

研究简报

Josephson 结的阵发混沌与低频噪声*

肖婉如

(南京建筑工程学院物理教研室)

姚希贤

(南京大学物理系)

1985 年 10 月 28 日收到; 1987 年 9 月 7 日收到修改稿

提 要

本文运用数值计算的方法研究了射频电流驱动下包含干涉项电流的 Josephson 结的分岔、混沌和阵发混沌。讨论了 Josephson 结的低频噪声, 以及它与通向混沌途径的关系。

一、引 言

近年来, 关于 Josephson 结的非线性动力学行为的研究已取得了很大的进展^[1-3]。运用数值计算和模拟实验, 在相当宽的参数范围内发现了混沌响应, 多周期和准周期的状态, 以及各种通向混沌的途径, 如准周期道路、倍周期分岔和阵发混沌。研究表明, Josephson 结用作参量放大时, 在实验中出现的反常噪声可能起因于混沌运动。Octavio 等人^[4]通过对直流偏置、微波辐照的 Josephson 结的实际测量, 发现最大噪声上升出现在阵发混沌状态。这时结随机地跳动在两个非稳定的台阶之间, 其低频噪声温度可高达 10^6K 。因此研究不同道路所导致的混沌对噪声的影响, 将是一个有趣的问题。这对于解决 Josephson 器件中的一些噪声问题是有用的。我们的工作研究射频电流驱动下, 并包含“ $\varepsilon \cos \phi$ ”干涉项电流的 Josephson 结。在射频电流驱动下, 加入“ $\varepsilon \cos \phi$ ”项是合理的, 并且更符合实际情况。运用数值计算和功率谱分析, 研究了阵发混沌行为, 并讨论了它的低频噪声特性。

二、数值计算结果

根据 Stewart-McCumber 模型, 计入干涉项电流, 射频驱动的 Josephson 结, 超导序参量的位相差 $\phi(\tau)$ 所满足的方程如下:

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{\sqrt{\beta_c}} (1 + \varepsilon \cos \phi) \dot{\phi} + \sin \phi = \rho \sin Q\tau. \quad (1)$$

* 中国科学院科学基金资助的课题。

在此,我们已引入了无量纲的参数,进行如下变换:

$$\text{时间 } t \rightarrow \tau = \omega_J t,$$

$$\text{射频电流频率 } \omega_d \rightarrow Q = \omega_d / \omega_J,$$

$$\text{射频电流振幅 } I_{rf} \rightarrow \rho = I_{rf} / I_c,$$

其中 I_c 为临界超导电流, ω_J 为结的等离子振荡频率, $\omega_J = (2eI_c/\hbar c)^{1/2}$, $\beta_c = 2eI_c R^2 C / \hbar$ 为 McCumber 参数. 根据实验结果^[4], 我们取 $\varepsilon = -0.8$. 为了计算方便, 将方程 (1) 化成一阶自治的常微分方程组^[7]

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho \sin x - \frac{1}{\sqrt{\beta_c}} (1 + \varepsilon \cos y) x - \sin y, \\ \dot{y} = x, \quad \dot{z} = Q, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x = \phi$, $y = \phi$, 并取初始条件 $\phi(0) = 0$, $\phi(0) = 0$.

在 $\beta_c = 6.25$, $\rho = 0.6-0.7$, $Q = 0.6-0.616$ 的参数范围内, 对方程 (2) 进行数值求解, 并采用分频采样, 运动轨道的直接观察和功率谱分析的方法研究解的性质. 图 1 给出上述参数范围内的 $\rho-Q$ 相图(略去暂态过程). 为了表示各种模式的频率响应特性, 引入平均电压的概念,

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar \omega_J}{2e} \int_0^T \dot{\phi} \frac{d\tau}{T} = \frac{q}{p} \left(\frac{\hbar \omega_d}{2e} \right), \quad (3)$$

其中 $T = 2\pi p / Q$ 为 $\phi(\tau)$ 的运动周期, 以 p 表示, $T = pT_d$, T_d 为外驱动周期; q 表

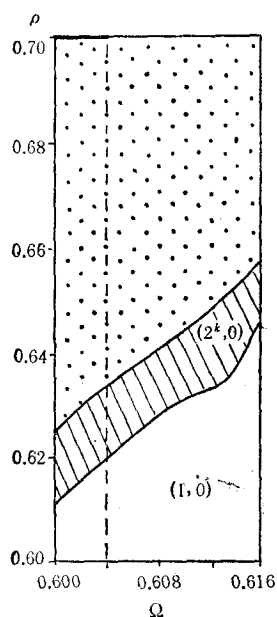
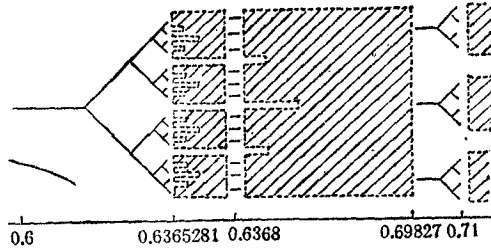
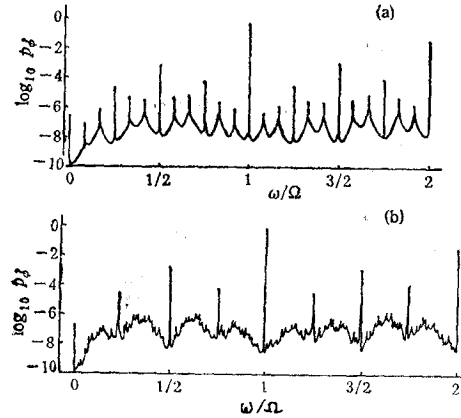


图 1 $\rho-Q$ 相图 ($\beta_c = 6.25$, $\varepsilon = -0.8$) 圆点区为混沌区; 斜线区为 2^k 周期区; 为 3×2^k 周期区; (p, q) 对应 q/p 射频感应台阶的部分谐波

示在周期 T 内位相 $\phi(\tau)$ 的变化, 即 $2\pi q = \phi(T) - \phi(0)$. 显然当 q/p 为有理数时, 解是位相锁定的, 表示结处于第 q/p 射频感应台阶上; 当 q/p 为无理数时, 解为非位相锁定的. 在图 1 中, 周期解以 (p, q) 表示. 混沌是线性振子和非线性振子互相竞争的结果. 图 1 中混沌区本身还分成周期不同的带, 在更小的尺度上又嵌有周期窗口. 我们仔细研究了 $\rho-Q$ 相图中 $Q = 0.604$ 这一条直线. 图 2 给出沿这条直线的分岔情况. 当 ρ 增大时, 系统由 $(1, 0)$ 周期开始倍周期分岔^[8], 这是一个很窄的区域, $\rho_\infty - \rho_p \approx 0.014$. 根据我们的计算精度, 发现解的周期由 $2p$ 迅速变化到 $128p$, 然后进入混沌带的反序列(图中斜线所示部分). 嵌在不同混沌带中的周期轨道可由 ϕ 功率谱的精细结构识别. 例如 $12p = (4 \times 3)p$ 的周期轨道出现在 $4I$ 周期混沌带中(图 3). 这是一个极其微小的周期区, 至少 $\Delta\rho = 0.5 \times 10^{-4}$ 内没发现什么过渡区. 从 $1I$ 周期的混沌带到 $(3, 0)$ 周期经过了一个阵发混沌区域(下一节详细介绍). 随着 ρ 的增大, 从 $(3, 0)$ 周期又经过一个极窄的倍分岔区进入混沌带的反序列.

如 Humieres 所指出^[9], 倍周期分岔的前兆是解的对称性破缺, 只有当周期解的对称性破缺, 才可经倍周期分岔进入混沌. 对偶倍周期解无此

图2 $Q = 0.604$ 的分岔示意图(横轴为 ρ 无比例)图3 位相速度 $d\phi/d\tau$ 的对数功率谱 ($\beta_c = 6.25$, $\varepsilon = -0.8$) (a) 为 $Q = 0.604$, $\rho = 0.6368$ 嵌在 4 周期混沌带中的 $(12, 0)$ 周期解; (b) 为 $Q = 0.604$, $\rho = 0.63685$ 束缚的 4 周期混沌解

对称性^[10]。例如在 2^k 主分岔序列开始前 $(1, 0)$ 周期解是非对称的; 在 3×2^k 分岔序列开始前, 系统通过阵发混沌进入 $(3, 0)$ 周期态具有对称性^[10]

$$\begin{aligned}\phi\left(\tau + \frac{T}{2}\right) &= 2k\pi - \phi(\tau), \\ \phi\left(\tau + \frac{T}{2}\right) &= -\phi(\tau).\end{aligned}\quad (4)$$

这里 $T = 3T_d$, $k = 1$, 在功率谱中无偶次谐频峰(见图 5(a)). 然后系统由对称 $(3, 0) \rightarrow (3, 0)$ 对称破缺 $\rightarrow (6, 0) \rightarrow (12, 0) \rightarrow$ 混沌。

在相同的 $(\rho-Q)$ 参数区, 我们同时计算了没有干涉项电流, 即 $\varepsilon = 0$ 的方程 (1) 的解。计算结果表明, 这一参数区内只存在 $(1, 0)$ 对称的周期解, 并无任何混沌存在, 关于 “ $\varepsilon \cos \phi$ ” 项的影响有待进一步加以研究。

三、阵发混沌

对于外驱动的 Josephson 结, 不管是否存在 dc 偏置, 数值计算^[3]或模拟电路^[9], 结果均在某些参数范围内出现阵发混沌现象。阵发混沌表现在时间行为上忽而周期, 忽而混乱, 随机地在两者之间跳跃。通过观察 ϕ , ϕ 随时间的变化规律, 在 $1I \rightarrow 3I$ 的过渡区观察到阵发混沌。图 4 给出 $Q = 0.604$, $\rho = 0.6983 \sim 0.695$ 区间的三种 ϕ 随时间的变化曲线。当驱动电流的振幅 ρ 大于阈值 ρ_c (0.69827) 时, 解是以三倍外驱动电流的周期 $3T_d$ 作稳定振荡(图 4(a))。当 ρ 小于 ρ_c 时 $\phi(\tau)$ 和 $\phi(\tau)$ 的形态变得不稳定, 周期振荡的“层流”被阵发的“湍流”打断, 而在这些“湍流”之间为幅值上有微小变化的准周期振荡, 并在阵发湍流时产生 “ 2π ” 倍的相移(图 4(b))。这不规则的相移过程与结两端的突发湍流电压直接有关。当 ρ 进一步减小, 准周期振荡越来越频繁地被阵发“湍流”打断, 最后完全进入混沌状态(图 4(c))。

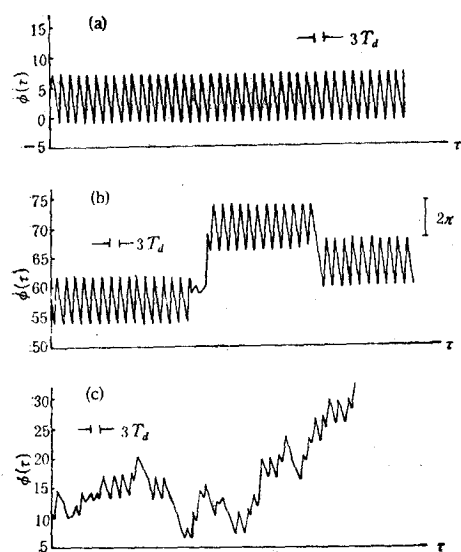


图4 $\Omega = 0.604$, ρ 在阈值 ρ_c 附近 ϕ 随时间的变化曲线

(a) 为 $\rho = 0.6983$ 随时间的周期振荡; (b) 为 $\rho = 0.6982$ 混乱爆发间有准周期振荡; (c) 为 $\rho = 0.695$ 混沌态

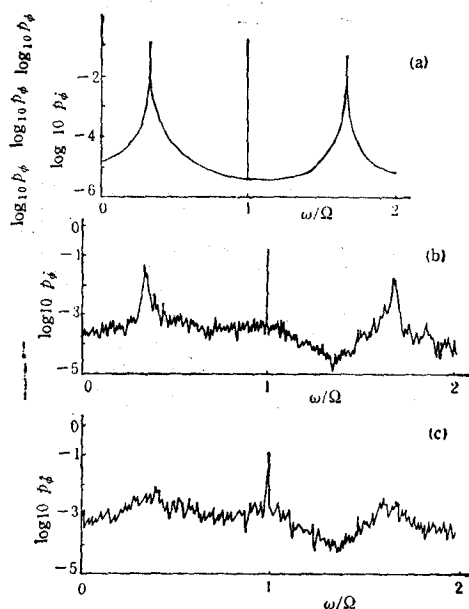


图5 $\Omega = 0.604$, ρ 在阈值 ρ_c 附近, 位相速度 ϕ 的对数功率谱

(a) 为 $\rho = 0.6983$ (b) 为 $\rho = 0.6982$; (c) 为 $\rho = 0.695$

我们同时计算了图4所对应的三种状态的 ϕ 的对数功率谱(见图5)。图5(a)表示 $\rho = 0.6983$ 时, $(3, 0)$ 周期振荡的解。在功率谱中出现 $1/3$ 分频及基频尖峰。因解具有对称性,所以在零频及分频的偶倍频处无尖峰。图5(b)为 $\rho = 0.6982$ 阵发混沌区功率谱,在基频和 $1/3$ 分频处仍出现高峰,因为层流的准周期振荡是以 $3T_d$ 为周期的。其宽峰是因层流和湍流之间跳动时位相转移所造成,噪声背景显然是混沌的特征。随着层流时

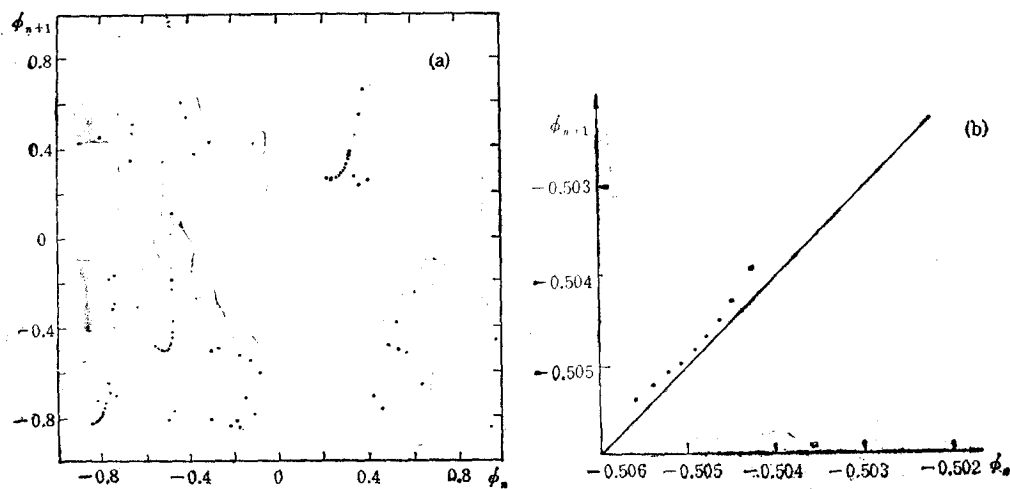


图6 $\phi_{n+1} - \phi_n$ 迭代图

(a) 为 $\Omega = 0.604$, $\rho = 0.6982$ 阵发混沌机制; (b) 为 (a) 图中间一个走廊放大图

间缩短和湍流频繁发生,分频峰趋于消失仅留下基频尖峰(见图 5(c)).

根据 Manneville 和 Pomeau 的模型^[11],在阵发混沌的区域绘出变量 ϕ 的后一个值 ϕ_{n+1} 依赖于前一个值 ϕ_n (相隔一个准周期)的图形(见图 6(a)).图中有三处与 45° 分角线接近相切.将中间一个接近相切部分放大,得到图 6(b). $\phi_{n+1}-\phi_n$ 曲线呈简单的抛物线形状,与 45° 分角线之间形成一个狭长的“走廊”.当迭代中一个点恰好落在某个“走廊”附近时,便在“走廊”中踏步,这时对应着准周期振荡.多次迭代后,从另一端离去.经过一些大幅度跳跃之后(图 6(a)中随机分布的点),又可能来到这个或另一个“走廊”附近,再次重复以上过程.按照 Manneville 和 Pomeau 预言的标度关系^[11]

$$N \propto (\rho_c - \rho)^{-1/2}, \quad (5)$$

其中 N 为准周期区中振荡总数,图 7 给出 $Q = 0.604$ 时, $\bar{N}^{-2}-(\rho_c - \rho)$ 关系图,其中 $\bar{N}$ 为多个准周期区平均的结果.图中直线表示计算结果与理论预言的标度关系相符.

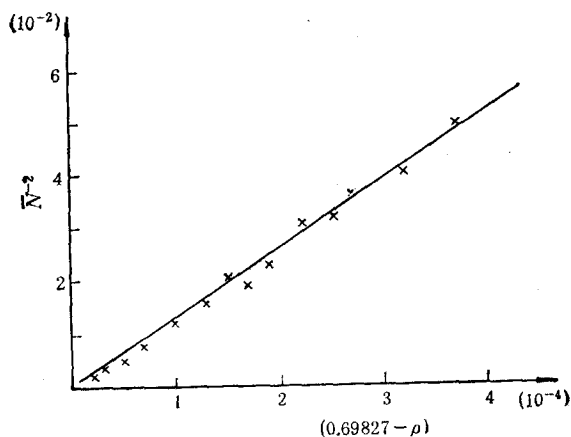


图 7

四、讨 论

Ben-Jacob 等人^[12]的计算表明,阵发混沌的功率谱在高频部分代数衰减,可用两个极限环间的跳动行为来解释这种特性.在许多动力学系统中,相空间不同部位间的随机跳动是一个普遍的现象.关于强迫非简谐振子,Areccchi 和 List^[13]曾指出,在两类吸引子间的随机跳动,其功率谱在低频部分将产生 $f^{-\alpha}$ 发散现象,其中 f 为频率, α 约 0.6. Kautz^[3]的文献指出,混沌态是否出现与系统是否处于位相锁定的态无关,而和周期解的不稳定性有关.当系统从倍周期分岔进入混沌,这时位相是锁定的,并且混沌功率谱的噪声背景在低频部分迅速下降;当系统跳动于两个位相锁定的态间,噪声随 ω 减少而升高,当 $\omega \rightarrow 0$ 时,保持不变频谱变平. Humieres 等人^[9]的电路模拟结果表明阵发混沌噪声谱远高于倍分岔混沌,围绕非稳定周期位相锁定态中心展开宽的频率响应,并推测其宽度可能与周期态的寿命有关.

根据我们的计算,当结的参数变化时,系统由倍周期分岔进入混沌的反序列,位于同一个位相锁定的态.功率谱的低频噪声当 $\omega \rightarrow 0$ 时急剧下降(见图 3(b)),这时 $q/p=0$,

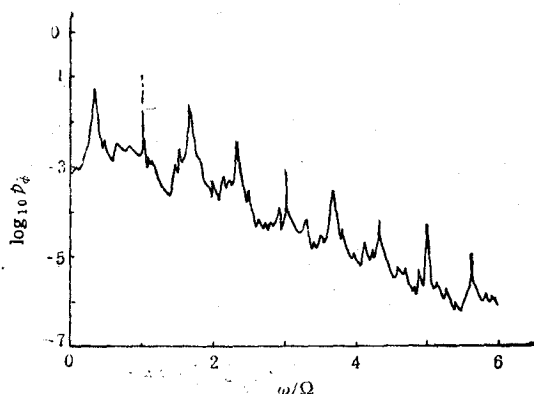


图 8

Josephson 结的阵发混沌噪声特性和存在直流偏置的情况是类似的,

即 $\langle V \rangle = 0$. 但在阵发混沌区, 功率谱中低频噪声背景显著上升. 特别当 $\omega \rightarrow 0$ 时趋于常数(见图5(b), (c)). 计算表明, 其低频噪声一般比 Feigenbaum 道路导致的混沌状态高达 30—60dB. 图 8 给出 $\Omega = 0.604$, $\rho = 0.69824$, 阵发混沌较宽频率范围的 ϕ 功率谱. 可以看出, 在高频部分噪声是代数衰减的.

我们的结果表明, 在无直流偏置, 并且计入干涉项电流的情况下,

参 考 文 献

- [1] B. A. Huberman, J. P. Crutchfield and N. H. Pacard, *Appl. Phys. Lett.*, **37**(1980), 750.
- [2] N. F. Pedersen, and A. Davidson, *Appl. Phys. Lett.*, **39** (1981), 830.
- [3] R. L. Kautz, *J. Appl. Phys.*, **52** (1981), 6241.
- [4] W. J. Yeh and Y. H. Kao, *Appl. Phys. Lett.*, **42** (1983), 299.
- [5] Da Ren He, W. J. Yeh and Y. H. Kao, *Phys. Rev.*, **B30** (1984), 172.
- [6] M. Octavio and C. Read Nasser, *Phys. Rev.*, **B30** (1984), 1586.
- [7] 郝柏林, 物理学进展 **3**(1983), 329.
- [8] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, **19**(1978), 25.
- [9] D. D. Humieres, M. R. Beasley, B. A. Huberman and A. Libchaber, *Phys. Rev.*, **A 26** (1982), 3483.
- [10] A. H. MacDonald, M. Plischke, *Phys. Rev.*, **B27** (1983), 20.
- [11] P. Manneville and Y. Pomeau, *Phys. Lett.*, **75A** (1979), 1.
- [12] E. Ben-Jacob, I. Goldirsch and Y. Imery and S. Fishman, *Phys. Rev. Lett.*, **29** (1983), 1599.
- [13] F. T. Arecchi and F. List, *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982), 94.
- [14] D. N. Langenberg, *Rev. Phys. Appl.*, **9** (1974), 35.

INTERMITTENCY AND LOW FREQUENCY NOISE IN JOSEPHSON JUNCTION

XIAO WAN-RU

(Physics Division, Nanjing Architectural Institute)

YAO XI-XIAN

(Department of Physics, Nanjing University)

ABSTRACT

The bifurcations, chaos and intermittency in the f-biased Josephson junction are investigated by numerically integrating the equation for Stewart-McCumber model with an interference " $\epsilon \cos \phi$ " term. In addition, the relation between low frequency noise and the routes to chaos in Josephson junctions is discussed.