的发展空间和广阔的应用前景.

在磁性体系中, 声子霍尔效应的发现给声子输运与控制提供了新的方法, 但至今没有更多的实验研究声子霍尔效应. 由于绝大部分顺磁材料自旋声子相互作用很小, 所以测得霍尔效应很弱, 如何寻找更大效应的顺磁材料是一个挑战. 另外铁磁绝缘体, 由于更大的磁化率和更大的自旋声子相互作用, 可以存在更强的声子霍尔效应, 但是由于其中的磁振子霍尔效应也很强, 所以区分铁磁绝缘材料中热霍尔效应中磁振子和声子的贡献也是一个很有意义的课题, 由于磁振子和声子的拓扑性质不一样, 拓扑声子学在铁磁材料中声子霍尔效应可以发挥更大的作用.

块体能谱的拓扑特性实际上也对应着非平凡的边界态, 那么对于这里的声子霍尔效应, 理论上应该存在相应的拓扑保护的边界态或者边界模式, 和磁振子一样声子等玻色子体系中都没有费米面的概念, 所以真正意义上的玻色子拓扑绝缘体不存在, 但是可以通过波导选择带隙中的模式, 这样磁

振子和声子拓扑绝缘体也可以存在. 拓扑磁振子绝缘体已经发现, 但是拓扑声子绝缘体还没有真正发现, 寻找拓扑保护的边界声子模对于无耗散的声子输运控制及相关能量科学将具有潜在的应用价值.

谷声子霍尔效应为声子的控制提供了一个新的自由度. 由于电子的谷间散射与谷声子紧密联系, 如最近发现的谷声子具有确定的手性并且决定电子谷间散射的选择定则^[16], 因而谷声子对谷电子学的发展意义重大. 对于谷声子相关理论, 以及不同模型和材料中的手性声子计算还需广泛深入的研究. 另外实验直接观测谷声子以及谷声子霍尔效应也是一项具有重大意义的研究.

对于同时破坏时空对称性的体系, 谷声子的能量简并打开, 为实现单谷声子的选择与应用提供了思路. 而如何找到这样的材料还有待进一步的探索研究.

拓扑声子学才刚刚开始. 而拓扑与自旋电子学的结合已经引领了凝聚态物理几十年. 我们相信, 由于声子在凝聚态物理中广泛存在, 如超导、电声相互作用、布里渊区及拉曼散射、热电效应、热效应等, 拓扑声子在这些领域中不可回避并起到关键作用, 也将引领凝聚态物理学的蓬勃发展.

参考文献

- [1] Berry M V 1984 *Math. Phys. Sci.* **392** 45
- [2] Wilczek F, Shapere A 1989 *Geometric Phases Phys.* **5** 05857
- [3] Prabhakar S, Melnik R, Bonilla L L 2014 *Phys. Rev. B* **89** 245310
- [4] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [5] Karplus R, Luttinger J M 1954 *Phys. Rev.* **95** 1154
- [6] Zeng C, Yao Y, Niu Q, Weiering H H 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 037204
- [7] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [8] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [9] Li B, Wang L, Casati G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 184301
- [10] Chang C W, Okawa D, Majumdar A, Zettl A 2006 *Science* **314** 1121
- [11] Li B, Wang L, Casati G 2006 *Appl. Phys. Lett.* **88** 143501
- [12] Rikken G L J A, Strohm C, Wyder P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 133005
- [13] Inyushkin A V, Taldenkov A N 2007 *JETP Lett.* **86** 379
- [14] Sheng L, Sheng D N, Ting C S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 155901
- [15] Zhang L, Ren J, Wang J S, Li B W 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 225901
- [16] Qin T, Zhou J, Shi J 2012 *Phys. Rev. B* **86** 104305
- [17] Zhang L, Niu Q 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 115502
- [18] Zhang L 2016 *New J. Phys.* **18** 103039

- [19] Liu Y, Xu Y, Duan W 2017 arXiv preprint arXiv:1707.07142
- [20] Zhou J H 2012 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [周建辉 2012 博士学位论文 (北京: 中国科学院理论物理研究所)]
- [21] Nagaosa N, Sinova J, Onoda S, MacDonald A H, Ong N P 2010 *Rev. Modern Phys.* **82** 1539
- [22] Kagan Y, Maksimov L A 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 145902
- [23] Wang J S, Zhang L 2009 *Phys. Rev. B* **80** 012301
- [24] Zhang L 2011 *Ph. D. Dissertation* (Singapore: National University of Singapore)
- [25] Holz A 1972 *Nuovo Cimento B* **9** 83
- [26] Strohm C, Rikken G, Wyder P 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 155901
- [27] Kronig R L 1939 *Physica* **6** 33
- [28] van Vleck J H 1940 *Phys. Rev.* **57** 426
- [29] Wang L and Li B 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 177208
- [30] Zhang L, Ren J, Wang J S, Li B W 2011 *J. Phys. Condens. Matter* **23** 305402
- [31] Zhang L, Wang J S, Li B 2009 *New J. Phys.* **11** 113038
- [32] Onose Y, Ideue T, Katsura H, Shiomi Y, Nagaosa N, Tokura Y 2010 *Science* **329** 297
- [33] Xiao D, Yao W, Niu Q 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 236809
- [34] Zeng H L, Cui X D 2016 *Acta Phys. Sin.* **45** 505
- [35] Chang M C, Niu Q 1996 *Phys. Rev. B* **53** 7010
- [36] Xiao D, Chang M C, Niu Q 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1959
- [37] Mak K F, McGill K L, Park J, McEuen P L 2014 *Science* **344** 1489
- [38] Gorbachev R V, Song S J C, Yu G L, Kretinin A V, Withers F, Cao Y, Mishchenko A, Grigorieva I V, Novoselov K S, Levitov L S, Geim A K 2014 *Science* **346** 448
- [39] Cao T, Wang G, Han W P, Ye H Q, Zhu C R, Shi J R, Niu Q, Tan P H, Wang E, Liu B L, Feng J 2012 *Nat. Commun.* **3** 887
- [40] Hirschberger M, Chisnell R, Young S, Lee N P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 106603
- [41] Heinonen O, Taylor P L, Girvin S M 1984 *Phys. Rev. B* **30** 3016
- [42] Xu X D, Yao W, Xiao D, Heinz T F 2014 *Nature Phys.* **10** 343
- [43] Rycerz A, Tworzydło J, Beenakker C W J 2007 *Europhys. Lett.* **79** 57003
- [44] Lu J Y, Qiu C Y, Ye L P, Fan X Y, Ke M Z, Zhang F, Liu Z Y 2016 *Nature Phys.* **13** 369
- [45] Lu J Y, Qiu C Y, Ke M Z, Liu Z Y 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 093901
- [46] Kane C L, Lubensky T C 2013 arXiv preprint arXiv:1308.0554
- [47] Süssstrunk R, Huber S D 2015 *Science* **349** 47
- [48] Wang P, Lu L, Bertoldi K 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 104302

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Topological phonons and phonon Hall effects^{*}

Xing Yu-Heng Xu Xi-Fang Zhang Li-Fa[†]

(School of Physics and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

(Received 28 September 2017; revised manuscript received 6 November 2017)

Abstract

The combination of topology and physics is a new field of physics development in recent decades. It is not only active in quantum field theory and high energy physics, but also widely exists in condensed matter physics, including quantum (anomalous, spin) Hall effect and topological insulators (superconductors) etc. Phonon, as the main carrier of heat transport in the crystal, recently, due to the discovery of various phonon devices, phonons has been widely concerned by scientist. In this paper, we introduce the topological properties of phonons and the phonon hall effect. We have reviewed the related physical research progress of phonon hall effect, phonon valley hall effect and so on, which are generated by breaking the time reversal symmetry, spatial inversion symmetry, both breaking the time and spatial inversion symmetry. Finally, the application of topology in other acoustic systems is briefly introduced, and the future development direction is discussed too.

Keywords: topology, Berry phase, Berry curvature, phonon Hall effect

PACS: 66.70.-f, 03.65.Vf, 72.10.Bg, 72.15.Gd

DOI: [10.7498/aps.66.226601](https://doi.org/10.7498/aps.66.226601)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11574154).

[†] Corresponding author. E-mail: phyzlf@njnu.edu.cn

类石墨烯复杂晶胞光子晶体中的确定性界面态

贾子源 杨玉婷 季立宇 杭志宏

Deterministic interface states in photonic crystal with graphene-allotrope-like complex unit cells

Jia Zi-Yuan Yang Yu-Ting Ji Li-Yu Hang Zhi-Hong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 227802 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.227802

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.227802>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非对称光束干涉制备二维微纳光子结构研究

[Fabrication of two-dimensional micro-nano photonic structures by symmetry-lost beams interference](#)

物理学报.2017, 66(21): 217801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.217801>

非线性光学超构表面

[Nonlinear photonic metasurfaces](#)

物理学报.2017, 66(14): 147803 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.147803>

复合结构螺旋超材料对光波前的高效调控

[High-efficiency wavefront control with based on helical metamaterials](#)

物理学报.2016, 65(21): 217802 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.217802>

宽入射角度偏振不敏感高效异常反射梯度超表面

[Polarization-insensitive and broad-angle gradient metasurface with high-efficiency anomalous reflection](#)

物理学报.2015, 64(23): 237802 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.237802>

基于加权实数编码遗传算法的超材料优化设计

[Optimization of metamaterial based weighted real-coded genetic algorithm](#)

物理学报.2014, 63(8): 087804 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.087804>

专题: 拓扑经典波动

类石墨烯复杂晶胞光子晶体中的确定性界面态*

贾子源 杨玉婷 季立宇 杭志宏†

(苏州大学物理与光电·能源学部, 苏州纳米科技协同创新中心, 苏州 215006)

(2017年7月24日收到; 2017年8月13日收到修改稿)

拓扑绝缘体是当前凝聚态物理领域研究的热点问题. 利用石墨烯材料的特殊能带特性来实现拓扑输运特性在设计下一代电子和能谷电子器件方面具有较广泛的应用前景. 基于光子与电子的类比, 利用光子拓扑材料实现了确定性界面态; 构建了具有 C_{6v} 对称性的类似石墨烯结构的的光子晶体复杂晶格; 通过多种方式降低晶格对称性来获得具有 C_{3v} , C_3 , C_{2v} 和 C_2 对称的晶体, 从而打破能谷简并实现全光子带隙结构; 将体拓扑性质不同的两种光子晶体摆放在一起, 在此具有反转体能带性质的界面上, 实现了具有单向传输特性的拓扑确定性界面态的传输. 利用光子晶体结构的容易加工性, 可以简便地调控拓扑界面态控制光的传播, 可为未来光拓扑绝缘体的研究提供良好的平台.

关键词: 光子晶体, 拓扑, 谷自由度, 界面态

PACS: 78.67.Pt, 73.20.At, 42.70.Qs, 61.48.Gh

DOI: 10.7498/aps.66.227802

1 引言

拓扑学是近代发展起来的数学概念, 而随着凝聚态物理的发展, 人们发现了一类具有相变、非平庸特性的新型材料——拓扑绝缘体. 早在1980年, Klitzing发现了整数量子霍尔效应^[1], 此系统的特性完全符合拓扑绝缘体的概念. 随后 Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijs 关系^[2]指出其中量子化的根源是由于拓扑不变量的存在, 更是证明了量子化整数对应的是非零陈数. 在此系统中出现了一种新的物态拓扑态, 在其中电子输运的表现为完全的背散射抑制和单向传输. 不同于需要外加磁场破坏时间反演对称性来实现整数量子霍尔效应, Kane 和 Mele^[3]最早提出在低能量级的单层石墨烯中存在自旋轨道耦合导致的量子自旋霍尔效应, 即在石墨烯材料边界存在一对共轭且自旋方向相反的无能隙拓扑边界态. 我们已经知道以上观测到的量子化霍尔效应的根本原因是材料的拓扑特性, 与具体波动方程无关. 从布洛赫定理和能带性质来

看, 光子可与电子的性质相比拟, 那么光学领域也可能实现类似的光学拓扑绝缘体.

石墨烯是从石墨中剥离出来的、单层碳原子构成的二维晶体结构^[4]. 因其优越的导电导热高透明度等性能, 石墨烯广泛地应用在很多领域. 而且石墨烯具有很多同素异形体结构, 如具有更加复杂晶胞结构的石墨炔材料. 受石墨烯材料具有的许多新奇物理性质的启发, 人们开始研究与石墨烯具有相同对称性、相似能带结构的光子晶体 (photonic crystal, PC). 构成光子晶体的介电材料具有不同介电常数, 它在空间中按一定周期排列^[5,6]. 已经证明可以利用光子晶体来操纵光的传播行为^[7,8], 如光子晶体波导^[9,10]. 随着光子晶体能带理论的研究, 尤其是设计和实验方法的发展, 将拓扑的概念引入光学系统特别是用光子晶体实现拓扑绝缘体, 将会不断拓宽人们构造新型元器件的方法和思路.

迄今已经开展了许多波导传输性质的研究工作. 其中一方面是利用光子晶体界面态去控制光的传输^[11]. 已经研究的构建光子晶体界面态的方法

* 国家自然科学基金 (批准号: 11574226)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK20170058) 和江苏省高校优势学科建设工程资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhhang@suda.edu.cn

有: 构建光子晶体异质结构^[12,13]、修饰光子晶体表面^[14,15]、堆积拥有共同带隙的光子晶体等^[16]. 但是这些方法并不能保证界面态一定会产生, 需要仔细地调节结构才会产生界面态. 不同于之前的研究成果, 香港科技大学 Chan 课题组^[17,18]利用一种新的物理机理在一维和二维光子晶体中实现了确定性界面态, 即通过操控光子晶体结构参数, 简并的狄拉克锥色散会破缺, 从而出现带隙, 能带性质发生拓扑相变. 构成界面的这两种光子晶体的体能带拓扑性质反转, 则在两者共同带隙处就一定会存在界面态. 而且微波段实验已经在二维正方晶格光子晶体中证明了确定性界面态的存在^[19,20]. 并且还可以同时在多个频段实现界面态, 基于此性质可以用作多带波导的信息传输, 甚至是将应用拓展于光频段实现波分复用器^[21].

然而以往的研究工作中, 主要研究确定性界面态存在于光子晶体简单晶格结构中如正方晶格和三角晶格, 却没有关于复杂晶胞的探讨. 在本文中, 类似于石墨烯材料的复杂晶胞结构, 我们构建了具有复杂晶格的光子晶体, 尝试研究复杂晶胞所具备的多种对称性破缺的可能性. 比之类石墨烯的碳同素异形体在实验上极难获取, 我们尝试构造的复杂晶胞光子晶体在实验上便于实现, 而且可以通过调节结构参数和对称性来操纵色散关系. 我们通过四种方式打破光子晶体结构的 C_{6v} 对称性, 破缺能谷简并的狄拉克点构建具有反转体能带性质的两个光子晶体; 基于界面态存在的拓扑机理, 在光子晶体复杂晶胞中实现确定性界面态. 本文的研究工作拓宽了操控光子晶体能带实现拓扑界面态的思路和方法, 这些方法简单易行, 而且可以为光波导应用方面提供更广阔的平台.

2 类石墨烯复杂晶胞

人们对电子的两个内禀自由度电荷和自旋的研究促进了自旋电子学的成熟发展和广泛应用. 随着石墨烯材料的发现和研究, 科研工作者操控电子新的自由度能谷, 则促进了能谷电子学 (valleytronics) 的理论和应用探索^[22,23]. 能谷电子学旨在利用能谷作为载体在现代器件中加工处理信息. 许多有趣的物理性质已经在理论上得到证明并在实验中实现, 如谷分离 (valley filter)^[24]、谷霍尔效应 (valley Hall effect)^[25,26]. 石墨烯材料具有蜂窝状

晶格, 一个原胞结构由两个碳原子构成, 具有 C_{6v} 对称性. 同时石墨烯具有许多同素异形体, 即具有更加复杂多样的晶胞结构^[27]. 类石墨烯复杂晶胞就是用若干碳原子簇代替原胞上的一个原子. 石墨烯材料优异的应用特性源于其特殊的能带性质. 在动量空间中存在的一对不等价的能量局部极值叫做能谷, 表现为在第一布里渊区六个角处 (K 和 K' 点) 石墨烯的能带简并在一起, 简并点称为狄拉克点 (Dirac point). K 和 K' 点的能谷是不等价的, 其波函数满足时间反演对称性. 两者作为能谷自由度的两个态可以像电子自旋向上、向下态一样作为信息输运的载体, 被称作谷赝自旋. 我们同样考虑二维光子晶体. 蜂巢晶格中的每个碳原子被一根无限高的介质柱取代, 此种光子晶体也具有前述的类似能带性质; 再用三个介质圆柱替代原本的一个圆柱构建类石墨烯的复杂晶胞结构. 对比于石墨烯结构在可调控性方面的局限性, 此复杂晶胞光子晶体在对称性方面具有更多可利用的自由度, 并且更加容易操纵产生界面态色散关系.

二维光子晶体中确定性界面态的产生与界面通道两边结构的不同拓扑性质有关. 具体体现为如果构建此界面的两侧光子晶体体能带性质反转, 那么就一定存在确定性界面态. 以最简单的二维正方晶格光子晶体为例 (如图 1(a)), 通过调控有效介电常数、晶格常数和介质柱半径, 可以让能带在布里渊区中心 Γ 点发生简并, 这就是通常所说的偶然简并^[28]. 简并的能带色散满足线性关系, 它和电子体系中的狄拉克方程具有对应关系. 如此便在光子晶体系统中实现了类似石墨烯结构中的狄拉克锥. 通过继续调节结构参数则可以打开简并的能带获得带隙. 如图 1(b) 中, 在光子晶体 1(PC1) 的能带示意图中, 三条能带在 Γ 点的本征模式分布依次为类似电子系统的 s , p_y , p_x 轨道. 然而当我们将结构调整到光子晶体 2(PC2), 它的体能带结构则会与 PC1 发生反转, 如图 1(c) 所示. 三条能带中下面简并的两条在 Γ 点为本征模式 p_x , p_y , 而最上面一条为 s 模式. 因此 PC1 与 PC2 能带性质反转, 在两者反转能带共同带隙中则一定存在界面态. 此界面态的存在与否与光子晶体的体性质有关, 只需将不同体性质光子晶体摆放一起就一定存在, 因此称为确定性界面态. 图 1 中的能带结构均为示意图, 构成此系统的 PC1 与 PC2 的参数以及界面态具体传播性质可以参考文献^[19], 这里不再详述.

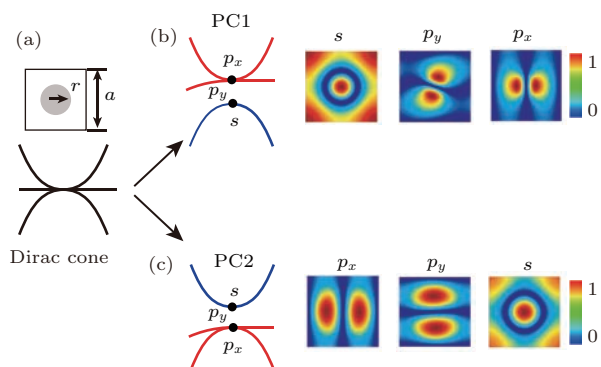


图1 (a) 光子晶体在布里渊区中心的狄拉克锥色散; (b), (c) 两个体能带反转的光子晶体

Fig. 1. (a) Dirac cone dispersion of PC around the center of Brillouin zone center; (b), (c) two inverted band structure of PC1 and PC2.

在本文工作中, 基于确定性界面态存在的物理机理, 构建拥有更多自由度的复杂晶胞光子晶体, 并实现拓扑界面态. 图2(a)为复杂结构的蜂窝状光子晶体示意图, 深蓝色实心圆表示介质柱, 浅蓝色的区域为背景材料. 在红色实线标示的六角晶胞中可以清晰地看到三个介质圆柱(用绿色凸显)簇拥在一起构成正三角形(绿色实线), 依然具有 C_{6v} 对称性, 此即为三个介质柱代替一个介质柱构成的复杂晶胞光子晶体. 其中相对介电常数 $\varepsilon = 7.5$ 的介质圆柱嵌在背景为空气的材料中. 图中红色菱形虚线框内的原胞结构, 晶格常数为 a , 介质柱的半径 $r = 0.1a$, 到三角形中心的距离为 $h = 0.16a$. 用COMSOL Multiphysics 仿真软件计算此结构的TM (transverse magnetic) 模式能带, 即电场 E_z 沿着介质柱 z 轴方向. 计算的能带图见图2(b), 第一和第二能带在布里渊区(插图中六角形示意图)中 K 和 K' 能谷简并, 简并点归一化频率为 $0.362c/a$ (c 为真空中光速). 由此可见虽然原胞结构变复杂, 但是保持对称性不变光子晶体的能带性质依然不变.

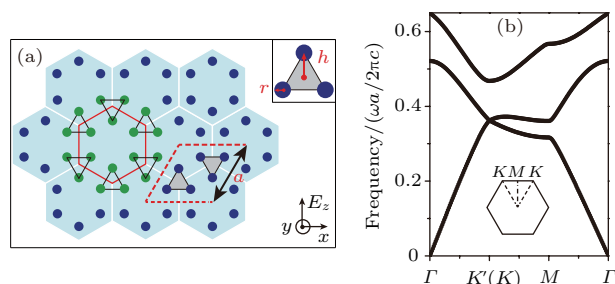


图2 (a) 复杂光子晶体结构示意图; (b) 光子晶体能带结构

Fig. 2. (a) The schematic of the complex lattice PC; (b) PC's band diagram.

3 C_{3v} 对称性光子晶体中的确定性界面态

通过打破光子晶体的 C_{6v} 对称性, 可以很容易破缺 K 和 K' 点的能谷简并从而形成带隙. 以图2原胞中三个介质柱构成的正三角形(灰色区域)中心为基点, 在分别对每个三角形拉伸和压缩柱子之间的距离, 调控后得到结构A, 如图3(a)所示. 光子晶体A原胞中左下角三个介质圆柱拉伸后到中心的距离为 $h_1 = 0.18a$, 而右上角三个柱子压缩后到中心的距离为 $h_2 = 0.12a$. 通过这种方式实现了具有 C_{3v} 对称性的光子晶体. 从图3(b)中可以看到在第一条和第二条能带中间出现完全带隙, 原本在布里渊边界 K 点的简并变成带隙的下限 K_1 和上限 K_2 点. 同时 K_1 和 K_2 点的性质是不同的, 如图3(c)的相位分布. 两者位相分布的手征性是相反的, 前者是沿逆时针方向(紫色箭头所示)相位递减而后者是顺时针方向(绿箭头所示)相位递减, 旋转一周回复初始相位, 对应角动量 $m = 1$ 和 $m = -1$. 而且相位奇点的位置也不同, 分别位于拉伸的柱子中心(K_1)和压缩的柱子中心(K_2). 将拉伸和压缩柱子到中心距离的方式互换, 得到光子晶体结构B, 能带如图4(a), 它的体能带性质与结构A的能带是反转的. 可以从图4(b) K 点的相位手征性上很清晰地看到, $K_1(K_2)$ 点相位以顺(逆)时针方向递减.

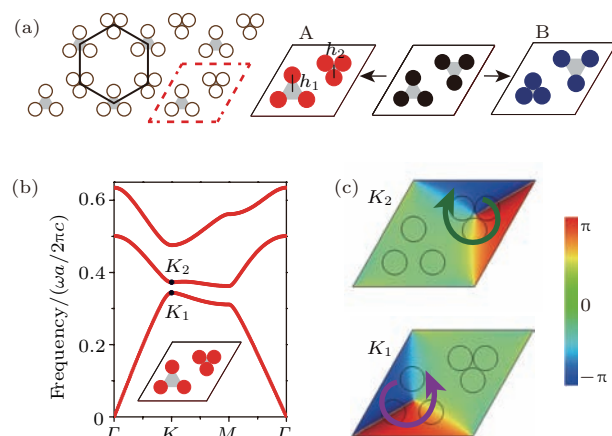


图3 (a) 两个相反结构 C_{3v} 对称的光子晶体结构示意图; (b) 光子晶体结构A全带隙能带; (c) 在 K_1 和 K_2 点相反手征性的相位分布

Fig. 3. (a) The schematic of two inverted PC structures with C_{3v} symmetry; (b) band diagram with complete band gap for photonic crystal structure A; (d), (e) the inverted chirality of phase distributions at K_1 and K_2 points.

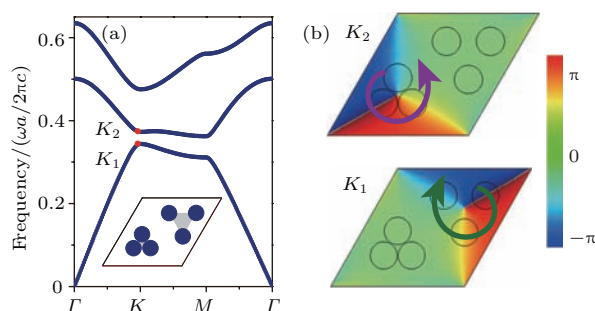


图4 (a) 光子晶体结构B的全带隙能带; (b) 在 K_1 和 K_2 点相反手征性的相位分布

Fig. 4. (a) Band diagram with complete band gap for photonic crystal structure B; (b) the inverted chirality of phase distributions at K_1 and K_2 points.

可以看到光子晶体A和B的体能带性质类似, 在布里渊区边界 K 点附近有完全带隙, 但此带隙的上下带边的能带手性正好反转, 即在此带隙光子晶体A和B的体拓扑性质相反. 可以预期, 如果将光子晶体A和B摆放在一起, 在两者的界面就会有拓扑确定性界面态. 我们用超原胞的方法计算了光子晶体A和B沿着 k_x 方向的投影能带来找寻此拓扑确定性界面态. 计算时在界面两边各用10个光子晶体原胞构成一个超原胞, 周期性边界条件应用于光子晶体 x 和 y 方向. 能带结构如图5(a)所示, 灰色部分是光子晶体的体能带, 绿色和紫色线部分表示界面态的色散关系. 能带一部分是在两个光子晶体共同带隙处而另有一部分延伸到体带里. 从色散曲线的斜率可以看出在界面处存在两个相反方向传输的拓扑态. 而且两个态的自旋极化方向相反, 分别为自旋向上(紫色线)和自旋向下(绿色线). 为了更形象地表现界面态的本征模态, 图5(b)展示了频率为 $0.384c/a$ 同时波矢 $k_x = -0.38(2\pi/a)$ 的 E_z 本征场分布(图5(a)中黑色五角星处). 从图中可以很清楚地看到场局域在两个光子晶体界面处, 而向两边衰减很快.

利用光子晶体拓扑态的传输性质, 可以设计并实现界面态传输波导. 我们用有限元模拟的方法计算光子晶体界面态的 E_z 电场分布, 如图6. 模拟的上下区域分别由光子晶体结构A和B构成, 并包含 24×16 个复合晶胞结构. 区域四周的边界条件用完美匹配层, 这样可以避免来自边界的散射. 需要用具有手征性的光学激发源才能激发单向的界面态. 我们用四个点源阵列(2×2)构建手征性激发源[29]. 其中, 四个点源发射的TM波波函数的初始相位按

照不同旋转方向依次递减. 初始相位按照逆(顺)时针方向递减的激发源和光学涡旋指数即拓扑电荷数 $m = 1$ ($m = -1$)的电场分布一致. 将拓扑电荷数为 $m = 1$ 的手征性源放在光子晶体A和B界面中间, 位置如图6中白色圆所示, 并且光子晶体A置于结构B的下方. 在源发射频率为 $0.384c/a$ 时激发的单向传输界面态场分布如图6所示, 可以观察到激发的拓扑界面态沿着光子晶体结构A和B的界面通道向左(图中白色箭头方向)单向传输. 从图5的投影能带中可以看到, 在频率为 $0.384c/a$ 时, 界面态色散能带的频率和体能带会有部分重叠. 所以在此时, 界面在传播的过程中会激发一些体的电场分布. 但是由于这些体电场分布相较于界面局域场非常弱, 因而并不能对拓扑态的传输与应用造成很大的影响. 如果用拓扑电荷为 $m = -1$ 的源则可以激发向右传播的拓扑态. 在两个光子晶体界面通道传输的界面态是受拓扑保护的. 界面态具有传输单向特性且不受传播路径上可能存在的杂质的影响. 即使光子晶体材料有杂质不纯净或者是加工制备不完美的情况, 拓扑态依然能够很好地在界面传输而不会产生背散射, 因此能够实现拓扑信息输运从而制备光学器件. 这在光学波导方面将具有很大的应用前景.

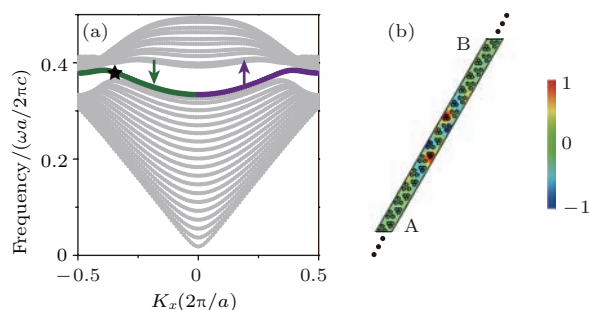


图5 (a) 光子晶体投影能带; (b) 界面态 E_z 本征场分布
Fig. 5. (a) The projected band structure of two PCs; (b) the E_z eigenfield distribution of interface state.

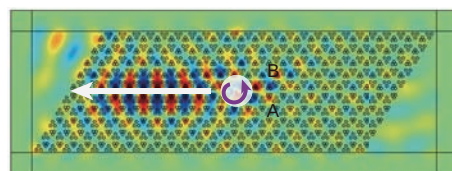


图6 模拟的光子晶体单向传输界面态 E_z 电场分布
Fig. 6. The simulated E_z field distribution of topological interface state with unidirectional propagation for two PCs.

4 C_3 对称性光子晶体中的确定性界面态

在原子尺度上操控石墨烯实现拓扑界面态对技术和条件有一定要求. 而人工介质材料微结构单元构建的光子晶体则更容易操作和可调. 并且光子晶体可调控的参数有更多的自由度, 比如材料的介电常数、晶格常数、占空比等. 通过调控结构还可获得一种 C_3 对称性的光子晶体, 即分别将图 3 中的结构 A 和 B 围绕三角形中心逆时针旋转角度 $\theta = 15^\circ$, 如图 7(a) 所示. 通过这种打破晶

格对称性的方式依然可以破缺能带结构中 K 和 K' 狄拉克点简并. 图 7(b) 和图 7(c) 中两个能带在 K 点其性质反转. 调节的两个结构之间有共同带隙, 经过投影能带的计算 (计算方式同图 5), 在两个光子晶体界面处依然存在确定性界面态, 如图 7(d) 所示. 图 7(e) 中五角星标示的是在归一化频率为 $0.384c/a$ 、波矢 $k_x = -0.4(2\pi/a)$ 时的界面态 E_z 本征场分布. 利用手征性源激发, 基于此结构的界面态色散性质, 依然可以像图 6 一样设计单向拓扑传输波导, 从而实现信息的输运与传播. 但通过调节介质柱簇的旋转角度, 可以调控此拓扑界面态的色散关系.

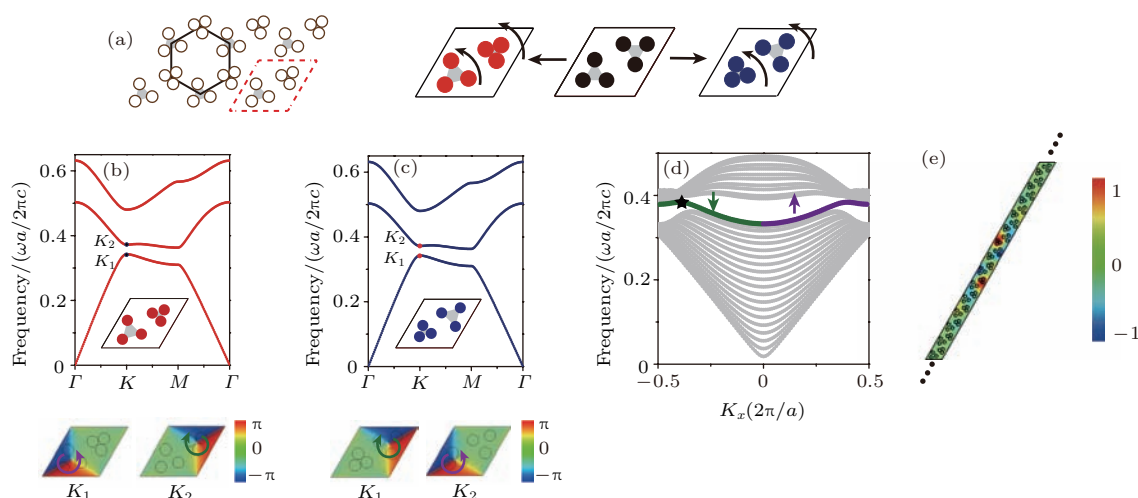


图 7 (a) 具有 C_3 对称的两个光子晶体结构示意图; (b), (c) 光子晶体能带结构; (d) 投影能带; (e) 界面态 E_z 本征场分布
Fig. 7. (a) The schematics of two PCs with C_3 symmetry; (b), (c) band diagrams of PCs; (d) the projected band structure; (e) the E_z eigenfield distribution of interface state.

5 C_{2v} 和 C_2 对称性光子晶体中分别实现确定性界面态

进一步打破光子晶体对称性, 还可以用具有 C_{2v} 对称的光子晶体中实现确定性界面态. 结构如图 8(a) 所示, 光子晶体介质柱半径 $r = 0.1a$, 相对介电常数 $\varepsilon = 7.5$. 将原胞中原本构成正三角形底边处的两个介质圆柱, 沿 y 方向 (箭头所示方向) 增加距离 $d_1 = 0.104a$, 而三角形顶点处圆柱依然保持到中心的距离 $h = 0.16a$ 不变, 三个介质柱重新形成等腰三角形, 从而得到结构 C. 结构 C 的能带结构如图 8(b), 原本 K 点简并的狄拉克点被打破因而出现在完全带隙. 与之相反的调控得到结构 D, 即只沿 y 方向减小底边处的介质柱的距离 $d_2 = 0.08a$,

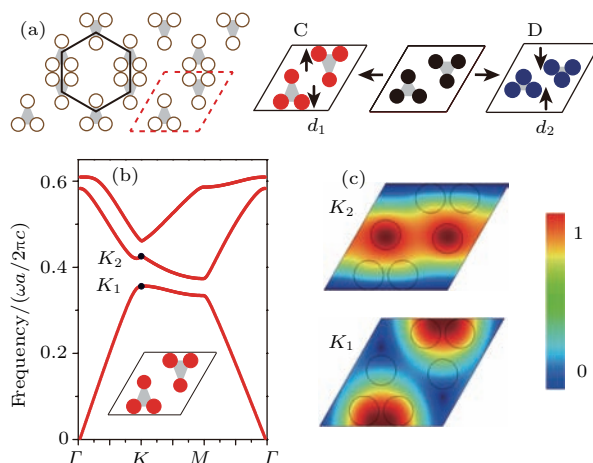


图 8 (a) 具有 C_{2v} 对称性的两个光子晶体 C 和 D 示意图; (b) 光子晶体 C 能带结构; (c) K_1 和 K_2 点本征场分布
Fig. 8. (a) The schematics of two PCs with C_{2v} symmetry; (b) band diagram of PC with structure C; (c) the eigenfield distribution at K_1 and K_2 points.

仍然可以破缺狄拉克点, 如图 9(a) 所示能带结构. 光子晶体 C 和 D 的拓扑性质依然是不同的, 两者能带反转. 从图 8 和图 9(c) 中所示的 K_1 和 K_2 点电场振幅本征场分布可以很清楚地看到, 在这两点处能带性质是反转的. 则两个光子晶体共同带隙处存在确定性界面态, 如图 10(a). 图 10(b) 为波矢 $k_x = 0.15(2\pi/a)$ 、归一化频率为 $0.360c/a$ 的 E_z 本征场分布.

接着将图 8 光子晶体 C 和 D 结构的原胞中构

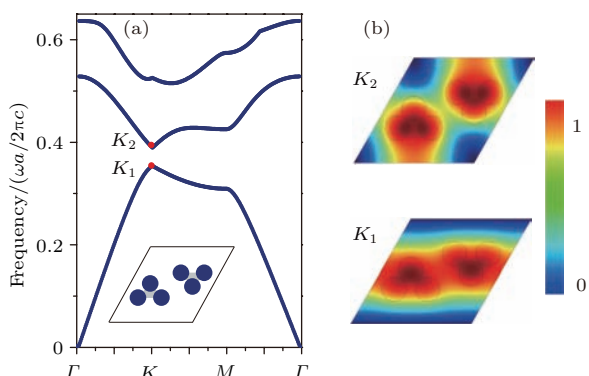


图 9 (a) 光子晶体 D 能带结构; (b) K_1 和 K_2 点本征场分布

Fig. 9. (a) Band diagram of PC with structure D; (b) the eigenfield distribution at K_1 and K_2 points.

成两个等腰三角形的介质柱群以各自三角形中心为原点, 均顺时针旋转角度 $\theta = 15^\circ$, 得到光子晶体 E 和 F, 示意图如图 11(a). 计算的能带结构如图 11(b) 和图 11(c) 所示. 虽然进一步降低了晶格对称性, 但是光子晶体的拓扑性质保持不变, 依然有拓扑态在两个能带反转的光子晶体界面通道处传输, 如图 11(d). 其中五角星标记处的波矢 $k_x = 0.2(2\pi/a)$, 频率为 $0.361c/a$, 此点的本征场分布如图 11(e).

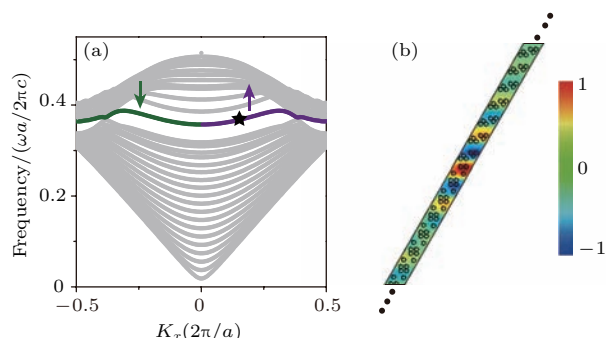


图 10 (a) 光子晶体 C 和 D 的投影能带结构; (b) 界面态本征场分布

Fig. 10. (a) The projected band structure; (b) the E_z eigenfield distribution of interface state.

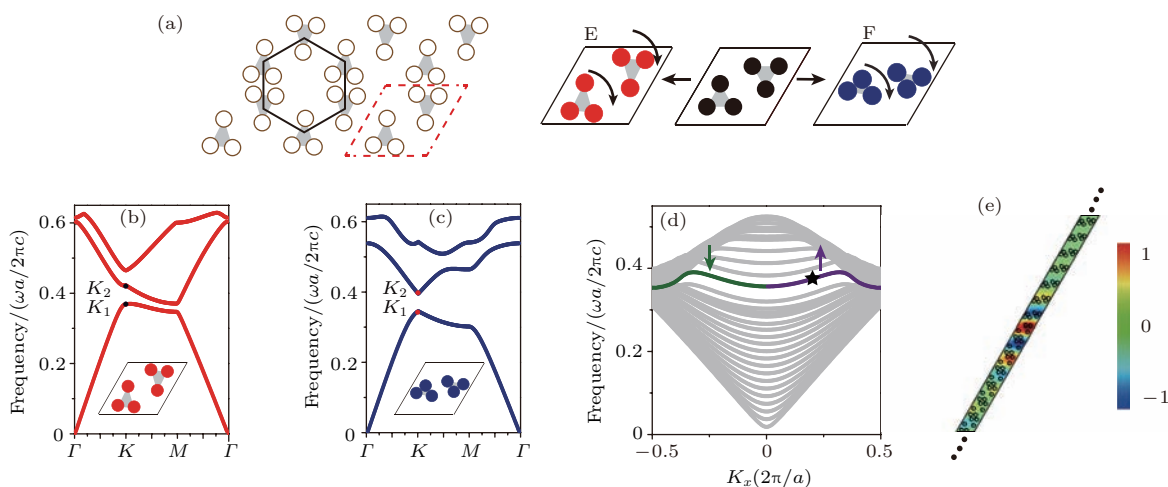


图 11 (a) 具有 C_2 对称性的两个光子晶体示意图; (b), (c) 光子晶体能带结构; (d) 投影能带; (e) 界面态 E_z 本征场分布

Fig. 11. (a) The schematics of two PCs with C_2 symmetry; (b), (c) band diagrams of PCs; (d) the projected band structure; (e) the E_z eigenfield distribution of interface state.

6 C_{3v} 和 C_2 对称性光子晶体存在确定性界面态

值得强调的是, 我们利用复杂晶胞光子晶体产生的拓扑界面态, 不依赖于破缺的对称性方式, 只

要构建两个拓扑性质不同即体能带反转的光子晶体, 那么在界面通道就一定会存在确定性界面态. 在具有 C_{3v} , C_3 , C_{2v} 和 C_2 对称性的这四组光子晶体中, 任意将体能带反转的两个光子晶体组建在一起, 就会有界面态存在. 例如 C_{3v} 对称的光子晶体 A 分别与 C_{2v} 对称的结构 D 以及 C_2 对称的结构

F 摆放在一起, 在共同带隙处都可以实现拓扑界面态. 这里以一组光子晶体为例来证明界面态的存在. 如图 12 所示, 将光子晶体 A 和 F 摆放在一起, 这两者的体能带是反转的, 通过计算得到的投影能带可知存在确定性界面态. 这表明光子晶体界面态不依靠具体结构而取决于体能带的性质, 这在信息输运方面具有重要的研究意义和价值, 因而具有更加广阔的应用空间.

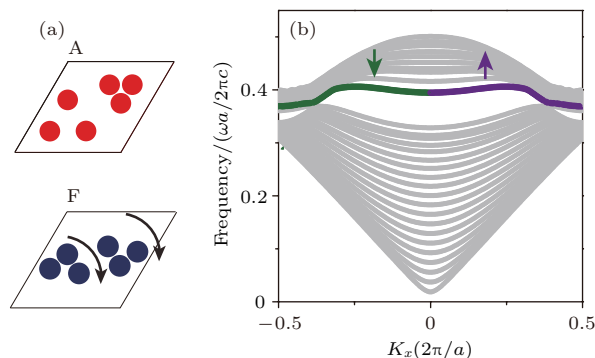


图 12 (a) 光子晶体 A 和 F 的原胞结构示意图; (b) 投影能带

Fig. 12. (a) The schematics of unit cell for PC A and F; (b) the projected band structure.

7 讨 论

用光子晶体构建了类石墨烯复杂晶胞结构. 通过多种方式打破蜂窝状晶格光子晶体的 C_{6v} 对称性, 获得了 C_{3v} , C_3 , C_{2v} 和 C_2 对称性的光子晶体, 从而可以破缺原本简并的狄拉克点得到全带隙的能谷. 基于存在确定性界面态的物理机理, 就是不依赖于破缺光子晶体对称性的方式, 只取决于界面两边两个光子晶体拓扑性质不同即体能带性质反转. 我们用两个复杂晶胞光子晶体构建界面通道并实现了拓扑界面态. 利用拓扑态的缺陷免疫和单向性质可以灵活调控光在晶体内部和界面的传播. 相较于石墨烯实现拓扑绝缘体, 利用光子晶体的宏观特性可以更加直接地在实验中激发、探测光拓扑态, 从而提供崭新的光调控方式. 基于界面态在界面的拓扑输运, 还可以为设计新型信息传播器件提供良好的平台. 另外, 光子晶体能谷还有更多可调控的自由度需要去研究与探讨. 若能够直接而有效地选择性激发不等价的光子能谷, 进而方便地探测和观察到能谷偏振现象, 这将对拓扑输运信息具有重大的意义.

感谢苏州大学物理与光电·能源学部蒋建华教授及武汉大学物理学院邱春印教授对本文的有益讨论.

参考文献

- [1] Klitzing K V, Dorda G, Pepper M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 494
- [2] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [3] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [4] Novoselov K S, Geim A K, Morozov S V, Jiang D, Zhang Y, Dubonos S V, Grigorieva I V, Firsov A A 2004 *Science* **306** 666
- [5] Yablonovitch E 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059
- [6] John S 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2486
- [7] Sakoda K 2004 *Optical Properties of Photonic Crystals* (2nd Ed.) (Berlin: Springer)
- [8] Joannopoulos J D, Johnson S G, Winn J N, Meade R D 2008 *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light* (2nd Ed.) (New Jersey: Princeton University Press)
- [9] Mekis A, Chen J C, Kurland I, Fan S, Villeneuve P R, Joannopoulos J D 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3787
- [10] Lin S Y, Chow E, Hietala V, Villeneuve P R, Joannopoulos J D 1998 *Science* **282** 274
- [11] Robertson W M, Arjavalingam G, Meade R D, Brommer K D, Rappe A M, Joannopoulos J D 1993 *Opt. Lett.* **18** 528
- [12] Istrate E, Sargent E H 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 455
- [13] Guo J, Sun Y, Zhang Y, Li H, Jiang H, Chen H 2008 *Phys. Rev. E* **78** 026607
- [14] Meade R D, Brommer K D, Rappe A M, Joannopoulos J D 1991 *Phys. Rev. B* **44** 10961
- [15] Ramos-Mendieta F, Halevi P 1999 *Phys. Rev. B* **59** 15112
- [16] Choi H G, Oh S S, Lee S G, Kim M W, Kim J E, Park H Y, Kee C S 2006 *J. Appl. Phys.* **100** 123105
- [17] Xiao M, Zhang Z Q, Chan C T 2014 *Phys. Rev. X* **4** 021017
- [18] Huang X Q, Xiao M, Zhang Z Q, Chan C T 2014 *Phys. Rev. B* **90** 075423
- [19] Yang Y T, Huang X Q, Hang Z H 2016 *Phys. Rev. Appl.* **5** 034009
- [20] Huang X Q, Yang Y T, Hang Z H, Zhang Z Q, Chan C T 2016 *Phys. Rev. B* **93** 085415
- [21] Yang Y T, Xu T, Xu X F, Hang Z H 2017 *Opt. Lett.* **42** 3085
- [22] Rycerz A, Jakub T J, Beenakker C W J 2007 *Nature Phys.* **3** 172
- [23] Xu X D, Yao W, Xiao D, Heinz T F 2014 *Nature Phys.* **10** 343
- [24] Garcia-Pomar J L, Cortijo A, Nieto-Vesperinas M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 236801
- [25] Xiao D, Yao W, Niu Q 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 236809
- [26] Mak K F, McGill K L, Park J, McEuen P L 2014 *Science* **344** 1489
- [27] Enyashin A N, Ivanovskii A L 2011 *Phys. Status Solidi* **248** 1879
- [28] Huang X Q, Lai Y, Hang Z H, Zheng H H, Chan C T 2011 *Nature Mater.* **10** 582
- [29] Yang Y T, Xu Y F, Xu T, Wang H X, Jiang J H, Hu X, Hang Z H 2016 arXiv:1610.07780v1

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Deterministic interface states in photonic crystal with graphene-allotrope-like complex unit cells*

Jia Zi-Yuan Yang Yu-Ting Ji Li-Yu Hang Zhi-Hong[†]

(College of Physics, Optoelectronics and Energy and Collaborative Innovation Center of Suzhou Nano Science and Technology,
Soochow University, Suzhou 215006, China)

(Received 24 July 2017; revised manuscript received 13 August 2017)

Abstract

Topological insulators have aroused much research interest in condensed matter physics in recent years. Topological protected edge states can propagate unidirectionally and backscattering free along the boundaries of the topological insulators' which will be important for future electronic devices for its immunity to defects. Topology is dependent only on the symmetry of lattice of the system rather than its specific wave form. Thus, based on the analogy between electronics and photons, photonic topological insulator has also been demonstrated both theoretically and experimentally. Graphene, composed of a monolayer of carbon atoms in honeycomb lattice, exhibits unusual properties due to its intriguing band diagram. Many types of graphene allotropes have been proposed theoretically. However, due to fabrication difficulties, most of graphene allotropes are unavailable. Here, we propose to study two dimensional (2D) photonic crystal (PC) with complex lattices, similar to that of graphene allotrope. The complex PC structure provides more degrees of freedom in manipulating its symmetry.

Interface states can also exist in the interface region between two PCs, if they have different topological properties. Without any surface decoration, deterministic interface states can be created when bulk photonic band inversion can be induced and are demonstrated theoretically and experimentally in 2D PCs with square lattice. By controlling the parameters of PCs, their bulk photonic band properties are engineered and topological phase transition occurs. By inverting the bulk photonic band properties, interface states exist in the common band gaps for two PC systems in the gapped region. Similarly, we proceed to complex honeycomb lattice of PCs. By lowering its original C_{6v} symmetry to C_{3v} , C_3 , C_{2v} and even C_2 symmetry, the degeneracies of valley Dirac dispersion at the corners of Brillouin zone are lifted. Photonic band inversion occurs in all four symmetries and the deterministic interface states are numerically realized in the interface region between two PCs. Unidirectional propagation of interface state immune to backscattering along the interface channels is demonstrated if a source with proper optical vortex index is utilized. Due to its easy fabrication, PC is a perfect platform to explore the topological properties of complex lattice and these acquired topological optical states can be of benefit to the control the propagation of light in the photonic waveguide.

Keywords: photonic crystal, topology, valley, interface state

PACS: 78.67.Pt, 73.20.At, 42.70.Qs, 61.48.Gh

DOI: 10.7498/aps.66.227802

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11574226), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20170058), and the Priority Academic Program Development (PAPD) of Jiangsu Higher Education Institutions, China.

[†] Corresponding author. E-mail: zhhang@suda.edu.cn

超构材料中的光学量子自旋霍尔效应

龙洋 任捷 江海涛 孙勇 陈鸿

Quantum spin Hall effect in metamaterials

Long Yang Ren Jie Jiang Hai-Tao Sun Yong Chen Hong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 227803 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.227803

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.227803>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非对称光束干涉制备二维微纳光子结构研究

Fabrication of two-dimensional micro-nano photonic structures by symmetry-lost beams interference

物理学报.2017, 66(21): 217801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.217801>

非线性光学超构表面

Nonlinear photonic metasurfaces

物理学报.2017, 66(14): 147803 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.147803>

利用波矢滤波超表面实现超衍射成像

Super diffraction imaging with wave vector selective metasurface

物理学报.2017, 66(14): 147804 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.147804>

复合结构螺旋超材料对光波前的高效调控

High-efficiency wavefront control with based on helical metamaterials

物理学报.2016, 65(21): 217802 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.217802>

宽入射角度偏振不敏感高效异常反射梯度超表面

Polarization-insensitive and broad-angle gradient metasurface with high-efficiency anomalous reflection

物理学报.2015, 64(23): 237802 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.237802>

专题: 拓扑经典波动

超构材料中的光学量子自旋霍尔效应*

龙洋 任捷[†] 江海涛 孙勇 陈鸿

(同济大学物理科学与工程学院, 声子学与热能科学中心, 先进微结构材料教育部重点实验室, 上海 200092)

(2017年9月20日收到; 2017年10月27日收到修改稿)

电子的量子自旋霍尔效应的发现推进了当今凝聚态物理学的发展, 它是一种电子自旋依赖的具有量子行为的输运效应. 近年来, 大量的理论和实验研究表明, 描述电磁波运动规律的麦克斯韦方程组内禀了光的量子自旋霍尔效应, 存在于界面的倏逝波表现出强烈的自旋与动量关联性. 得益于新兴的光学材料: 超构材料 (metamaterials) 的发展, 不仅能够任意设定光学参数, 同时也能引入很多复杂的自旋-轨道耦合机理, 让我们能够更加清晰地了解和验证其中的物理机理. 本文对超构材料中量子自旋霍尔效应做了简要的介绍, 内容主要包括真空中光的量子自旋霍尔效应的物理本质、电单负和磁单负超构材料能带反转导致的不同拓扑相的界面态、拓扑电路系统中光量子自旋霍尔效应等.

关键词: 量子自旋霍尔效应, 超构材料, 拓扑相变**PACS:** 78.67.Pt, 03.50.De, 05.30.Rt**DOI:** 10.7498/aps.66.227803

1 引言

凝聚态物理发展至今, 已经发现并解释了很多有关电子输运行为的新奇现象. 霍尔效应的发现最早始于在外加磁场的作用下导体中的电子输运行为依赖于外加磁场方向, 随后量子力学的发展, 抛弃了原本的经典理论, 转而在自由电子气的基础上对电子在外磁场中的输运进行量子化描述, 提出了朗道能级和量子霍尔效应的概念^[1]. 由于磁场的出现, 打破了原本的电子输运的时间反演对称性, 在量子霍尔效应中导致了电荷正负性依赖的单向边缘态, 这种单向边缘态的出现可以通过电子气能带的拓扑性来解释. 自旋霍尔效应则是在电子自旋与轨道耦合的系统中出现的电子输运现象^[2,3], 即原本电子输运行为会受到电子本身自旋的影响, 出现电子自旋依赖的输运行为. 这种霍尔效应并不需要外加磁场, 即不违背时间反演对称性, 当量子效应明显时, 便会出现具有量子效应的量子自旋霍尔效应^[4,5]. 量子自旋霍尔效应与量子霍尔效应类似,

在固体表面会出现单向传播的边缘态, 但量子自旋霍尔效应中的单向边缘态则是自旋依赖的. 同样地, 这种自旋依赖的边缘态可以利用电子态的拓扑性质进行表征. 在最近几年, 相继在实验中观察到了量子自旋霍尔效应. 在寻找具有这种量子自旋霍尔效应的材料的过程中, 导致了一类新型材料的出现: 拓扑绝缘体^[6,7]. 拓扑绝缘体虽然在体能带中表现为绝缘体, 但在边界上却表现出如金属般无能隙的性质. 这些存在于边缘上的自旋依赖的单向传播态可以通过量子自旋霍尔效应的物理进行解释, 并可以通过其体能带的拓扑性质进行表征.

通过大量的凝聚态物理研究发现, 量子自旋霍尔效应这种奇特的电子输运行为可以通过单电子在晶格体系中的行为进行描述^[8], 这一理论上的突破表明可以在其他具有波动性质的系统中重现电子的这种行为. 近几年来, 在光子体系中率先出现了类比电子霍尔效应的成功案例, 如利用磁光介质或动态调控导致的时间反演破缺在光子体系中实现了光子的霍尔效应和光子的量子霍尔效应^[9,10].

* 国家自然科学基金 (批准号: 11775159) 和上海市自然科学基金 (批准号: 17ZR1443800) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: xonics@tongji.edu.cn

要实现光子的量子自旋霍尔效应不需要引入系统的时间反演破缺机理,但是要在材料中实现复杂的自旋与轨道耦合机理. 常规的光学材料往往不具备这种性质,但随着光子超构材料 (metamaterials) 的提出与发展,这一问题得以突破: 利用复杂的人工微结构单元引入光与物质的强烈相互作用^[11,12],从而实现了电子的量子自旋霍尔效应在光子体系中的类比. 不过最近的研究表明,光的量子自旋霍尔效应并不需要复杂的晶格作用机理,即使在真空中传播的光也具备内禀的量子自旋霍尔效应^[13].

2 自由空间中光子的拓扑性质

众所周知,光子的传播行为主要由麦克斯韦方程组进行描述. 麦克斯韦方程组基本描述了光从经典电磁波到量子体系相对论范畴内的所有性质. 光子本身是自旋为1的粒子,本身的传播行为便具有内禀的自旋-轨道耦合效应,具有一系列的量子行为,如Berry相位,这些量子行为是光具有量子自旋霍尔效应的基石^[14]. 对于描述单色电磁波的麦克斯韦方程组:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ -i\frac{\omega}{c}\epsilon\mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{H}, \\ i\frac{\omega}{c}\mu\mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1)$$

其对应的时间平均能量密度 w 和坡印廷矢量 $\mathbf{p}$ 分别为:

$$\begin{aligned} w &= \frac{g}{4}(\epsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{H}|^2), \\ \mathbf{p} &= \frac{g}{2c}\text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (2)$$

虽然坡印廷矢量 $\mathbf{p}$ 代表了电磁场的动量密度,但其实它却是由一系列不同物理含义的成分组合而成的^[15-18]. 根据麦克斯韦方程组,可以将坡印廷矢量分解为两个部分:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}^o + \mathbf{p}^s, \quad (3) \\ \mathbf{p}^o &= \frac{g}{4\omega}\text{Im}[\mu^{-1}\mathbf{E}^* \cdot (\nabla)\mathbf{E} + \epsilon^{-1}\mathbf{H}^* \cdot (\nabla)\mathbf{H}], \quad (4) \\ \mathbf{p}^s &= \frac{g}{8\omega}\nabla \times \text{Im}[\mu^{-1}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}) + \epsilon^{-1}(\mathbf{H}^* \times \mathbf{H})], \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{p}^o$ 代表轨道动量密度,其负责能量传输;而 $\mathbf{p}^s$ 是自旋动量密度,它不负责能量传输但能产生光的轨道角动量^[18]. 从(4)式可以看出, $\mathbf{p}^o$ 代表光的

动量密度可观测的部分,这部分由电磁场的局域波矢表述,体现能量在空间中分布的输运变化程度,但 $\mathbf{p}^o$ 与电磁场的极化无关. 自旋动量 $\mathbf{p}^s$ 表征了螺旋型的自旋流,其可以表征为自旋角动量密度的旋度,即 $\mathbf{p}^s = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} = \frac{g}{4\omega}\text{Im}[\mu^{-1}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}) + \epsilon^{-1}(\mathbf{H}^* \times \mathbf{H})]. \quad (6)$$

在傍轴光学的研究中可以很清楚地看出两个量对应的物理含义, $\mathbf{p}^o$ 和 $\mathbf{p}^s$ 分别负责描述光的轨道和自旋动量^[19].

在自由空间中, $\epsilon = \mu = 1$. 如果将电磁波的能量、动量和自旋计算表达为量子力学中的力学算符形式,则需要先定义电磁波的波函数,这里引入电磁波的局域态波函数^[18]:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{g}{4\omega}} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

根据这个局域态定义,可以得到电磁波的能量密度、轨道角动量、自旋角动量的“局域平局值”为:

$$w = \psi^\dagger \cdot (\omega)\psi, \quad (8)$$

$$\mathbf{p}^o = \text{Re}[\psi^\dagger \cdot (\hat{\mathbf{p}})\psi], \quad (9)$$

$$\mathbf{s} = \psi^\dagger \cdot (\hat{\mathbf{S}})\psi, \quad (10)$$

其中, ω 为能量密度算符,即电磁波频率; $\hat{\mathbf{p}}$ 为电磁波动量算符, $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$; $\hat{\mathbf{S}}$ 为电磁波自旋算符. 根据自旋角动量密度 $\mathbf{s}$ 的定义(6)式,可以求得自旋算符为^[13,18,19]:

$$\begin{aligned} \hat{S}_x &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_y &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_z &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

现在来考虑自由空间中传播波的自旋和相应的拓扑性质. 对于在自由空间中传播的极化平面波 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, 其具有如下形式:

$$\mathbf{E} \propto \mathbf{e} \exp(ikz), \quad \mathbf{e} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \quad (12)$$

其中波矢量为 $\mathbf{k} = \omega/c$. 对于圆极化的电磁波而言, 其具有旋性, 即 $\mathbf{e} = (\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \sigma i)$, $\sigma = \pm 1$, 可以用自旋态来表征光的自旋极化, 根据上文提到的自旋角动量公式, 可以推出圆极化光的自旋角动量为^[13] $\mathbf{s} = \sigma \mathbf{k}/k$.

对于任意方向传播的电磁波, 因为电磁波是横波, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 其极化状态与波矢相互锁定, 波矢空间中电磁波极化状态分布 $\mathbf{e}(\mathbf{k})$ 反映了光内禀的自旋与轨道耦合关系. 考虑自旋角动量非零 $\mathbf{s} \neq 0$ 的圆极化光传播, 其本征矢量可以表示为: $\mathbf{e}^\sigma(\mathbf{k})$, 对应的 Berry 连接 $\mathcal{A}$ 和 Berry 曲率 $\mathcal{F}$ 分别为:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\sigma\sigma'} &= -i\mathbf{e}^\sigma \cdot (\nabla_{\mathbf{k}})\mathbf{e}^{\sigma'}, \\ \mathcal{F}^{\sigma\sigma'} &= \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathcal{A}^{\sigma\sigma'}.\end{aligned}\quad (13)$$

因为对于真空中的光而言, 光锥上的本征态正交且左右旋简并, 因此 Berry 曲率 $\mathcal{F}$ 仅含有对角项, $\mathcal{F}^{\sigma\sigma'} = \delta^{\sigma\sigma'} \mathcal{F}^\sigma$, 在动量空间的中心包含了两个拓扑单极子^[13,14,20-22]:

$$\mathcal{F}^\sigma = \sigma \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad \sigma = \pm 1. \quad (14)$$

根据 Berry 曲率, 便可以通过在动量空间中进行全积分求出两个不同自旋态的 Chern 数,

$$C^\sigma = \frac{1}{2\pi} \oint \mathcal{F}^\sigma d^2\mathbf{k}.$$

对于单个拓扑单极子而言, 其 Chern 数为 $C^\sigma = 2\sigma$, 则系统总 Chern 数为

$$C = \sum_{\sigma=\pm 1} C^\sigma = 0. \quad (15)$$

系统的自旋 Chern 数为

$$C_{\text{spin}} = \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma C^\sigma = 4. \quad (16)$$

总 Chern 数和自旋 Chern 数分别用来表征光的量子霍尔效应和量子自旋霍尔效应^[6,7]. 在电子的量子自旋霍尔效应中, Chern 数不仅表征体能带本征态在动量空间演化的性质, 也联系了系统在边缘处支持的边缘态拓扑相变性质, Chern 数大小正好等于单向传播的边缘态个数^[6,7]. 因为自由空间中的光传播并不违背时间反演对称, 麦克斯韦方程组中并不体现光具有量子霍尔效应, 于是总 Chern 数 C 为零. 但自旋 Chern 数 C_{spin} 不为零, 这表示真空中的光能够支持量子自旋霍尔效应, 在系统边缘处能够支持自旋依赖的传播模式.

最为人们所熟知的界面传播模式便是表面等离子体激元 (surface plasmon polaritons, SPP). 相比于真空中传播的光, SPP 的传播模式是横截面处为倏逝场的表面模, 大量研究发现横向倏逝波这种传播模式具有额外的自旋动量^[18,23-25], 而且该动量正交于其传播波矢, 这个额外的自旋动量来源于不同自旋拓扑介质在界面处的拓扑相变, 这个拓扑相变引起可观察的非平凡的光量子自旋霍尔效应^[18,24]. 利用自旋算符 $\hat{\mathbf{S}}$ 和电磁波的波函数 ψ 定义, 可以求出 SPP 的垂直于传播方向的自旋密度大小 $\mathbf{s}_\perp$:

$$\mathbf{s}_\perp = \frac{\text{Re}(\mathbf{k}) \times \text{Im}(\mathbf{k})}{(\text{Re}(\mathbf{k}))^2}. \quad (17)$$

该自旋动量 $\mathbf{s}_\perp$ 并不依赖于极化方向 $\mathbf{e}(\mathbf{k})$, 且该自旋与动量的锁定关系类似于电子系统中的量子自旋霍尔效应^[13,18], 如图 1 所示. 真空中 $C_{\text{spin}} = 4$ 表示存在两对量子自旋霍尔效应模式, 对应于界面的倏逝波, 则表示每个倏逝波模式对于两个光自旋态而言都是双重简并的. 然而由于麦克斯韦方程组决定每个界面模式的存在需要两个不同介质满足一定的条件关系, 这个限制破坏了原本应有的电磁波极化简并^[17,26]. 对于真空与金属 ($\epsilon < -1$) 的界面产生的 SPP 而言, 仅存在横磁场这一个极化模式, 当仅激励单个自旋模式时, 由于自旋与动量的锁定, 只会激励出单个方向的 SPP 表面波.

除了在介质界面处能够观察到光的量子自旋霍尔效应, 也可以通过引入强烈的光与物质相互作用来实现光的自旋态之间在材料中的相互耦合^[21,22]. 在传统的光学材料中, 光的自旋与轨道耦合的作用非常微弱, 难以观察测量. 如何加强光与物质之间的相互作用一直是一个至关重要的课题, 但随着超构材料的发展, 这些问题逐渐得到有效解决. 超构材料本身由深亚波长尺度的人工微结构单元组成, 这些组成单元对于电磁波有着极强的局域响应, 能够极大地增强光与物质之间的相互作用. 利用这些常规自然材料所不具备的光学性能可实现各种具有奇异性性能的光学器件, 诸如负折射、超棱镜以及光学隐身等. 事实上, 利用超构材料这一很好的光学平台可从实验上直接观察光的量子自旋霍尔效应^[27-31], 如图 2 所示. 张翔教授课题组利用相位剧烈变化的超表面打破系统的轴向对称性, 实现了极化光的大尺度劈裂, 验证了光的自旋霍尔效应^[29]; Shitrit 等^[30] 利用超表面实现的光与

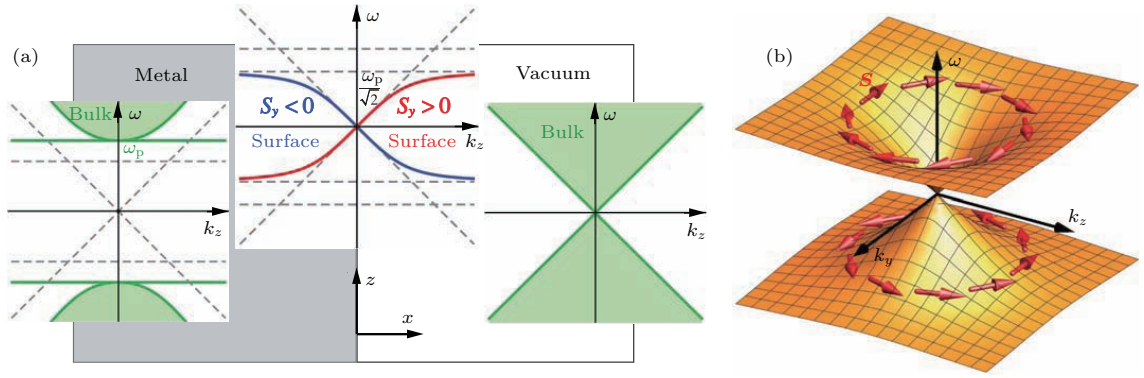


图1 (a) SPP 存在于金属体能带的禁带中, 而且具有极强自旋与动量锁定关系; (b) SPP 在二维空间的中色散关系表现出类似于 3 维拓扑绝缘体表面态的自旋涡流^[13]

Fig. 1. (a) Surface plasmon polaritons (SPP) exist inside the gap of the metal bulk spectrum and have spin momentum locking relationship; (b) the two-dimensional dispersion of SPP mode exhibits a vortex spin texture similar with the edge states of 3D topological insulators.

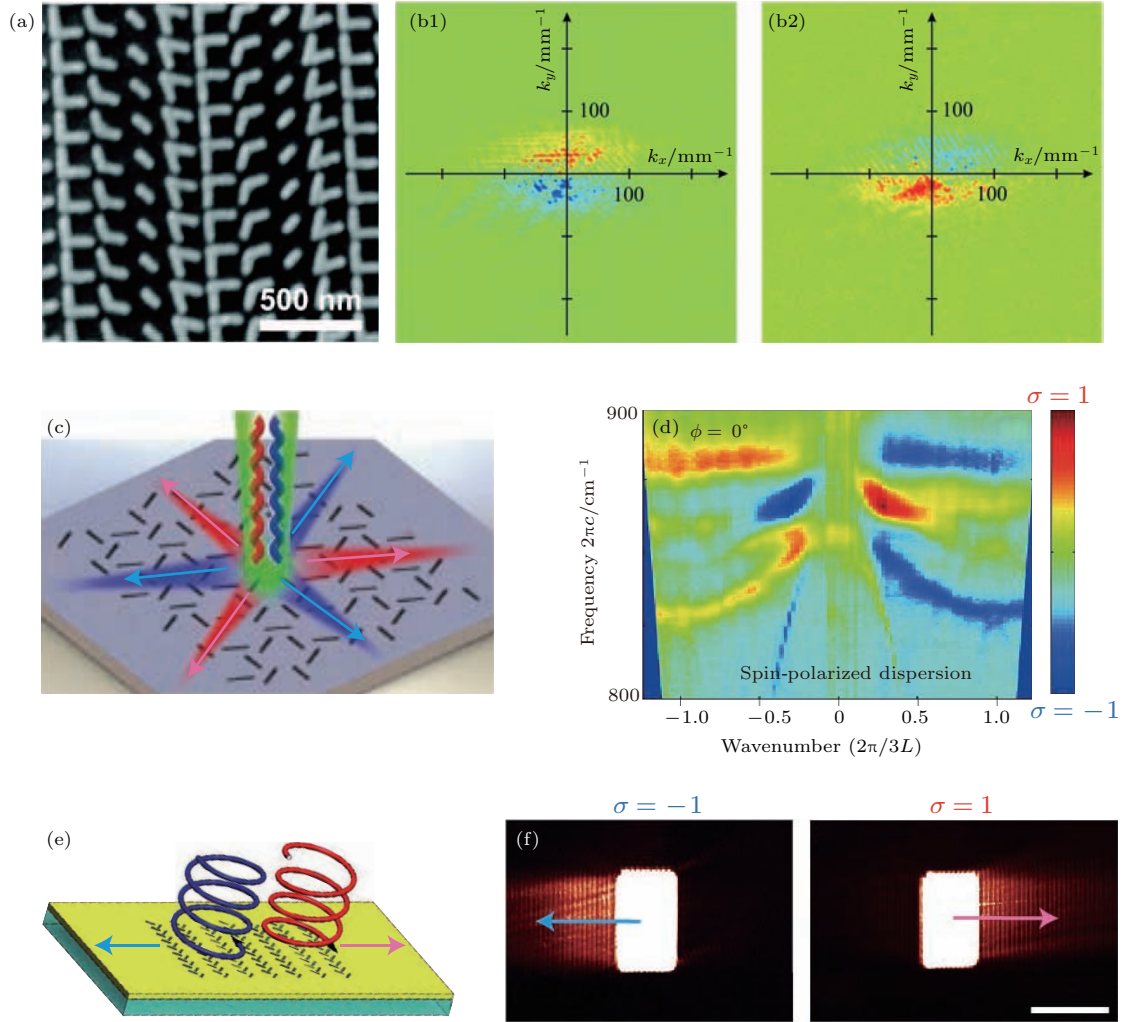


图2 (a) 具有空间相位梯度的光学超表面; (b) 直接观察光的自旋霍尔效应, 红色和蓝色分别表示右旋圆极化和左旋圆极化^[29]; (c) 具有反演对称性破缺的周期性人工微结构^[30], 该结构能够产生具有自旋依赖的能带关系 (d); (e) 反演对称破缺的超表面结构激励出自旋依赖的表面波^[31], 不用自旋态对应于不同的传播方向 (f)

Fig. 2. (a) The metasurface with spatially gradient phases; (b) the direct observations of optical spin Hall effect, red (blue) means right(left) circular-polarizations^[29]; (c) the periodic artificial microstructure^[30] with broken inversion symmetry can induce spin - dependent band structure (d); (e) the metasurface with broken inversion symmetry can hold spin-dependent surface waves^[31], which have strong lockings with momentum directions.

物质之间的强烈自旋与轨道相互耦合实现了自旋可控的光路由; Lin 等^[31]利用极化光与超表面之间对于自旋依赖的耦合实现了可控的表面等离子体共振基元的选择性激励; Kapitanova 等^[32]成功地在双曲超构材料中观测并实验测量了光的自旋霍尔效应, 实现了光路由功能.

3 电单负与磁单负材料的边缘态

对于电磁波而言, 介电常数单负(ENG)和磁导率单负(MNG)是描述一个均匀光学材料属于光绝缘体的两个宏观电磁参量. 对于超构材料而言, 因为其结构单元尺度远远小于工作波长, 故其光学响应可以看作平均场作用的结果, ENG和MNG超构材料提供了研究光绝缘体的光学拓朴性质的理想平台. 根据麦克斯韦方程组, ENG和MNG材料的表面存在一种特殊的界面态^[33], 不同于SPP, ENG与MNG材料均为光绝缘体, 体内均不存在能在内部自由传播的体波, 却能在界面处营造出类似光导体的表面色散关系. 这一点类似于电子的拓朴绝缘体, 电子的拓朴绝缘体内部表现为绝缘体, 有比较宽的电子能隙, 当且仅当两个具有不同拓朴性质的电子拓朴绝缘体接触时, 在表面发生拓朴转变, 产生受拓朴保护的单向边界态. 但与电子的拓朴绝缘体情况不同的是, ENG和MNG均不是光的拓朴绝缘体, 其不存在体能带, 同时, ENG和MNG表面所支持的边界态并不被与电子拓朴绝缘体相同的拓朴机理保护, 不能抑制背散射, 不能免疫于表面的杂质或无序, ENG和MNG材料的表面态并不违背麦克斯韦方程的时间反演对称性^[13].

根据上文中对于真空中光的拓朴性质讨论, ENG/MNG界面处出现的特殊界面态其实是由于光的量子自旋霍尔效应造成的. 虽然真空中的光总Chern数不为零, 但自旋Chern数不为零, 真空与ENG构成界面时发生自旋的拓朴相变^[13,18], 在边界处出现了我们所熟知的SPP. 类似地, 真空与MNG构成界面也会发生自旋的拓朴相变, 在边界处出现了磁SPP的极化边界态, 这两个不同边界态的出现说明ENG和MNG分别具有两种不同的自旋拓朴性质^[13,33-37], 当ENG和MNG这两种具有不同自旋拓朴性质的材料接触产生边界时, 边界处自然会发生自旋的拓朴相变^[35,36], 并产生自旋依赖的单向传播态. 以横磁极化的电磁波为例, ENG

和MNG超构材料中的界面态的解为^[33]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{MNG}} &= \begin{pmatrix} i \frac{k_{1y}}{\varepsilon_1 \omega} \\ \frac{k_x}{\varepsilon_1 \omega} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_x x - k_{1y} y}, \\ \mathbf{E}_{\text{ENG}} &= \begin{pmatrix} i \frac{k_{2y}}{\varepsilon_2 \omega} \\ \frac{k_x}{\varepsilon_2 \omega} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_x x + k_{2y} y}, \end{aligned} \quad (18)$$

对应的电磁波波函数可以表示为:

$$\psi_{\text{surf}}(\text{MNG}) = \begin{pmatrix} -i \frac{k_{1y}}{\varepsilon_1 \omega} \\ \frac{k_x}{\varepsilon_1 \omega} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

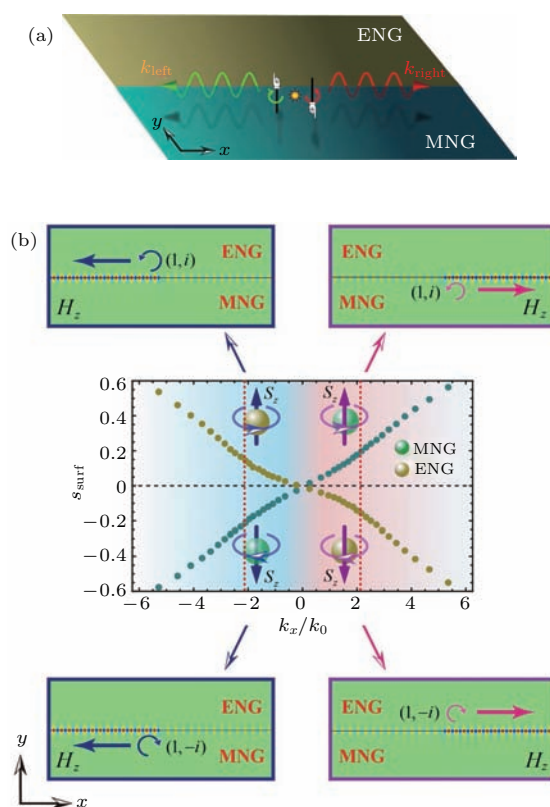


图3 (a) ENG与MNG界面处支持光的量子霍尔效应; (b) 表面波的自旋 s_{surf} 表现出强烈的自旋与动量锁定^[33]
Fig. 3. (a) The optical quantum spin Hall effect on the interface between ENG and MNG; (b) the spin density s_{surf} of surface mode can exhibit strong spin-momentum locking^[33].

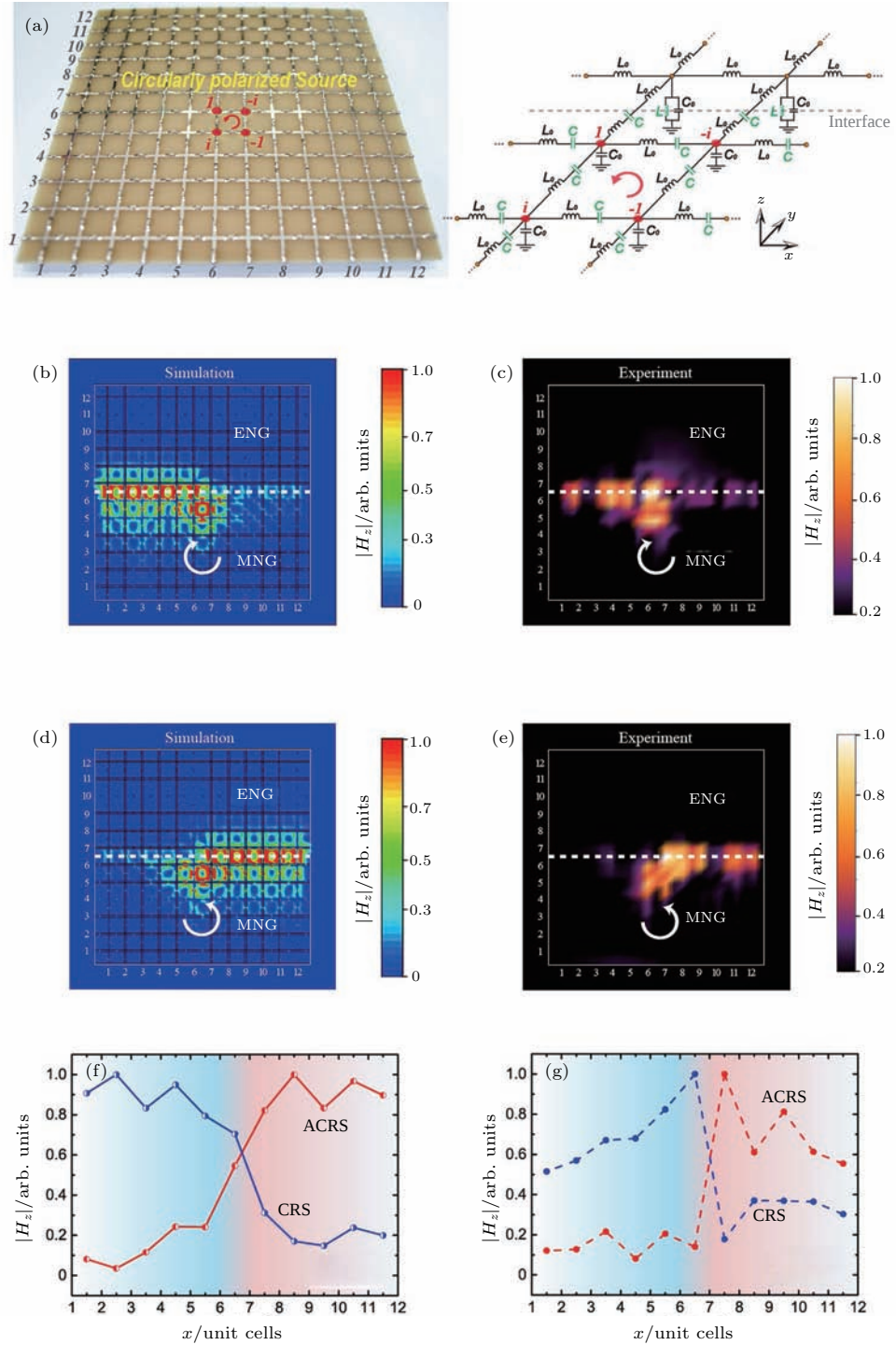


图4 (a) 利用具有微结构单元的微带线系统实现光学的 ENG 和 MNG 界面, 在 MNG 内部利用具有自旋选择性激励的点源激励表面波; (b), (c) 以左旋激励出向左传播的表面波; (d), (e) 以右旋激励出向右传播的表面波; (f), (g) 从 $|H_z|$ 的场分布中可以看出不同自旋对对应场分布的选择性激发, CRS (clockwise - rotating source) 表示顺时针激励的源, ACRS (anticlockwise-rotating source) 表示逆时针激励的源 [33]

Fig. 4. (a) The interface profiles between ENG and MNG can be realized by the microwave transmission line system with artificial microstructures, a circularly polarized source in MNG can excite one guided mode with a specific propagating direction; (b), (c) the surface waves excited by clockwise-rotating source; (d), (e) the surface waves excited by anticlockwise-rotating source; (f), (g) the normalized stimulated values of $|H_z|$ can reflect the selected excitation of corresponding surface mode profile, In figure, CRS means clockwise-rotating source and ACRS means anticlockwise-rotating source [33].

$$\psi_{\text{surf}}(\text{ENG}) = \begin{pmatrix} i \frac{k_{2y}}{\varepsilon_2 \omega} \\ \frac{k_x}{\varepsilon_2 \omega} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

其中, $k_{iy} = \sqrt{k_x^2 - \varepsilon_i \mu_i \frac{\omega^2}{c^2}}$, $i = 1, 2$ 分别表示 ENG 和 MNG 材料, 对于横磁极化的电磁波, 其表面态色散关系为:

$$k_x = \pm \frac{\omega}{c} \left| \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2} (\mu_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \mu_2) \right|^2.$$

利用算符 $\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix}$ 可以算出 ENG 和 MNG 的表面态自旋角动量密度 $\mathbf{s}_{\text{surf}} = \psi_{\text{surf}}^\dagger \hat{\mathbf{S}} \psi_{\text{surf}}$, 计算结果如图 3 所示. 从结果可知, 当自旋朝上时, 即 $\mathbf{s}_{\text{surf}} > 0$, MNG(ENG) 中的波矢方向朝 x 正方向 (x 负方向), 而当自旋朝下时, 即 $\mathbf{s}_{\text{surf}} < 0$, MNG(ENG) 的波矢方向朝 x 负方向 (x 正方向), 表面态的动量方向表现出强烈的自旋依赖性, 即光的量子自旋霍尔效应. 通过 COMSOL 软件的仿真也证实了理论的正确性, 通过在 ENG 和 MNG 界面处设置带旋性的点激励源便可以激励出自旋依赖的表面波 [32,33].

为了证明 ENG 和 MNG 表面存在光的量子自旋霍尔效应, 利用具有人工微结构单元的微带线体系, 在微波波段设计实现 ENG 和 MNG 两种材料的界面并激励相应的自旋态进行实验验证. 在微带线体系中, 通过调制其中的集成元件和微带线几何参数实现等效的电磁波参数, 从而实现等效 ENG 和 MNG 的超构材料 [38], 如图 4 所示. 通过利用四个具有不同相位的点源激励不同自旋性质的电磁波, 根据实验和仿真结果可知, ENG 和 MNG 表面支持的界面态具有光的量子自旋霍尔效应, 从而验证了理论的正确性.

4 拓扑电路中的量子自旋霍尔效应

在超构材料里光与物质的相互作用中, 除了深亚波长的人工微结构对光的调控响应外, 来自超构

材料中晶格作用本身的耦合作用也不可忽视, 尤其在一些具有强烈自旋-轨道相互作用的材料中, 光的量子自旋霍尔效应非常明显, 对于这一类材料的研究促进了一门新兴的材料研究分支: 光子拓扑绝缘体 [11,12]. 不同于自由空间中的光量子霍尔效应, 来自晶格作用产生的光量子自旋霍尔效应虽然所有能带的总 Chern 数仍为零, 但在某一支体能带上的 Chern 数不为零, 这表明材料具有拓扑非平凡的带隙, 与不同拓扑性质的材料的接触处会发生拓扑相变并具有受拓扑保护的单向边缘态, 两个自旋态是相互分立的 [12].

为了讨论晶格作用下的光量子自旋霍尔效应, 以带有自旋-轨道耦合的二维 Lie lattice 模型为例 [39-41], 这里主要回顾文献 [41] 的内容, 如图 5 所示, 在紧束缚模型近似下, 其二维 Lieb lattice 的哈密顿量可表示成:

$$\hat{H} = -t_1 \sum_{\langle i,j \rangle; \sigma} \hat{c}_{i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j,\sigma} - t_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle; \sigma} \hat{c}_{i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j,\sigma} + i\lambda_{\text{ISO}} \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle; \sigma, \sigma'} \hat{c}_{i,\sigma}^\dagger (\mathbf{e}_{ij} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'}) \hat{c}_{j,\sigma'}, \quad (20)$$

其中, $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{d}_{ik} \times \mathbf{d}_{kj} / |\mathbf{d}_{ik} \times \mathbf{d}_{kj}|$, $\mathbf{d}_{ik}$ 和 $\mathbf{d}_{kj}$ 是连接格点 i 和 j 的中间矢量; $\hat{c}_{i,\sigma}^\dagger (\hat{c}_{i,\sigma})$ 代表格点 i 上的产生(湮没)算符; t_1 , t_2 和 λ_{ISO} 分别表示近邻耦合强度 (NN)、次近邻 (NNN) 耦合强度和自旋-轨道耦合 (ISO) 强度; σ 和 σ' 表示自旋投影算符, 而 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 是泡利矩阵矢量. 第一、二项分别表示近邻、次近邻格点间的相互作用, 而第三项

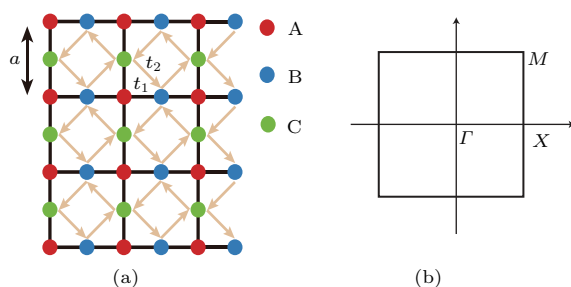


图 5 (a) Lieb lattice 模型的晶格示意图, t_1 和 t_2 分别表 NN 和 NNN 耦合强度; (b) Lieb lattice 模型的第一布里渊区, Γ , X 和 M 是布里渊区的高对称点 [41]

Fig. 5. (a) The theoretical model of Lieb lattice, t_1 and t_2 represent near-neighbor and next-near-neighbor coupling strengths respectively; (b) the first Brillouin zone of model, and means the high symmetry points in Brillouin zone [41].

表示次近邻格点间的自旋-轨道耦合, 这里的自旋并非指代光子本身由麦克斯韦方程组所描述的自旋, 而是因为光子与晶格作用造成的 Bloch 光子赝自旋^[42,43].

考虑到自旋的 Lieb lattice 模型可等效为两套分别考虑单一自旋的电路系统的叠加, 再利用两套系统格点之间的联接类比量子系统中自旋-轨道耦合, 便可以得到 Lieb lattice 电路系统^[41], 具体的电子元器件排列及其联接如图 6 所示. 在整个类比过程中, 为了实现量子系统中的负耦合, 将图中的模块 A, B 和 C 分别类比 Lieb lattice 模型中的

格点 A, B 和 C; 其次, 通过定义每个模块中电感 X , Y 端电压的方向及格点间的联接, 引入赝自旋, 即 $\uparrow = U_x + iU_y$, $\downarrow = U_x - iU_y$, 其中, $U_x = V_x^+ - V_x^-$ 和 $U_y = V_y^+ - V_y^-$ 分别表示电感 X , Y 两端的电压. 由于给各模块上电感的端电压定义了方向, 便可以通过交叉联接来实现负耦合, 如图 6 (b) 所示, 顺着箭头的方向, 从左向右可实现 $U_x \rightarrow -U_y$ 和 $U_y \rightarrow U_x$ 的转变, 即 $\uparrow \rightarrow i\downarrow$ 和 $\downarrow \rightarrow -i\downarrow$, 其他联接(箭头)也可以如此实现. 最后, 将系统所有联接考虑在内, 可以得到图 6 (c) 和图 6 (d), 如此, 可实现线性电路系统与量子自旋霍尔相的类比^[6,7,39,41,44].

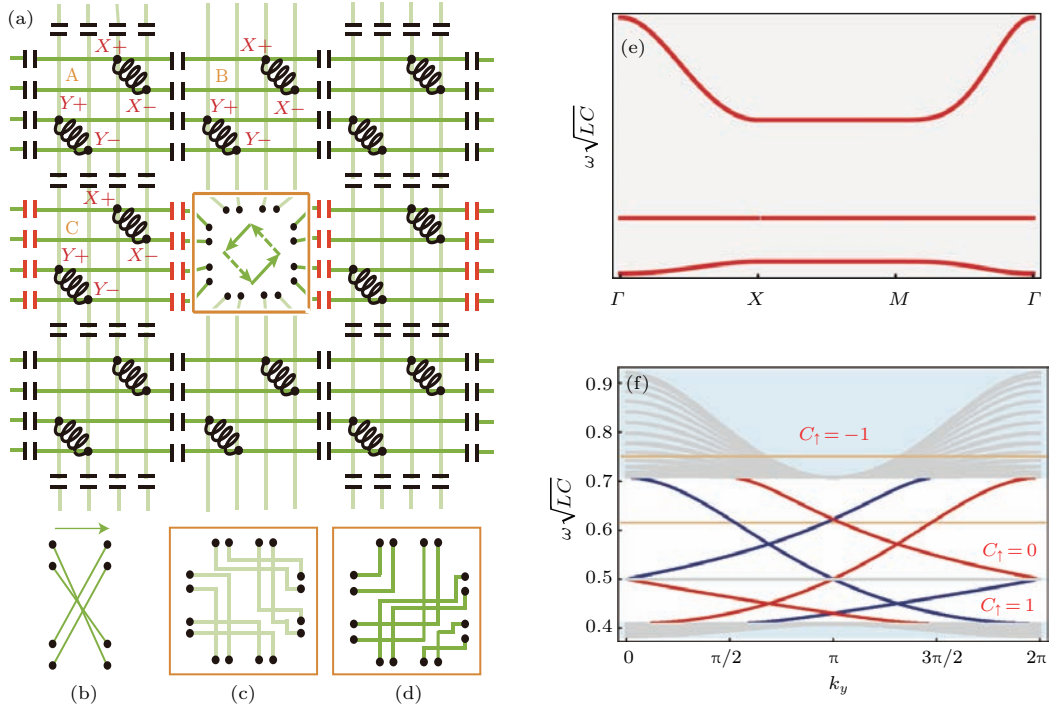


图 6 (a) Lieb lattice 电路系统及其具体联接, 其中不同颜色的联接线代表电路印刷板不同面上的联接; (b) 类比量子系统中 90° 相位的电路联接; (c) 和 (d) 表示 (a) 中橙色方块内的联接; (e) 当 $a = 1$, $t_1/t_2 = 2$ 时, Lieb lattice 电路系统的能谱色散曲线; (f) 半无限 Lieb lattice 电路系统的单向边界态及其自旋 Chern 数^[41]

Fig. 6. (a) The Lieb lattice circuit system, the links with different colors mean circuits in different plane; (b) the circuit profiles corresponding to quantum interaction with 90 degrees phase; (c), (d) give the concrete circuit profiles inside the block in (a); (e) the bandstructure of Lieb lattice circuit system, when $a = 1$ and $t_1/t_2 = 2$; (f) the bandstructure and spin Chern number of edge states of half-infinite Lieb lattice circuit system^[41].

为了进一步研究其拓扑性质, 基于以上电路联接, 根据基尔霍夫定律, 便可写出系统的微波电路运动方程^[41]:

$$\begin{aligned}
 U_{m,n}^{AX} &= \frac{LC}{2} \left[-4t_1 \ddot{U}_{m,n}^{AX} + t_1 (\ddot{U}_{m-1,n}^{BX} + \ddot{U}_{m,n}^{BX} + \ddot{U}_{m,n-1}^{CX} + \ddot{U}_{m,n}^{CX}) \right], \\
 U_{m,n}^{AY} &= \frac{LC}{2} \left[-4t_1 \ddot{U}_{m,n}^{AY} + t_1 (\ddot{U}_{m-1,n}^{BY} + \ddot{U}_{m,n}^{BY} + \ddot{U}_{m,n-1}^{CY} + \ddot{U}_{m,n}^{CY}) \right], \\
 U_{m,n}^{BX} &= \frac{LC}{2} \left[-(2t_1 + 4t_2) \ddot{U}_{m,n}^{BX} - t_2 (\ddot{U}_{m+1,n}^{CY} - \ddot{U}_{m+1,n-1}^{CY} - \ddot{U}_{m,n}^{CY} + \ddot{U}_{m,n-1}^{CY}) + t_1 (\ddot{U}_{m,n}^{AX} + \ddot{U}_{m+1,n}^{AX}) \right], \\
 U_{m,n}^{BY} &= \frac{LC}{2} \left[-(2t_1 + 4t_2) \ddot{U}_{m,n}^{BY} + t_2 (\ddot{U}_{m+1,n}^{CX} - \ddot{U}_{m+1,n-1}^{CX} - \ddot{U}_{m,n}^{CX} + \ddot{U}_{m,n-1}^{CX}) + t_1 (\ddot{U}_{m,n}^{AY} + \ddot{U}_{m+1,n}^{AY}) \right], \\
 U_{m,n}^{CX} &= \frac{LC}{2} \left[-(2t_1 + 4t_2) \ddot{U}_{m,n}^{CX} + t_2 (\ddot{U}_{m,n+1}^{BY} - \ddot{U}_{m,n}^{BY} - \ddot{U}_{m-1,n+1}^{BY} + \ddot{U}_{m-1,n}^{BY}) + t_1 (\ddot{U}_{m,n}^{AX} + \ddot{U}_{m,n+1}^{AX}) \right],
 \end{aligned}$$

$$U_{m,n}^{CY} = \frac{LC}{2} \left[-(2t_1 + 4t_2)\ddot{U}_{m,n}^{CY} - t_2(\ddot{U}_{m,n+1}^{BX} - \ddot{U}_{m,n}^{BX} - \ddot{U}_{m-1,n+1}^{BX} + \ddot{U}_{m-1,n}^{BX}) + t_1(\ddot{U}_{m,n}^{AY} + \ddot{U}_{m,n+1}^{AY}) \right], \quad (21)$$

其中, $U_{m,n}^{ab}$ 表示位于原胞内 (m, n) 结点二个对应引脚的点势力差 L 是电感值, C 为电容值. 同样地, 利用自旋表象 $U_{\pm} = U_x \pm iU_y$, 可以得到两组关于自旋的去耦合方程:

$$\begin{aligned} U_{+,m,n}^A &= \frac{LC}{2} \left[-4t_1\ddot{U}_{+,m,n}^A + t_1(\ddot{U}_{+,m-1,n}^B + \ddot{U}_{+,m,n}^B + \ddot{U}_{+,m,n-1}^C + \ddot{U}_{+,m,n}^C) \right], \\ U_{+,m,n}^B &= \frac{LC}{2} \left[-(2t_1 + 4t_2)\ddot{U}_{+,m,n}^B + it_2(\ddot{U}_{+,m+1,n}^C - \ddot{U}_{+,m+1,n-1}^C - \ddot{U}_{+,m,n}^C + \ddot{U}_{+,m,n-1}^C) \right. \\ &\quad \left. + t_1(\ddot{U}_{+,m,n}^A + \ddot{U}_{+,m+1,n}^A) \right], \\ U_{+,m,n}^C &= \frac{LC}{2} \left[-(2t_1 + 4t_2)\ddot{U}_{+,m,n}^C - it_2(\ddot{U}_{+,m,n+1}^B - \ddot{U}_{+,m,n}^B - \ddot{U}_{+,m-1,n+1}^B + \ddot{U}_{+,m-1,n}^B) \right. \\ &\quad \left. + t_1(\ddot{U}_{+,m,n}^A + \ddot{U}_{+,m,n+1}^A) \right], \\ U_{-,m,n}^A &= \frac{LC}{2} \left[-4t_1\ddot{U}_{-,m,n}^A + t_1(\ddot{U}_{-,m-1,n}^B + \ddot{U}_{-,m,n}^B + \ddot{U}_{-,m,n-1}^C + \ddot{U}_{-,m,n}^C) \right], \\ U_{-,m,n}^B &= \frac{LC}{2} \left[-(2t_1 + 4t_2)\ddot{U}_{-,m,n}^B - it_2(\ddot{U}_{-,m+1,n}^C - \ddot{U}_{-,m+1,n-1}^C - \ddot{U}_{-,m,n}^C + \ddot{U}_{-,m,n-1}^C) \right. \\ &\quad \left. + t_1(\ddot{U}_{-,m,n}^A + \ddot{U}_{-,m+1,n}^A) \right], \\ U_{-,m,n}^C &= \frac{LC}{2} \left[-(2t_1 + 4t_2)\ddot{U}_{-,m,n}^C + it_2(\ddot{U}_{-,m,n+1}^B - \ddot{U}_{-,m,n}^B - \ddot{U}_{-,m-1,n+1}^B + \ddot{U}_{-,m-1,n}^B) \right. \\ &\quad \left. + t_1(\ddot{U}_{-,m,n}^A + \ddot{U}_{-,m,n+1}^A) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

从上式可以看出, 结点 B 和结点 C 之间的耦合在自旋表象下是虚数, 这表明该耦合机理产生了具有 $\pi/2$ 相位差的等效磁场. 同时, 对于不同自旋, 该等效磁场具有不同的符号. 通过数值计算出半无限 Lieb lattice 系统 (X 方向有限, Y 方向无限) 的能谱, 如图 6(e) 所示, 并计算各能带的自旋 Chern 数 [39]:

$$\begin{aligned} C_{n\sigma} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\text{BZ}} d^2\mathbf{k} \mathcal{F} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\text{BZ}} d^2\mathbf{k} \nabla_{\mathbf{k}} \times \langle n\mathbf{k} | i\nabla_{\mathbf{k}} | n\mathbf{k} \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

可知当 $a = 1$, $t_1/t_2 = 2$ 时, 系统是拓扑非平庸的, 且其各能带的自旋 Chern 数如图 6(f) 所示, 而能隙中的红蓝曲线分别代表自旋向上和向下的边界态. 该晶格体系中强烈的自旋-轨道相互作用等效产生局域非零磁场, 原本的 Lieb 晶格中的能带简并因自旋能量分立而打开形成拓扑非平庸带隙, 系统边界处发生拓扑相变而具有自旋依赖的单向边界态.

5 结束语

电子的量子自旋霍尔效应推动了当今凝聚态物理研究的发展, 在麦克斯韦方程所描述的光中同

样内禀了量子自旋霍尔效应的特征. 本文简要介绍了真空中的光本征地存在量子自旋霍尔效应的物理本质, 同时介绍了通过利用超构材料系统来研究和揭示在光与物质存在强烈相互作用下的光量子自旋霍尔效应. 利用 ENG 和 MNG 材料拓扑相变的界面态来揭示 ENG 和 MNG 材料的拓扑性质对于电磁波传输的影响, 利用基于 Lieb lattice 的拓扑电路来分析利用晶格作用实现光的赝自旋态和自旋与轨道的强烈耦合, 实现 Bloch 光子的量子自旋霍尔效应. 通过研究光的量子自旋霍尔效应将能为以后高效的光学通信, 电磁波波前处理等提供理想的实现平台.

参考文献

- [1] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [2] Sinova J, Culcer D, Niu Q, Sinitsyn N A, Jungwirth T, Macdonald A H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 126603
- [3] Murakami S, Nagaosa N, Zhang S C 2003 *Science* **301** 1348
- [4] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 226801
- [5] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [6] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Modern Phys.* **82** 3045

- [7] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Modern Phys.* **83** 1057
- [8] Haldane F D M, Raghu S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013904
- [9] Wang Z, Chong Y, Joannopoulos J D, Soljacic M 2009 *Nature* **461** 772
- [10] Fang K, Yu Z, Fan S 2012 *Nature Photon.* **6** 782
- [11] Khanikaev A B, Mousavi S H, Tse W K, Kargarian M, MacDonald A H, Shvets G 2012 *Nature Mater.* **12** 233
- [12] Lu L, Joannopoulos J D, Soljačić M 2014 *Nature Photon.* **8** 821
- [13] Bliokh K Y, Smirnova D, Nori F 2015 *Science* **348** 1448
- [14] Bliokh K Y, Niv A, Kleiner V, Hasman E 2008 *Nature Photon.* **2** 748
- [15] Belinfante F J 1940 *Physica* **7** 449
- [16] Berry M V 2009 *J. Opt. A: Pure and Applied Optics* **11** 094001
- [17] Bliokh K Y, Dressel J, Nori F 2014 *New J. Phys.* **16** 093037
- [18] Bliokh K Y, Bekshaev A Y, Nori F 2014 *Nature Commun.* **5** 3300
- [19] Bekshaev A, Bliokh K Y, Soskin M 2011 *J. Opt.* **13** 053001
- [20] Stone M 2015 *Science* **348** 1432
- [21] Bliokh K Y, Rodríguez-Fortuño F J, Nori F, Zayats A V 2015 *Nature Photon.* **9** 796
- [22] Aiello A, Banzer P, Neugebauer M, Leuchs G 2015 *Nature Photon.* **9** 789
- [23] Bliokh K Y, Nori F 2015 *Phys. Reports* **592** 1
- [24] Van Mechelen T, Jacob Z 2016 *Optica* **3** 118
- [25] Bekshaev A Y, Bliokh K Y, Nori F 2015 *Phys. Rev. X* **5** 011039
- [26] Bliokh K Y, Bekshaev A Y, Nori F 2013 *New J. Phys.* **15** 033026
- [27] Petersen J, Volz J, Rauschenbeutel A 2014 *Science* **346** 67
- [28] Rodríguez-Fortuño F J, Marino G, Ginzburg P, O'Connor D, Martínez A, Wurtz G A, Zayats A V 2013 *Science* **340** 328
- [29] Yin X, Ye Z, Rho J, Wang Y, Zhang X 2013 *Science* **339** 1405
- [30] Shitrit N, Yulevich I, Maguid E, Ozeri D, Veksler D, Kleiner V, Hasman E 2013 *Science* **340** 724
- [31] Lin J, Mueller J P B, Wang Q, Yuan G, Antoniou N, Yuan X C, Capasso F 2013 *Science* **340** 331
- [32] Kapitanova P V, Ginzburg P, Rodríguez-Fortuño F J, Filonov D S, Voroshilov P M, Belov P A, Zayats A V 2014 *Nature Commun.* **5** 3226
- [33] Guo Z, Jiang H, Long Y, Yu K, Ren J, Xue C, Chen H 2017 *Sci. Reports* **7** 7742
- [34] Tan W, Sun Y, Chen H, Shen S Q 2014 *Sci. Reports* **4** 3842
- [35] Shi X, Xue C, Jiang H, Chen H 2016 *Opt. Express* **24** 18580
- [36] Silveirinha M G 2015 *Phys. Rev. B* **92** 125153
- [37] Silveirinha M G 2016 *Phys. Rev. B* **93** 075110
- [38] Caloz C, Itoh T 2005 *Electromagnetic Metamaterials: Transmission line Theory and Microwave Applications* (New York: John Wiley & Sons)
- [39] Weeks C, Franz M 2010 *Phys. Rev. B* **82** 085310
- [40] Goldman N, Urban D F, Bercioux D 2011 *Phys. Rev. A* **83** 063601
- [41] Zhu W W, Hou S S, Long Y, Chen H, Ren J 2017 arXiv:1710.07268 [cond mat.mes hall]
- [42] Mecklenburg M, Regan B C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 116803
- [43] Song D, Paltoglou V, Liu S, Zhu Y, Gallardo D, Tang L, Chen Z 2015 *Nature Commun.* **6** 6272
- [44] Ningyuan J, Owens C, Sommer A, Schuster D, Simon J 2015 *Phys. Rev. X* **5** 021031

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Quantum spin Hall effect in metamaterials*

Long Yang Ren Jie[†] Jiang Hai-Tao Sun Yong Chen Hong

(Center for Phononics and Thermal Energy Science, School of Physics Science and Engineering, Key Laboratory of Advanced Micro-structure Materials, MOE, Tongji University, Shanghai 200092, China)

(Received 20 September 2017; revised manuscript received 27 October 2017)

Abstract

Quantum spin Hall effect (QSHE) of electrons has improved the development of condensed matter research nowadays, which describes one kind of spin-dependent quantum transport behavior in solid state. Recently, a variety of theoretical and experimental work has revealed that Maxwell equations, which is formulated 150 years ago and ultimately describes properties of light, can exhibit an intrinsic quantum spin Hall effect of light. The evanescent wave supported on the interface among different media behaves strong spin-momentum locking. With the rapid development of new optics materials, metamaterials, we can not only adjust the optical parameters of media arbitrarily, but also introduce a lot of complex spin-orbit interaction mechanism. Based on metamaterials, the essential physical mechanism behind quantum spin Hall effect of light can be understood deeply and verified easily. The purpose of this review is to give a brief introduction to quantum spin Hall effect of light in metamaterials. These include, for example, the physical essence of QSHE of light, the topological interface mode between permittivity negative and permeability negative metamaterials, QSHE in topological circuits.

Keywords: quantum spin Hall effect, metamaterials, topological transition

PACS: 78.67.Pt, 03.50.De, 05.30.Rt

DOI: 10.7498/aps.66.227803

* Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11775159) and the Natural Science Foundation of Shanghai, China (Grant No. 17ZR1443800).

[†] Corresponding author. E-mail: xonics@tongji.edu.cn

声子晶体中的多重拓扑相

陈泽国 吴莹

Multiple topological phases in phononic crystals

Chen Ze-Guo Wu Ying

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 227804 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.227804

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.227804>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非对称光束干涉制备二维微纳光子结构研究

Fabrication of two-dimensional micro-nano photonic structures by symmetry-lost beams interference

物理学报.2017, 66(21): 217801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.217801>

非线性光学超构表面

Nonlinear photonic metasurfaces

物理学报.2017, 66(14): 147803 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.147803>

利用波矢滤波超表面实现超衍射成像

Super diffraction imaging with wave vector selective metasurface

物理学报.2017, 66(14): 147804 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.147804>

宽入射角度偏振不敏感高效异常反射梯度超表面

Polarization-insensitive and broad-angle gradient metasurface with high-efficiency anomalous reflection

物理学报.2015, 64(23): 237802 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.237802>

基于加权实数编码遗传算法的超材料优化设计

Optimization of metamaterial based weighted real-coded genetic algorithm

物理学报.2014, 63(8): 087804 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.087804>

专题: 拓扑经典波动

声子晶体中的多重拓扑相*

陈泽国 吴莹†

(阿卜杜拉国王科技大学计算机电子和数学学院, 图瓦 23955-6900, 沙特阿拉伯)

(2017年7月31日收到; 2017年10月27日收到修改稿)

研究了圆环型波导依照蜂窝结构排列的声子晶体系统中的拓扑相变. 利用晶格结构的点群对称性实现赝自旋, 并在圆环中引入旋转气流来打破时间反演对称性. 通过紧束缚近似模型计算的解析结果表明, 没有引入气流时, 调节几何参数, 系统存在普通绝缘体和量子自旋霍尔效应绝缘体两个相; 引入气流后, 可以实现新的时间反演对称性破缺的量子自旋霍尔效应相, 而增大气流强度, 则可以实现量子反常霍尔效应相. 这三个拓扑相可以通过自旋陈数来分类. 通过有限元软件模拟了多个系统中边界态的传播, 发现不同于量子自旋霍尔效应相, 量子反常霍尔相系统的表面只支持一种自旋的边界态, 并且它无需时间反演对称性保护.

关键词: 声子晶体, 拓扑, 量子反常霍尔效应

PACS: 78.67.Pt, 03.65.Vf, 73.20.At

DOI: 10.7498/aps.66.227804

1 引言

波与物质的相互作用的研究是一个长盛不衰的课题. 无论从波的类型, 例如机械波、电磁波、电子波、引力波等出发, 还是从作用机理, 譬如散射、折射、干涉、衍射、吸收等考虑, 其研究成果都极大地丰富了人们对自然界的认识. 其中, 波在周期性结构中的传播, 因为其周期结构的布拉格散射和局域共振特性带来的奇异的色散关系, 已成为新世纪以来的研究热点. 一个典型的例子是周期性结构的系统会体现出带隙, 其对应的频率不支持波的传播, 使得系统在带隙频率范围内, 可以看成是波的绝缘体^[1,2].

带隙的范围可以通过求解能带问题的本征值得到, 和本征波函数无关. 20世纪80年代, 整数量子霍尔效应(IQHE)的发现^[3]让人们意识到在考虑本征波函数之后, 带隙可以通过拓扑来进行分类. 拓扑是个数学概念, 是用来研究物体在连续平滑变化下保持不变的性质. 这个性质通常用拓扑

不变量来描述. 带隙可以通过计算其拓扑不变量, 被分类为拓扑平庸和拓扑非平庸的, 两者的界面上存在单向传播的边界态. 一个拓扑非平庸的例子就是整数量子霍尔效应, 它是指在强磁场下, 二维电子气体的电子能谱形成分立的朗道能级, 当电子的费米能处在能隙中时, 体系的霍尔电导率为整数的现象. 这个整数化的霍尔电导, 后来被证实可以用拓扑数来描述 $\sigma_{xy} = Ce^2/h$, C 就是一个拓扑不变量, 又被称为陈数^[4]. 可以用整数量子霍尔效应来类比的绝缘体, 又被称为陈绝缘体. IQHE需要强磁场来打破时间反演对称性. 最近, 新的一类保持时间反演对称性的拓扑态被提了出来, 不同于IQHE, 它对应的陈数为0, 但是它的自旋霍尔电导率是非零量子化的, 这类拓扑态被称为量子自旋霍尔效应(QSH), 类比的绝缘体又被称为拓扑绝缘体或者QSH绝缘体^[5-7]. 由于这类绝缘体的陈数为0, 因此它们需要用新的拓扑不变量 $\mathbb{Z}_2$ ^[8]或者自旋陈数^[9]来描述. 需要指出的是, 拓扑来描述的物质态远不止这两类, 任何被“周期势”驱动的系统, 都可以定义拓扑^[10].

* 沙特阿卜杜拉国王科技大学基本科研经费(批准号: BAS/1/1626-01-01)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ying.wu@kaust.edu.sa

这类用拓扑描述的物质态, 由于其在边界上具有鲁棒性的边界态, 在自旋电子学以及量子计算中拥有广阔的前景^[11–13]. 人们同时也考虑了其在光子和声子系统中的应用^[14–21]. 这里, 我们注意到光子和声子与电子主要有两点不同: 1) 电子对磁场有响应, 引入磁场可以打破时间反演对称性从而实现陈绝缘体, 而光子或者声子对外加磁场的响应不同^[15,16,22]; 2) 电子是费米子, 拥有半整数自旋, 而声子和光子是玻色子, 这两种粒子对于时间反演操作的响应是不同于费米子的, 因而通常在时间反演对称性的系统下没有 Kramers 简并, 也就不能简单地类比出自旋简并^[23–27].

本文考虑圆环波导组合而成的声子晶体系统^[28,29]. 通过在圆环中增加气流, 发现气流对声波传播的调制作用可以类比于磁场对电子的调制, 从而在声子系统中实现时间反演破缺. 同时, 采用特定的 C_{6v} 晶格, 通过晶格对称性来类比出 Kramers 简并, 构造出可以类比于电子系统中的自旋. 这个系统提供了一个很好的平台, 可以通过调节系统的几何参数或者外加气流强度, 类比出陈绝缘体或者拓扑绝缘体. 我们先实现声学中的拓扑绝缘体; 进一步地, 考虑在这个拓扑绝缘体系统中引入时间反演破缺, 通过理论计算以及数值模拟, 发现了一个新的拓扑相, 称作量子反常霍尔相 (QAH)^[30,31], 可以用自旋陈数来描述. 不同于具有手性边界态 (和自旋无关) 的 IQHE 绝缘体以及具有一对螺旋形边界态的 QSH 绝缘体, 我们提出的 QAH 绝缘体, 它在边界上只有一支自旋锁定的手性边界态^[32]. 这支自旋锁定的手性边界态, 它无需时间反演对称性保护, 因此对于实现实际系统中的波的无损传播有很大的应用价值.

2 声子晶体系统模型与能带

我们的系统是一个二维三角晶格声子晶体: 它是一个刚性边界的环形波导网格结构, 其原胞是由六个固定内外半径的圆环以及固定宽度的矩形波导组合而成, 如图 1(a) 所示. 在这里取圆环的内半径为 $r_1 = 0.0875$ m, 外半径为 $r_2 = 0.125$ m, 矩形波导的宽度为 $d = 0.015$ m, 晶格常数为 $a = 1$ m, 同时设置圆环中心距离原胞中心的距离为一个可调节的变量 R .

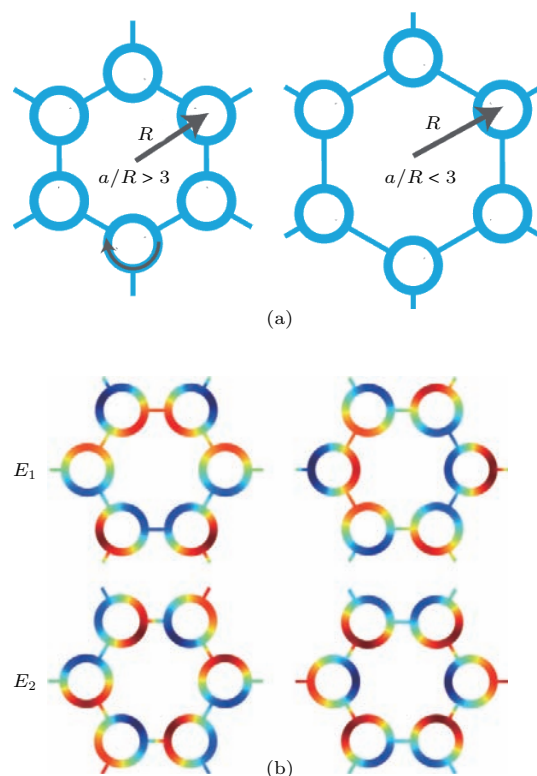


图 1 圆环波导型声子晶体的原胞与本征态 (a) 圆环的内外半径分别为 $r_1 = 0.0875$ m, $r_2 = 0.125$ m, 圆环通过直径为 $d = 0.015$ m 矩形波导的连接, 六个圆环构成声子晶体的原胞, 其晶格常数为 $a = 1$ m; 圆环内部引入顺时针旋转的气流, 气流的速度大小为 v , 圆环距离中心的距离 R 是个可以调节的参数; (b) 为图 (a) 所示的声子晶体的本征态, 可以通过对称性来分类, 其中 E_1 表示态对于 x 和 y 平面的镜像操作具有相反的宇称; E_2 表示态对于 x 和 y 平面的镜像操作具有相同的宇称

Fig. 1. The unit cell and eigenstate of the ring waveguide type phononic crystal: (a) The unit cell with lattice constant $a = 1$ m contains a hollow ring with inner and outer radii $r_1 = 0.0875$ m and $r_2 = 0.125$ m, respectively. Inside the ring, the air flows clockwise with a velocity field distribution $V = v\mathbf{e}_\theta$, the distance between the ring and the center is R and is tunable; (b) four eigenstates at our interested frequency classified by symmetries.

周期性结构中声波可以写成布洛赫波的形式, 具有能带结构. 而从群论的角度来看, 其 Γ 点的波函数又和系统的对称性相关. 在三角晶格中, 任何一个 Γ 点的波函数都是 C_{6v} 群的一个不可约表示, 其中有两个是二维的, 分别为 E_1 表示和 E_2 表示. 如图 1(b) 所示, E_1 表示意味着态对于 σ_x 操作和 σ_y 操作具有相反的宇称, E_2 表示对应于态对 σ_x 操作和 σ_y 操作具有相同的宇称, 它们都是二重简并的^[33]. 这就意味着可以根据基本的 C_6 操作组合出一个反么正算符 T_s 满足 $T_s^2 = -1$, 正

是这个负号,使得我们可以根据二维不可约表示的两个态构造出赝自旋 ($E_1^\pm = (E_{11} \pm iE_{12})/\sqrt{2}$, $E_2^\pm = (E_{21} \pm iE_{22})/\sqrt{2}$)^[23], 具有这样赝自旋的准粒子可以类比为自旋 $-1/2$ 的费米子. 需要指出的是, 这个声子晶体是个玻色子系统, 其“费米子”的特性是和三角晶格对称性息息相关的^[34,35].

图2展示了 $a/R = 2.9$ 和 $a/R = 3.1$ 两种情况下的能带, 这里用 Γ 点的态来标记能带. 可以看到在 $a/R = 3.1$ 时, E_1 态的频率低于 E_2 态. 而增大 R 可以使得能带翻转, 从而 E_1 态的频率高于 E_2 态. $a/R = 3$, 就是一个临界点, 态 E_1 与态 E_2 构成一个二重简并的“双狄拉克锥”. 实际上在 $a/R = 3$ 时, 系统可以看成是一个复式六角晶格, 每个原胞里有两个圆环, 这个双狄拉克锥是由六角晶格 K 点处的狄拉克锥折叠形成的.

以这两个简并的态 (E_1 和 E_2) 为基, 可以根据其对称性构造出能带. 在二次量子化的框架下, 用紧束缚近似, 可以将系统的总能量表示为

$$\hat{H}_0 = \sum_{\hat{m}\hat{n}\alpha\beta} c_{\hat{m}\alpha}^\dagger t_{\hat{m}\hat{n}}^{\alpha\beta} c_{\hat{n}\beta},$$

其中 $\hat{m}$ 和 $\hat{n}$ 标记晶格位置, α 和 β 取值 (1, 2, 3, 4) 分别对应着态 ($E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$), $t_{\hat{m}\hat{n}}^{\alpha\beta}$ 描述了在格点 $\hat{m}$ 的 α 态与格点 $\hat{n}$ 的 β 态之间的耦合系数. 如果考虑周期性边界条件和最近邻相互作用, 那么将哈密顿量 $\hat{H}_0$ 变换到 $\mathbf{k}$ 空间, 采用新的表象 ($E_1^+, E_2^+, E_1^-, E_2^-$) 可以得到新的哈密顿量 $H_0(\mathbf{k})$, 在 Γ 点附近展开可以得到^[36]

$$H_0(\mathbf{k}) = A(\hat{\tau}_z k_y \hat{\sigma}_x - k_x \hat{\sigma}_y) + E_0 + Dk^2 + (M_0 - Bk^2)\hat{\sigma}_z, \quad (1)$$

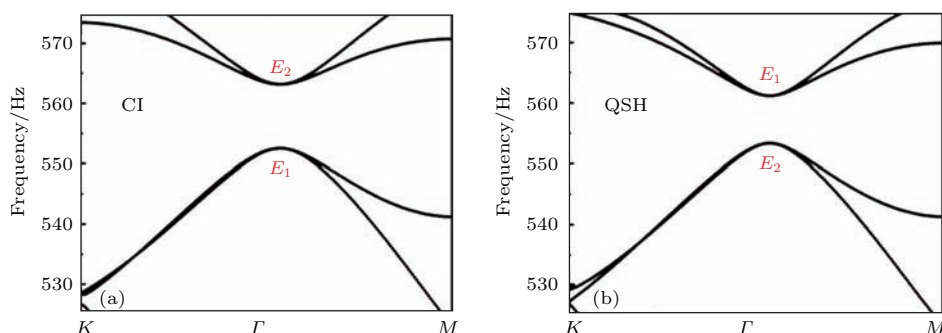


图2 不引入气流下的两种声子晶体 (a) 参数 $a/R = 3.1$, E_1 态的频率低于 E_2 态, 系统是个普通绝缘体 (系统 I); (b) 参数 $a/R = 2.9$, E_1 态的频率高于 E_2 态, 系统是个量子自旋霍尔效应绝缘体 (系统 II)

Fig. 2. Two phononic crystals without air flow: (a) The frequency of E_1 state is lower than E_2 state when $a/R = 3.1$, the system is a conventional insulator (system I); (b) the frequency of E_1 state is higher than E_2 state when $a/R = 2.9$, the system is a QSH insulator (system II).

这里 A, E_0, D, M_0, B 是通过耦合系数定义模型参数, 分别表示为:

$$E_0 = (t_0^{11} + t_0^{33} + 3(t_1^{11} + t_1^{22} + t_1^{33} + t_1^{44}))/2,$$

$$D = -3(t_1^{11} + t_1^{22} + t_1^{33} + t_1^{44})/8,$$

$$A = 3(t_1^{14} + t_1^{23})/2,$$

$$M_0 = (t_0^{11} - t_0^{33} + 3(t_1^{11} + t_1^{22} - t_1^{33} + t_1^{44}))/2,$$

$$B = 3(t_1^{11} + t_1^{22} - t_1^{33} - t_1^{44})/8,$$

其中 $t_r^{\alpha\beta}$ 为耦合系数, $r = 0$ 代表自身的耦合, $r = 1$ 代表与 x 方向最近邻的耦合. 用泡利矩阵 $\hat{\tau}$ 描述两个赝自旋, 用泡利矩阵 $\hat{\sigma}$ 描述两个带.

方程(1)描述的哈密顿量与描述 CdTe/HgTe/CdTe 量子阱的 Bernevig-Hughes-Zhang (BHZ) 模型类似^[37]. 在 BHZ 模型中, 系统蕴含着一个拓扑相变, 取决于 $M_0 B$ 的符号. 如果 $M_0 B < 0$, 系统是个普通的绝缘体, 如果 $M_0 B > 0$, 系统是个 QSH 绝缘体. 注意到在我们的系统中, $B > 0$, 因此系统具体处在哪个相, 可以由 M_0 的符号来决定, 而 M_0 的符号与 E_1 态和 E_2 态的相对频率有关. 如图2所示, 如果 E_1 态的频率低于 E_2 态, 系统是个普通绝缘体; 如果 E_1 态的频率高于 E_2 态, 系统是个 QSH 绝缘体.

下面研究自旋简并破缺的情形下系统的拓扑相的转变. 这里采用在圆环中加顺时针方向气流的方式破缺系统的时间反演对称性来破缺自旋简并, 气流速度分布如下式:

$$\mathbf{v}(x, y) = \left(\frac{vy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-vx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -v\mathbf{e}_\theta, \quad (2)$$

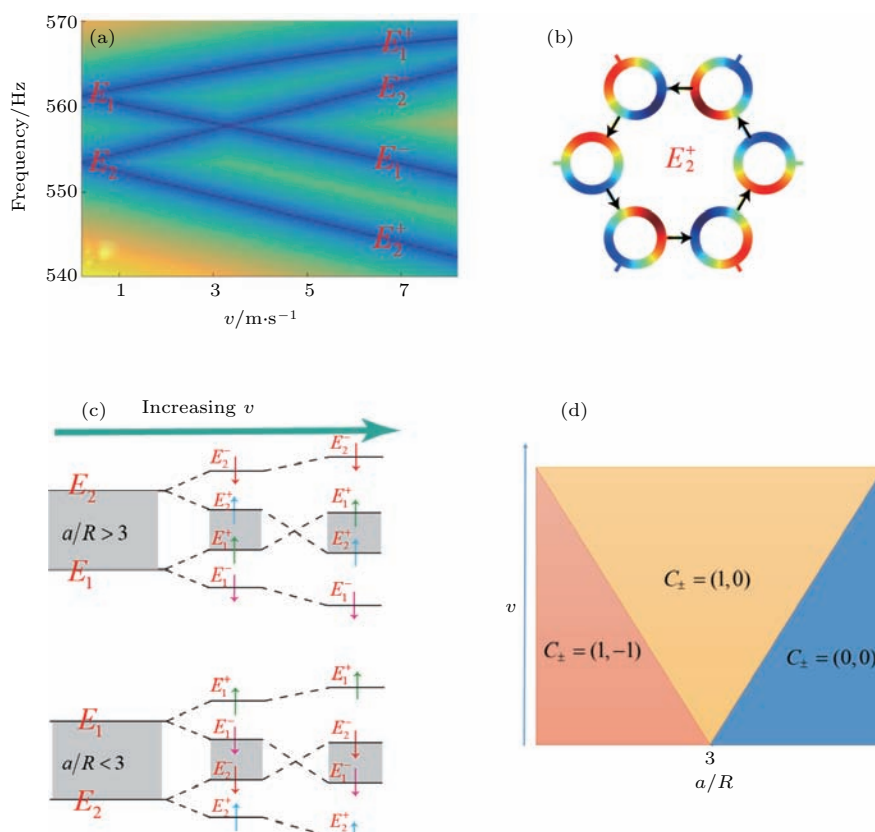


图3 (a) 引入气流后, Γ 点的本征态随着外加气流的变化; (b) 引入气流后, 系统的对称性从 C_{6v} 降到 C_6 , 可以用其矩形波导内部能流的方向类比为自旋, 这里定义逆时针能流为自旋向上; (c) 考虑两种声子晶体系统, 随着外加气流变化, 其能带演化的示意图, 其中灰色区域代表全带隙, 随着气流的增大, 可以看到能带的闭合与翻转; (d) 系统的拓扑相图, 改变参数 R 和外加气流强度 v , 系统一共呈现三个相, 分别用不同自旋陈数表示

Fig. 3. (a) The change of eigenfrequencies at the Γ point as functions of the introduced external airflow; (b) the illustration of pseudo-spin up component when we introduce the airflow that breaks the TR symmetry and changes the symmetry of the system from C_{6v} to C_6 ; (c) a schematic of the evolution of the band under an increasing external airflow V , gray area indicates a bandgap; there are two initial phases: (i) a conventional insulator phase when $a/R > 3$; (ii) a QSH phase when $a/R < 3$; increasing V splits the degeneracies of pseudospins, resulting in a gap closing and reopening process; (d) a schematic diagram to illustrate the topological phase transitions in our system. the three distinct phases are classified by different spin Chern numbers.

这里 $\mathbf{e}_\theta$ 是沿着逆时针方向的单位矢量, v 是速度场的幅值. 这时声波在引入气流的系统中的传播可以由如下方程描述:

$$-\frac{\rho}{c^2}i\omega(i\omega\phi + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi) + \nabla \cdot \left(\rho \nabla\phi - \frac{\rho}{c^2}(i\omega\phi + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi)\mathbf{v} \right) = 0, \quad (3)$$

其中 ϕ 是速度势, ρ 和 c 是空气的密度和声速, ω 是声波角频率, $\mathbf{v}$ 是 (2) 式描述的环形气流速度场分布. 这个新引入的速度场, 将系统的点群对称性从 C_{6v} 降低到 C_6 . 如图 3(b) 所示, 赝自旋态 $E_1^\pm$ 和 $E_2^\pm$ 的对称性是和 C_6 群的不可约表示一致的. 在这里用矩形波导内部逆时针声能流代表自旋向上的态. 气流引入的同时使得原本简并的能级劈裂,

E_1 态和 E_2 态的简并都被打开, 赝自旋态 $E_1^\pm$ 和 $E_2^\pm$ 的频率发生变化. 考虑 $a/R = 2.9$ 的情形, 随着圆环内气流的增大, 声波在圆环内的本征频率发生改变, 利用商业有限元软件 COMSOL 计算原胞本征频率随着气流的变化 (图 3(a)). 可以看出其中自旋向上的 E_1^+ 态与自旋向下的 E_2^- 态频率升高, 自旋向下的 E_1^- 态与自旋向上的 E_2^+ 态频率降低. 同时, 由于叠加原理, 圆环的本征频率随着气流有一个线性的变化关系, 这导致原胞的本征频率变化与气流也呈图 3(a) 所示的线性关系. 这也暗示了气流对应的速度场可以看作塞曼效应中引入的磁矢势 [22].

将引入的气流视作对系统的一个微扰, 其哈密顿量可以写为

$$H_z = \begin{pmatrix} z_{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_{E_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_{E_2} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

这里, 对赝自旋态 $E_1^\pm$ 而言, 其分裂强度为 $2z_{E_1}$, 对赝自旋态 $E_2^\pm$ 而言, 其分裂强度为 $2z_{E_2}$. 因为带 E_1 和带 E_2 的“有效质量”是相反的, 所以 $z_{E_1}z_{E_2} < 0$. 考虑到外加气流的方向, 在这个系统里, 有 $z_{E_1} > 0$, $z_{E_2} < 0$.

先研究在外加气流下能带的翻转情况. 如图 3(c) 所示, 先考虑 $a/R > 3$ 的情形, 根据前面的分析, 当外加气流为 0 时系统处于普通绝缘体, 而当气流逐渐增大, 能带将发生劈裂, 同时系统的带隙会渐渐闭合, 直到外加气流达到某个临界值之后再打开, 图中灰色区域代表着全带隙. 我们的讨论同样适用于 $a/R < 3$ 的情形, 这种带隙在外加气流的作用下闭合又打开的过程, 暗示着系统可能经历一个拓扑相变. 下面先通过理论分析来研究系统的拓扑相的转变过程.

3 拓扑不变量与相图

首先用泡利矩阵重新描述引入气流后的微扰哈密顿量:

$$H_z = (z_{E_1} - z_{E_2})\hat{\tau}_z\hat{\sigma}_z/2 + (z_{E_1} + z_{E_2})\hat{\sigma}_z/2.$$

根据理论分析以及模拟结果, 发现外加气流导致的 $E_1^\pm$ 态与 $E_2^\pm$ 态的劈裂是接近的, 因此可以认为 $z_{E_1} = -z_{E_2}$, 并且引入 $g_0 = (z_{E_1} - z_{E_2})/2$, 可以得到

$$\begin{aligned} H(\mathbf{k}) &= H_0(\mathbf{k}) + H_z(\mathbf{k}) \\ &= E_0 + Dk^2 + (M_0 - Bk^2)\hat{\sigma}_z + A(\hat{\tau}_z k_y \hat{\sigma}_x - k_x \hat{\sigma}_y) \\ &\quad + g_0 \hat{\tau}_z \hat{\sigma}_z. \end{aligned} \quad (5)$$

现在研究这个哈密顿量所描述的物理模型中的拓扑. $g_0 \hat{\tau}_z \hat{\sigma}_z$ 这一项打破了系统的时间反演对称性. 当 $g_0 = 0$, 即不加气流时, 这个受时间反演对称性保护的系统可以由 Z_2 拓扑数或者自旋陈数来描述. 它可以将具有量子自旋霍尔效应的绝缘体和普通绝缘体区分开来. 当 $g_0 \neq 0$, 即打破时间反演对称性之后, 自旋陈数的鲁棒性仍然保持不变, 而 Z_2 拓扑数却不能定义^[32]. 因此在本文的系统中, 我们采用自旋陈数作为拓扑不变量来研究系统的拓扑转变.

在计算(5)式中的拓扑不变量之前, 先介绍描述电子在 Bi_2Se_3 薄膜中运动的有效哈密顿量 $H_1(\mathbf{k})$: $H_1(\mathbf{k}) = E_0 + Dk^2 + (M_0 - Bk^2)\hat{\sigma}_z + [A(k_y \hat{\sigma}_x - k_x \hat{\sigma}_y)]\hat{\tau}_x$, 其自旋陈数可以解析求得^[32,38]:

$$C_\pm = \pm [\text{sgn}(B) + \text{sgn}(M_0)]/2. \quad (6)$$

接下来对(5)式所描述的哈密顿量进行一个么正变化, 得到新的哈密顿量 $H_s(\mathbf{k}) = S^\dagger H(\mathbf{k})S$, 其中

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

比较哈密顿量 $H_s(\mathbf{k})$ 和 $H_1(\mathbf{k})$ 的本征值与本征矢量, 可以发现如下对应关系:

$$E_s(M_0, g_0) = E_1(M_0 \pm g_0),$$

$$\Psi_s(M_0, g_0) = \Psi_1(M_0 \pm g_0).$$

我们知道, 自旋陈数的求解仅仅依赖于本征值以及对应的本征矢量, 因此可以将(6)式中的 M_0 替换为 $M_0 \pm g_0$. 从而得到哈密顿量 $H(\mathbf{k})$ 的自旋陈数的表达式:

$$C_\pm = \pm [\text{sgn}(B) + \text{sgn}(M_0 \pm g_0)]/2. \quad (7)$$

在我们的系统中, $B > 0$, 改变圆环离中心的距离 R 会调节 M_0 的符号, g_0 的符号由气流的方向决定. 固定气流的方向使得 $g_0 > 0$, 增大外加气流的速度 V 会增大 g_0 . 通过(7)式, 可以将系统分为几个相(如图 3(d) 所示):

- 1) 普通绝缘体相, 如图 2(a) 所示, $M_0 < 0$, $g_0 < |M_0|$, 这时有 $C_\pm = (0, 0)$;
- 2) 量子自旋霍尔效应相, 如图 2(b) 所示, $M_0 > 0$, $g_0 < |M_0|$, 这时有 $C_\pm = (1, -1)$;
- 3) 量子反常霍尔效应相, 如图 4 所示, 取 $v = 8 \text{ m/s}$, 这时有 $g_0 > |M_0|$, 考虑两种情形 $M_0 < 0$ (图 4(a)) 和 $M_0 > 0$ (图 4(b)), 都有 $C_\pm = (1, 0)$.

从以上的分析中不难看出, 对于某个特定的赝自旋, 如果其自旋陈数取值为 0, 则对应于平庸的绝缘体, 如果其自旋陈数取值为非零, 那就是个非平庸的绝缘体. 这意味着如果用这两种绝缘体构造出一个边界, 那么边界上将存在着边界态, 这个边界态会和特定的自旋相关. 下面通过有限元软件模拟, 来验证边界上的边界态与自旋的关系.

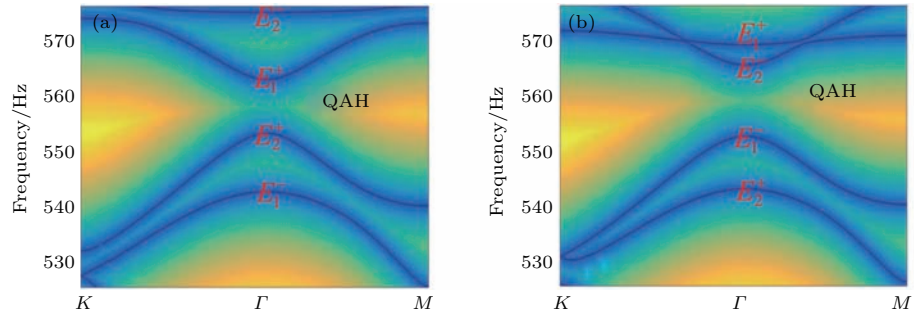


图4 引入顺时针强度为 $v = 8$ m/s 的气流下的两种声子晶体 (a) $a/R = 3.1$ (系统 III); (b) $a/R = 2.9$ (系统 IV); 与图 2 相比, 这两种声子晶体也在 560 Hz 附近呈现全带隙, 不同之处在于这两种声子晶体可以等价于量子反常霍尔效应 (QAH) 绝缘体, 其自旋陈数为 $C_{\pm} = (1, 0)$

Fig. 4. Two phononic crystals with $v = 8$ m/s: (a) $a/R = 3.1$ (system III); (b) $a/R = 2.9$ (system IV). Compared with Fig. 2, all of these phononic crystals have a global bandgap around 560 Hz, and the difference is that these two phononic crystals are topologically identical to QAH insulators with $C_{\pm} = (1, 0)$.

4 超原胞与边界态

构造了两个声子晶体系统来研究边界态的情况. 第一个声子晶体是由图 2 (a) 的普通绝缘体 (系统 I) 和图 4 (b) 的 QAH 绝缘体 (系统 IV) 组成的三明治结构, 其超原胞由 20 个原胞组成, 每个超原

胞含有两个界面. 两种绝缘体在 560 Hz 附近拥有共同的带隙, 计算得到其投影能带, 可以发现有两条边界态, 这两条边界态分别对应着两条边界, 如图 5 (a) 所示. 根据先前的理论分析, 普通绝缘体的自旋陈数为 $C_{\pm} = (0, 0)$, 而 QAH 绝缘体的自旋陈数为 $C_{\pm} = (1, 0)$. 因此对于自旋向下的态而言, 其自旋陈数都为 $C_{-} = 0$, 系统 I 和系统 IV 对于自

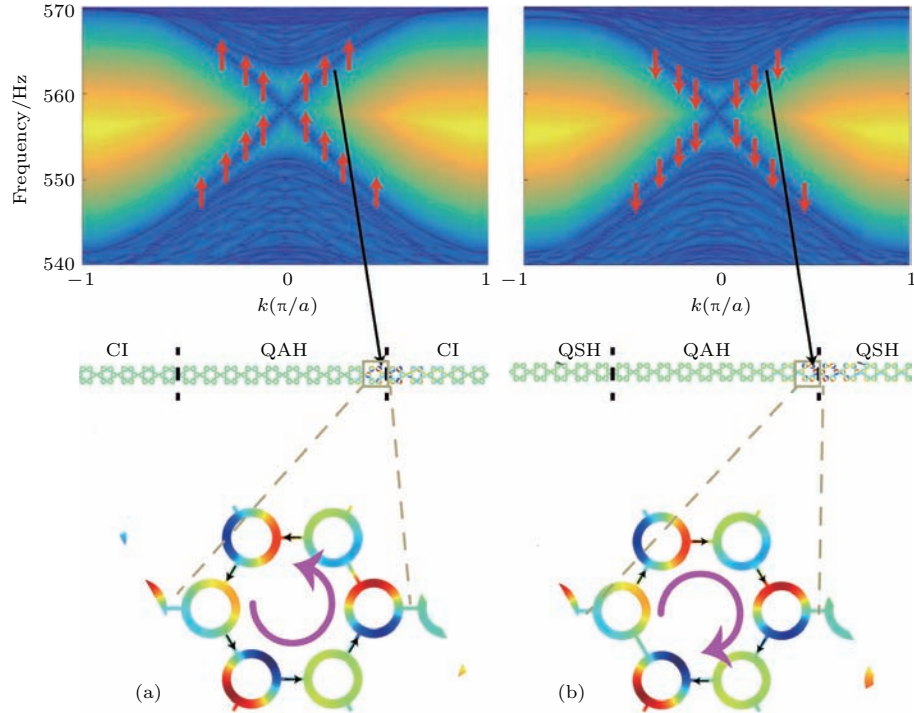


图5 超原胞边界态 (a) 用图 2 (a) 中的声子晶体 I 和图 4 (b) 中的声子晶体 IV 构造出的新的声子晶体系统, 共包含 20 个原胞, 其投影能带色散关系, 图中显示了系统在边界上支持向右传播的自旋向上的边界态; (b) 系统由图 2 (b) 中的声子晶体 II 和图 4 (b) 中的声子晶体 IV 组成, 图中显示了系统在边界上支持向右传播的自旋向下的边界态

Fig. 5. Projected band structures and edge states: (a) Dispersion relation for a ribbon-shaped 2D topological phononic crystal with 20 unit cells formed by systems I and IV, it shows the edge state with counterclockwise acoustic energy flux on the right interface, the pink arrows represent the pseudospins; (b) the same as (a) but for systems II and IV. It shows the edge state with clockwise acoustic energy flux.

旋向下的态而言都是个平庸的绝缘体, 在边界上没有自旋向下的态; 而对于自旋向上的态而言, 系统 I 的自旋陈数为 0, 系统 III 的自旋陈数为 1, 因此在边界上有一条边界态. 如图 5(a) 所示, 观察边界态的场分布, 可以发现单胞里矩形波导的声强呈逆时针分布, 对应于定义中的自旋向上的态.

类似的分析同样适用于第二个声子晶体, 它是由图 2(b) 的 QSH 绝缘体 (系统 II) 和图 4(b) 的 QAH 绝缘体 (系统 IV) 组成的三明治结构, 两种绝缘体也在 560 Hz 附近拥有共同的带隙. 同样地, 根据先前的理论分析, QSH 绝缘体的自旋陈数为 $C_{\pm} = (1, -1)$, 因此对于自旋向上的态而言, 系统 II 和系统 IV 在拓扑上是等价的, 都有 $C_+ = 1$; 而对于自旋向下的态, 它们在拓扑上不等价, 如图 5(b) 所示, 可以观察到自旋向下的边界态. 在这里强调一点, 虽然对于自旋向上的态而言, 系统 II 和 IV 都是拓扑非平庸的, 但是由于它们在拓扑上等价, 所以并没有自旋向上的边界态出现.

5 波的传播特性

从超原胞色散分析可以发现, 如果用系统 I 或者系统 II 与系统 IV 构成一个界面, 那么这个界面会支持边界态的传播, 并且这个边界态是和自旋相关的. 我们通过商业有限元软件 COMSOL 模拟波的传播特性来验证这一点. 先构造一个由系统 I 和系统 IV 组成的界面, 其原胞数目为 20×20 , 整个系统的边界是自由辐射边界. 如图 6(a) 所示, 在界面处引入声源之后, 可以很明显地发现声波朝右传播, 进一步分析传播的态可以发现, 这个态是自旋向上的. 实际上这里采用的声源包含自旋向上与自旋向下两个分量, 但是这个界面只支持向右传播的自旋向上的分量, 如果采用自旋向下的声源, 整个系统会展示出带隙行为.

同时研究了系统 II 与系统 IV 构成的界面, 整个系统尺寸大小和先前一致. 同样的分析也适用于这个系统: 对于自旋向上的分量而言, 系统 II 与系统 IV 都有 $C_+ = 1$, 于是他们在拓扑上是等价的; 而对于自旋向下的分量, 两者在拓扑上是不等价的, 因此如图 6(b) 所示, 这个界面只支持向右传播的自旋向下的边界态.

需要指出的是, 这里发现的自旋向上或者自旋向下的边界态与之前在陈绝缘体或者量子自旋

霍尔效应绝缘体都不同. 陈绝缘体在边界上有手性的 (chiral) 边界态, 这个边界态是包含两个自旋的; 量子自旋霍尔效应绝缘体在边界上有螺旋形的 (helical) 边界态, 这两条边界态根据不同的自旋分为沿着逆时针和顺时针方向传播. 但是在本文的系统中得到的边界态只有一条, 且只有一个自旋, 因此可以称为自旋锁定的手性边界态.

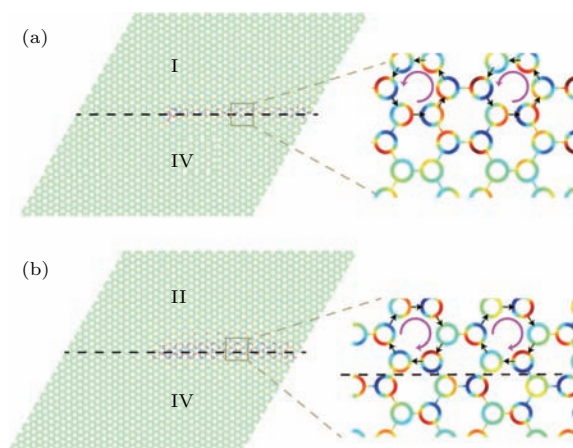


图 6 单向传播的边界态 (a) 考虑由声子晶体 I 和 IV 构成的界面, 对于自旋向上分量而言, 其拓扑不等价, 因此如果用普通的声源在界面中间激发声波, 可以观测到向右传播的自旋向上的边界态; (b) 考虑由声子晶体 II 和 IV 构成的界面, 对于自旋向下分量而言, 其拓扑不等价, 因此激发出来的边界态的自旋是向下的

Fig. 6. One way propagation interface state: (a) Consider the interface between systems I and IV, they are topologically distinct for pseudo-spin up component and can observe the right propagating interface state with pseudo-spin up component; (b) consider the interface between systems II and IV, they are topologically distinct for pseudospin down component which gives rise to the right propagating interface state with pseudospin down component.

6 结 论

提出了一个具有多重拓扑相的二维声子晶体系统. 首先通过特定的晶格对称性在声子晶体这个玻色子系统中构造出可以类比于费米子的半整数赝自旋, 通过调控晶格内部结构参数, 使得赝自旋简并的能带发生翻转, 实现了普通绝缘体到量子自旋霍尔效应的转变. 然后通过进一步引入时间反演对称性破缺的外加气流, 打破赝自旋的简并, 引入了一个新的量子反常霍尔效应拓扑相. 通过紧束缚近似理论模型得出系统可以等价于时间反演对称性破缺下的量子自旋霍尔效应, 并且理论计算了系统的自旋陈数. 解析结果表明系统的拓扑性质是和

自旋相关的,同时研究了波的传播特性,证实了理论预言的自旋锁定的手性边界态.期望本研究为无需时间反演对称性保护的自旋传播指明一个新的方向.

参考文献

- [1] John S 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2486
- [2] Yablonovitch E 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059
- [3] Klitzing K V, Dorda G, Pepper M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 494
- [4] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [5] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 226801
- [6] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [7] König M, Wiedmann S, Brüne C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
- [8] Qi X L, Wu Y S, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. B* **74** 085308
- [9] Prodan E 2009 *Phys. Rev. B* **80** 125327
- [10] Kitagawa T, Berg E, Rudner M, Demler E 2010 *Phys. Rev. B* **82** 235114
- [11] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [12] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [13] Moore J E 2010 *Nature* **464** 194
- [14] Haldane F D M, Raghu S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013904
- [15] Wang Z, Chong Y D, Joannopoulos J D, Soljačić M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013905
- [16] Khanikaev A B, Hossein Mousavi S, Tse W K, Kargar-ian M, MacDonald A H, Shvets G 2013 *Nat. Mater.* **12** 233
- [17] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, Lumer Y, Podolsky D, Dreisow F, Nolte S, Segev M, Szameit A 2013 *Nature* **496** 196
- [18] Lu L, Joannopoulos J D, Soljačić M 2014 *Nat. Photon.* **8** 821
- [19] Yang Z, Gao F, Shi X, Lin X, Gao Z, Chong Y, Zhang B 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 114301
- [20] Xiao M, Ma G, Yang Z, Sheng P, Zhang Z Q, Chan C T 2015 *Nat. Phys.* **11** 240
- [21] Lu J, Qiu C, Ke M, Liu Z 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 093901
- [22] Fleury R, Sounas D L, Sieck C F, Haberman M R, Alù A 2014 *Science* **343** 516
- [23] Wu L H, Hu X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 223901
- [24] He C, Sun X C, Liu X P, Lu M H, Chen Y, Feng L, Chen Y F 2016 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **113** 4924
- [25] Zhang Z, Wei Q, Cheng Y, Zhang T, Wu D, Liu X 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 084303
- [26] Xu L, Wang H X, Xu Y D, Chen H Y, Jiang J H 2016 *Opt. Express* **24** 18059
- [27] He C, Ni X, Ge H, Sun X C, Chen Y B, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Nat. Phys.* **12** 1124
- [28] Ni X, He C, Sun X C, Liu X P, Lu M H, Feng L, Chen Y F 2015 *New J. Phys.* **17** 053016
- [29] Chen Z G, Wu Y 2016 *Phys. Rev. Appl.* **5** 054021
- [30] Haldane F D M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015
- [31] Liu C X, Qi X L, Dai X, Fang Z, Zhang S C 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 146802
- [32] Li H, Sheng L, Shen R, Shao L B, Wang B, Sheng D N, Xing D Y 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 266802
- [33] Chen Z G, Ni X, Wu Y, He C, Sun X C, Zheng L Y, Lu M H, Chen Y F 2014 *Sci. Rep.* **4** 4613
- [34] Alexandradinata A, Fang C, Gilbert M J, Bernevig B A 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 116403
- [35] Liu C X, Zhang R X, van Leeuwen B K 2014 *Phys. Rev. B* **90** 085304
- [36] Sakoda K 2012 *Opt. Express* **20** 3898
- [37] Liu C X, Qi X L, Zhang H, Dai X, Fang Z, Zhang S C 2010 *Phys. Rev. B* **82** 045122
- [38] Chen Z G, Mei J, Sun X C, Zhang X, Zhao J, Wu Y 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043827

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Multiple topological phases in phononic crystals^{*}Chen Ze-Guo Wu Ying[†]*(King Abdullah University of Science and Technology (KAUST), Division of Computer, Electrical and Mathematical Science and Engineering (CEMSE) Thuwal, 23955-6900, Saudi Arabia)*

(Received 31 July 2017; revised manuscript received 27 October 2017)

Abstract

We report a new topological phononic crystal in a ring-waveguide acoustic system. In the previous reports on topological phononic crystals, there are two types of topological phases: quantum Hall phase and quantum spin Hall phase. A key point in achieving quantum Hall insulator is to break the time-reversal (TR) symmetry, and for quantum spin Hall insulator, the construction of pseudo-spin is necessary. We build such pseudo-spin states under particular crystalline symmetry (C_{6v}) and then break the degeneracy of the pseudo-spin states by introducing airflow to the ring. We study the topology evolution by changing both the geometric parameters of the unit cell and the strength of the applied airflow. We find that the system exhibits three phases: quantum spin Hall phase, conventional insulator phase and a new quantum anomalous Hall phase.

The quantum anomalous Hall phase is first observed in phononics and cannot be simply classified by the Chern number or $\mathbb{Z}_2$ index since it results from TR-broken quantum spin Hall phase. We develop a tight-binding model to capture the essential physics of the topological phase transition. The analytical calculation based on the tight-binding model shows that the spin Chern number is a topological invariant to classify the bandgap. The quantum anomalous Hall insulator has a spin Chern number $C_{\pm} = (1, 0)$ indicating the edge state is pseudo-spin orientation dependent and robust against TR-broken impurities.

We also perform finite-element numerical simulations to verify the topological differences of the bandgaps. At the interface between a conventional insulator and a quantum anomalous Hall insulator, pseudo-spin dependent one-way propagation interface states are clearly observed, which are strikingly different from chiral edge states resulting from quantum Hall insulator and pairs of helical edge states resulting from quantum spin Hall insulator. Moreover, our pseudo-spin dependent edge state is robust against TR-broken impurities, which also sheds lights on spintronic devices.

Keywords: phononic crystal, topology, quantum anomalous Hall effect**PACS:** 78.67.Pt, 03.65.Vf, 73.20.At**DOI:** 10.7498/aps.66.227804

^{*} Project supported by King Abdullah University of Science and Technology Baseline Research Fund (Grant No. BAS/1/1626-01-01).

[†] Corresponding author. E-mail: ying.wu@kaust.edu.sa

空间盘绕型声学超材料的亚波长拓扑谷自旋态

郑圣洁 夏百战 刘亭亭 于德介

Subwavelength topological valley-spin states in the space-coiling acoustic metamaterials

Zheng Sheng-Jie Xia Bai-Zhan Liu Ting-Ting Yu De-Jie

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 228101 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.228101

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.228101>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

TATB 晶体声子谱及比热容的第一性原理研究

First-principles study of the phonon spectrum and heat capacity of TATB crystal

物理学报.2016, 65(12): 126301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.126301>

高压下 γ' -Fe₄N 晶态合金的声子稳定性与磁性

Phonon stability and magnetism of γ' -Fe₄N crystalline state alloys at high pressure

物理学报.2015, 64(15): 156301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.156301>

高压下有序晶态合金 Fe₃Pt 的低能声子不稳定性及磁性反常

Low energy phonon instabilities and magnetic abnormalities in ordered crystalline state alloys of Fe₃Pt at high pressure

物理学报.2015, 64(14): 146301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.146301>

固体氩的晶格热导率的非简谐晶格动力学计算

Prediction of lattice thermal conductivity of solid argon from anharmonic lattice dynamics method

物理学报.2013, 62(18): 186302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.186302>

高压下金属 Ba 的结构稳定性以及热动力学的第一原理研究

First principles investigations of the structural stability and thermal dynamical properties of metal Ba under high pressure

物理学报.2012, 61(14): 146301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.146301>

专题: 拓扑经典波动

空间盘绕型声学超材料的亚波长拓扑谷自旋态

郑圣洁 夏百战[†] 刘亭亭 于德介

(湖南大学, 汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 长沙 410082)

(2017年9月29日收到; 2017年11月6日收到修改稿)

声子晶体的 Dirac 线性色散关系, 使其具有奇特的声拓扑特性, 在声波控制领域具有良好的应用前景. 目前, 声子晶体的拓扑边缘态主要基于 Bragg 散射所产生的能带结构, 难以实现低频声波的受拓扑保护单向边缘传输. 本文引入空间盘绕结构, 设计了具有 C_{3v} 对称性的空间盘绕型声学超材料, 并研究其布里渊区高对称点 (K/K' 点) 的亚波长 Dirac 锥形线性色散. 接着, 通过旋转打破空间盘绕型声学超材料的镜像对称性, 使其 Dirac 简并锥裂开而产生亚波长拓扑相变和亚波长拓扑谷自旋态. 最后, 采用拓扑相位互逆的声学超材料构造拓扑界面, 实现声拓扑谷自旋传输. 空间盘绕型声学超材料的亚波长 Dirac 线性色散与亚波长拓扑谷自旋态突破了声子拓扑绝缘体的几何尺寸限制, 为声拓扑稳健传输在低频段的应用提供理论基础.

关键词: 空间盘绕结构, 亚波长声学超材料, Dirac 简并锥, 拓扑谷自旋态

PACS: 81.05.Xj, 43.35.+d, 63.20.-e, 63.20.D-

DOI: 10.7498/aps.66.228101

1 引言

受凝聚态物理领域相关量子自旋霍尔效应 (quantum spin hall effect) 和拓扑绝缘体 (topological insulator) 的影响^[1,2], 研究人员对光子晶体 (photonic crystal) 和声子晶体 (phononic crystal) 等玻色子系统 (Bosonic system) 的拓扑序和受拓扑保护单向边缘传输现象进行了研究^[3-9]. 由于电子传输的电位梯度 (potential gradient) 机理并不适合光子和声子传输, 因此研究人员着力于探讨新的光子和声子拓扑态机理. 外部附加磁场通过破坏光子晶体系统的时间反演对称性 (time reversal symmetry) 最早实现光子拓扑单向边缘传输 (topologically protected one-way edge transmission)^[4,5,9]. 然而强磁场的施加难度较大, 且在光频段, 强磁感材料严重缺乏. 作为替代方案, 系统参数的动态调控通过模拟磁场效应获得了光子拓扑性质^[6,10,11]. 近期, 光双向各异性材料 (optical bianisotropic metamaterial) 类比凝聚态物质的量子自旋霍尔效应, 实现了类石墨烯拓扑绝缘体的强自

旋-轨道交互作用 (spin-orbit interaction)^[7,8,12,13].

由于声波的传播速度远小于光子的传输速度, 因此声子传输的波长更短, 且声子和声子间的交互作用更强^[14]. 此外, 声子的低群速度 (group velocity) 和高密度会带来声子传输路径中缺陷所产生的强后散射现象 (backscattering)^[15]. 拓扑凝聚态物质具有稳健的单向边缘传播, 对缺陷所致的后散射免疫性较强. 因此, 类比光子晶体, 声子晶体的拓扑稳健态 (topologically robust state) 使其对缺陷具有较大的容差. 声极化 (acoustic polarization) 的固有纵向性质使得传统的自旋轨道交互机理难以应用于空气声学. 针对这一现状, 科研人员开展了大量探索性的研究. 在陀螺机械系统中, 陀螺的旋转运动通过模拟磁场效应打破时间反演对称性, 获得了对缺陷和无序免疫的声子螺旋边缘态^[16-18]. 在空气声学系统中, 通过空气的循环流动^[19-23] 在声腔网络中实现了受拓扑保护的单向边缘传输. 然而无论是陀螺旋转还是空气循环, 往往都具有动态不确定性, 并伴随有内在噪声, 而难以应用于实际工程. 最近, 研究人员采用时空调制 (spatiotemporal modulation)^[24] 和

[†] 通信作者. E-mail: xiabz2013@hnu.edu.cn

共振耦合 (resonant coupling) [25] 激化了声网络的拓扑序及相关拓扑稳健边缘态 (topologically robust edge state). 凝聚态物理中, 拓扑绝缘态归因于其固有 $1/2$ 自旋费米子性质 (spin- $1/2$ Fermionic character). 因此, 实现声子拓扑绝缘体的关键是通过引入附加自由度 (additional degree of freedom) 实现 Dirac 锥形色散关系的退化, 以获取自旋态 (spin state). 蜂窝状声子晶体布里渊区 (Brillouin zone) 的高对称角点具有两重简并 (two-fold degeneracies) 的 Dirac 锥 (Dirac cone) [26], 其中心具有四重简并 (four-fold degeneracies) 的双 Dirac 锥 (double Dirac cone) [27–29]. 当六角点阵的空间反演对称性被破坏 (spatial inversion symmetry breaking) 时, Dirac 简并锥附近的能带将经历打开-合并-再打开, 在此过程中伴随的能带反转现象将激化声子拓扑相变 (topological phase transitions) 及相关受拓扑保护单向边缘传输特性 [30–37]. 能带交叉所产生的 Dirac 锥形色散受点群对称性保护. 因此, 除六角点阵以外的其他声子晶体也可能具有线性色散的 Dirac 锥. 在介电棒构造的光子正方形点阵中, 研究人员在布里渊区的高对称边界发现位置可调的 Dirac 锥形色散关系 [38,39]. 打破正方形点阵时间反演对称性, 简并 Dirac 锥将重新打开, 并产生光子陈绝缘体 (Chern insulator) 及相关单向螺旋边缘态 [38,39]. Xia 等 [40] 系统研究了声子正方形点阵中布里渊区高对称边界 Dirac 点与点群对称性之间的关系, 并通过旋转四棱柱打破空间镜像对称性, 获取了声子拓扑相变和拓扑边缘态.

上述声子拓扑绝缘体的能带结构都是基于 Bragg 散射作用, 因此需要采用较大的几何结构才能实现低频拓扑相变和低频拓扑边缘态. 针对这一现状, Simon 等 [41] 利用 Helmholtz 共振结构获取了亚波长 Dirac 简并锥, 并通过打破空间反演对称性, 实现了声子亚波长拓扑稳健传输. Helmholtz 共振声学超材料的主要缺陷是其 Helmholtz 共振单元的能量损耗较高. 针对这一缺陷, 研究人员将空间盘绕结构引入声学超材料, 设计出空间盘绕型声学超材料. 空间盘绕型声学超材料让声波在迷宫状的盘绕结构中绕行传播, 增加总的传播时间, 降低有效相速度 [42,43]. 因此, 本文基于空间点群对称性与声子晶体 Dirac 简并锥之间的关系, 设计了具有 C_{3v} 对称性的空间盘绕型声学超材料, 并在其布里渊区的高对称点 $K(K')$ 成功实现了亚波长 Dirac 简并态. 旋转空间盘绕型声学超材料, 使其对称性

从 C_{3v} 降低为 C_3 , 进而导致 Dirac 简并态退化而产生拓扑谷自旋态, 实现了声子亚波长拓扑谷自旋传输.

2 空间盘绕型声学超材料的几何结构

如图 1(a) 所示, 二维亚波长空间盘绕型声学超材料由可旋转的空间盘绕型圆柱以六角晶格形式在空气中周期性排列构成. 其中, 蓝色部分指代空间盘绕型圆柱, 白色部分指代空气介质. 晶格常数为 $a = |\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = 70$ mm. 图 1(b) 为声学超材料具有代表性的最小重复性单元结构, 即空间盘绕型圆柱单胞. 空间盘绕型圆柱的半径为 $R = 32$ mm, 内部空心圆的半径为 $r = 4$ mm, 空间盘绕型结构的厚度为 $t = 1$ mm. 盘绕型结构内部均匀划分成六个区域. 每个区域由弯曲通道构成, 通道入口处的宽度均为 $w = 1$ mm, 通道间距均为 $d = 2.5$ mm. 每个区域的盘绕数为 $N = 8$, 即声波在该区域的弯曲通道中绕行传播的次数为 8 次. 每相邻的两个区域关于其公共边满足镜像对称性. 空间盘绕型圆柱的框架可看成是刚性固体结构. 空间盘绕型圆柱的旋转角度可定义为 α . 当 $\alpha = 0^\circ$ 时,

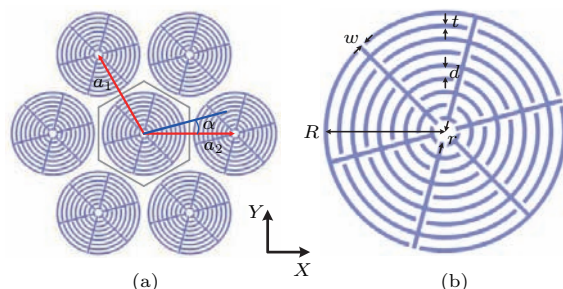


图 1 空间盘绕型声学超材料的几何结构示意图 (a) 空间盘绕型声学超材料以六角晶格形式在空气中周期性分布, 晶格常数 $a = 70$ mm, 图中旋转角度 $\alpha = 15^\circ$; (b) 空间盘绕型声学超材料最小单元的几何结构图, 外圆半径 $R = 32$ mm, 内圆半径 $r = 4$ mm, 通道入口宽度 $w = 1$ mm, 通道间距 $d = 2.5$ mm, 结构壁厚 $t = 1$ mm

Fig. 1. Schematic diagram of the space-coiling structure acoustic metamaterials: (a) The space-coiling acoustic metamaterials are periodically distributed in the air in hexagonal lattice, the lattice constant is $a = 70$ mm, in the figure, the rotation angle is $\alpha = 15^\circ$; (b) geometrical structure of minimal unit of the coiling up space acoustic metamaterials, the radius of the circumference is $R = 32$ mm, the radius of the inner circle is $r = 4$ mm, the channel entrance width is $w = 1$ mm, the channel spacing is $d = 2.5$ mm, the thickness of the structure is $t = 1$ mm.

空间盘绕型圆柱具有三重镜像对称性和三重旋转对称性,与六角晶格的对称性相匹配.此时,本文所设计的空间盘绕型声学超材料具有 C_{3v} 对称性.当空间盘绕型圆柱旋转一定的角度而打破镜像对称性后,声学超材料的 C_{3v} 对称性下降为 C_3 ,即三重旋转对称性.

空间盘绕型声学超材料是让声波在空间盘绕结构中绕行传播,而不是沿直线传播,故声波的传播路径大幅延长,导致声波的有效相速度大幅降低,使得弯曲通道相对于背景空气介质具备更高的折射率.因此,图1中所示的亚波长空间盘绕型声学超材料可等效于具有超慢声速的人造材料. Helmholtz共振型声学超材料可有效地降低能带频段,有效实现声波的亚波长控制.与Helmholtz共振型声学超材料的局域共振机理相比,具有超慢声速的空间盘绕型声学超材料具有其独特的固有属性.作为典型的声学元件, Helmholtz共振腔可视为电磁超材料中的开环谐振器(split-ring resonator).其中, Helmholtz共振腔的短颈和声腔分别作为声质量(可类比电路中的电感)和声容(可类比电路中的电容).受外部激励的作用, Helmholtz共振腔短颈处的空气垂直上下振荡,而将声音辐射到周围介质.因此, Helmholtz共振腔以半球形图案辐射声波,并且可以在低频模拟有效的单极子共振,导致负体积弹性模量以阻塞声音传播.而超慢流体单元不需要两个组件作为开环谐振器,而是利用高折射率颗粒所致的声波散射以激发单极振动模式.其中第一阶单极共振发生在超慢等效声速媒介的有效波长与空间盘绕结构的直径相等时,其振动模式下声波沿着六条通道同步向外辐射.此外,超慢等效声速媒介对空间盘绕结构参数极其敏感,通过改变结构的尺寸可有效的调控空间盘绕型声学超材料的物理性能,为低频宽带可控声拓扑单向边缘传输的实现提供良好的解决方案.

3 空间盘绕型声学超材料的亚波长拓扑谷自旋态

3.1 亚波长 Dirac 能带结构

亚波长空间盘绕型声学超材料以六角晶格形式在二维平面中周期性排布.六角晶格的第一布里渊区如图2(a)中的插图所示.其中,阴影部分表示不可约布里渊区.由于空气与硬声场刚性边界的声

阻抗($Z = \rho c$)存在很大差异,因此声学超材料结构中的剪切模式可以忽略.本文采用有限元分析软件 COMSOL Multiphysics 计算空间盘绕型声学超材料的能带结构.依据空间点群对称性理论,当声学超材料结构的旋转角度为 $\alpha = n\pi/3$ (n 为整数)时,该声学超材料的单胞(空间盘绕型圆柱)具有三重镜像对称性和三重旋转对称性.单胞的此类空间对称性与六角晶格的对称性相匹配,进而使得声学超材料具备 C_{3v} 对称性.此时,声学超材料的能带结构如图2(a)所示.因为受镜像对称性保护和空间盘绕结构机理的影响,在第一布里渊区的高对称角点 $K(K')$ 点形成了亚波长 Dirac 锥,如图2(a)中红

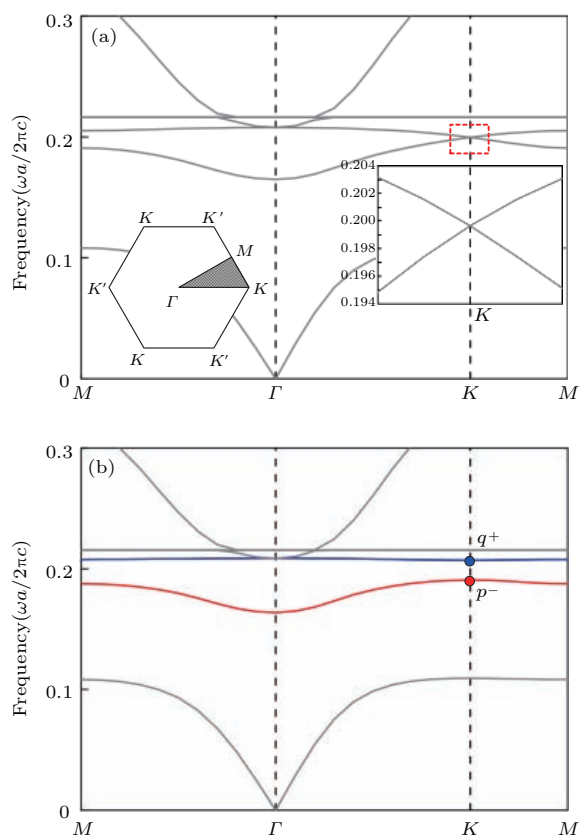


图2 亚波长空间盘绕型声学超材料单胞的能带结构图 (a) 当声学超材料旋转角度 $\alpha = n\pi/3$ (n 为整数)时,单胞的能带结构在 K 点产生亚波长 Dirac 锥; (b) 当声学超材料旋转角度 $\alpha = 15^\circ$ 时,单胞的能带结构在 K 点的亚波长 Dirac 锥打开,形成完全带隙

Fig. 2. Band structure of the unit cell of the subwavelength space-coiling acoustic metamaterials: (a) When the rotation angle of unit cell $\alpha = n\pi/3$ (n is an integer), the bands linearly cross to a subwavelength Dirac degenerated cone at the $K(K')$ points of the Brillouin zone; (b) when the rotation angle of unit cell $\alpha = 15^\circ$, the Dirac degenerated cone will be opened and generate a complete bandgap.

色框所示. 图中亚波长Dirac锥的归一化频率 $\omega a/2\pi c$ 为0.1989 ($\omega/2\pi$ 表示Dirac锥的实际物理频率975 Hz, a 表示晶格常数70 mm, c 表示声音在空气中的传播速度314 m/s).

如图2(b)中的能带结构所示, 当声学超材料向左旋转 15° 时, 布里渊区 K 点的Dirac锥裂开而形成一对频率极值点, 分别标记为红线的 p^- 点和蓝线的 q^+ 点. 在 p^- 点和 q^+ 点之间产生了一段归一化频率为0.1908—0.2071的完全带隙(实际物理频率段是935—1015 Hz). 六角点阵布里渊区 $K(K')$ 点的两重简并Dirac锥受点群镜像对称性保护. 因此, 当声学超材料单胞的旋转角度偏离 $\alpha = n\pi/3$ (n 为整数)时, 单胞结构的镜像对称性与晶格的镜像对称性失配, 使其对称性从 C_{3v} 降低为 C_3 , 进而造成布里渊区 K 点的Dirac锥裂开, 而产生一段完全带隙.

3.2 亚波长声谷态涡流

图3表示布里渊区 K 点的能带极值点频率随旋转角度变化的曲线, 图中的红线和蓝线分别代表 p^- 点和 q^+ 点的频率变化曲线. 声学超材料的单胞旋转角度 α 从 -60° 到 60° 逐渐变化. 从图3可知,

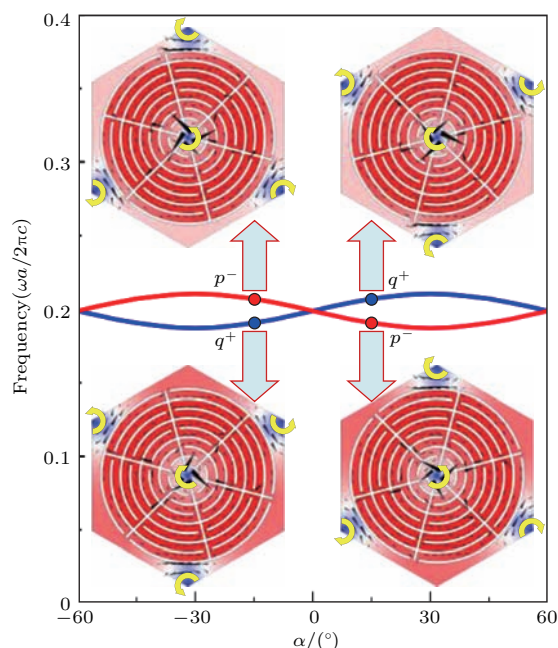


图3 布里渊区角点 K 的带边频率随着声学超材料旋转角度变化的示意图, 插图为旋转角度 $\alpha = \pm 15^\circ$ 时的亚波长声谷态本征场图

Fig. 3. Schematic diagram of the rotation angle of the acoustic metamaterials dependent frequencies for the band-edge at the K -point. When the rotation angle is $\alpha = \pm 15^\circ$, the acoustic topological valley-spin states of unit cell is shown in the illustration.

当单胞从 $\alpha = -60^\circ$ 旋转经过 $\alpha = 0^\circ$, 再旋转到 $\alpha = 60^\circ$ 时, Dirac锥附近的能带结构经历了打开-合并-再打开. 其中, 旋转角度为 $\alpha = \pm 30^\circ$ 时, Dirac简并锥打开的频率范围最宽. 如图3中的插图所示, 当声学超材料处于 $\alpha = -15^\circ$ 时, Dirac简并锥裂开而形成两种亚波长声谷态, 并呈现出两种相反的涡流. 其中, 位于能带上侧的 p^- 点处的涡流具有顺时针手性(六角晶格角点处的涡流), 而位于能带下侧的 q^+ 点处的涡流具有逆时针手性(六角晶格角点处的涡流). 当声学超材料处于 $\alpha = 15^\circ$ 时, p^- 和 q^+ 所代表的拓扑谷自旋态发生了交换, 即具有顺时针手性的 p^- 点位于能带下侧, 而逆时针手性的 q^+ 点位于能带上侧. 当声学超材料的单胞处于正负相反的旋转角度(如 $\alpha = \pm 15^\circ$)时, 其能带结构发生反转, 进而激发出亚波长拓扑相变和亚波长拓扑谷自旋态.

4 空间盘绕型声学超材料的亚波长拓扑谷自旋传输

4.1 亚波长拓扑谷自旋边缘态

亚波长空间盘绕型声学超材料通过旋转来打破空间反演对称性, 产生两种不同手性的拓扑谷自旋态, 并且实现了能带反转, 进而激发出亚波长拓扑相变和亚波长拓扑谷自旋边缘态. 为了研究亚波长拓扑谷自旋边缘态, 本文构建了亚波长空间盘绕型声学超材料的超胞结构. 如图4(b)所示, 超胞结构从上到下分成I-II-I三层, 由29个不同旋转角度的亚波长空间盘绕型圆柱单胞结构组合形成, 其宽度等于晶格常数 $a = 70$ mm, 其长度等于 $15\sqrt{3}a$. 其中, I部分由10个旋转角度为 $\alpha = 15^\circ$ 的亚波长空间盘绕型圆柱单胞组成, II部分由9个旋转角度为 $\alpha = -15^\circ$ 的亚波长空间盘绕型圆柱单胞组成. 在超胞结构的 x 方向构造出I-II和II-I两种不同的拓扑界面. 把具有衰变形式的试探解代入声学超材料的本征问题中, 得到沿拓扑界面 x 方向的边缘态一般形式 $\phi = (\varphi_{p^-}^0 + \varphi_{q^+}^0) e^{i\delta k_x x \pm |m v_D y|}$. 第一布里渊区角点 K 沿 y 的线性色散关系为 $\delta\omega = v_D \delta k_x$, $\varphi_{p^-}^0$ 和 $\varphi_{q^+}^0$ 来自赝自旋退化得到的连续哈密顿量模型 $\delta H = v_D \delta k_x \sigma_x + v_D \delta k_y \sigma_y + m v_D^2 \sigma_z$. 该哈密顿量形式可通过 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ 微扰理论推导得到. 式中 v_D 表示相应锥形色散的Dirac速度, δk_x 和 δk_y 表示 K 点的动量偏差, σ_z 表示赝自旋的泡利矩阵, m 表示有效质量. 当 $e^{m v_D y} = e^{-|m v_D y|}$, 即拓扑边界态从

衰变因子中分离时, 声波可以沿着拓扑界面有效传输. 因此, 由于界面两侧的声学超材料具有相反的亚波长拓扑相位和自旋方向相反的亚波长拓扑谷自旋态, 因此该拓扑界面具有亚波长拓扑谷自旋边缘态.

在超胞结构左右两边加 Floquet 周期性边界条件, 在超胞的上下边界加完美匹配层以构造无限空气声场域, 利用有限元分析软件 COMSOL Multiphysics 计算得到超胞的能带结构, 如图 4(a) 所示. 在归一化频段 0.1913—0.2078 (实际物理频段为 937—1018 Hz) 出现了完全体带隙. 在该体带隙内, 声波将无法在声学超材料内部传播. 与此同时, 图 4(a) 所示的能带结构具有四条边缘能带, 由红线和蓝线所标记. 红线表示能流方向朝右的亚波

长拓扑谷自旋边缘能带, 即声波可在拓扑界面处有效向右传播; 蓝线表示能流方向朝左的亚波长拓扑谷自旋边缘能带, 即声波可在拓扑界面处有效向左传播. 在亚波长拓扑谷自旋边缘态能带结构中 4 个点 L_{II-I} , R_{I-II} , L_{I-II} , R_{II-I} 的本征态如图 4(b) 所示. R_{I-II} 能流方向朝右, L_{I-II} 能流方向朝左, 其声压均只分布在超胞结构的 I-II 拓扑界面处; L_{II-I} 能流方向朝左, R_{II-I} 能流方向朝右, 其声压均只分布在超胞结构的 II-I 拓扑界面处. 因此, 尽管超胞结构能带结构具有一段完全体带隙, 以屏蔽声波在声学超材料内部传输, 但是其亚波长拓扑谷自旋边缘能带, 能有效地诱使声波沿着拓扑界面稳健传输, 而不受外界缺陷和扰动的干扰.

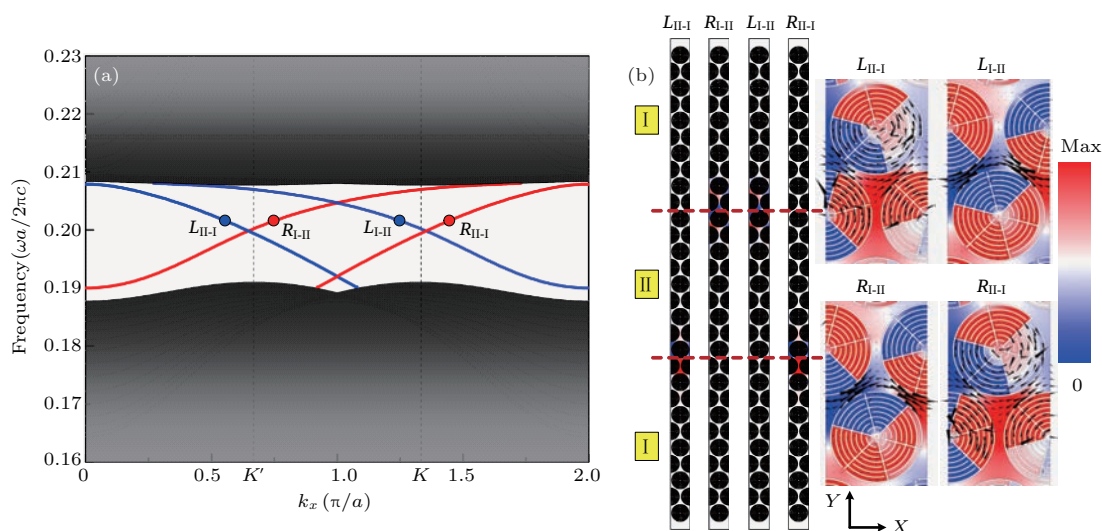


图 4 亚波长拓扑谷自旋边缘态 (a) 空间盘绕型声学超材料超胞的体带结构, 在完全体带隙内有四条边缘能带, 红线表示能流方向朝右, 蓝线表示能流方向朝左; (b) 在亚波长拓扑谷自旋边缘态能带结构中 4 个点 L_{II-I} , R_{I-II} , L_{I-II} , R_{II-I} 的本征态

Fig. 4. Subwavelength topological valley-spin edge state: (a) Bulk band structure of the supercell of acoustic metamaterials has four edge bands in the complete bandgap, the red line indicates the direction of the energy flow to the right; the blue line indicates the direction of the energy flow to the left; (b) there is four points L_{II-I} , R_{I-II} , L_{I-II} , R_{II-I} on the edge bands showing the different subwavelength topological valley-spin edge states.

4.2 亚波长拓扑谷自旋传输的稳健性分析

本文沿着图 5(a) 中黄色虚线构造出一种直线型拓扑界面和另一种具有 120° 急转弯的折线型拓扑界面, 然后用相同的高斯波从界面的左端口入射, 以研究两种不同路径下声波的拓扑传输特性. 当归一化频率为 0.2035 (实际物理频率为 997 Hz) 时, 声场分布图显示声波不仅可以有效地沿直线传播, 而且在经过两个 120° 急转弯后仍可以高效率地传输到出口. 图 5(b) 为利用有限元分析软件

COMSOL Multiphysics 计算得到的声波在两种不同路径下的传输效率. 黑色点线图表示声波沿直线路径传播的传输效率曲线, 红色点线图表示声波沿具有 120° 急转弯的折线路径传播的传输效率曲线. 图中阴影部分表示亚波长拓扑谷自旋边缘能带范围, 其归一化频段为 0.1921—0.2079. 由图 5(b) 可知, 两条曲线在亚波长拓扑谷自旋边缘能带范围拟合较好, 且具有较高的传输效率. 因此, 受亚波长拓扑谷自旋保护, 声波在拓扑界面稳健高效传输, 且对传输路径中弯曲所致的强后散射具有较好的

免疫性. 此外, 由于空间盘绕型圆柱单胞可沿其中心轴自由旋转, 因此本文设计的亚波长空间盘绕型声学超材料不仅突破了一般声子拓扑绝缘体的几

何尺寸限制, 实现声波的亚波长拓扑边缘传输, 还可以通过改变结构旋转角度来构造任意路径的拓扑界面, 以实现声波沿任意路径稳健传输.

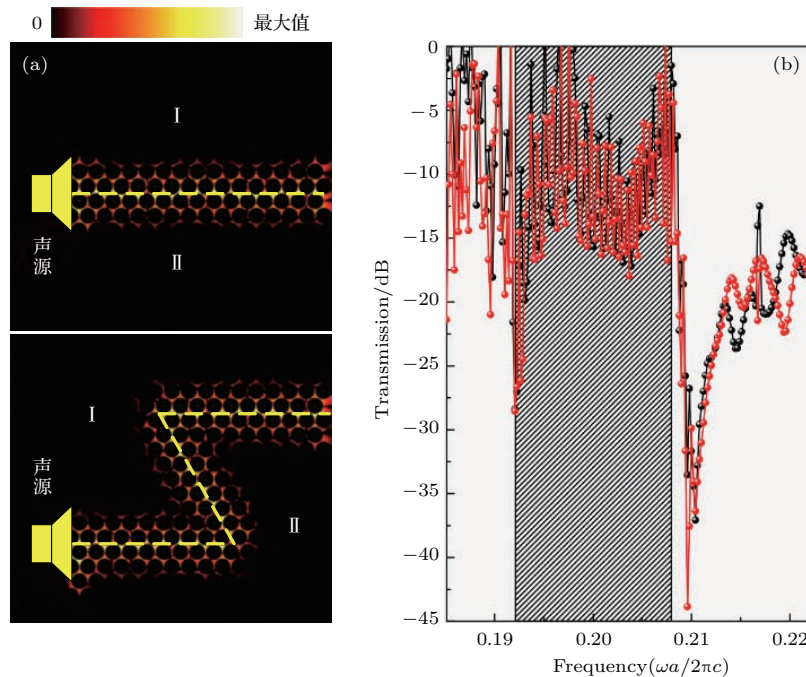


图5 亚波长拓扑谷自旋传输的稳健性分析 (a) 拓扑谷自旋边缘频率为 997 Hz 时 (归一化频率为 0.2035), 两种不同传输路径下的模拟声场图; (b) 两种不同传输路径下的传输效率曲线, 黑色点线图表示沿直线路径传输, 红色点线图表示沿折线路径传输, 阴影部分表示亚波长拓扑谷自旋边缘能带范围

Fig. 5. Robustness analysis of subwavelength topological valley-spin transport: (a) When the frequency is 997 Hz (normalized frequency is 0.2035), simulation of sound field in two different transport paths is shown in the illustration; (b) there are two different transmission efficiency curves with two different paths, the black dotted line indicates that the sound wave transport in a straight path, the red dotted line indicates that the sound wave transport in a zigzag path, the shadow region indicates the range of the topological bandgap.

5 总结

本文在空间盘绕型声学超材料中实现了亚波长 Dirac 锥形色散关系, 并通过打破镜像对称性使得简并的 Dirac 锥重新打开以产生亚波长谷自旋态. 不同拓扑相的声学超材料所构造的拓扑界面具有亚波长拓扑谷自旋边缘态, 可使声波沿拓扑界面稳健传输, 对转角和缺陷等扰动因素所引起的后散射具有良好的免疫性.

由空间盘绕机理可知, 空间盘绕型声学超材料具有超慢声速的特性. 低频波段的拓扑边缘态与慢声效应相结合, 本文提出了一种新的声子拓扑边缘态超慢声速波导. 低频波段的拓扑边缘态相比于高频段的边缘态具有亚波长局域的优势, 有利于慢声波导等声学器件的小型化. 此外, 通过调节声学超材料的尺寸参数, 不仅可以获得更低频率的边缘态、更慢的声速和更长的声子寿命, 还可实现拓扑

边缘态在低频段和高频段的连续可调. 这将预示着亚波长拓扑谷自旋声学超材料有着广泛的应用前景.

本文虽是基于空气声学空间盘绕结构提出了亚波长拓扑谷自旋态, 以此为基础, 借助点群理论和各种亚波长结构, 可有效地发展出亚波长光子拓扑绝缘体和亚波长弹性波拓扑绝缘体等. 此外, 空间盘绕型声学超材料的工作环境是开放性的, 其拓扑声学状态可以耦合到辐射连续体, 为拓扑声学打开了深远的应用前景, 为新一代受拓扑保护的声学泄漏波天线、亚波长成像系统和亚波长振动噪声控制系统提供技术支撑.

参考文献

- [1] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [2] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757

- [3] Lu L, Joannopoulos J D, Soljacic M 2014 *Nat. Photon.* **8** 821
- [4] Wang Z, Chong Y D, Joannopoulos J D, Soljacic M 2009 *Nature* **461** 772
- [5] Poo Y, Wu R X, Lin Z F, Yang Y, Chan C T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 093903
- [6] Fang K J, Yu Z F, Fan S H 2012 *Nat. Photon.* **6** 782
- [7] Hafezi M, Mittal S, Fan J, Migdall A, Taylor J M 2013 *Nat. Photon.* **7** 1001
- [8] Khanikaev A B, Mousavi S H, Tse W K, Kargarian M, MacDonald A H, Shvets G 2013 *Nat. Mater.* **12** 233
- [9] Wu L H, Hu X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 223901
- [10] Fang K J, Fan S H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 203901
- [11] Bandres M A, Rechtsman M C, Segev M 2016 *Phys. Rev. X* **6** 011016
- [12] Cheng X, Jouvaud C, Ni X, Mousavi S H, Genack A Z, Khanikaev A B 2016 *Nat. Mater.* **15** 542
- [13] Ma T, Khanikaev A B, Mousavi S H, Shvets G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 127401
- [14] Wolfe J P 2005 *Imaging Phonons: Acoustic Wave Propagation in Solids* (New York: Cambridge University Press)
- [15] Johnson S G, Povinelli M L, Soljacic M, Karalis A, Jacobs S, Joannopoulos J D 2005 *Appl. Phys. B: Lasers O.* **81** 283
- [16] Süssstrunk R, Huber S D 2016 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **113** E4767
- [17] Nash L M, Kleckner D, Read A, Vitelli V, Turner A M, Irvine W T M 2015 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **112** 14495
- [18] Ong Z Y, Lee C H 2016 *Phys. Rev. B* **94** 134203
- [19] Fleury R, Sounas D L, Sieck C F, Haberman M R, Alù A 2014 *Science* **343** 516
- [20] Yang Z, Gao F, Shi X H, Lin X, Gao Z, Chong Y D, Zhang B 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 114301
- [21] Peng Y G, Qin C Z, Zhao D G, Shen Y X, Xu X Y, Bao M, Jia H, Zhu X F 2016 *Nat. Commun.* **7** 13368
- [22] Chen Z G, Wu Y 2016 *Phys. Rev. Appl.* **5** 054021
- [23] He C, Li Z, Ni X, Sun X C, Yu S Y, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Appl. Phys. Lett.* **108** 031904
- [24] Fleury R, Khanikaev A B, Alù A 2016 *Nat. Commun.* **7** 11744
- [25] Wei Q, Tian Y, Zuo S Y, Cheng Y, Liu X J 2017 *Phys. Rev. B* **95** 094305
- [26] Lu J Y, Qiu C Y, Xu S J, Ye Y T, Ke M Z, Liu Z Y 2014 *Phys. Rev. B* **89** 134302
- [27] Chen Z G, Ni X, Wu Y, He C, Sun X C, Zheng L Y, Lu M H, Chen Y F 2014 *Sci. Rep.* **4** 4613
- [28] Li Y, Wu Y, Mei J 2014 *Appl. Phys. Lett.* **105** 014107
- [29] Dai H Q, Liu T T, Jiao J R, Xia B Z, Yu D J 2017 *J. Appl. Phys.* **121** 135105
- [30] Xiao M, Ma G C, Yang Z Y, Sheng P, Zhang Z Q, Chan C T 2015 *Nat. Phys.* **11** 240
- [31] He C, Ni X, Ge H, Sun X C, Chen Y B, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Nat. Phys.* **12** 1124
- [32] Lu J Y, Qiu C Y, Ye L P, Fan X Y, Ke M Z, Zhang F, Liu Z Y 2017 *Nat. Phys.* **13** 369
- [33] Lu J Y, Qiu C Y, Ke M Z, Liu Z Y 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 093901
- [34] Ye L P, Qiu C Y, Lu J Y, Wen X H, Shen Y Y, Ke M Z, Zhang F, Liu Z Y 2017 *Phys. Rev. B* **95** 174106
- [35] Zhang Z W, Wei Q, Cheng Y, Zhang T, Wu D J, Liu X J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 084303
- [36] Xia B Z, Liu T T, Huang G L, Dai H Q, Jiao J R, Zang X G, Yu D J, Zheng S J, Liu J 2017 *Phys. Rev. B* **96** 094106
- [37] Mei J, Chen Z G, Wu Y 2016 *Sci. Rep.* **6** 32752
- [38] Skirlo S A, Lu L, Soljacic M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 113904
- [39] He W Y, Chan C T 2015 *Sci. Rep.* **5** 8186
- [40] Xia B Z, Zheng S J, Chen N, Liu T T, Jiao J R, Dai H Q, Yu D J, Liu J 2017 arXiv preprint arXiv:1706.08206
- [41] Simon Y, Fleury R, Lemoult F, Fink M, Lerosey G 2017 *New J. Phys.* **19** 075003
- [42] Xia B Z, Li L P, Liu J, Yu D J 2017 *J. Vib. Acoust.* **140** 011011
- [43] Liu J, Li L P, Xia B Z, Man X F 2017 *Int. J. Solids. Struct.* (Accept)

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Subwavelength topological valley-spin states in the space-coiling acoustic metamaterials

Zheng Sheng-Jie Xia Bai-Zhan[†] Liu Ting-Ting Yu De-Jie

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha 410082, China)

(Received 29 September 2017; revised manuscript received 6 November 2017)

Abstract

Phononic crystals possess Dirac linear dispersion bands. In the vicinity of Dirac cones, phononic crystals exhibit topological properties which have good application prospects in control of acoustic waves. Up to now, the topological edge states of phononic crystals, based on the band structures arising from the Bragg scattering, cannot realize low-frequency sound waves by the topologically protected one-way edge transmission. In this paper, by introducing the space-coiling structure, a space-coiling phononic metamaterial with C_{3v} symmetry is designed. At the $K(K')$ points of the Brillouin zone, the bands linearly cross to a subwavelength Dirac degenerated cones. With a rotation of the acoustic metamaterials, the mirror symmetry will be broken and the Dirac degenerated cones will be reopened, leading to subwavelength topological phase transition and subwavelength topological valley-spin states. Lastly, along the topological interface between acoustic metamaterials with different topological valley-spin states, we successfully observe the phononic topologically valley-spin transmission. The subwavelength Dirac conical dispersion and the subwavelength topological valley-spin state breakthrough the limitation of the geometric dimension of the phononic topological insulator, and provide a theoretical basis for the application of the phononic topologically robust transmission in a subwavelength scale.

Keywords: space-coiling structure, subwavelength acoustic metamaterials, Dirac degenerated cone, topological valley-spin state

PACS: 81.05.Xj, 43.35.+d, 63.20.-e, 63.20.D-

DOI: 10.7498/aps.66.228101

[†] Corresponding author. E-mail: xiabz2013@hnu.edu.cn