第 34 卷 第 6 期　　物 理 学 报　　Vol. 34, No. 6
1985 年 6 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Jun., 1985

量子统计的级联三能级 Jaynes-Cummings 模型

李 孝 申
(江西师范大学物理系)

1984 年 6 月 11 日收到

提　　要

本文提出一个级联三能级原子与初始处于相干态的辐射场相互作用的量子统计模型. 通过使用数值求和及鞍点近似方法,讨论了原子能级算符和光子数平均值的性质,揭示了双光子跃迁、新的衰变及恢复等现象.

描述二能级原子同单模辐射场相互作用的 Jaynes-Cummings 模型[1](以下简称 J-C 模型)已被广泛地研究. 一般来说,人们把 RWA 近似下的严格可解模型称为 J-C 模型[2]. 不过,近年来往往把 Eberly 等人研究的模型称为标准的 J-C 模型[3]. 而其中如果辐射场在初始时刻处于相干态,则称为相干态的 J-C 模型. Eberly 等人用鞍点近似法[4,5]得到了二能级反转算符平均值的解析解. Buck 和 Sukumar[6] 则假定原子和场的耦合系数与场算符有关,这样便得到了原子激发能算符平均值的解析解. Singh[3] 从场的量子统计观点出发,推广应用J-C 模型于场平均光子数的计算,并进一步推广应用于多光子激光等量子统计问题. 此外,文献[7]将 J-C 模型推广至"Λ"结构的三能级(即其上能级三能级)情况,用数值方法讨论了原子能级算符及两个模场光子数的系综平均值随时间的演变规律.

本文将建立级联型三能级的 J-C 模型,讨论三能级原子同一个或两个初始处于相干态的辐射场相互作用的动力学行为. 具体做法是运用密度算符方法,借助于数值求和及鞍点近似法[2,4,5],求得原子能级算符及场光子数平均值随时间演变规律,分析了模间耦合、新的周期性衰变和恢复及双光子跃迁等现象.

一、三能级模型中的密度算符方程

这里采用如图 1 所示的级联三能级原子模型,其中能级 $|a\rangle$ 与 $|b\rangle$ 及 $|b\rangle$ 与 $|c\rangle$ 之

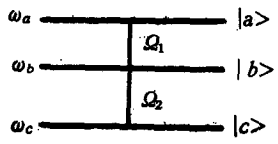


图 1

间的跃迁分别与辐射场模 1 和模 2 相联系. $|a\rangle$ 与 $|c\rangle$ 之间的跃迁是禁戒的. 原子-场系统的哈密顿量为

$$\hat{H} = \hbar(\hat{H}_0 + \hat{V}) \tag{1}$$

其中自由部分

$$\hat{H}_0 = \omega_a\hat{S}_{11} + \omega_b\hat{S}_{22} + \omega_c\hat{S}_{33} + \sum_{i=1}^{2}\Omega_i\hat{a}_i^+\hat{a}_i, \tag{2}$$

相互作用部分

$$\hat{V} = \lambda_1\hat{S}_{12}a_1 + \lambda_2\hat{S}_{23}a_2 + \text{H.C.}. \tag{3}$$

$\hat{a}_i$, $\hat{a}_i^+$, Ω_i 和 λ_i 分别为模 i 场的湮灭、产生算符、频率和耦合系数. ω_a, ω_b 和 ω_c 为原子能级对应频率. $\hat{S}_{ij}$ 为原子投影算符. 当取

$$|a\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |b\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\text{和} \qquad |c\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{4}$$

时, $\hat{S}_{ij}$ 可表为三行三列的矩阵,其矩阵元

$$(\hat{S}_{ij})_{nm} = \delta_{in}\delta_{jm} \qquad i, j, n, m = 1, 2, 3. \tag{5}$$

此外, $\hat{S}_{ij}$ 构成 $U(3)$ 群的生成元,并满足下列对易关系:

$$[\hat{S}_{ij}, \hat{S}_{kl}] = \hat{S}_{il}\delta_{jk} - \hat{S}_{kj}\delta_{li}. \tag{6}$$

显然, $\hat{S}_{ii}$ 为能级算符,因为

$$\hat{S}_{11}|a\rangle = |a\rangle, \qquad \hat{S}_{22}|b\rangle = |b\rangle, \qquad \hat{S}_{33}|c\rangle = |c\rangle. \tag{7}$$

在共振情况下 ($\Omega_1 = \omega_a - \omega_b$, $\Omega_2 = \omega_b - \omega_c$) 不难证明 $\hat{H}_0$ 和 $\hat{V}$ 为运动常数,即

$$[\hat{H}_0, \hat{V}] = 0, \qquad [\hat{H}_0, \hat{H}] = [\hat{V}, \hat{H}] = 0. \tag{8}$$

因此,在相互作用绘景中,时间平移算符 $\hat{U}(t, 0)$ 可表为

$$\hat{U}(t, 0) = e^{-i\hat{V}t}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1^2\hat{a}_1\dfrac{\cos\hat{\mu}t - 1}{\hat{\mu}^2}\hat{a}_1^+ & -i\lambda_1\hat{a}_1\dfrac{\sin\hat{\mu}t}{\hat{\mu}} & \lambda_1\lambda_2\hat{a}_1\dfrac{\cos\hat{\mu}t - 1}{\hat{\mu}^2}\hat{a}_2 \\ -i\lambda_1\dfrac{\sin\hat{\mu}t}{\hat{\mu}}\hat{a}_1^+ & \cos\hat{\mu}t & -i\lambda_2\dfrac{\sin\hat{\mu}t}{\hat{\mu}}\hat{a}_2 \\ \lambda_1\lambda_2\hat{a}_2^+\dfrac{\cos\hat{\mu}t - 1}{\hat{\mu}^2}\hat{a}_1^+ & -i\lambda_2\hat{a}_2^+\dfrac{\sin\hat{\mu}t}{\hat{\mu}} & 1 + \lambda_2^2\hat{a}_2^+\dfrac{\cos\hat{\mu}t - 1}{\hat{\mu}^2}\hat{a}_2 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中

$$\hat{\mu} = (\lambda_1^2\hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \lambda_2^2\hat{a}_2\hat{a}_2^+)^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

并已用到了 (3) 和 (5) 两式.

由 (9) 式可确定密度算符 $\hat{\rho}(t)$ 的方程

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, 0)\hat{\rho}(0)\hat{U}^+(t, 0). \tag{11}$$

这样,确定了初始 ($t = 0$) 时刻密度算符 $\hat{\rho}(0)$ 的形式后, 任意 t 时刻 $\hat{\rho}(t)$ 的形式也就确定了.

二、初始存在两个相干辐射场的情况

这里考虑辐射场模 1 和模 2 初始时刻分别处于相干态 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$，且分别具有平均光子数 $\bar{n}_1 = |\alpha|^2$ 和 $\bar{n}_2 = |\beta|^2$。同时，原子处于 $|c\rangle$ 态。这样，初始时刻的密度算符为

$$\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \hat{\rho}_F(0) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中

$$\hat{\rho}_F(0) = \sum_{m_1 m_1' m_2 m_2'} e^{-|\alpha|^2-|\beta|^2} \frac{\alpha^{m_1}\alpha^{*m_1'}\beta^{m_2}\beta^{*m_2'}}{(m_1!m_1'!m_2!m_2'!)^{\frac{1}{2}}} |m_1, m_2\rangle\langle m_1', m_2'| \tag{13}$$

为初始时刻场的密度算符.

由 (9)—(13) 式可求得原子能级算符的系综平均值为

$$\langle \hat{S}_{11}(t)\rangle = \lambda_1^2\lambda_2^2 \sum_{n_1 n_2} n_1 n_2 \frac{(\cos\mu_2 t - 1)^2}{\mu_2^4} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{n_1!} \frac{\bar{n}_2^{n_2}}{n_2!} e^{-(\bar{n}_1+\bar{n}_2)}, \tag{14}$$

$$\langle \hat{S}_{22}(t)\rangle = \lambda_2^2 e^{-(\bar{n}_1+\bar{n}_2)} \sum_{n_1 n_2} n_2 \frac{\sin^2\mu_2 t}{\mu_2^2} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{n_1!} \frac{\bar{n}_2^{n_2}}{n_2!}, \tag{15}$$

$$\langle \hat{S}_{33}(t)\rangle = e^{-(\bar{n}_1+\bar{n}_2)} \sum_{n_1 n_2} \frac{(\lambda_1^2 n_1 + \lambda_2^2 n_2 \cos\mu_2 t)^2}{\mu_2^4} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{n_1!} \frac{\bar{n}_2^{n_2}}{n_2!}, \tag{16}$$

其中

$$\mu_2 = (\lambda_1^2 n_1 + \lambda_2^2 n_2)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

同理可求得两个模的平均光子数分别为

$$\langle \hat{n}_1(t)\rangle = \bar{n}_1 - \langle \hat{S}_{11}(t)\rangle, \tag{18}$$

$$\langle \hat{n}_2(t)\rangle = e^{-(\bar{n}_1+\bar{n}_2)} \sum_{n_1 n_2} \left[\lambda_2^2 n_2 (n_2 - 1) \frac{\sin^2\mu_2 t}{\mu_2^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2 n_1 n_2 (n_2 - 1) \frac{(\cos\mu_2 t - 1)^2}{\mu_2^4} + n_2 \frac{(\lambda_1^2 n_1 + \lambda_2^2 n_2 \cos\mu_2 t)^2}{\mu_2^4} \right] \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{\bar{n}_2^{n_2}}{n_2!}. \tag{19}$$

(14)—(19)式可借助于数值求和来分析. 对于不同的 $\bar{n}_1$ 和 $\bar{n}_2$ 的组合，这里绘出了原子算符及光子数平均值随时间变化的曲线，详见图 2 至图 5，其中已令 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$。从这些图形中可看出，上述五个平均值随时间振荡，该振荡表现为周期性的衰减和恢复，但这些现象与已有的结果[2-7]相比有较大的不同. 这里的衰变期与文献 [7] 相似，其大小同 $\bar{n}_1$ 或 $\bar{n}_2$ 无关. 但这里出现的很有趣的现象是，$\langle \hat{S}_{11}(t)\rangle$ 和 $\langle \hat{n}_1(t)\rangle$ 在 $\bar{n}_1 = 4$，$\bar{n}_2 = 10$ 或 $\bar{n}_1 = 10$，$\bar{n}_2 = 4$ 这两种情况下有相同的演变规律. 这说明它们两者仅与 $\bar{n}_1 + \bar{n}_2$ 有关，而与固定 $\bar{n}_1 + \bar{n}_2$ 时 $\bar{n}_1$ 和 $\bar{n}_2$ 的具体取值无关. 因此，可看出通过中间能态 $|b\rangle$ 的耦合，模 1 和模 2 这两个场对于 $\langle \hat{S}_{11}(t)\rangle$ 和 $\langle \hat{n}_1(t)\rangle$ 来说已结成一个整体. 同时，由图 2 至图 5 还可知，所有这五个平均值的振荡频率也仅与 $\bar{n}_1 + \bar{n}_2$ 有关，$\bar{n}_1 + \bar{n}_2$ 的值越大，则频率越高. 这表明两个模耦合成的整体的强度越大，则原子与场的相互作用就越剧烈. 此外，这五个平均值振荡的恢复期基本上也有类似的性质，$\bar{n}_1 + \bar{n}_2$ 增大将导致恢复期缩短.

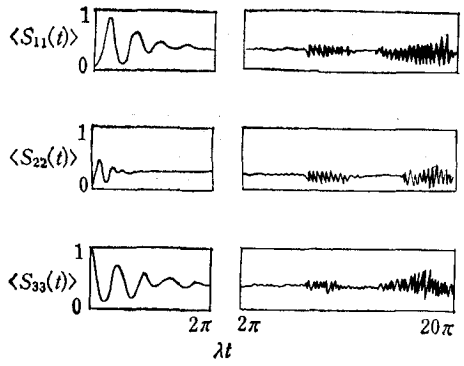


图 2
$\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10$

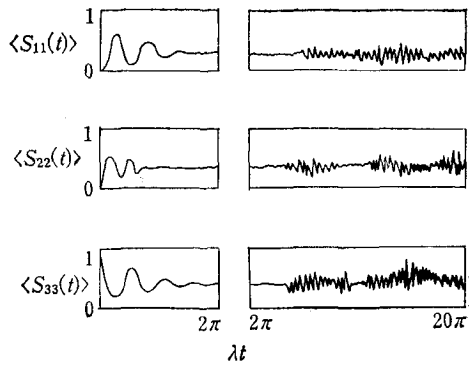


图 3
$\bar{n}_1 = 4$, $\bar{n}_2 = 10$

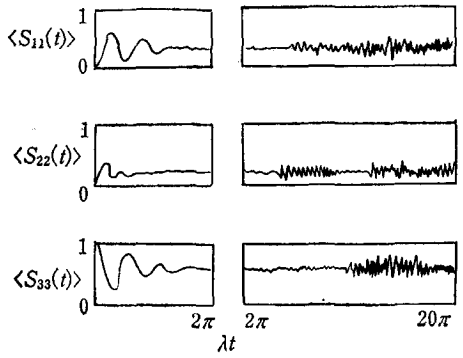
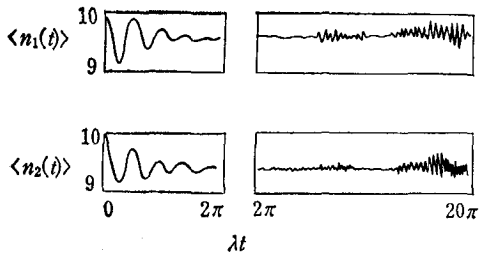
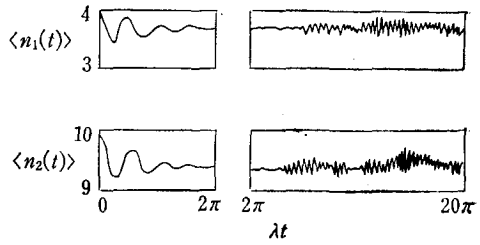


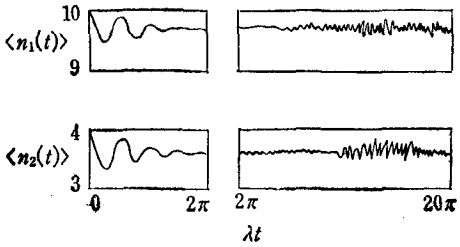
图 4
$\bar{n}_1 = 10$, $\bar{n}_2 = 4$



(a) $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10$



(b) $\bar{n}_1 = 4$, $\bar{n}_2 = 10$



(c) $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 4$

图 5

仔细观察图 2 至图 4 可得出如下结论：$\langle\hat{S}_{11}(t)\rangle$ 和 $\langle\hat{S}_{33}(t)\rangle$ 的振荡相位恰为相反．这表明能级 $|a\rangle$ 与 $|c\rangle$ 之间存在反转，亦即存在级联双光子过程：原子从 $|a\rangle$ 向 $|c\rangle$ 跃迁，同时辐射模 1 和模 2 的各一个光子；或者，原子从 $|c\rangle$ 跃迁至 $|a\rangle$，同时各从模 1 和模 2 中吸收一个光子．

上述结论还可从 $\langle\hat{n}_1(t)\rangle$ 与 $\langle\hat{n}_2(t)\rangle$ 振荡的相位相同(见图 5)而得到进一步证实．

从图 5 还可看出，t 时刻两个模的平均光子数与各自初始值相比，都要减小一个周期性的脉动量．这是由于最初原子处于最低能态$|c\rangle$，当 $t>0$ 后，原子则在三个能态之间跃迁．就平均而言，原子在一定程度上将处于较高的能态 $|b\rangle$ 和 $|a\rangle$，此过程所吸收的能量只有来自辐射场，故导致两个模的平均光子数比初始值的减少．此外，由(14)—(19)式以及共振条件可以证明系统哈密顿量的自由部分为运动常数，即

$$\begin{aligned}\langle\hat{H}_0\rangle &= \omega_a\langle\hat{S}_{11}\rangle+\omega_b\langle\hat{S}_{22}\rangle+\omega_c\langle\hat{S}_{33}\rangle+\Omega_1\langle\hat{n}_1\rangle+\Omega_2\langle\hat{n}_2\rangle\\ &= \Omega_1\bar{n}_1+\Omega_2\bar{n}_2+\omega_c,\end{aligned}\tag{20}$$

系统是能量守恒的，这与(8)式也相符．

三、初始存在单模相干辐射场的情况

这里考虑 $t=0$ 时仅存在处于相干态的模 1 场．此时场密度算符为

$$\hat{\rho}_{F_1}(0)=\sum_{m_1m_1'n_2'}e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{m_1}\alpha^{*m_1'}}{(m_1!m_1'!)^{\frac{1}{2}}}\delta_{n_2'0}|m_1n_2'\rangle\langle m_1'n_2'|.\tag{21}$$

对于原子起始于 $|c\rangle$ 态的情况，有

$$\hat{\rho}(0)=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & 0 & \\ 0 & & \hat{\rho}_{F_1(0)}\end{pmatrix}.\tag{22}$$

采用前面的步骤并结合 (21) 和 (22) 式，可求得

$$\langle\hat{S}_{11}(t)\rangle_c=\langle\hat{S}_{22}(t)\rangle_c=0,\qquad\langle\hat{S}_{33}(t)\rangle_c=1,\tag{23}$$

$$\langle\hat{n}_1(t)\rangle_c=\bar{n}_1,\qquad\langle\hat{n}_2(t)\rangle_c=0.\tag{24}$$

从 (23) 和 (24) 式显然可知，原子始终停留在能级 $|c\rangle$，模 1 与模 2 场的平均光子数永远保持各自的初始值(即 $\bar{n}_1$ 和 0)．这是由于模 2 场无光子，故无法激发原子从 $|c\rangle$ 态跃迁至中能态 $|b\rangle$，致使原子无法同模 1 场相耦合．这样，整个原子-场系统也因此而无法“运行”起来．

对于原子起始于 $|b\rangle$ 态的情况，有

$$\hat{\rho}(0)=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \hat{\rho}_{F_1}(0) & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}.\tag{25}$$

同理可求得原子能级算符和辐射场光子数的平均值分别为

$$\langle\hat{S}_{11}(t)\rangle_b=\frac{1}{2}\lambda_1^2\sum_{n_1}\frac{n_1}{\mu'^2}(1-\cos2\mu't)\frac{\bar{n}_1^{n_1}}{n_1!}e^{-\bar{n}_1},\tag{26}$$

$$\langle \hat{S}_{22}(t)\rangle_b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\bar{n}_1} \sum_{n_1} \cos 2\mu' t \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{n_1!}, \tag{27}$$

$$\langle \hat{S}_{33}(t)\rangle_b = \frac{1}{2} \lambda_2^2 e^{-\bar{n}_1} \sum_{n_1} \frac{1-\cos 2\mu' t}{\mu'^2} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{n_1!}, \tag{28}$$

$$\langle \hat{n}_1(t)\rangle_b = \bar{n}_1 - \langle \hat{S}_{11}(t)\rangle_b, \tag{29}$$

$$\langle \hat{n}_2(t)\rangle_b = \langle \hat{S}_{33}(t)\rangle_b, \tag{30}$$

其中

$$\mu' = (\lambda_1^2 n_1 + \lambda_2^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{31}$$

这里的 Rabi 频率为 $2\mu'$，尽管模 2 初始时不存在，此频率仍与模 2 的耦合常数 λ_2 有关．这一事实与原子从能级 $|b\rangle$ 向 $|c\rangle$ 自发跃迁以及由 $|c\rangle$ 向 $|b\rangle$ 的受激吸收跃迁相关．此外，$t > 0$ 时模 2 的存在(注意 $t = 0$ 时它并不存在)也归因于上述跃迁．(30)式所表示的模 2 平均光子数与 $|c\rangle$ 态平均占据的一致性，也与上述跃迁有关．然而，$|b\rangle$ 和 $|c\rangle$ 间的跃迁仅伴随着辐射或吸收单个光子，故从 (28) 和 (30) 式可知 $0 < \langle \hat{n}_2(t)\rangle_b < 1$．

下面，我们对 (26)—(30) 式运用鞍点近似法[2,4,5]，便可求得在 $\bar{n}_1 \gg 1$ 时的解析表达式

$$\langle \hat{S}_{11}(t)\rangle_b \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{(\lambda_2/\lambda_1)^2}{\bar{n}_1 + (\lambda_2/\lambda_1)^2} + \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_1 + (\lambda_2/\lambda_1)^2} f(t) e^{-\psi(t)} \cos\phi(t)\right], \tag{26'}$$

$$\langle \hat{S}_{22}(t)\rangle_b \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(t) e^{-\psi(t)} \cos\phi(t), \tag{27'}$$

$$\langle \hat{S}_{33}(t)\rangle_b \approx \frac{1}{2} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2\bar{n}_1 + \lambda_2^2} [1 - f(t) e^{-\psi(t)} \cos\phi(t)] \approx \langle \hat{n}_2(t)\rangle_b, \tag{28'}$$

$$\langle \hat{n}_1(t)\rangle_b \approx \bar{n}_1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda_1^2\bar{n}_1}{\lambda_1^2\bar{n}_1 + \lambda_2^2} [1 - f(t) e^{-\psi(t)} \cos\phi(t)], \tag{29'}$$

其中

$$f(t) = \left[1 + \frac{\lambda_1^2\bar{n}_1^2 t^2}{4[(\lambda_2^2/\lambda_1^2) + \bar{n}_1]^3}\right]^{-\frac{1}{4}}, \tag{32}$$

$$\psi(t) = 2\bar{n}_1 \left[1 + \frac{\lambda_1^2\bar{n}_1^2 t^2}{4[(\lambda_2^2/\lambda_1^2) + \bar{n}_1]^3}\right]^{-1} \cdot \sin^2 \frac{\lambda_1 t}{2[(\lambda_2^2/\lambda_1^2) + \bar{n}_1]^{\frac{1}{2}}}, \tag{33}$$

$$\phi(t) = 2\lambda_1 t[\bar{n}_1 + (\lambda_2^2/\lambda_1^2)]^{1/2} + \bar{n}_1 \sin \frac{\lambda_1 t}{[\bar{n}_1 + (\lambda_2^2/\lambda_1^2)]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\lambda_1\bar{n}_1 t}{[\bar{n}_1 + (\lambda_2^2/\lambda_1^2)]^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{1}{2} \mathrm{tg}^{-1} \frac{\lambda_1\bar{n}_1 t}{2[\bar{n}_1 + (\lambda_2^2/\lambda_1^2)]^{3/2}}. \tag{34}$$

从 (26')—(29') 式及 (32)—(34) 式可知，原子能级算符的平均值及平均光子数将随时间 t 而振荡，该振荡呈现衰减和恢复现象．此外，各平均值具有相同的振荡、衰减和恢复周期．不难求出[4-6]，在初始时刻附近的振荡周期为

$$\tau_0 \approx \pi(\lambda_1^2\bar{n}_1 + \lambda_2^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{35}$$

衰减期为

$$\tau_c \approx \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1} [1 + (\lambda_2^2/\lambda_1^2)\bar{n}_1]^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

以及恢复周期为

$$\tau_R \approx \frac{2\pi}{\lambda_1}[\bar{n}_1 + (\lambda_2^2/\lambda_1^2)]^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

由于 $f(t)$ 因子的存在，振幅将随时间增大而减小。而 $\bar{n}_1$ 增大却使振幅增大，这说明初激发场的加强导致了原子和场相互作用的加强。$f(t)$ 代表了振荡曲线的包络线。

从(35)—(37)式可以看出本文的三能级原子同辐射场相互作用的动力学行为与早先文献[1—6]的结果有较大差别。这里，由于存在 $|b\rangle$ 与 $|c\rangle$ 态之间的跃迁，使得 τ_0，τ_c 和 τ_R 不但与模 1 有关，而且还同模 2 与原子的耦合常数 λ_2 有关。λ_1，λ_2 及 $\bar{n}_1$ 的增大将使 τ_0 变小，也即使得初振荡周期缩短，频率增高。从物理意义上说，这反映了 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 之间以及 $|b\rangle$ 和 $|c\rangle$ 之间的原子跃迁几率增大或者初激发场强度的增大导致原子和场相互作用的加强。此外，λ_2 的增大将使 τ_c 和 τ_R 也增大。$\bar{n}_1$ 增大将使 τ_c 减小，而使 τ_R 增大。而 λ_1 增大则使 τ_c 和 τ_R 都减小。可见，这里面包含了较复杂的量子效应[4,5]。

由 (26′)—(29′) 式，对于较大的 t，我们可得如下渐近式：

$$\langle \hat{S}_{11}(t)\rangle_b \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2\bar{n} + \lambda_2^2}, \tag{26″}$$

$$\langle \hat{S}_{22}(t)\rangle_b \approx \frac{1}{2}, \tag{27″}$$

$$\langle \hat{n}_2(t)\rangle_b = \langle \hat{S}_{33}(t)\rangle_b \approx \frac{1}{2}\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2\bar{n}_1 + \lambda_2^2}, \tag{28″}$$

$$\langle \hat{n}_1(t)\rangle_b \approx \bar{n}_1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda_1^2\bar{n}_1}{\lambda_1^2\bar{n}_1 + \lambda_2^2}. \tag{29″}$$

显然 (26″)—(29″) 式仍满足能量守恒，因为

$$\begin{aligned}\langle \hat{H}_0(t)\rangle_b &= \omega_a\langle \hat{S}_{11}(t)\rangle_b + \omega_b\langle \hat{S}_{22}(t)\rangle_b + \omega_c\langle \hat{S}_{33}(t)\rangle_b + \Omega_1\langle \hat{n}_1(t)\rangle_b + \Omega_2\langle \hat{n}_2(t)\rangle_b \\ &= \omega_b + \Omega_1\bar{n}_1 = \langle \hat{H}_0(0)\rangle_b.\end{aligned} \tag{38}$$

此外，$\langle \hat{n}_2(t)\rangle_b$ 随 λ_2 的增大而增大。当 $\lambda_2 \to \infty$ 时，有 $\langle \hat{n}_2(t)\rangle_b \to \frac{1}{2}$，$\langle \hat{S}_{22}(t)\rangle_b \to \frac{1}{2}$，$\langle \hat{S}_{33}(t)\rangle_b \to \frac{1}{2}$，而 $\langle \hat{n}_1(t)\rangle_b \to \bar{n}_1$，$\langle \hat{S}_{11}(t)\rangle_b \to 0$，这说明 $|b\rangle$ 和 $|c\rangle$ 间的跃迁几率很大时（即 λ_2 很大），原子基本上仅在 $|b\rangle$ 和 $|c\rangle$ 态之间跃迁，模 1 与原子的相互作用很小。反之，如当 $\lambda_2 \to 0$ 时，也即 $|b\rangle$ 和 $|c\rangle$ 之间的跃迁为禁戒时，将有 $\langle \hat{n}_1(t)\rangle_b \to \frac{1}{2}$，$\langle \hat{S}_{11}(t)\rangle_b \to \frac{1}{2}$，$\langle \hat{S}_{22}(t)\rangle_b \to \frac{1}{2}$，而 $\langle \hat{n}_2(t)\rangle_b \to 0$，$\langle \hat{S}_{33}(t)\rangle_b \to 0$。此时，完全相当于二能级原子同单模场的相互作用。

四、结　束　语

上面已讨论了级联三能级原子同双模及单模相干辐射场相互作用的动力学行为。本文的结果明显地反映了两个辐射场之间的耦合，该耦合是通过同原子的相互作用作为媒介，原子的中间态 $|b\rangle$ 把分别与两个模相联系的两种跃迁耦合起来。本文的结果较二能

级的结果[1-6]而言包含了更普遍的现象和因素，适用性也更大；与文献[7]的结果相比，也有很大不同，这说明了同样是三能级情况，不同的能级结构各有自己的特点. 同时，与文献[7]的方法相比，这里还采用了鞍点近似法，得到了解析式，具体反映了量子效应.

本文提出的模型可被用来处理双模或双光子激光、原子的单光子或双光子吸收等问题，然而这类问题将不在此探讨.

承蒙方俊鑫教授和朱诗尧同志在量子光学领域工作中的支持，谨表谢意.

参 考 文 献

[1] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**(1963), 89.
[2] N .B. Narozhny *et al.*, *Phys. Rev.*, **A23**(1981), 236.
[3] S. Singh, *Phys. Rev.*, **A25**(1982), 3206.
[4] J. H. Eberly *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 44(1980), 1323.
[5] H. I. Yoo *et al.*, *J. Phys.*, **A14**(1981). 1383.
[6] B. Buck, C. V. Sukumar, *Phys. Lett.*, **A81**(1981), 132.
[7] 李孝申、贝念渝,, *Phys. Lett.*, **A101**(1984), 169.

A QUANTUM-STATISTICAL THREE-LEVEL CASCADE JAYNES-CUMMINGS MODEL

LI XIAO-SHEN
(Department of Physics, Jiangxi Normal University Nanchang)

ABSTRACT

A quantum-statistical model for a three-level cascade atom interacting with radiation fields initially in coherent states is presented. By means of numerical summation and saddle-point approximation, the expectation values of the atomic-level operators and the photon numbers are obtained and discussed, which reveals the phenomena such as the twophoton transitions and the new collapse and revival.