

等时性迴旋加速器中的不等时现象*

方守賢 魏开煜

提 要

本文研究了等时性迴旋加速器中,自由振蕩对粒子繞圈頻率的影响。获得了粒子繞圈頻率与自由振蕩振幅的依賴关系。对电子计算机計算結果的分析表明,这种不等时现象主要是由于沿径向增长的平均磁場作用引起的,而周期性調变磁場的影响可以被忽略。在本文中也指出了由于这一效应的存在,D盒間最低加速电压必需增加。

一、引 言

等时性迴旋加速器的等时性是指:当被加速粒子严格地沿着理想的平衡軌道运动时,每繞一圈所需的时间是不随质量的增长而有所改变的。即在整个加速过程中,准确地与高频电場同步,实行所謂等时性加速。这种严格沿着平衡軌道运行的粒子通常称为平衡粒子。但是,众所周知,在实际的加速器中,即使在磁場及高频完全达到理想值的情况下,这种平衡粒子也是很少或甚至不存在的。真正被加速的絕大部分都属于非平衡粒子。它們并不沿着理想的平衡軌道运行,而是繞着它作小振幅的自由振蕩。因此就产生了这样的問題,即非平衡粒子是否也能滿足等时性要求;換言之,它們是否也与平衡粒子具有相同的繞圈頻率呢?这个問題在能量較低的等时性迴旋加速器中还不十分严重,因此也就往往被人們所忽略。但是在設計能量較高(300 Mev 以上)的等时性迴旋加速器时,就不能不对这一問題进一步注意。1960年,苏联联合原子核研究所特米脫利也夫斯基(B. П. Дмитриевский)教授首先对这个問題提出怀疑,但是,当时沒有得到証实。

在等时性迴旋加速器中,由于非平衡粒子与平衡粒子繞圈頻率的差別往往发生在第四或第五位有效数字上,因此在理論上研究这一問題时,必須要求所求得之粒子的繞圈頻率准确到五位有效数字以上。一般所采用的綫性及非綫性近似方法,都远远不能滿足这一要求。而如果利用电子计算机作数值計算,其所得結果亦要求采用正确的平均方法,否則得不到正确的結論。

本文中首先利用了分析方法求得了純平均磁場作用下(即調变場为零)粒子繞圈頻率的精密解。然后配合以电子计算机的計算进一步分析;发现在等时性迴旋加速器中,非平衡粒子的繞圈頻率將依賴于自由振蕩的振幅。即破坏了严格的等时性条件。考其主要原因是由于平均磁場沿半径的变化,而周期性調变磁場只可能引起非平衡粒子个别繞圈时间的起伏,但其經常性的平均效应可以被忽略不計。

由于粒子繞圈頻率对自由振蕩振幅的依賴,为了确保等时性迴旋加速器的束流强度

* 1962年11月9日收到。

達到一定水平，必須採取相應的措施，例如設法減小自由振蕩的起始振幅，加嚴各種技術公差，或者提高加速電壓等等。

在本文的第五節中，列舉了在各種不同能量時，把一定振幅範圍內的粒子剛剛加速到最終能量所需的最低電壓（即滑相至 90° ），以及一般實際上所需要的電壓（滑相至 60° ）。例如，對於能量為 850 Mev 的質子加速器，為了使振幅在 2.5 cm 以內的粒子加速到最終能量，最低電壓竟達每圈 530 Kv，實際上所需要採用的電壓應該大於每圈 750 Kv。

二、運動方程

我們採用圓柱形坐標系 (r, φ, z) ，在此系統中，帶電粒子在磁場內運動的方程為

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{e}{mc} (r\dot{\varphi}H_z - zH_\varphi), \quad (1.1a)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{e}{mc} (zH_r - rH_z), \quad (1.1b)$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{mc} (rH_\varphi - r\dot{\varphi}H_r), \quad (1.1c)$$

式中 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 是粒子的質量， e 為電荷， c 為光速， H_r, H_φ, H_z 分別為磁場沿

r, φ, z 三個方向的分量， $\beta = \frac{v}{c}$ ， v 是粒子的速度。式中“ $\cdot$ ”表示對時間 t 微分。

在本文中，我們只限於討論在中心平面內運動的粒子（ $z = \dot{z} = 0$ ）。這時上列方程簡化為二維空間表示式：

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{e}{mc} r\dot{\varphi}H_z, \quad (1.2a)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -\frac{e}{mc} rH_z, \quad (1.2b)$$

及

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = v^2. \quad (1.3)$$

我們可以利用上面三式中任何兩個式子來研究粒子的運動規律。對於等時性迴旋加速器來說，中心平面內的 H_z 都可以寫成下列形式：

$$H_z(r, \varphi, 0) = \frac{H_0}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R_\infty^2}}} \left[1 + \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon_N(r) \sin(\Theta_N(r) - N\varphi) \right], \quad (1.4)$$

式中 H_0 為中心場強， $\varepsilon_N(r)$ 及 $\Theta_N(r)$ 為調變磁場第 N 次諧波的相對幅度與相角。式中前一部分即為平均磁場。

目前，要想直接利用分析方法求得具有上列磁場形式下方程組(1.2),(1.3)的精確解是不可能的。因而，下面將分為兩個步驟來解決這一問題。首先我們利用分析方法來研究在純平均磁場作用下的情況，然後再配合以電子計算機的計算來分析平均場與調變場的共同作用。

三、純平均磁場作用下粒子繞圈頻率的分析

在等时性迴旋加速器中,引起繞圈頻率差別的根本原因是:自由振蕩造成的軌道變形使得非平衡粒子每繞一圈($\Delta\varphi = 2\pi$)所走的軌道長度與平衡軌道長度不等。這個長度的差別取決於平均磁場沿徑向的梯度和調變磁場的变化規律。如果平均場不隨半徑改變且調變磁場為零(即一均勻場),那麼任何振幅的自由振蕩,其軌道均為半徑相同的圓周,因此將不會產生繞圈頻率的差別。但是,一旦有了平均場沿徑向的变化以及調變場的分布,不同的自由振蕩的粒子軌道長度就不一定相同,其繞圈頻率也就因而可能有了差別。現在我們先從物理圖象上來看一看在一個沿半徑上升(或下降)的磁場中,粒子繞圈的情況。例如可以想象這樣的磁場,當 $0 \leq r \leq R$ 時 $H = H_0$, 而當 $r > R$ 時 $H = H_1$, 在此 H_0, H_1 均為某一常數,且 $H_1 > H_0$ 。設有一粒子,其動量剛好為 $P = \frac{e}{c} H_0 R$, 這時圓

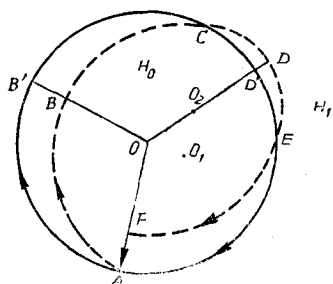


圖 1

$AB'CD'E$ (圓心與磁場中心重合)即為其平衡軌道。但如果由於某種原因粒子在 A 點受到偏移(見圖 1),則粒子繞一圈的非平衡軌道將為 $ABCDEF$, 顯然,隨著偏移條件的不同,曲線 $ABCDEF$ 的長度將與平衡軌道的長度 $2\pi R$ 有所不同,忽長忽短。這樣非平衡粒子與平衡粒子繞圈的時間相比,將會有快有慢。當然,重要的並不在於個別圈之間的這種快慢差異,而是這種差別在長時間內的平均值。因為只有這種平均值才可能引起非平衡粒子相對於

高頻場單方向滑相。由於軌道的嚴格周期性,只要比一下在一個自由振蕩周期內,非平衡軌道與相應的平衡軌道的差別,就可以求得這一平均值,即只要相應地比較圖一中曲線 BCD 與 $B'CD'$ 的長度。容易證明 $B'CD'$ 的長度將大於 BCD 。這就說明,非平衡粒子的平均繞圈時間將永遠較平衡粒子來得快。

為了進一步獲得定量的結果,假定磁場在中心平面上的三個分量为

$$H_r = H_\varphi = 0, \quad H_z = \frac{H_0}{\sqrt{1 - \alpha r^2}}. \quad (2.1)$$

式中 α 為一任意給定的常數,與磁場的梯度相對應。對於均勻磁場來說, $\alpha = 0$, 對於等時性迴旋加速器的平均磁場來說, $\alpha = \frac{1}{R_\infty^2}$, R_∞ 為光速半徑。

將 H_z 代入方程 (1.2b), 兩端乘以 r 然後積分, 就得到了角動量守恆的關係式:

$$r^2 \dot{\varphi} - \frac{\omega}{\alpha} \sqrt{1 - \alpha r^2} = -\frac{D}{\alpha} = \text{常數}. \quad (2.2)$$

式中 $\omega = \frac{eH_0}{mc}$ 。假定在時間 $t = t_0$, $r = r_0$, $\dot{r} = \dot{r}_0$, 則由 (1.3), (2.2) 可以求得運動常數 D 具有下列形式

$$D = \alpha r_0 \sqrt{v^2 - \dot{r}_0^2} + \omega \sqrt{1 - \alpha r_0^2}. \quad (2.3)$$

作變數變換 $y = \sqrt{1 - \alpha r^2}$, 可將方程 (2.2) 及 (1.3) 化為

$$\dot{\phi} = \frac{\omega y - D}{1 - y^2}, \quad (2.4)$$

$$(y\dot{y})^2 + (\omega^2 + \alpha v^2)y^2 - 2D\omega y + D^2 - \alpha v^2 = 0. \quad (2.5)$$

由方程 (1.2b) 知, $\dot{\phi} = 0$ 只能在 $\dot{r} = 0$ (或 $\dot{y} = 0$) 出現. 也就是說, 角速度与径向位移同时达到极值. 令 (2.5) 式中 $\dot{y} = 0$ 求解, 并考虑 y 的变号情况, 就得到 y 之极值为

$$y_{\max}^{\min} = \frac{\omega D \pm v \sqrt{\alpha^2 v^2 + \alpha(\omega^2 - D^2)}}{\omega^2 + \alpha v^2}. \quad (2.6)$$

当 $\alpha \neq 0$, 自由振蕩的两个极值的绝对值并不相等而有一微小差别, 这是比綫性理論所得到的更精密的結果之一. 解方程 (2.4) (2.5) 得知, $\dot{\phi}$ 与 y 是周期函数, 且两者具有相同的周期. 因此, 当一个自由振蕩周期中粒子所繞过的方位角不为 2π 时, 这种角速度的周期变化会引起粒子每繞一圈所需時間的起伏. 象前面所指出的那样, 这种个别圈的起伏并不是我們所要研究的对象. 为了消除这种假象, 应该以自由振蕩的周期 Δt 作为時間的自然单位, 在这个单位時間中, 具有相同振幅的非平衡粒子, 它們走过的方位角 $\Delta\phi$ 将是一常数. 显然比值 $\omega_c = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ 应该作为一个基本量, 而研究这个量与自由振蕩振幅的关系才是有意义的. 这个基本量我們称之为“平均繞圈頻率”. 以 y 为自变数将方程 (2.4) (2.5) 由 $y_{\min}$ 至 $y_{\max}$ 积分两倍, 我們就得到了自由振蕩的周期 Δt 及在一周期中粒子所繞过的方位角 $\Delta\phi$:

$$\Delta t = 2\pi \frac{\omega D}{(\omega^2 + \alpha v^2)^{3/2}}, \quad (2.7)$$

$$\Delta\phi = -2\pi \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \alpha v^2}}, \quad (2.8)$$

因而粒子的平均繞圈頻率为

$$\omega_c = \frac{1}{D} (\omega^2 + \alpha v^2). \quad (2.9)$$

对于平衡粒子來說, $\dot{r}_0 = 0$, $r_0 = R$, $v = \omega_0 R$. 利用 (2.3) 及 (2.9), 便可求得平衡粒子的繞圈頻率 ω_0 为

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \alpha R^2}}. \quad (2.10)$$

对于非平衡粒子來說, 由于自由振蕩的周期性, 我們可以选择 $\dot{r}_0 = 0$, $r_0 = R + a$ 作为起始条件, 而不会失去問題的普遍性. 容易証明这里 a 可以近似地理解为自由振蕩的振幅 (在綫性理論中 a 为振幅的定义是严格的). 这时由 (2.3) 及 (2.9) 給出非平衡粒子的平均繞圈頻率 ω_c 为

$$\omega_c = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \alpha R^2} [\alpha R^2 + \alpha a R + \sqrt{(1 - \alpha R^2)[1 - \alpha(R + a)^2}]}}. \quad (2.11)$$

因而非平衡粒子的平均繞圈頻率与平衡粒子的繞圈頻率之差为

$$\frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{\alpha R^2 + \alpha a R + \sqrt{(1 - \alpha R^2)[1 - \alpha(R + a)^2]}} - 1. \quad (2.12)$$

在我們所討論的对象中, $|\alpha|$ 是一很小的量, 一般約为 $10^{-6} \sim 10^{-4}$. 因此, 当自由振

荡的振幅不超过 4~5 cm 时,完全可以将(2.12)近似为

$$\frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\alpha a^2}{2(1 - \alpha R^2)}. \quad (2.13)$$

这时所引起的误差仅为 $\frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_0}$ 准确值的千分之几。所以在这儿作近似是完全符合问题所要求之精密度的。

(2.12), (2.13)表明,由于平均磁场径向梯度的存在,就不可能保证非平衡粒子同时满足等时性条件。值得指出的是,即使在普通的回旋加速器中,按照上式这一现象亦存在着。只不过由于 $|\alpha|$ 较小,能量又低(总的加速圈数少),使得这一现象不显著,故为人们所忽略。但是在较大的中能等时性回旋加速器中,这一现象就成为不可忽略的了。

对于等时性回旋加速器来说, $R = \beta R_\infty$, 则(2.13)化为

$$\frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \left(\frac{a}{R_\infty} \right)^2, \quad (2.14)$$

式中 E 为粒子的总能量, E_0 为静止能量。这表示非平衡粒子与平衡粒子绕圈频率之差与自由振荡振幅的平方成正比,而且随着能量的增加成平方关系迅速增大。

四、平均场及调变场共同作用下粒子绕圈频率的计算及分析

当考虑到平均磁场与调变场共同作用时,方程组(1.2a, b)是不能用分析方法求得其精密解的。我们必须借助于电子计算机来求得数值解答。这时,一方面要求电子计算机给出的数据达到五位至六位有效数字以上;另一方面要求采用正确的数据分析方法以消除前面所讲过的角速度起伏的假象。为此,我们根据在纯平均磁场情况下所得之分析结论的启示,采取了下列的计算方案及数据处理办法。

1. 计算方程

我们以 T_0^2/R_∞ 分别乘方程(1.2a, b)及(1.3)两端,这里 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi R_\infty}{c}$, 然后分别用 -2π , T_0 , 及 R_∞ 作方位角、时间及长度的单位。也就是说,我们使用归一化了的方位角 $\psi = -\frac{\varphi}{2\pi}$ 、时间 $\tau = t/T_0$ 及径向位置 $\xi = r/R_\infty$ 。这时方程组变为下列无量纲的方程:

$$\ddot{\xi} - 4\pi^2 \xi \dot{\psi}^2 = -4\pi^2 \sqrt{1 - \beta^2} \xi \dot{\psi} \frac{H_x}{H_0}, \quad (3.1a)$$

$$\xi \ddot{\psi} + 2\dot{\xi} \dot{\psi} = \dot{\xi} \sqrt{1 - \beta^2} \frac{H_x}{H_0}, \quad (3.1b)$$

及

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2\pi\xi} \sqrt{4\pi^2\beta^2 - \dot{\xi}^2}, \quad (3.2)$$

式中“ $\cdot$ ”表示对 τ 微分。这时磁场(1.4)改写为

$$H_x = \frac{H_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[1 + \sum_{N=1}^{\infty} \epsilon_N(\xi) \sin(\Theta_N(\xi) + 2\pi N\psi) \right]. \quad (3.3)$$

上列三个方程可以任取其两个作为电子计算机的运算方程而直接求 $\psi(\tau)$ 的数值解。

在計算中，我們取的是方程 (3.1a) 与 (3.2)，并且每隔 $h = 0.1$ 給出 $\psi(\tau)$ 的不連續值 $\psi(0.1i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

2. 数据的分析方法

当調變場及平均場共同作用时，由电子計算机的結果表明，在实际加速器所采用的参数值的范围内， ξ 及 $\dot{\psi}$ 是准周期函数¹⁾。并且在各准周期内 $\dot{\psi}$ 的平均值差别远小于問題所要求的精密度²⁾，因此这并不妨碍我們求得一平均繞圈頻率，来代表非平衡粒子在长時間中繞圈的快慢。假定 $\dot{\psi}$ 振蕩的准周期为 $\Delta\tau = L$ ，且在此周期内粒子所走过的方位角为 $\Delta\psi = \Psi$ ，則以 ω_0 为单位的平均繞圈頻率為

$$\Omega_c = \frac{\omega_c}{\omega_0} = \frac{\Psi}{L} = \frac{1}{L} \int_{\tau}^{\tau+L} \dot{\psi}(x) dx. \quad (3.4)$$

在实际情况下，要由不連續的电子計算机数据中精确地找出 $\dot{\psi}$ 及 ξ 的准周期 L 及相应的 Ψ 值，往往是很困难的。但是这并不妨碍我們求得正确的結果。为了說明这一点，我們来看看对准周期函数 $\dot{\psi}(\tau)$ 实行平均时的誤差規律：假定求平均时所取的区間不是 $\dot{\psi}(\tau)$ 的准周期 L ，而是与 L 的整数 (n_1) 倍差一个小量 δ_1 ，即 $L_1 = n_1 L + \delta_1$ ，这时所得到的結果将是

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(\tau) &= \frac{1}{L_1} \int_{\tau}^{\tau+L_1} \dot{\psi}(x) dx = \Omega_c + \Delta_1(\tau), \\ \Delta_1(\tau) &= \frac{1}{L_1} \int_{\tau}^{\tau+\delta_1} (\dot{\psi} - \Omega_c) dx, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

就是說，这样所求之 $\dot{\psi}$ 的平均值并不是粒子的平均繞圈頻率 Ω_c ，而是包括了一个誤差 $\Delta_1(\tau)$ 。这个誤差对于区間 L_1 的起点 τ 亦为一准周期函数，其准周期亦是 L ，但是誤差的最大值 $|\Delta_1(\tau)|_{\max}$ 却比 $\dot{\psi}$ 的振蕩幅度降低了 $\frac{\delta_1}{L_1}$ 倍，亦即

$$|\Delta_1(\tau)| = \frac{1}{L_1} \left| \int_{\tau}^{\tau+\delta_1} (\dot{\psi} - \Omega_c) dx \right| < \frac{\delta_1}{L_1} |\dot{\psi}_{\max} - \dot{\psi}_{\min}|, \quad (3.6)$$

这就是說， $\Omega_1(\tau)$ 比 $\dot{\psi}(\tau)$ 更接近了 Ω_c 一步。

为了进一步消除上述誤差，我們再取区間 $L_2 = n_2 L + \delta_2$ 对 $\Omega_1(\tau)$ 实行平均，这时有

$$\left. \begin{aligned} \Omega_2(\tau) &= \frac{1}{L_2} \int_{\tau}^{\tau+L_2} \Omega_1(y) dy = \Omega_c + \Delta_2(\tau), \\ \Delta_2(\tau) &= \frac{1}{L_2} \int_{\tau}^{\tau+L_2} \Delta_1(y) dy = \frac{1}{L_2} \int_{\tau}^{\tau+\delta_2} \Delta_1(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

利用 (3.6) 式就可得到

$$|\Delta_2(\tau)| < \frac{\delta_1 \delta_2}{L_1 L_2} |\dot{\psi}_{\max} - \dot{\psi}_{\min}|, \quad (3.8)$$

因此， $\Omega_2(\tau)$ 又比 $\Omega_1(\tau)$ 更接近了 Ω_c 。这样繼續下去，原則上不需要精确地找到准周期

1) 在許多特定的参数值时 ξ 、 $\dot{\psi}$ 为严格的周期函数。

2) 这一性質可由本文結果說明。如果差別已超过問題所要求之精密度，那么将得不到本文的結果，即得不到具有 6 位穩定不变的有效数字的 Ω_c 值。

L , 只要求把比值 $\frac{\delta_1}{L_1}, \frac{\delta_2}{L_2} \dots$ 取得适当的小, 经过若干次平均之后就可以将误差减小到

所要求的范围, 而得到正确的 Ω_c .

一般说来, 采取上述平均方法是很有效的. 例如在我们这里 $|\dot{\psi}_{\max} - \dot{\psi}_{\min}| \approx 10^{-2}$, 在 $L_1 = L_2 \approx 10$ 及 $\delta_1 = \delta_2 \leq 0.1$ 的条件下, 便有

$$|\Delta_2(\tau)| < \frac{0.1 \times 0.1}{10 \times 10} \times 10^{-2} = 10^{-6}.$$

实际上, 由于电子计算机不可能给出 $\psi(\tau)$ 的连续值, 因而与上述情况有所不同. 但基本思想是很类似的. 这时假定电子计算机间隔 $\Delta\tau = h$ 给出 $\psi(\tau)$ 的一系列不连续值 $\psi(ih)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. 设第一次平均时我们所取的间隔为 $L_1 = k_1 h = n_1 L + \delta_1$, 选择 L_1 的原则是使比值 δ_1/L_1 尽量小. 此时对于不同的起点 ih , 所得 $\dot{\psi}(\tau)$ 之第一次平均值 $\Omega_1(ih)$ 为一个序列:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(ih) &= \frac{1}{L_1} [\psi(ih + L_1) - \psi(ih)] = \frac{1}{L_1} \int_{ih}^{ih+L_1} \dot{\psi}(\tau) d\tau = \Omega_c + \Delta_1(ih), \\ \Delta_1(ih) &= \frac{1}{L_1} \int_{ih}^{ih+L_1} (\dot{\psi} - \Omega_c) d\tau = \frac{1}{L_1} \int_{ih}^{ih+\delta_1} (\dot{\psi} - \Omega_c) d\tau, \\ i &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

同样可以估计误差 $\Delta_1(ih)$ 之最大值比 $\dot{\psi}(\tau)$ 的振幅小 δ_1/L_1 倍, 即

$$|\Delta_1(ih)|_{\max} < \frac{\delta_1}{L_1} |\dot{\psi}_{\max} - \dot{\psi}_{\min}|. \quad (3.10)$$

但是, 由于 $\Omega_1(ih)$ 不为一个连续函数, 而是一个数的序列. 因此, 在第二次求平均时, 积分将被求和所代替. 假定我们依次取 k_2 个数求平均, $k_2 h = n_2 L + \delta_2$, 这时有

$$\left. \begin{aligned} \Omega_2(jh) &= \frac{1}{k_2} \sum_{i=j}^{j+k_2-1} \Omega_1(ih) = \Omega_c + \Delta_2(jh), \\ \Delta_2(jh) &= \frac{1}{k_2} \sum_{i=j}^{j+k_2-1} \Delta_1(ih). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

右端的 k_2 个 $\Delta_1(ih)$ 不会全部相等, 故有

$$|\Delta_2(jh)| < |\Delta_1(ih)|_{\max}. \quad (3.12)$$

由于 $\Omega(ih)$ 的不连续, 我们不能定量地证明 $|\Delta_2(jh)|_{\max}$ 比 $|\Delta_1(ih)|_{\max}$ 究竟小了多少倍. 不过由(3.9)可以看出, 在 $\dot{\psi}(\tau)$ 的一个准周期上的那些起点所得到的 $\Delta_1(ih)$ 大致是正负相消的. 因而可以定性地推测, δ_2/k_2 取得越小, 误差降低就越快. 这就是说, 原则上经过第二次平均把误差进一步降低了. 同样继续作第三次, 第四次……平均, 也可以把误差降低到所要求的范围. 下面的实际计算中我们可以看到, 即使在 $h = 0.1$ 的情况下, 只要 k_2 选得适当, 仍然只要经过一两次平均达到很高的精密度.

3. 计算结果

根据上述方法, 我们分别对纯平均场的情况以及调变场与平均场共同作用的情况进行了计算:

(1) 纯平均场的情况 ($\epsilon_N = 0$, $N = 1, 2, 3, \dots$)

計算參數為 $\beta = 0.5247$, 對於平衡軌道, 確實得到了 $\phi(\tau) \equiv \tau$, 亦即 $\Omega_0 = 1$. 對於振幅為 $\left(\frac{a}{R_\infty}\right) = 1.284 \times 10^{-2}$ 的自由振盪, 計算所得的結果列在附錄 1 的表 1 中. 從 $\phi(0.1i)$ 的變化中可以近似地算出 $|\dot{\phi}_{\max} - \dot{\phi}_{\min}|$ 約 2×10^{-2} 左右. 從公式(2.7)或者從電子計算機給出的 ξ 值, 都可以初步估計出自由振盪的周期 $L \cong 0.851$. 它的 20 個周期約為 17.02, 因此我們取 $L_1 = 17$ 進行第一次平均所得到的 $\Omega_1(ih)$, 其誤差的最大值 $|\Delta_1(ih)|_{\max}$ 已降低到 5×10^{-5} 以下. 然後取 $k_2 = 17$ ($k_2 h = 1.7$ 接近 $2L$) 作第二次平均. 則所得之平均值 $\Omega_2(jh)$ 的最大起伏 $|\Delta_2(jh)|_{\max}$ 已下降到 10^{-7} 左右. 最後得到 $\Omega_c = 1.0001148$, 亦即 $\frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_0} = 1.148 \times 10^{-4}$. 由分析公式(2.14)所算得同樣振幅之 $\frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_0} = 1.143 \times 10^{-4}$. 兩者很好地符合.

(2) 調變場與平均場共同作用的情況

從線性理論^[1]已經知道, 當有調變磁場時, 平衡軌道不再是圓 R (由 $Pc = eH(R)R$ 所定義的), 而變為一個與調變場具有相同結構周期的閉合曲線. 因而它的角速度 $\dot{\phi}$ 亦變為具有此周期的周期函數. 這時, 平衡粒子的繞圈頻率將不再是 ω_0 , 而變為 ω_p , 按照公式(3.4), 亦可得相應的歸一化頻率 Ω_p , 只要 L 代以平衡軌道周期. 顯然, 我們感興趣的並不是 ω_p 與 ω_0 的差別, 而是非平衡粒子的平均繞圈頻率 ω_c 同平衡粒子的繞圈頻率 ω_p 之差 $\frac{\omega_c - \omega_p}{\omega_p} = \frac{\Omega_c}{\Omega_p} - 1$.

其次, 當具有調變磁場時, 非平衡粒子自由振盪的振幅亦有一個小的周期性調變. 這時我們用 $\bar{a}$ 及 $a_{\max}$ 分別表示平均振幅和最大振幅¹⁾.

計算中所採用的參數是 $\epsilon_0 = \epsilon$, $\epsilon_{N \neq 0} = 0$ 及 $\Theta_0 = 46.73\xi$. 我們對各種 β , ϵ 值及不同的自由振盪進行了計算. 例如對於 $\beta = 0.5247$, $\epsilon = 0.1553$ 其平衡軌道以及相應於 $\frac{\bar{a}}{R_\infty} = 1.18 \times 10^{-2}$ 的自由振盪, 所得的結果分別列在附錄 1 的表 2—3 中, 在 $N = 6$ 的調變場中, 平衡軌道的周期是 $L_p = 0.167$. 對於非平衡粒子, 由電子計算機所給出的 ξ 數據估計出准周期 $L \cong 0.84$. 第一次平均時, 我們取 $L_1 = 16.8 \cong 101L_p \cong 20L$. 第二次平均取的是 $k_2 = 17$, 即 $k_2 h \cong 10L_p \cong 2L$. 對於其他數據, 用類似方法處理. 現在我們把所得之 $\frac{\omega_c - \omega_p}{\omega_p}$, 與使用平均振幅和最大振幅代入公式(2.14)所算得相應的

$\frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_0}$ 的比較, 列入表 1.

由上列計算結果, 我們得到一個結論, 即不等時現象主要是由平均磁場產生的; 調變場的作用可以被看做一個小的修正量. 略去這個修正量並按照平均振幅用公式(2.14)去計算非平衡粒子與平衡粒子的平均繞圈頻率之差, 所得的結果不會引起數量級的誤差. 此外, 還存在着下列不等式:

1) 求法見附錄 2.

表 1

β	ε	平衡粒子	非平衡粒子			$\frac{\omega_c - \omega_p}{\omega_p} \times 10^4$	$\frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \left(\frac{a}{R_\infty} \right)^2 \times 10^4$	$\frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \left(\frac{a_{\max}}{R_\infty} \right)^2 \times 10^4$
		Ω_p	$\frac{\bar{a}}{R_\infty} \times 10^3$	$\frac{a_{\max}}{R_\infty} \times 10^3$	Ω_c			
0.3	0.15	1.0003083	0.542	0.578	1.0003254	0.171	0.161	0.183
	0.30	1.0012269	0.531	0.606	1.0012454	0.185	0.155	0.201
0.5247	0.1553	1.0003028	0.909	1.02	1.0003669	0.641	0.570	0.718
			1.18	1.33	1.0004054	1.026	0.960	1.22
	0.30	1.0011237	1.11	1.38	1.0012218	0.979	0.850	1.31
0.8	0.15	1.0002462	0.785	0.970	1.0003395	0.933	0.856	1.31

$$\frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \left(\frac{\bar{a}}{R_\infty} \right)^2 < \frac{\omega_c - \omega_p}{\omega_p} < \frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \left(\frac{a_{\max}}{R_\infty} \right)^2, \quad (3.13)$$

这个不等式表明,可以根据公式(2.14)用平均振幅和最大振幅分别去估计 $\frac{\omega_c - \omega_p}{\omega_p}$ 的下限和上限.

五、不等时性所造成的滑相

为了精确地求得这种不等时性所造成的非平衡粒子相对于加速电场相位的滑动,还需要利用电子计算机进行动态计算. 即当 $\beta = \beta(\psi)$ 时由方程(3.1a,b)及(3.2)之中任选两式求得 ψ 之解,并采取适当的处理方法. 但是在计入加速的作用后,不会抵消这种平均磁场所引起的经常性影响. 因此亦可以利用公式(2.14)来近似地估计这一滑相效应. 由于这个相位滑动即使在加速器的一切参数都建造得很理想(没有任何公差)的情况下,也是不可避免的. 因此,我们叫它“固有滑相”. 如众所知,在等时性回旋加速器中,如果粒子的绕圈频率与高频场频率之间相差一个量 $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, 则粒子加速相位的改变遵循下列微分关系式^[2]:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} dE = \frac{eV}{\pi} \cos \phi d\phi, \quad (4.1)$$

式中 E 为粒子的总能量, V 为 $D-D$ 之间的电压幅度, ϕ 为粒子的加速相位. 将(2.14)式代入此式并对整个加速过程积分,就得到了计算“固有滑相的”方程:

$$\sin \phi_K - \sin \phi_0 = \frac{\pi E_0}{6eV} \left(\frac{a}{R_\infty} \right)^2 \left[\left(\frac{E_K}{E_0} \right)^3 - 1 \right], \quad (4.2)$$

式中 E_0 及 ϕ_0 为粒子的静止能量和初相位, E_K 及 ϕ_K 是最终总能量和末相位. 这一关系式表明,在加速过程中,粒子的“固有滑相”随自由振荡振幅的平方而增长. 显然,对于粒子按振幅的一定分布形式,原则上可以选择一个最佳的高频电场频率,以使得最多的粒

子可以被加速到最終能量。但是,在不知道粒子的分布形式之前,我們暫時仍然假定高頻電場的頻率是等於平衡粒子的繞圈頻率的。下面我們來計算幾個具體的例子,以說明在計入了“固有滑相”之後,對於加速電壓的要求。所有以下的計算中,我們都假定各種公差為: (1) 平均磁場的製造誤差沿 R 為週期性的。其週期為 $\Delta R = 32\text{cm}^1$ 。最後半個週期公差為 3.5×10^{-4} ; (2) 磁場的穩定度為 10^{-4} ; (3) 高頻場頻率的穩定度為 10^{-5} 。各種例子中,我們給出了把一定振幅範圍內的粒子剛剛加速到最終能量所需之最低電壓 (即滑相至 90°) 和限制粒子團中心相位不滑過 60° 所要求的加速電壓。並且,如果認為 a 為平均振幅,則所給出之電壓為下限。如果認為 a 為最大振幅,則所給出之電壓較為安全。

表 2

能加速到最終半徑 的振幅範圍 a (cm)	最低電壓 $V_{D-D}(\text{KV})$			滑相 60° 所需的電壓 $V_{D-D}(\text{KV})$		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
0	95	115	125	140	165	175
1.5	115	145	165	160	205	245
2	130	170	205	180	245	305
2.5	150	210	265	215	300	375
3	180	265	345	260	375	465

注: 上表中, (1) 代表 $E_K - E_0 = 450\text{Mev}$. $R_\infty = 280\text{cm}$. (2) 代表 $E_K - E_0 = 700\text{Mev}$. $R_\infty = 300\text{cm}$.
(3) 代表 $E_K - E_0 = 850\text{Mev}$. $R_\infty = 300\text{cm}$.

六、基本結論

綜合以上各節的討論,我們可以將基本結論歸納如下:

在等時性迴旋加速器中存在着固有的不等時現象。這種不等時現象主要是由平均磁場引起的;調變磁場的影響是一個很小的修正量,可以被忽略而不會引起數量級誤差。由於平均磁場沿半徑的變化,導致粒子的平均繞圈頻率依賴於自由振蕩的振幅。因此,實際上使得絕大多數甚至全部粒子不能夠實現等時加速。而在加速過程中發生加速相位的單方向滑動,並且這種滑相隨着自由振蕩振幅的平方而增長。為了保證加速器獲得較強的束流,那麼必須仔細地研究加速器的中心區域問題,設法減小初始振幅,並採取措施,克服各種非線性共振所引起的強烈的振幅增長;或者再度加嚴各種公差;或者提高加速電壓。看來前面兩種方法希望不大,似乎只能從第三種辦法解決。

最後值得指出,由於非平衡粒子平均繞圈頻率依賴於自由振蕩振幅這一現象,本質上是由磁場的徑向梯度所引起的。因此,不只是在等時性迴旋加速器中,而是在一切具有徑向磁場梯度的加速器中,都存在着這種現象。當然,對於各種加速器,這一現象的影響如何,還需要進一步研究。

本文中電子計算機程序的設計和計算操作是由張文婷同志完成的。她在工作中的計算方案的改進以及數據分析方法的誤差估計等方面,都提出了寶貴的意見或建議,我們表示深切的感謝。此外,對王傳英同志在某些定性的討論上,曾給予我們有益的幫助,以及

1) 當然,這種公差要求可能太嚴了。

宋威及高中昌两位同志在计算工作初期所给予的帮助,亦致以衷心谢意。

附 录 1.

表 1 純平均磁場情况下 $\left(\frac{a}{R_\infty}\right) = 1.284 \times 10^{-2}$ 的部分数据。

$$\Omega_1(ih) = \frac{\psi(17 + 0.1i) - \psi(0.1i)}{17}, \quad \Omega_2(jh) = \frac{1}{17} \sum_{i=j}^{j+16} \Omega_1(ih)$$

τ	$\phi(\tau)$	i, j	$\Omega_1(ih)$	$\Omega_2(jh)$
0	0	0	1.00014741	1.00011479
0.1	0.097810218	1	1.00014122	1.00011479
0.2	0.19671512	2	1.00012158	1.00011481
0.3	0.29733074	3	1.00009749	1.00011484
0.4	0.39940527	4	1.00008186	1.00011487
0.5	0.50183372	5	1.00008437	1.00011488
0.6	0.60328868	6	1.00010337	1.00011486
0.7	0.70304006	7	1.00012752	1.00011483
0.8	0.80129257	8	1.00014432	1.00011480
0.9	0.89895478	9	1.00014636	1.00011479
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.7	1.7002508	17	1.00014736	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
17.0	17.002506	170	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20.0	20.002250	200	$\vdots$	$\vdots$

由表得 $\Omega_c = 1.00011483$, $\frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_0} = 1.148 \times 10^{-4}$

表 2 調变磁場参数为 $N = 6$. $\Theta(\xi) = 46.73\xi$. $\epsilon_6 = 0.1553$ 时,

在 $\beta = 0.5247$ 处平衡粒子之部分数据。

$$\Omega_1(ih) = \frac{\psi(16.8 + 0.1i) - \psi(0.1i)}{16.8}, \quad \Omega_2(jh) = \frac{1}{17} \sum_{i=j}^{j+16} \Omega_1(ih)$$

τ	$\phi(\tau)$	i, j	$\Omega_1(ih)$	$\Omega_2(jh)$
0	0	0	1.00029655	1.00030265
0.1	0.099795867	1	1.00030673	1.00030312
0.2	0.20003600	2	1.00030375	1.00030262
0.3	0.29994760	3	1.00029782	1.00030296
0.4	0.40000247	4	1.00030914	1.00030283
0.5	0.50018656	5	1.00029574	1.00030264
0.6	0.60000600	6	1.00030643	1.00030311
0.7	0.70023470	7	1.00030430	1.00030262
0.8	0.80011568	8	1.00029859	1.00030296
0.9	0.90012396	9	1.00031000	1.00030284
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.7	1.7005033	17	1.00030451	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
17.0	17.005139	170	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20.0	20.006108	200	$\vdots$	$\vdots$

由表得 $\Omega_p = 1.00030284$

表 3 調变磁場参数为 $N = 6$, $\Theta(\xi) = 46.73\xi$ $\varepsilon_0 = 0.1553$ 在 $\beta = 0.5247$ 处

$$\left(\frac{\bar{a}}{R_\infty}\right) = 1.18 \times 10^{-2} \text{ 时的部分数据}$$

$$\Omega_1(ih) = \frac{\psi(0.1i + 16.8) - \psi(0.1i)}{16.8}, \quad \Omega_2(jh) = \frac{1}{17} \sum_{i=j}^{j+16} \Omega_1(ih)$$

τ	$\psi(\tau)$	i, j	$\Omega_1(ih)$	$\Omega_2(jh)$
0	0	0	1.00040946	1.00040525
0.1	0.098456407	1	1.00043093	1.00040588
0.2	0.19651639	2	1.00044004	1.00040563
0.3	0.29470273	3	1.00041841	1.00040574
0.4	0.39434679	4	1.00041090	1.00040547
0.5	0.49547269	5	1.00037454	1.00040525
0.6	0.59756189	6	1.00037935	1.00040528
0.7	0.69972845	7	1.00038164	1.00040491
0.8	0.80040468	8	1.00039954	1.00040542
0.9	0.89952126	9	1.00043016	1.00040565
...	...	...	...	...
1.7	1.7004934	17	1.00042004	...
...	...	...	...	...
17.0	17.003909	170	...	...
...	...	...	...	...
20.0	20.006688	200	...	...

由表得 $\Omega_c = 1.00040543$, $\frac{\omega_c - \omega_p}{\omega_p} = 1.026 \times 10^{-4}$

附录 2. 自由振荡振幅的计算

根据綫性理論^[1], 自由振荡 ρ 可通过馬奇也函数表示:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= |AM(\varphi)| \cos(Q_p \varphi + \delta), \\ M(\varphi) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{C_{2j}}{2} e^{i[Q_p \varphi - \frac{1}{N} \Theta_N + i(N\varphi - \Theta_N)]}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 δ 及 A 为常数, Q_p 为振荡频率, $|AM(\varphi)|$ 为振幅, 平均振幅 $\bar{a} = A$, 最大振幅 $a_{\max} = |AM(\varphi)|_{\max}$. 在相平面 (ρ, ρ') 上, 当 $\varphi = \varphi_i + \frac{2\pi m}{N}$ 时 ($m = 0, 1, 2, \dots$), 相点的軌迹为一椭圆. 容易証明, 对任何 φ_i , 此椭圆面积 S 为一不变量:

$$S = 2\pi |W| A^2, \quad (2)$$

式中 $W = M'(\varphi)M^*(\varphi) - M(\varphi)M'^*(\varphi)$ 为一虚常数.

当变换到相平面 (ξ, ξ') 上时, 椭圆的无量纲面积为 $\sigma = S/R_\infty^2$, 得

$$\frac{\bar{a}}{R_\infty} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi |W|}}. \quad (3)$$

对于給定的初始条件 ξ_0, ξ'_0 , 由电子计算机解方程 (3.1) 給出 $\xi\left(\varphi_i + \frac{2\pi m}{N}\right)$,

$\xi'\left(\varphi_i + \frac{2\pi m}{N}\right)$, ($m = 0, 1, 2, \dots$). 作图求得 σ 即可算出振幅.

参 考 文 献

- [1] Дмитриевский В. П., Кольга В. В., И.Т.П. Атомная энергия, 8, вып 3 (1960), 198.
- [2] Фан Шоу-Сянь, Дмитриевский В. П., Кольга В. В. Препринт. ЛЯП. ОИЯИ. СССР. (1960).

НЕИЗОХРОННОЕ ЯВЛЕНИЕ В ИЗОХРОННОМ ЦИКЛОТРОНЕ

Фан Шоу-сянь, Уай Кай-юе

Резюме

В работе исследовалось влияние бетатронных колебаний на частоту обращения частиц в изохронном циклотроне. Получена формула зависимости частоты обращения частиц от амплитуды бетатронных колебаний. Анализ по результату вычисления электронно-счетной машиной показывает, что основной причиной, вызывающей такое неизохронное явление, является возрастание среднего магнитного поля вдоль радиуса, а влиянием вариационного по азимуту магнитного поля можно пренебречь. А также отметили, что наименьшее напряжение между дуантами увеличивается из-за этого эффекта.