

不同类型模式间的相互作用引起 哈密顿系统的共振扰动

贺 凯 芬

(北京 师 范 大 学)

1985 年 11 月 27 日收到

提 要

本文讨论了两种不同类型的模式耦合的一个哈密顿系统。在无耦合时,其中一类模式是描写相干三波相互作用的非线性振子,组成可积的哈密顿量。另一类模式是不变量。在耦合的一级近似下,我们证明了耦合将在相空间中引入共振区,共振条件与振子固有的线性频率、频率失谐以及振子振幅的非线性变化的谐波频率有关。

一、引 言

在最近几年中,已有一些工作者用动力论的方程研究等离子体中湍流的起因。例如,当有波的线性激发和阻尼时,描写共振三波衰变不稳定性方程^[1]和描写振荡二流不稳定性方程^[2],在计算机实验中都已观察到运动向混沌转变的倍周期分岔途径。这类模型中,只包含了一种场变量,它的傅里叶模式满足同样型态的方程。两个模型在数学上的主要区别是,前者方程中的非线性项是二次的,而后的非线性项是三次的。不过看来这个差别并没有从本质上改变它们的运动向混沌转变所采取的途径,在两个模型下计算机实验中出现的现象,都可以在一维映象中得到解释。与此相对照,当系统中存在两种场变量时,它们的傅里叶模式将分别满足不同型态的方程。对于有两类模式耦合的一个系统,数字实验表明,其运动遵循 Ruelle-Takens 途径从有规变为混沌,没有发现准一维映象^[3]。其它涉及两类模式耦合的工作也发现了在相空间中分岔到环的例子^[4]。

为了弄清两种不同类型模式耦合在运动从有规向混沌转变的过程中所起的作用,在本文中我们先从哈密顿系统这样一个尽可能简单的模型开始研究,暂且不讨论耗散问题。其次我们给出这个哈密顿系统。它的特点是,在两类模式之间的耦合趋于零时,其中一类模式所满足的非线性运动方程具有可积哈密顿量,它描写相干三波的衰变过程。另一类模式是平凡的不变量。当两类模式耦合时,运动会无序。因此,两类模式的耦合怎样破坏可积哈密顿量的有规运动,是一个有趣的问题。第三我们把两类模式之间的耦合参量作为小量,在微扰的零级近似下,即在两类模式之间无耦合时,分别给出两个子系统可积哈密顿量的解。耦合在进一步的近似下进入系统。我们发现,在一定条件下,耦合会引起共振。哈密顿系统运动的无序行为可能与这种共振带的重迭有关。最后对所得结果进行了讨论。

二、哈密顿系统

我们考虑两类振荡模式, 它们的傅里叶复振幅分别为 ϕ_i 和 ψ_i , 用实振幅 a_i, b_i 和实相位 α_i, β_i 来表示, 分别为

$$\begin{aligned}\phi_i(t) &= a_i(t)e^{i\alpha_i(t)}, \\ \psi_i(t) &= b_i(t)e^{i\beta_i(t)}.\end{aligned}\quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

对应于不同 j 的模式 ϕ_i 之间存在二次非线性相互作用, 同时 ϕ_i 和 ψ_i 之间也有耦合, 如果截断到 $N = 3$, 它们满足下面的方程:

$$\dot{a}_i = \mathcal{K}_i b_j \cdot \sin(\alpha_i - \beta_j) - AF_j a_k a_l \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad (1)$$

$$\dot{b}_i = -\mathcal{K}_i a_j \cdot \sin(\alpha_i - \beta_j), \quad (2)$$

$$\dot{\alpha}_i = \omega_i + \frac{\mathcal{K}_i b_j}{a_i} \cdot \cos(\alpha_i - \beta_j) + AF_j \frac{a_k a_l}{a_i} \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad (3)$$

$$\dot{\beta}_i = \frac{\mathcal{K}_i a_j}{b_i} \cdot \cos(\alpha_i - \beta_j). \quad (4)$$

这里 $A, F_j, \omega_i, \mathcal{K}_i$ 为常数, 并有 $\sum_{i=1}^3 F_i = 0$, $\{j, k, l\}$ 是 $\{1, 2, 3\}$ 的轮换(下同). 方程的物理背景和导出过程, 这里不赘述, 可以参考等离子体漂移波湍流的流体力学描述的工作, 如文献[3]. 本文的模型是文献[3]中模型的简化, 略去了所有与耗散有关的项. 因此, 在 $\mathcal{K}_i = 0$ 时, 方程(1), (3) ($j = 1, 2, 3$) 描写的是相干的三波相互作用. 在文献[3]中, $\mathcal{K}_i \neq 0$ 描写振荡电场模式 ϕ_i 与沿磁力线的离子声振荡模式 ψ_i 的耦合, 这个耦合是由于磁力线在三波 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) 相互作用三角形所在平面中有投影分量所引起的. 本文只考虑了 ϕ_i 与 ψ_i 耦合的最简单的情形, 略去了方程(2), (4)中原有的非线性项. 在这个简化模型下得到的方程(1)–(4), 变为一个哈密顿问题.

定义

$$I_i \equiv a_i^2 / F_i, \quad (5)$$

$$J_i \equiv b_i^2 / F_i, \quad (6)$$

取 α_i, β_i 为正则坐标, I_i, J_i 为正则动量, 方程(1)–(4)可以写成哈密顿正则方程

$$\begin{aligned}\dot{I}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = 2\mathcal{K}_i (I_i J_i)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\alpha_i - \beta_j) \\ &\quad - 2A(F_1 F_2 F_3)^{\frac{1}{2}} (I_1 I_2 I_3)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),\end{aligned}\quad (7)$$

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \beta_i} = -2\mathcal{K}_i (I_i J_i)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\alpha_i - \beta_j), \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_i &= \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i + \mathcal{K}_i \left(\frac{J_i}{I_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\alpha_i - \beta_j) \\ &\quad + A(F_1 F_2 F_3)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{I_k I_l}{I_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),\end{aligned}\quad (9)$$

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \mathcal{K}_i \left(\frac{I_j}{J_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\alpha_i - \beta_j). \quad (10)$$

这里哈密顿量 H 的形式为

$$H = \sum_{i=1}^3 \omega_i I_i + 2A(F_1 F_2 F_3)^{\frac{1}{2}} (I_1 I_2 I_3)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 2 \sum_{i=1}^3 \mathcal{K}_i (I_i J_i)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\alpha_i - \beta_i). \quad (11)$$

除哈密顿量 H 外, 这个系统还存在几个运动积分. 定义有效能量

$$W \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (a_i^2 + b_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 F_i (I_i + J_i), \quad (12)$$

容易证明, $\frac{dW}{dt} = 0$. 此外, 量

$$M_{il} \equiv (I_i + J_i) - (I_l + J_l) \quad (13)$$

也是运动常数, 并有关系 $M_{12} + M_{23} + M_{31} = 0$. 这些运动常数不足以确定系统的运动轨道, 计算机初步实验表明, 在 $\mathcal{K}_i \neq 0$ 时, 运动轨迹可以出现无规以至混沌.

三、微扰的零级近似下的可积哈密顿量

将系统的变量 X_i ($X_i = a_i, b_i$ 等) 按小参量 ε 展开,

$$X_i = X_i^{(0)} + \varepsilon X_i^{(1)} + \dots, \quad (14)$$

相应地, I_i, J_i 也可作类似的展开, 利用定义 (5)–(6) 式, 比较 ε 的同幂次的项, 得到

$$I_i^{(0)} = (a_i^{(0)})^2 / F_i, \quad J_i^{(0)} = (b_i^{(0)})^2 / F_i, \quad (15)$$

$$I_i^{(1)} = 2a_i^{(0)} a_i^{(1)} / F_i, \quad J_i^{(1)} = 2b_i^{(0)} b_i^{(1)} / F_i, \dots$$

进一步假设两类模式间只有弱耦合, $\mathcal{K}_i \sim o(\varepsilon)$, 记作

$$\mathcal{K}_i = \varepsilon \kappa_i.$$

把这些关系代入方程 (7)–(10) 中, 在 ε^0 级上, 得到方程

$$\dot{I}_i^{(0)} = -2A(F_1 F_2 F_3)^{\frac{1}{2}} (I_1^{(0)} I_2^{(0)} I_3^{(0)})^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(0)}), \quad (16)$$

$$\dot{\alpha}_i^{(0)} = \omega_i + A(F_1 F_2 F_3)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{I_k^{(0)} I_l^{(0)}}{I_i^{(0)}} \right) \cdot \sin(\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(0)}), \quad (17)$$

$$J_i^{(0)} = 0, \quad (18)$$

$$\dot{\beta}_i^{(0)} = 0. \quad (19)$$

并从 (17) 式得到

$$\dot{\alpha}^{(0)} \equiv \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^{(0)} = \Delta\omega + A(F_1 F_2 F_3)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_k^{(0)} I_l^{(0)}}{I_i^{(0)}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(0)}). \quad (20)$$

这里 $\Delta\omega \equiv \sum_{i=1}^3 \omega_i$. 方程 (16)–(17) 实际上是零级哈密顿量

$$H^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \omega_i I_i^{(0)} + 2A(F_1 F_2 F_3)^{\frac{1}{2}} (I_1^{(0)} I_2^{(0)} I_3^{(0)})^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(0)}) \quad (21)$$

的正则方程. 这时, I_i, α_i 的演化不再依赖于 J_i 和 β_i , 方程 (16) 和 (20) 构成关于变量 I_1, I_2, I_3 和 α 的封闭方程组, 并有 4 个独立的运动积分^[5]. 它们是哈密顿量 $H^{(0)}$, 有效能量

$$W^{(0)} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (a_i^{(0)})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 F_i I_i^{(0)} \quad (22)$$

以及

$$m_{ji} \equiv I_j^{(0)} - I_i^{(0)}. \quad (23)$$

这里 $m_{12} + m_{23} + m_{31} = 0$. 这样, 方程组 (16), (20) 是可积的. 这些运动常数还可以组合出一个运动常数为

$$\Gamma \equiv (F_1 F_2 F_3)^{\frac{1}{2}} (I_1^{(0)} I_2^{(0)} I_3^{(0)})^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(0)}) + \frac{\Delta\omega}{6A} \sum_{i=1}^3 I_i^{(0)}. \quad (24)$$

可以求出显示形式下的解, 利用前面给出的运动常数, 导出 ($j = 1$ 时)

$$\dot{I}_1^{(0)} = -\frac{1}{3} [P(I_1^{(0)})]^{1/2}, \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} P(I) \equiv & 36A^2 F_1 F_2 F_3 I^3 - [36A^2 F_1 F_2 F_3 (m_{12} - m_{31}) + 9(\Delta\omega)^2] I^2 \\ & - [36A^2 F_1 F_2 F_3 m_{12} m_{31} - 6\Delta\omega (6A\Gamma + \Delta\omega (m_{12} - m_{31}))] I \\ & - [6A\Gamma + \Delta\omega (m_{12} - m_{31})]^2. \end{aligned} \quad (26)$$

考虑到限制条件 $\sum_{j=1}^3 F_j = 0$, 我们取 $F_1 > 0$, $F_2 < 0$, $F_3 < 0$, 并设 $P(I_1^{(0)}) = 0$ 有三个根 $I_1^a \leq I_1^b \leq I_1^c$, 作变换^[6]

$$y(t) \equiv \left[\frac{I_1^{(0)} - I_1^a}{I_1^b - I_1^a} \right]^{1/2},$$

并令

$$\tau \equiv \left[\frac{I_1^b - I_1^a}{I_1^c - I_1^a} \right]^{1/2},$$

为简单, 取 $y(t_0) = 0$, 求得

$$I_1^{(0)}(t) = (I_1^b - I_1^a) y^2(\tau) + I_1^a = (I_1^b - I_1^a) \cdot \text{sn}^2[\lambda(t - t_0), \gamma] + I_1^a. \quad (27)$$

这里 $\text{sn}[\lambda t, \gamma]$ 为雅可比椭圆函数, $\lambda \equiv -A(F_1 F_2 F_3)^{\frac{1}{2}} (I_1^c - I_1^a)^{\frac{1}{2}}$, 椭圆函数的周期为

$$T \equiv 4K = 4F\left(\frac{\pi}{2}, \gamma\right) = 4 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\gamma^2 y^2)}}. \quad (28)$$

从上面的结果看出, 在零级近似下, 由于三个振子间的非线性相互作用, 正则动量 $I_1^{(0)}$ (因而振幅 $a_1^{(0)}$) 不再是常数, 而是随时间呈周期性的变化 (见图 1).

再来看相位 $\alpha_1^{(0)}$. 利用 (21) 式, 将 (17) 式改写为 ($j = 1$)

$$\dot{\alpha}_1^{(0)} = \omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2} + \frac{1}{2I_1^{(0)}(t)} \{H^{(0)} + \omega_2 m_{12} - \omega_3 m_{31}\},$$

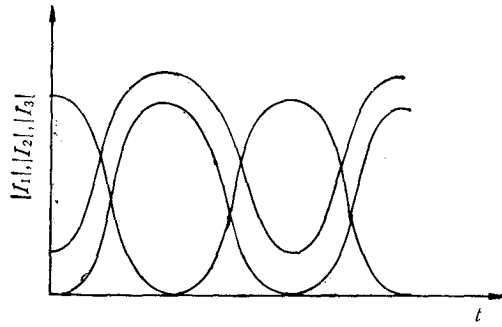
积分得 (取 $\alpha_1^{(0)}(t_0) = 0$)

$$\alpha_1^{(0)}(t) = \left(\omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2}\right) (t - t_0) + \frac{1}{2} (H^{(0)} + \omega_2 m_{12} - \omega_3 m_{31}) \int_{t_0}^t \frac{dt'}{I_1^{(0)}(t')}. \quad (29)$$

$I_1^{(0)}(t)$ 的显示式 2 求出, 上式右端的积分可以完成. 至此, 我们已经完全求出了 $I_1^{(0)}(t)$, $\alpha_1^{(0)}(t)$ 随时间的变化. $I_2^{(0)}(t)$, $I_3^{(0)}(t)$ 可从运动常数求出, $\alpha_2^{(0)}(t)$, $\alpha_3^{(0)}(t)$ 也可以类似地求出. 根据常微分方程的理论, 我们知道, $I_i^{(0)}$, $\alpha_i^{(0)}$ 的运动被约束在六维相空间中的一个不变环上, 运动完全是有规的. 哈密顿量 $H^{(0)}$ 用运动常数可表示为

$$H^{(0)} = \frac{1}{3} (\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3) m_{12} - \frac{1}{3} (\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3) m_{31} + 2A\Gamma. \quad (30)$$

如果把运动常数 m_{12} , m_{31} , Γ 取作新的正则动量, 那么新的正则坐标随时间变化的频率分别为 $\frac{1}{3} (\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)$, $-\frac{1}{3} (\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3)$, 和 $2A$.

图 1 未扰哈密顿系统 $|I_i|$ 随时间变化的示意图

另一方面,在零级近似下 $J_i^{(0)}, \beta_i^{(0)}$ 为运动的不变量,

$$J_i^{(0)}(t) = J_i^{(0)}(0), \quad \beta_i^{(0)}(t) = \beta_i^{(0)}(0). \quad (31)$$

这样,我们就得到了在零级近似下两个未耦合的子系统的解.

四 微扰一级近似下不变环的共振扰动

到 ε 的一级,我们可以得到各个一阶扰动量随时间演化的方程. 特别是, $J_i^{(1)}$ 和 $\beta_i^{(1)}$ 仅与零级量有关,

$$J_i^{(1)} = -2\kappa_i (I_i^{(0)} J_i^{(0)})^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\alpha_i^{(0)} - \beta_i^{(0)}), \quad (32)$$

$$\beta_i^{(1)} = \kappa_i \left(\frac{I_i^{(0)}}{J_i^{(0)}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\alpha_i^{(0)} - \beta_i^{(0)}). \quad (33)$$

这些方程右端的各个量,在第三节中都已求出,因此(32),(33)式可以对时间直接积分求解.

由(31)式知, $J_i^{(0)}(t), \beta_i^{(0)}(t)$ 为常数,我们可取 $\beta_i^{(0)} = 0$. 先考虑一个简单的情形,假设 $P(I_i^{(0)})$ 有一个零根, $I_i^* = 0$. 在前面 $F_1 > 0, F_2 < 0, F_3 < 0$ 的约定下,从(26)式容易检验另外两个根 I_1^*, I_2^* 是非负的.(在 $F_1 < 0, F_2 > 0, F_3 > 0$ 的相反情形下,若有一个零根,可说明另外两个根是非正的.这时,可设 $I_1^* \leq I_2^* \leq I_3^* = 0$,则求零级解的步骤与结果和上节的方法类似.因此不失一般性,我们只讨论 $F_1 > 0, F_2 < 0, F_3 < 0$ 的情形.)从(26)式,有零根的条件为

$$6A\Gamma + \Delta\omega(m_{12} - m_{31}) = 0. \quad (34)$$

只要选择适当的运动常数 m_{12}, m_{31}, Γ , 就可以满足这个条件. 在相空间的某些区域,满足这个条件的点甚至可能是稠密分布的. 从关系(30)式知,条件(34)式等价于条件

$$H^{(0)} + \omega_2 m_{12} - \omega_3 m_{31} = 0.$$

所以,在 $I_i^* = 0$ 的假设下, $\alpha_i^{(0)}$ 有简单表式

$$\alpha_i^{(0)}(t) = \left(\omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t - t_0), \quad (35)$$

将上式及(27)式代入(32)式,得

$$J_i^{(1)} = -2\kappa_i [J_i^{(0)} I_i^*]^{\frac{1}{2}} \text{sn}[\lambda(t - t_0), \gamma] \cdot \sin \left[\left(\omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t - t_0) \right], \quad (36)$$

将椭圆函数 sn 展开成傅里叶级数,代入得

$$J_i^{(1)} = -2\kappa_i [J_i^{(0)} I_i^*]^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\gamma K}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch} \frac{(2n-1)\pi K'}{2K} \cdot \frac{\sin (2n-1)\pi\lambda(t-t_0)}{2K} \cdot \sin \left[\left(\omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t-t_0) \right] \\
& = -\frac{\kappa_1\pi}{\gamma K} [J_1^{(0)} I_1^b]^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch} \frac{(2n-1)\pi K'}{2K} \left\{ \cos \left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} - \omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t-t_0) \right] \right. \\
& \quad \left. - \cos \left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} + \omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t-t_0) \right] \right\}. \tag{37}
\end{aligned}$$

这里 $K' = F\left(\frac{\pi}{2}, r'\right)$, $r' = \sqrt{1-r^2}$. 将(37)式对时间积分, 得到

$$\begin{aligned}
J_1^{(1)}(t) & = -\frac{\kappa_1\pi}{\gamma K} [J_1^{(0)} I_1^b]^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch} \frac{(2n-1)\pi K'}{2K} \\
& \quad \cdot \left\{ \frac{1}{\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} - \omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}} \cdot \sin \left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} - \omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t-t_0) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} + \omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2}} \cdot \sin \left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} + \omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t-t_0) \right] \right\}. \tag{38}
\end{aligned}$$

我们已取 $J_1^{(1)}(t_0) = 0$.

关于 $I_j^{(0)}$, $\alpha_j^{(1)}$ 的方程是一组耦合的非齐次常微分方程, 其系数与时间有关, 直接解是不容易的. 但是我们可以利用哈密顿量 H 的运动常数 W , M_{12} , M_{23} , 在 ε^1 级上找到 $I_j^{(1)}(t) = -J_j^{(1)}(t)$. 因此我们在下面只讨论 $J_j^{(1)}(t)$ 的性质.

取(38)式右端求和中的第 n 项的一项

$$\begin{aligned}
J_{1,n}^{(1)}(t) & = -\frac{\kappa_1\pi}{\gamma K} [J_1^{(0)} I_1^b]^{\frac{1}{2}} \operatorname{csch} \left[\frac{(2n-1)\pi K'}{2K} \right] \\
& \quad \cdot \frac{1}{\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} - \omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}} \cdot \sin \left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} - \omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t-t_0) \right], \tag{39}
\end{aligned}$$

让我们看上式中的分母 $\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} - \omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}$, 其中 ω_1 为振子 ϕ_1 的线性振荡频率,

$\Delta\omega$ 为三个振子 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 间的频率失谐. 椭圆函数的 $1/4$ 周期 K 及因子 λ 通过 $P(I_1^{(0)}) = 0$ 的解依赖于零级哈密顿量的运动常数. 对于固定的 ω_j , 当初始取值使

$$\frac{(2n-1)\pi\lambda(I_1^a, I_1^b)}{2K(I_1^a, I_1^b, I_1^c)} \pm \left(\omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) = 0 \tag{40}$$

满足时, 共振发生. 一般情形下(如注意到, 如果前节不取 $y(t_0) = 0$, 会在椭圆函数中引入初相位), 在共振点扰动发散. 在共振点附近, $J_{1,n}^{(1)}(t)$ 为长周期的函数. 此外, 共振点也是 $\beta_1^{(1)}(t)$ 的奇点.

当没有零根时, 我们仍假设 $|I_1^a| \ll |I_1^b|$, 则 $J_{1,n}^{(1)}(t)$ 出现如下随时间变化的因子:

$$J_{1,n}^{(1)}(t) \propto \cos \left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} + \omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t-t_0) \right]$$

$$+ \frac{H^{(0)} + \omega_2 m_{12} - \omega_3 m_{31}}{2} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{I_1^{(0)}(t')}.$$

我们在 $\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} + \omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2} \sim 0$ 附近考查, 则余弦函数宗量中的第一项是时间的慢变函数. 这样, 我们可以将时间分为快时标和慢时标, 并对快时标作平均. 这在 $\gamma \ll 1$ 时容易作. 这时, 椭圆函数 $\text{sn}[\lambda(t-t_0), \gamma] \approx \sin \lambda(t-t_0)$, 周期 $T \approx \pi/2$. 设 I_1^a, I_1^b 同号, 则

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{I_1^{(0)}(t')} &\approx \int_{t_0}^t \frac{dt'}{(I_1^b - I_1^a) \sin^2 \lambda(t-t_0) + I_1^a} \\ &= \frac{\text{sign}(I_1^a)}{\lambda \sqrt{I_1^a I_1^b}} \cdot \text{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{I_1^b}{I_1^a}} \cdot \text{tg} \lambda(t-t_0) \right), \end{aligned}$$

它是 t 的周期为 π/λ 的函数. 将 $J_{1,n}^{(1)}(t)$ 在这个时标下求平均, 经过一些运算, 得

$$\langle J_{1,n}^{(1)} \rangle_{t_1} \propto \cos \left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K} + \omega_1 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t-t_0) \right].$$

由此得到的共振条件, 与(40)式相同. 当 I_1^a 与 I_1^b 不同号时, 积分 $\int_{t_0}^t \frac{dt'}{I_1^{(0)}(t')}$ 的具体形式与上面的不同, 但最后结论是一样的.

从上面的结果我们看出, 本文讨论的两种不同类型模式的相互作用, 有明显的共振特性. 共振是这样发生的: 在系统中的一类振子 (ϕ_j) 具有固有的振荡频率 (ω_j), 由于这类振子 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) 之间的相干非线性相互作用, 它们的振幅 (a_1, a_2, a_3) 不再是运动常数, 而呈周期性变化. 在一定条件下就是物理上出现的参量衰变. 振幅的这个周期性变化运动可以分解为无穷的谐波振荡. 当第二类模式 (ϕ_j) 耦合进这个系统时, 就会在相空间中引入共振区. 共振发生在固有的线性振荡频率 (因三波间频率失谐而有一频移) 与振幅的非线性变化的某一谐波频率相等时.

如果考虑更高阶的扰动, 会消除精确共振, 但我们预期, 由于在共振点附近存在长周期的运动, 两类不同模式的相互作用将会在系统中引入低频噪声.

五、讨 论

我们研究了两种不同类型模式相互耦合的一个哈密顿系统. 这类系统是从等离子体湍流问题中引出的. 未扰动时两个子系统分别为相干的三波相互作用振子和不变量. 我们在微扰的一级下证明了, 两个子系统耦合会引起共振, 共振发生在振子的线性振荡频率 (及失谐) 及因振子间非线性相互作用造成的振幅周期性变化的谐频之间. 共振和它们之间可能存在的重迭使系统从未扰的具有可积哈密顿量的有规运动开始向无序转变.

在研究扰动引起不变环的破坏时, 如果扰动不显示地依赖于时间, 通常假设微扰哈密顿量 $H^{(1)}$ 可以表示为未扰系统的作用——角变量的函数. 这时, 可以证明, 当围绕不变环运动的频率矢量 ω 满足 $m \cdot \omega = 0$ (m 是具有整数分量的矢量) 时, 附近的 KAM 面首先被破坏, 即共振发生在有理绕数的环面上 (参阅文献[7]). 在本文情形下, 微扰哈密顿量 $H^{(1)}$ 是未扰系统 $H^{(0)}$ 的正则变量 (I, α) 的函数, 但 (I, α) 不是 $H^{(0)}$ 的作用——角变量, 正则动量 I 也不是 $H^{(0)}$ 的运动常数. 要把未扰系统 $H^{(0)}$ 变换到作用——角变量或者正则动

量是运动常数的坐标系,需要进行正则变换.一般说来,正则变换不一定是简单的变换,其坐标变换可能与时间有关.这样,微扰 $H^{(1)}$ 就有可能不能简单地表示为 $H^{(0)}$ 的作用——角变量的函数,而与时间有关.在本文选用的运动常数为正则动量的参考系中,扰动引起的共振发生在满足条件(40)式的地方,而不是在有理绕数的环面上,其原因可能就在这里.

本文研究的共振,与文献[8]中讨论的在周期外力场作用下非线性系统的共振,在现象上有某种类似之处.在文献[8]中,未扰系统的非线性,也引进了新的频率,它们与外加的强迫频率发生共振.但在本文中,没有外加的强迫振动,非线性引进的新的(振子振幅变化的)频率,是与振子本身的固有频率之间发生共振的.这种共振是一个具有两类不同模式耦合的自治系统的内在结果.

黄祖洽教授对本工作给予关心和指导,特致谢意.

参 考 文 献

- [1] J. M. Wersinger, J. M. Finn and E. Ott, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 1142.
- [2] D. A. Russell, E. Ott, *Phys. Fluids*, **24**(1981), 1976.
- [3] D. Biskamp, He Kaifen, *Phys. Fluids*, **28**(1985), 2172.
- [4] J. H. Curry, *Commun. Math. Phys.*, **60**(1978), 193.
- [5] P. W. Terry and C. W. Horton, *Phys. Fluids*, **25**(1982), 491.
- [6] R. Z. Sagarov and A. A. Galeev, in «Nonlinear Plasma Theory».
- [7] «(Regular and Chaotic Motion)», ed. by A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman.
- [8] L. E. Reichl and W. M. Zheng, *Phys. Rev.*, **A29**(1984), 2186.

RESONANCE PERTURBATION OF A HAMILTONIAN BY COUPLING OF TWO DIFFERENT KINDS OF MODES

He Kai-fen

(Beijing Normal University)

ABSTRACT

A Hamiltonian system with coupled two different kinds of modes is studied. When the coupling vanishes, one kind of modes is nonlinear oscillators, describing coherent three-wave interaction and consisting an integrable Hamiltonian. Another kind of modes is constants of motion. In the first order of approximation, resonance occurs due to the coupling between these two kinds of modes. The resonance condition is relevant to the existing linear frequencies and their mismatch as well as the harmonic frequencies of the nonlinear variations of the amplitudes of the oscillators.