

自旋为 1 的粒子的电磁结构*

时学丹 罗遼复 黄念宁

(内蒙古大学物理系)

提 要

利用强相互作用的不变性,通过普洛卡(Proca)方程,决定任意具有强相互作用的自旋为 1 的粒子的一般电磁结构的可能的形状因子。由此计算了电子与氘核的散射的微分截面。结果可用于自旋为 1 的粒子的电磁结构的实验分析。

近年来由于电子加速器的技术的进展,高能电子与核子和原子核的散射实验,已成为决定核子和核的电磁结构的最重要的方法^[1]。为此目的,在理论上首先要求决定具有一定自旋的粒子或核的电磁结构的可能形状因子。由于强相互作用的影响,我们不能从拉格朗日函数的简单形状出发。自然人为的假定电磁相互作用的形状因子也不合乎理论上严格的要求。为了克服这些困难,近几年来,在决定核子的电磁结构的可能的形状因子时,发展起来了一种以强相互作用在本征洛伦兹变换下、空间反射及时间反演下的不变性为根据,利用狄喇克方程来决定自旋为 1/2 的粒子的可能的电磁结构的方法。结果表明,自旋为 1/2 的粒子只可能具有相当电荷分布及反常磁矩分布的形状因子^[2]。自旋为 0 的粒子自然只可能具有相当电荷分布的形状因子^[3]。

显然,进一步的工作首先将决定自旋为 1 的粒子的电磁结构的可能的形状因子。叶尼等曾经在他們关于核子电子结构的一篇文章^[4]的附录中,稍稍涉及了高自旋粒子的可能的电磁结构的问题。由于他們从三维空间转动群的观点出发,因而不得不采取一个奇特的坐标系,即所谓布莱特(Breit)坐标系,由于这种描写方式是非协变的,以及相对论粒子在洛伦兹变换下自旋转动的性质^[5],如果要换算到物理上采用的坐标系,例如质心系或实验室系中,结果看来十分繁琐。而且这样定义下的形状因子,不知相当物理上的何种电磁结构。看来这样定义下的电磁结构的可能的形状因子,即使由实验决定了,也很难有助于电磁结构理论解释上的考虑。

这样,我们从洛伦兹群的角度出发,由普洛卡方程的变换性质,采取与用狄喇克方程的变换性质来决定自旋为 1/2 的粒子的电磁结构相似的方法,决定自旋为 1 的粒子的电磁结构的可能的形状因子。这种决定方式是协变的,因而可用于任何洛伦兹系中。而且在物理意义上完全清楚,这里定义的形状因子相应于电荷分布,磁矩分布和电四极矩分布。因此由实验定出的这些形状因子将在自旋为 1 的粒子的电磁结构的理论考虑上,有着重要的作用。

* 1960 年 2 月 20 日收到。

这里应当強調一下,我們所用到的只是非均匀洛仑兹羣的不可約表示。这种不可約表示可用于任何具有确定自旋与质量的微观物理系統。所以我們的結果是对任何自旋为 1 的基本粒子和复合粒子都是可用的。

作为决定自旋为 1 的粒子的电磁結構的實驗可能方式,我們計算了电子与氘核或其他自旋为 1 的核的散射的微分截面。

二、

在粒子与电磁相互作用时,粒子的电磁結構反应在下列矩陣元之中:

$$\langle p's' | J_\rho(0) | ps \rangle \quad (1)$$

$|ps\rangle, |p's'\rangle$ 表示物理粒子的始末态,所謂物理粒子态即包含一切相互作用的本征态, $p, s; p', s'$, 分別表示粒子始末态的动量和自旋, J_ρ 是一切強作用粒子的中流算符。

和决定自旋为 1/2 的粒子的电磁形状因子所用的考虑一样,对自旋为 1 的粒子,我們选用普洛卡表示,这样有

$$\langle p's' | J_\rho(0) | ps \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2(E'E)^{1/2}} e'_\mu J_{\rho\mu\nu} e_\nu, \quad (2)$$

式中 E, E' 分別表始末态粒子的能量, e_ν 和 e'_μ 表示自旋矢量, $J_{\rho\mu\nu}$ 是始末态粒子的动量的函数:

$$J_{\rho\mu\nu} = J_{\rho\mu\nu}(p', p). \quad (3)$$

引入两个矢量:

$$\begin{aligned} P &= p' + p \\ q &= p' - p \end{aligned} \quad (4)$$

并且为方便起見,引入

$$\begin{aligned} \xi_{\mu\nu} &= e'_\mu e_\nu - e'_\nu e_\mu, \\ \eta_{\mu\nu} &= e'_\mu e_\nu + e'_\nu e_\mu. \end{aligned} \quad (5)$$

这样

$$e'_\mu J_{\rho\mu\nu} e_\nu \sim \xi_{\mu\nu} F_{\rho\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} G_{\rho\mu\nu}. \quad (6)$$

式中 $\sim$ 表示双方相等至一个标量因子以內。由于 $\xi_{\mu\nu}$ 是反对称的, $\eta_{\mu\nu}$ 是对称的, 因此

$$\begin{aligned} F_{\rho\mu\nu} &= -F_{\rho\nu\mu}, \\ G_{\rho\mu\nu} &= G_{\rho\nu\mu}. \end{aligned} \quad (7)$$

現在我們来找寻 F 与 G 的所有可能形式, 这只要根据上列对称及反对称的性質由 P 及 q 构成即得:

$F_{\rho\mu\nu}$ 的可能形式:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \delta_{\rho\mu} P_\nu - \delta_{\rho\nu} P_\mu, \\ \text{(II)} \quad & \delta_{\rho\mu} q_\nu - \delta_{\rho\nu} q_\mu, \\ \text{(III)} \quad & P_\rho (P_\mu q_\nu - P_\nu q_\mu), \\ \text{(IV)} \quad & q_\rho (P_\mu q_\nu - P_\nu q_\mu); \end{aligned} \quad (8)$$

$G_{\rho\mu\nu}$ 的可能形式:

$$\text{(V)} \quad P_\rho \delta_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}
(\text{VI}) \quad & q_\rho \delta_{\mu\nu} \\
(\text{VII}) \quad & P_\rho P_\mu P_\nu \\
(\text{VIII}) \quad & q_\rho P_\mu P_\nu \\
(\text{IX}) \quad & P_\rho q_\mu q_\nu \\
(\text{X}) \quad & q_\rho q_\mu q_\nu \\
(\text{XI}) \quad & P_\rho (q_\mu q_\nu + P_\nu q_\mu) \\
(\text{XII}) \quad & q_\rho (P_\mu q_\nu + P_\nu q_\mu)
\end{aligned} \tag{9}$$

在討論反演性之前,首先注意,在普洛卡表示中,有

$$ep = e'p' = 0. \tag{10}$$

这样,不难看出,上列(XI)和(XII)项当乘以 $\eta_{\mu\nu}$ 时为 0,因此应当删去. 而(III),(VII),(IX)也不独立,而应归并,因为

$$\xi_{\mu\nu} P_\mu q_\nu = -\eta_{\mu\nu} P_\mu P_\nu = \eta_{\mu\nu} q_\mu q_\nu. \tag{11}$$

同样(IV),(VIII),(X)也应归并. 这样我們只需研究(I),(II),(V),(VI),(IX),(X).

現在我們利用反演不变性来更进一步的限制 F 和 G 的可能形式. 在空間反演下,动量 p 和 p' 变为

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &\rightarrow -\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}' \rightarrow -\mathbf{p}', \\
p_4 &\rightarrow p'_4, \quad p'_4 \rightarrow p_4;
\end{aligned} \tag{12}$$

在時間反演下,則

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &\rightarrow -\mathbf{p}', \quad \mathbf{p}' \rightarrow -\mathbf{p}, \\
p_4 &\rightarrow p'_4, \quad p'_4 \rightarrow p_4.
\end{aligned} \tag{13}$$

这样,立即看到,在空間反演下,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &\rightarrow -\mathbf{P}, \quad \mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}, \\
P_4 &\rightarrow P_4, \quad q_4 \rightarrow q_4;
\end{aligned} \tag{14}$$

而在時間反演下,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &\rightarrow -\mathbf{P}, \quad \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}, \\
P_4 &\rightarrow P_4, \quad q_4 \rightarrow -q_4.
\end{aligned} \tag{15}$$

至于自旋矢量的反演性質,我們利用两个条件来确定,自旋矢量的空間分量的反演性質由通常方法确定,即在空間反演下不变,在時間反演下为 $\mathbf{e} \rightarrow -\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}' \rightarrow -\mathbf{e}$. 而時間分量的反演性,利用

$$ep = e'p' = 0 \tag{10}$$

来确定,即在空間反演下, $e_4 \rightarrow -e_4$, $e'_4 \rightarrow -e'_4$; 在時間反演下, $e_4 \rightarrow e'_4$, $e'_4 \rightarrow e_4$. 由此得知,在空間反演下,

$$\begin{aligned}
\xi_{ij} &\rightarrow \xi_{ij}, \quad \eta_{ij} \rightarrow \eta_{ij}, \quad \eta_{44} \rightarrow \eta_{44}, \\
\xi_{i4} &\rightarrow -\xi_{i4}, \quad \eta_{i4} \rightarrow -\eta_{i4};
\end{aligned} \tag{16}$$

在時間反演下

$$\begin{aligned}
\xi_{ij} &\rightarrow -\xi_{ij}, \quad \eta_{ij} \rightarrow \eta_{ij}, \quad \eta_{44} \rightarrow \eta_{44}, \\
\xi_{i4} &\rightarrow \xi_{i4}, \quad \eta_{i4} \rightarrow -\eta_{i4}.
\end{aligned} \tag{17}$$

由于电流矢量在空間与時間反演下的性質分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\rightarrow -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J} \rightarrow -\mathbf{J}, \\ J_4 &\rightarrow J_4; \quad J_4 \rightarrow J_4. \end{aligned} \quad (18)$$

这样,要求在空間反演下

$$\begin{aligned} \xi_{\mu\nu} F_{i\mu\nu} &\rightarrow -\xi_{\mu\nu} F_{i\mu\nu}, \\ \xi_{\mu\nu} F_{4\mu\nu} &\rightarrow \xi_{\mu\nu} F_{4\mu\nu}; \end{aligned} \quad (19)$$

在時間反演下

$$\begin{aligned} \xi_{\mu\nu} F_{i\mu\nu} &\rightarrow -\xi_{\mu\nu} F_{i\mu\nu}, \\ \xi_{\mu\nu} F_{4\mu\nu} &\rightarrow \xi_{\mu\nu} F_{4\mu\nu}. \end{aligned} \quad (20)$$

$\eta_{\mu\nu} G_{\rho\mu\nu}$ 的性质也是如此。这样,立即看到,只有(II), (V), (IX)合乎要求。

最后,应当利用电荷守恒的条件,或电流的連續性方程

$$q_\rho J_{\rho\mu\nu} = 0 \quad (21)$$

来檢驗上述的可能項。不难看出, (II), (V), (IX) 都与此条件无冲突。

这样,我們即求得了电流矩陣元的可能形式,按物理上的要求略加組合,取为

$$\begin{aligned} \langle p's' | J_\rho(0) | ps \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e}{2(E'E)^{1/2}} \left\{ P_\rho e'_\mu e_\mu F_1(q^2) - 2x \xi_{\rho\sigma} q_\sigma F_M(q^2) \right. \\ &\quad \left. + Q P_\rho \left[\frac{3}{2} (\eta_{\mu\nu} q_\mu q_\nu) - q^2 e'_\mu e_\mu \right] F_2(q^2) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

式中 e 是电荷, x 是磁矩(不是反常磁矩), Q 是电四极矩。 $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$ 及 $F_M(q^2)$ 为洛仑兹不变量,是电磁結構的可能的形状因子, F_1 相应于电荷分布, F_2 相应于电四极矩分布,而 F_M 相应于磁矩分布。通过略为瑣碎的計算,上列式子在非相对論近似下过渡到通常包含有四极矩的表达式。

三、

作为决定自旋为 1 的粒子的可能的电磁結構因子的实验的可能方式,我們計算电子与氘核或其他自旋为 1 的核的弹性散射的微分截面。

在交換一个虛光子的近似下,电子与氘核散射的 $R = S - 1$ 矩陣为

$$\begin{aligned} \langle k', r'; p', s' | k | k, r; p, s \rangle &= \\ &= - \iint dx dy \langle p', s' | J_\mu(x) | p, s \rangle \frac{1}{i} D_c(x-y) \langle k', r' | j_\mu(y) | k, r \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $k, r; k', r'$ 为入射和出射电子的动量和自旋, $p, s; p', s'$ 为氘核的动量和自旋, $j_\mu(y)$ 是电子正电子場的电流算符,在最低級近似下:

$$\begin{aligned} \langle k', r' | j_\mu(y) | k, r \rangle &= \\ &= -ie \frac{1}{(2\pi)} \left(\frac{\mu^2}{\omega'\omega} \right)^{\frac{1}{2}} u_r(\mathbf{k}') r_\mu u_r(\mathbf{k}) e^{iy(k-k')} \end{aligned} \quad (24)$$

式中 ω', ω 为电子的能量, μ 为电子的质量。 $J_\mu(x)$ 是一切具有强作用的粒子場的电流算符,由平移不变性,知:

$$J_\mu(x) = e^{-ix\mathfrak{P}} J_\mu(0) e^{ix\mathfrak{P}},$$

式中 $\mathfrak{P}$ 为总动量算符。这样,

$$\langle p', s' | J_\mu(x) | p, s \rangle = \langle p', s' | J_\mu(0) | p, s \rangle e^{iy(p-p')}. \quad (25)$$

由(22)式决定 $\langle p', s' | J_\mu(0) | p, s \rangle$.

把(24), (25)代入(23)式, 得

$$\begin{aligned} \langle k', r'; p', s' | k | k, r; p, s \rangle &= \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^2} \delta(p+k-p'-k') \left(\frac{\mu^2}{4\omega'\omega E'E} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{q^2} F(p', k', p, k), \end{aligned} \quad (26)$$

$$F(p', k', p, k) = J_{\mu\nu r}(\mathbf{k}') r_{\mu\nu r}(\mathbf{k}), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} J_\mu &= \left\{ P_\mu e'_\sigma e_\sigma F_1(q^2) - 2x \hat{\epsilon}_{\mu\sigma} q_\sigma F_\mu(q^2) + \right. \\ &\quad \left. + Q P_\mu \left[\frac{3}{2} (\eta_{\sigma\rho} q_\sigma q_\rho) - q^2 e'_\sigma e_\sigma \right] F_2(q^2) \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

在质心系, 微分截面为

$$\frac{d\sigma}{de} = \left(\frac{e^2 \mu}{16\pi \nu \omega E k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \frac{1}{2} \sum_{r, r'} |F|^2, \quad (29)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r, r'} |F|^2 &= \frac{1}{2\mu^2} \{ -(J \cdot J)(k' \cdot k) + 2(J \cdot k')(J \cdot k) \} = \\ &= \frac{1}{2\mu^2} \{ F_1^2 A_1 + F_2^2 A_2 + F_M^2 A_3 + F_1 F_2 A_4 + F_1 F_M A_5 + F_2 F_M A_6 \}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $A_1, A_2, \dots$ 表示下式:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ -(p' + p)^2 (k' \cdot k) + 2[cp' + p] \cdot k' [(p' + p) \cdot k] \} (e' \cdot e)^2, \\ A_2 &= Q^2 \{ -(p' + p)^2 (k' \cdot k) + 2[(p' + p) \cdot k'] [(p' + p) \cdot k] \times \\ &\quad \times [3(e' \cdot p)(e \cdot p') + (p' - p)^2 (e' \cdot e)]^2, \\ A_3 &= 4x^2 \{ -(k' \cdot k) [(e \cdot p')^2 + (e' \cdot p)^2 - 2(e' \cdot e)(e' \cdot p)(e \cdot p')] + \\ &\quad + 2[(e' \cdot k)(e \cdot p') + (e' \cdot p)(e \cdot k)] [(e' \cdot k')(e \cdot p') + (e' \cdot p)(e \cdot k')] \}, \\ A_4 &= Q \{ (k' \cdot k)(p' + p)^2 (e' \cdot e) [3(e' \cdot p)(e \cdot p') + (p' - p)^2 (e' \cdot e)] + \\ &\quad + 2(p' + p)^2 (e' \cdot e) [3(e' \cdot p)(e \cdot p') + (p' - p)^2 (e' \cdot e)] \}, \\ A_5 &= -4x [(p' + p) \cdot k] [(e' \cdot k')(e \cdot p') + (e' \cdot p)(e \cdot k')] + \\ &\quad + [(p' + p) \cdot k'] [(e' \cdot k)(e \cdot p') + (e' \cdot p)(e \cdot k)] (e' \cdot e), \\ A_6 &= 4x Q \{ [(p' + p) \cdot k] [(e' \cdot k')(e \cdot p') + (e' \cdot p)(e \cdot k')] + \\ &\quad + [(p' + p) \cdot k'] [(e' \cdot k)(e \cdot p') + (e' \cdot p)(e \cdot k)] \} \times \\ &\quad \times [3(e' \cdot p)(e \cdot p') + (p' - p)^2 (e' \cdot e)], \end{aligned} \quad (31)$$

结果看来相当繁复, 没有必要再将上式写成三维乘积的形式。但是上式中四维形式的自旋矢量化为三维形式时应注意 $e_\mu e_\mu = 1$ 及 $e_\mu p_\mu = 0$,

即

$$\begin{aligned} e_4 &= i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}}{E}, \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} - \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}}{E} \right)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (32)$$

对横向极化矢量 $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}$ 和纵向极化 $\mathbf{e}^{(3)}$, 分别为

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{p} &= \mathbf{e}^{(2)} \cdot \mathbf{p} = 0, \\
\mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{e}^{(1)} &= \mathbf{e}^{(2)} \cdot \mathbf{e}^{(2)} = 1, \\
\mathbf{e}^{(3)} \cdot \mathbf{p} &= \frac{E p}{M}, \\
\mathbf{e}^{(3)} \cdot \mathbf{e}^{(1)} &= \frac{E^2}{M^2}.
\end{aligned} \tag{33}$$

式中 $p \equiv |\mathbf{p}|$.

在计算非极化散射时,应当对 $A_1, A_2, \dots$ 中的初态的自旋求平均,对末态的自旋求和. 例如 A_1 应当换成

$$\frac{1}{3} \sum_{s's} A_1 \tag{34}$$

等等.

这样,我们需要求出的有

$$\frac{1}{3} \sum_{s's} (\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e})^2 = \frac{1}{3} \left[(1 + \cos^2 \theta) + \frac{P^4}{M^4} + \frac{2E^2}{M^2} \sin^2 \theta + \frac{E^4}{M^4} \cos^2 \theta - 2 \frac{E^2 P^2}{M^4} \cos \theta \right], \tag{35}$$

$$\frac{1}{3} \sum_{s's} (e p')^2 = \frac{1}{3} \left[P^2 \sin^2 \theta + \frac{E^2 P^2}{M^2} (1 + \cos^2 \theta) - \frac{2E^2}{M^2} P^2 \cos \theta \right], \tag{36}$$

以及相应的 $\frac{1}{3} \sum_{s's} (\mathbf{e}' p)^2$ 项,做适当置换即可. 实际上

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \sum_{s's} (\mathbf{e}' p)^2 &= \frac{1}{3} \sum_{s's} (e p')^2, \\
\frac{1}{3} \sum_{s's} (e p') (e' p) (e' e) &= \frac{1}{3} \left[-P^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{2PE^2}{M^2} \sin \theta (P \cos \theta - 1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{P^2 E^2}{M^2} (\cos \theta - 1)^2 (E^2 \cos \theta - P^2) \right], \\
\frac{1}{3} \sum_{s's} (e' k) (e' k') (e p') (e p) &= \\
&= \frac{1}{3} \left[p^4 \sin^4 \theta + \frac{p^4}{M} (E \cos \theta + \omega) \sin^3 \theta + \frac{p^4 E}{M^3} (E \cos \theta + \omega) (\cos \theta - 1)^2 \sin \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{p^4 E^2}{M^4} (E \cos \theta + \omega)^2 (\cos \theta - 1)^2 \right],
\end{aligned} \tag{37}$$

以及相应的各项:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} \sum_{s's} (e k) (e' k') (e p') (e' p), \\
&\frac{1}{3} \sum_{s's} (e' k) (e k') (e p') (e' p), \\
&\frac{1}{3} \sum_{s's} (e k') (e k) (e' p) (e' p)
\end{aligned}$$

做适当的置换,即可得到.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \sum_{s's} (e'e)(e'k)(ep') \\ &= \frac{1}{3} \left[p^2 \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{p^2 E}{M^2} \sin^2 \theta (E \cos \theta - p) - \frac{E p^2}{M^2} \sin^2 \theta (E \cos \theta + \omega) \right. \\ & \quad \left. - \frac{p^2}{M^4} (E^2 \cos \theta - p^2)(E \cos \theta + \omega)(E \cos \theta - p) \right] \end{aligned} \quad (39)$$

以及相应的项:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \sum_{s's} (e'e)(ek)(e'p), \\ & \frac{1}{3} \sum_{s's} (e'e)(e'k')(ep'), \\ & \frac{1}{3} \sum_{s's} (e'e)(e'p)(ek'). \end{aligned}$$

做适当的置换即可得到.

最后,对我系同志的支持和鼓励表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- [1] Hoftadter, R., *Rev. Mod. Phys.* **28** (1956), 214.
- [2] Foldy, L. L., *Phys. Rev.* **74** (1952), 939.
- [3] 例如参看[4].
- [4] Yennie, D. R., Levy, M. M., Ravenhall, D. G., *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957), 144.
- [5] Wigner, E. P., *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957), 255.

ЭЛЕКТРО-МАГНИТАЯ СТРУКТУРА ДЛЯ ЧАСТИЦ СПИНА 1

Ши Шюо-дан Ло Ля-фу Хуан Нянь-нин

(Университет Внутренней Монголии)

Резюме

С помощью инвариантности сильного взаимодействия, исходя из уравнения Прока, общие возможные форм-факторы для любых частиц спина 1, имеющих сильные взаимодействия, определены. Вычислено дифференциальное сечение рассеяния электронов на дейтронах. Вывод может использовать для экспериментального анализа электро-магнитных структур частиц спина 1.