

弱光场下电子与库仑势散射的微扰解*

李 介 平

北京师范大学低能核物理研究所, 北京, 100875

1990 年 9 月 19 日收到

外光场下电子与库仑势散射的 Schrodinger 方程可用 Floquet 分波法分离变量。径向波动方程是一组无限耦合的二次线性微分方程组, 当弱外光场可视为微扰, 方程组将近似为二次常微分方程并且可积, 由此可得径向波函数、 S 矩阵、截面。无论何种极化或是否作偶极近似, 共振谱线是普遍存在的, 并给出共振能量和强度的计算公式。

PACC: 3280F; 0380

一、引 言

弱外光场下电子与库仑势散射问题, 我们已用弱耦合法求解过^[1], 但弱耦合法在引入修饰势时, 只限于圆极化、偶极近似的外光场, 对物理上的外光场, 还应当考虑不同极化、非偶极近似等情形, 这是弱耦合法所不适用的。

我们发现, 对 Schrodinger 方程, 即包含外光场矢势是依时间周期变化的, 用 Floquet 分波展开同样可以分离变量, 得到的径向波动方程组也是无限阶耦合的线性二次微分方程组。当外光场可作微扰处理时, 这组微分方程组解耦而成为可积的二次线性常微分方程, 可以逐阶近似求解, 因此可求径向波函数、散射矩阵元和截面。由于不必引入修饰势求解, 所以适用不同极化, 非偶极近似情形。

二、基本方程与边界条件

在外光场作用下, 粒子与有心势 $U(r)$ 的散射问题变得复杂了, 当外光场矢势为 $\mathbf{A}(\bar{r}, t)$, 其 Schrodinger 方程为 ($e = m = \hbar = 1$)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\bar{r}, t) = \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 + i \frac{\mathbf{A}(\bar{r}, t) \cdot \nabla}{c} + \frac{\mathbf{A}^2(\bar{r}, t)}{2c^2} + U(r) \right] \phi(\bar{r}, t). \quad (1)$$

其中 c 为光速。矢势 $\mathbf{A}(\bar{r}, t)$ 在线极化时取为

$$\mathbf{A}(\bar{r}, t) = A_0 \epsilon_{\mu_0} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t + \delta). \quad (2a)$$

其中线极化方向单位矢量 $\epsilon_{\mu_0} = \cos \mu_0 \epsilon_x + \sin \mu_0 \epsilon_y$,

在圆极化时

* 国家自然科学基金及中国原子、分子数据研究联合体基金资助的课题。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0[\boldsymbol{\epsilon}_x \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t + \delta) - \boldsymbol{\epsilon}_y \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t + \delta)]. \quad (2b)$$

我们选择光传播方向 $\mathbf{k} = k\boldsymbol{\epsilon}_z$, 梯度算符在球坐标下可写为

$$\nabla = \boldsymbol{\epsilon}_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} (\boldsymbol{\epsilon}_r \times \mathbf{L}). \quad (3)$$

其中 $\mathbf{L}$ 为角动量算符, 而 $L_{\pm}, L_z$ 为其投影分量算符, 用球谐函数 Y_L^M 表示, 点积可化为(参见文献[2])

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{\mu_0} \cdot \nabla = & \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left\{ [\sin \mu_0 (Y_1^+ + Y_1^{-1}) + i \cos \mu_0 (Y_1^+ - Y_1^{-1})] \frac{d}{dr} \right. \\ & \left. + (Y_1^{-1} - Y_1^+) \sin \mu_0 - i(Y_1^+ + Y_1^{-1}) \cos \mu_0 \right] \frac{L_z}{r} - i(e^{-i\mu_0} L_+ - e^{i\mu_0} L_-) \frac{Y_1^0}{r\sqrt{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

利用 Floquet 分波展开, 我们可分离变量, 得到径向波函数所满足的方程.

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n, L, M} \frac{F_{n, L, M}(r)}{r} Y_L^M(\boldsymbol{\Omega}) \exp[-iEt + in(\omega t + \delta)], \quad (5)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} - 2U(r) - \frac{A_0^2}{(2-r^2)c^2} + 2(E - n\omega) \right] F_{n, L, M}(r) = g_r(r). \quad (6)$$

其中 $r=0$, 代表线极化情形.

$$\begin{aligned} g_0(r) = & \sum_{m, L', M'} i^m (2m+1) \frac{A_0^2}{2c^2} j_m(2kr) \langle Y_L^M | P_m | Y_{L'}^{M'} \rangle [F_{n-2, L', M'}(r) \\ & + (-1)^m F_{n+2, L', M'}(r)] \\ & + \sum_{m, L', M'} i^{(m+1)} (2m+1) \frac{A_0}{c} j_m(kr) \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \langle Y_L^M | P_m \left\{ [\sin \mu_0 (Y_1^+ + Y_1^{-1}) \right. \\ & \left. + i \cos \mu_0 (Y_1^+ - Y_1^{-1})] \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \right. \\ & \left. + [(Y_1^{-1} - Y_1^+) \sin \mu_0 - i(Y_1^+ + Y_1^{-1}) \cos \mu_0] \frac{L_z}{r} - [e^{-i\mu_0} L_+ - e^{i\mu_0} L_-] \frac{iY_1^0}{r\sqrt{2}} \right\} | Y_{L'}^{M'} \rangle \\ & \cdot [F_{n-1, L', M'}(r) + (-1)^m F_{n+1, L', M'}(r)]. \end{aligned} \quad (7a)$$

$r=1$ 圆极化情形

$$\begin{aligned} g_1(r) = & \sum_{m, L', M'} i^{(m+1)} (2m+1) \frac{A_0}{c} j_m(kr) \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left\{ i \langle Y_L^M | P_m \left[(Y_1^+ - Y_1^{-1}) \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - (Y_1^{-1} + Y_1^+) \frac{L_z}{r} + \frac{Y_1^0 (L_- - L_+)}{r\sqrt{2}} \right] | Y_{L'}^{M'} \rangle [F_{n-1, L', M'}(r) + (-1)^m F_{n+1, L', M'}(r)] \right. \\ & \left. + \langle Y_L^M | P_m \left[-(Y_1^+ + Y_1^{-1}) \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) - (Y_1^{-1} - Y_1^+) \frac{L_z}{r} + \frac{Y_1^0 (L_+ - L_-)}{r\sqrt{2}} \right] | Y_{L'}^{M'} \rangle \right. \\ & \left. [F_{n-1, L', M'}(r) + (-1)^{(m+1)} F_{n+1, L', M'}(r)] \right\}. \end{aligned} \quad (7b)$$

其中 $\langle Y_L^M | P_m | Y_{L'}^{M'} \rangle \equiv \int d\boldsymbol{\Omega} Y_L^M P_m Y_{L'}^{M'}$, P_m 为 Legendre 函数, $j_m(x)$ 为 m 阶球 Bessel 函数.

方程(6)以及(7a)(7b) 式为对角动量 L, M 无限阶耦合的二次线性微分方程组, 一般

情形下求解是困难的。下面我们再写出散射问题的边界条件, 散射矩阵元和截面关系式(参见文献[1])。

零边界条件

$$F_{n,L,M}(0) = 0. \quad (8)$$

弹性散射无限远边界条件为 ($U(r) = -Z/r$,

取库仑场)

$$F_{n,L,M}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi Y_L^{M*}(Q_i)}{2ip} e^{-\frac{\pi Z}{2p}} \{(-1)^{(L+1)} W_{\lambda,\mu}(2ipr) + s_{n,L,M}^i W_{-\lambda,\mu}(-2ipr)\}, \quad (9)$$

$$f_{ii}(\theta, \varphi) = \sum_{L,M} f_{ii}^{LM} Y_L^M(\theta, \varphi) = \sum_{L,M} \frac{4\pi Y_L^{M*}(Q_i)}{2ip} (s_{n,L,M}^i - 1), \quad (10)$$

$$d\sigma_{ii} = |f_{ii}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (11)$$

其中 $W_{\pm\lambda,\mu}(\pm 2ipr)$ 为 Whittaker 函数。并记

$$p^2 = 2(E - n\omega) - \frac{A_0^2}{(2 - \gamma^2)c^2}, \quad \lambda = -iz/\rho, \quad \mu = L + \frac{1}{2}.$$

非弹性散射无限远边界条件为

$$F_{n,L,M}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi Y_L^{M*}(Q_i)}{2i\sqrt{pp_i}} Y_L^M(\theta, \varphi) S_{n,L,M}^i, \quad (12)$$

$$f_{fi}(\theta, \varphi) = \frac{4\pi Y_L^{M*}(Q_i)}{2i\sqrt{pp_i}} Y_L^M(\theta, \varphi) S_{n,L,M}^i, \quad (13)$$

$$d\sigma_{fi} = \frac{p_f}{p} |f_{fi}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (14)$$

其中 $f_{ii}(f_{fi})$, $S_{n,L,M}^i(S_{n,L,M}^f)$, $\sigma_{ii}(\sigma_{fi})$ 分别为散射振幅、散射矩阵元、散射截面。

三、弱外光场的零阶微扰解

当外光场是弱的 ($\frac{A_0}{c} \ll 1$), 耦合项(7)式可视为微扰, 方程组(6)可用微扰法求解。当 $U(r) = -Z/r$ (库仑场情形)时, 零阶方程为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2Z}{r} - \frac{A_0^2}{(2 - \gamma^2)c^2} + 2(E - n\omega) \right] F_{n,L,M}^{(0)}(r) = 0. \quad (15)$$

同样引入 $p^2 = 2(E - n\omega) - \frac{A_0^2}{(2 - \gamma^2)c^2}$, $\lambda = -iZ/p$, $\mu = L + 1/2$,

弹性散射边界条件下的解为

$$F_{n,L,M}^{(0)i}(r) = \frac{4\pi Y_L^{M*}(Q_i)}{2ip} e^{-\frac{\pi Z}{2p}} \frac{(-1)^L \Gamma(L+1 - iz/p)}{\Gamma(L+2)} M_{\lambda,\mu}(2ipr). \quad (16)$$

其中 $M_{\lambda,\mu}(2ipr)$ 为满足 $F_{n,L,M}(0) = 0$ 条件的 Whittaker 函数, 并且弹性散射矩阵元等同纯库仑散射情形。

$$s_{n,L,M}^{(0)i} = \frac{\Gamma(L+1 - iz/p)}{\Gamma(L+1 + iz/p)}. \quad (17)$$

其中 $\Gamma(x)$ 为 Γ 函数。

非弹性散射边界条件下的解为

$$F_{n,L,M}^{(0)j}(r) = \frac{4\pi Y_L^{M*}(\Omega_i)}{2i\sqrt{pp_l}} e^{-\frac{\pi}{2}\frac{Z}{p_l}} S_{n,L,M}^{(0)j} W_{-\lambda,\mu}(-2ipr), \quad (18)$$

条件(8)式要求必成立 $L+1+\lambda_l=0$, 即

$$-\lambda_l = iZ/p_l = L+1, \quad (19)$$

于是

$$W_{-\lambda,\mu}(-2ip_l r) = W_{(L+1),(L+1/2)}\left(\frac{2Z_r}{L+1}\right) = \left(\frac{2Z_r}{L+1}\right)^{(L+1)} \delta_{E,E_l} \exp\left(-\frac{Z_r}{L+1}\right), \quad (20)$$

此时

$$E_L = \omega - \frac{Z^2}{2(L+1)^2} + \frac{A_0^j}{(2-\gamma^2)c^2}. \quad (21)$$

对散射问题, $E > 0$. 由于 $\frac{A_0^j}{c^2} \ll 1$ 可略, 不同极化情形 ($\gamma = 0, 1$) 差异很小, 并且

$$\omega > \frac{Z^2}{2(L+1)^2} \text{ 成立.}$$

另外

$$S_{n,L}^{(0)j} = \sqrt{\frac{pp_l}{\pi}} \sqrt{\frac{2\tau}{(2L+1)(L+1)(2L+2)!}} \delta_{E,E_l}, \quad (22)$$

$$F_{n',L',M'}^{(0)j}(r) \stackrel{n' \leq 0}{=} 0. \quad (23)$$

由此可见零阶解与弱耦合合法相同(参见文献[1]).

四、弹性散射问题的一阶微扰解

一阶近似的方程为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + \frac{2Z}{r} - \frac{A_0^j}{(2-\gamma^2)c^2} + 2(E - n\omega) \right] F_{n,L,M}^{(1)j}(r) = g_{\gamma}^{(1)j}(r). \quad (24)$$

其中 $g_{\gamma}^{(1)j}(r)$ 为 (7a), (7b) 式中用 $F_{n',L',M'}^{(0)j}(r)$ 代替 $F_{n',L',M'}(r)$ 而得. 由于耦合项 $g_{\gamma}^{(0)j}(r)$ 中已不含未知量, 一阶方程约化为非齐次二次微分方程, 其解可用齐次方程的解表示如下:

$$F_{n,L,M}^{(1)j}(r) = \frac{4\pi Y_L^{M*}(\Omega_i)}{2ip} e^{\frac{\pi}{2}\frac{Z}{p}} \frac{\Gamma(L+1-iZ/p)}{\Gamma(2L+2)} M_{\lambda,\mu}(2ipr) + \frac{W_- \int_0^r W_+ g_{\gamma}^{(0)j}(s) ds - W_+ \int_0^r W_- g_{\gamma}^{(0)j}(s) ds}{W(W_+, W_-)}. \quad (25)$$

其中 $W_{\pm} \equiv W_{\pm\lambda,\mu}(\pm 2ipr)$ 为 Whittaker 方程两线性无关解, 而 Wronski 行列式

$$W[W_+, W_-] \equiv W_+ \frac{dW_-}{dr} - W_- \frac{dW_+}{dr},$$

由此得

$$S_{n,L,M}^{(1)j} = \frac{\Gamma(L+1-iZ/p)}{\Gamma(L+1+iZ/p)} + \frac{e^{\frac{\pi}{2}\frac{Z}{p}} (-1)^{(L+1)} \Gamma(L+1-iZ/p)}{4\pi Y_L^{M*}(\Omega_i) \Gamma(2L+2)} \int_0^{\infty} M_{\lambda,\mu}(2ips) g_{\gamma}^{(0)j}(s) ds. \quad (26)$$

形式上与弱耦合解相似,但 $g_r^{(0)}(s)$ 不同. 根据零阶解,可以如下统一表示 $g_r^{(0)}(s)$:

引入

$$\bar{\mu} = \begin{cases} \pi/4 & r = 1 \text{ 圆极化,} \\ \mu_0 & r = 0 \text{ 线极化,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g_r^{(0)}(r) = & \sum_{m, L', M'} (-i)^m (2m+1) (1-r^2) \frac{A_0^2}{4C^2} j_m(2kr) \langle Y_L^M | P_m | Y_{L'}^{M'} \rangle F_{n+1, L', M'}^{(0)}(r) \\ & + \sum_{m, L', M'} (-i)^m (2m+1) \frac{A_0}{c} j_m(kr) \sqrt{\frac{2\pi(1+r^2)}{3}} \langle Y_L^M | P_m \{ (Y_1^{-1} e^{i\bar{\mu}} - Y_1 e^{-i\bar{\mu}}) \\ & \times \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) + (Y_1^{-1} e^{i\bar{\mu}} + Y_1 e^{-i\bar{\mu}}) \frac{L_z}{r} + \frac{Y_1^0}{r\sqrt{2}} (e^{-i\bar{\mu}} L_+ - e^{i\bar{\mu}} L_-) \} \\ & \times | Y_{L'}^{M'} \rangle F_{n+1, L', M'}^{(0)}(r). \end{aligned} \quad (27)$$

利用 $\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) F_{1, L', M'}^{(0)}(r) = \left(\frac{L'}{r} - \frac{Z}{L'+1} \right) F_{1, L', M'}^{(0)}(r)$, 并略去 A_0^2/c^2 项

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds M_{\lambda, \mu}(2ips) g_r^{(0)}(s) = & \sum_{m, L', M'} (-i)^m (2m+1) \frac{A_0}{c} \sqrt{\frac{2\pi(1+r^2)}{3}} \\ & \times \frac{(-2i) \sqrt{2\pi} Y_L^{M*}(\bar{Q}_i) \delta_{E, E_{L'}}}{\sqrt{(2L'+1)(L'+1)(2L'+2)}} \\ & \cdot \left\{ \left(\frac{Z}{L'+1} \right) \langle Y_L^M | P_m (e^{-i\bar{\mu}} Y_1 - e^{i\bar{\mu}} Y_1^{-1}) | Y_{L'}^{M'} \rangle I_0^m(k) \right. \\ & + \left[\langle Y_L^M | P_m e^{i\bar{\mu}} Y_1^{-1} (L' + M') + P_m e^{-i\bar{\mu}} Y_1 (M' - L') | Y_{L'}^{M'} \rangle \right. \\ & \left. \left. + \langle Y_L^M | P_m Y_1^0 L_+ | Y_{L'}^{M'} \rangle \frac{e^{-i\bar{\mu}}}{\sqrt{2}} - \langle Y_L^M | P_m Y_1^0 L_- | Y_{L'}^{M'} \rangle \frac{e^{i\bar{\mu}}}{\sqrt{2}} \right] I_1^m(k) \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$I_0^m(k) = \int_0^\infty ds j_m(ks) M_{\lambda, \mu}(2ips) W_{(L'+1), (L'+1/2)} \left(\frac{2Z_r}{L'+1} \right). \quad (29a)$$

$$I_1^m(k) = \int_0^\infty \frac{ds}{s} j_m(ks) M_{\lambda, \mu}(2ips) W_{(L'+1), (L'+1/2)} \left(\frac{2Z_r}{L'+1} \right). \quad (29b)$$

由 $j_m(ks)$, $M_{\lambda, \mu}(2ips)$, $W_{(L'+1), (L'+1/2)} \left(\frac{2Z_r}{L'+1} \right)$ 的性质, 积分 $I_0^m(k)$, $I_1^m(k)$, 最后可用超几何函数表示(参见文献[2]§5). 下面就简单情形进行讨论.

五、偶极长波近似下的结果

偶极近似仅取 $m=0$ 项, 长波近似 $k=0$. 对外光场作这些近似后,

$$j_m(ks) = j_0(ks) = \frac{\sin ks}{ks} \stackrel{ks=0}{=} 1, \quad P_0 = 1,$$

这时

$$S_{\pm, L, M}^{(1)el} = S_{\pm, L, M}^{(0)el} + \frac{e^{\frac{\pi Z}{2p}} (-1)^{(L+1)} \Gamma(L+1-iZ/p)}{4\pi Y_L^{M*}(\bar{Q}_i) \Gamma(2L+2)} \sum_{L', M'} \frac{A_0}{c} \sqrt{\frac{2\pi(1+r^2)}{3}}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{(-2i)\sqrt{2Z\pi}Y_{L'}^{M'}(\mathbf{Q}_i)\delta_{\mathbf{E},\mathbf{E}_{L'}}}{\sqrt{(2L'+1)(L'+1)(2L'+2)}} \cdot \left\{ \left(\frac{Z}{L'+1} \right) \langle Y_L^M | e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{Y}} | Y_{L'}^{M'} \rangle I_0 \right. \\ & + [\langle Y_L^M | e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{Y}} | (L'+M') \rangle + e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{Y}} | (M'-L') \rangle | Y_{L'}^{M'} \rangle] \\ & \left. + \langle Y_L^M | Y_L^0 L_+ | Y_{L'}^{M'} \rangle \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{Y}}}{\sqrt{2}} - \langle Y_L^M | Y_L^0 L_- | Y_{L'}^{M'} \rangle \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{Y}}}{\sqrt{2}} I_1 \right\}. \quad (30) \end{aligned}$$

其中 $S_{\mathbf{L},\mathbf{M}}^{(0)\varepsilon i} = \frac{\Gamma(L+1-iZ/p)}{\Gamma(L+1+iZ/p)}$. 由于角动量耦合系数 $\langle Y_L^M | Y_L^{\pm 1} | Y_{L'}^{M'} \rangle$ 和 $\langle Y_L^M | Y_L^0 L_{\pm} | Y_{L'}^{M'} \rangle$ 均给出关系 $L' = L \pm 1$, 另外(30)式中 $I_0 = I_0^0(0)$, $I_1 = I_1^0(0)$ (见(29)式), 最后得

$$\begin{aligned} I_0 &= \left(\frac{2Z}{L'+1} \right)^{(L'+1)} \frac{(2ip)^{(L+1)}\Gamma(L+L'+3)}{\left(\frac{Z}{L'+1} + ip \right)^{(L'+L+3)}} \\ & \times F\left(L+1+iZ/p, L+L'+3, 2L+2, \frac{2ip}{\frac{Z}{L'+1} + ip} \right) \\ &= - \left(\frac{2Z}{L'+1} \right)^{(L'+1)} \left[\frac{\frac{Z}{L'+1} + ip}{\frac{Z}{L'+1} - ip} \right]^{(iZ/p)} \frac{(2ip)^{L'}(2L')!}{(2\omega)^{(L'+1)}} \\ & \times \left\{ \delta_{L',L+1} + \frac{8p^2}{2\omega} (L'+1)(2L'+1)(2L'+3)\delta_{L',L-1} \right\}, \quad (31a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{2Z}{L'+1} \right)^{(L'+1)} \frac{(2ip)^{(L+1)}\Gamma(L'+L+2)}{\left(\frac{Z}{L'+1} + ip \right)^{(L'+L+2)}} \\ & \times F\left(L+1+iZ/p, L+L'+2, 2L+2, \frac{2ip}{\frac{Z}{L'+1} + ip} \right) \\ &= - \left(\frac{2Z}{L'+1} \right)^{(L'+1)} \frac{(2ip)^{L'}\Gamma(2L')}{(2\omega)^{(L'+1)}} \\ & \times \left\{ \left(\frac{2\omega}{4p^2} \right)^{(L'-1)} (2L'+3)(2L'+1)^2 L' \delta_{L',L-1} \left[\frac{2\omega\Gamma(2L'+1)}{Z \prod_{i=1}^{L'} (s^2 + Z^2/p^2)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2ip}{L'} \frac{\frac{Z}{L'+1} + ip}{\frac{Z}{L'+1} - ip} \left(\frac{\frac{Z}{L'+1} + ip}{\frac{Z}{L'+1} - ip} \right)^{(iZ/p)} \right] \right. \\ & \left. + \frac{2Z}{L'+1} \left[\delta_{L',L+1} - \frac{8p^2}{2\omega} (2L'+1)(2L'+3)L' \left(\frac{\frac{Z}{L'+1} + ip}{\frac{Z}{L'+1} - ip} \right)^{(iZ/p)} \delta_{L',L-1} \right] \right\}. \quad (31b) \end{aligned}$$

其中 $F(a, b, c, x)$ 代表超几何函数, 推导中利用超几何函数的递推公式和一系列性质^[3].

由(10), (11)式知, 当散射矩阵元 $S_{n', L, M}^{e'}$ 已知, 可求出截面. 至此, 微扰法的零阶和一阶解, 给出共振能量(21)式, 并在偶极长波近似下, 给出弹性散射矩阵元(30), (31)式和截面.

微扰法应用于弱外光场情形, 只要 $\frac{A_0}{c} \ll 1$ 成立, 此法将给出合理结果. 我们可作如下讨论: 由于弱耦合方法^[3], 在弱外光场情形 $\left(\frac{A_0}{c\omega} \ll 1\right)$ 已有解, 但由于两方法选取的微扰量并不相同, 两解法结果是不同的. 我们比较如下:

1. 零阶解与弱耦合法相同.

2. 由(26)–(29)诸式以及(10), (11)式可知截面能谱中, 由(28)式中含有因子 $\delta_{E, E_{l'}}$, 使共振谱线普遍存在, 无论偶极近似、长波近似是否适用, 也无论是圆极化, 或者线极化情形, 都有如下的共振谱线位置公式:

$$E_{res} = E_{L'} = \omega - \frac{Z^2}{2(L' + 1)^2} + \frac{A_0^2}{(2 - r^2)c^2} \quad \begin{array}{l} r = 0 \text{ 线极化} \\ r = 1 \text{ 圆极化} \end{array}$$

$$\text{由 } \frac{A_0^2}{c^2} \ll 1, \text{ 有 } E_{res} = E_{L'} \simeq \omega - \frac{Z^2}{2(L' + 1)^2}.$$

3. 在弹性散射截面计算公式中, 从(31)式 I_0, I_1 均含因子 $\left(\frac{2Z}{L' + 1}\right)^{(L' + 1)}$, 谱线强度将依 L' 增加而急剧下降, 此结论与弱耦合法相近^[3], 而和数值解^[4]差异较大.

4. 微扰解同样可推广到弱外光场下所有带电粒子与库仑势散射情形, 一如文献[1]的讨论. 另外只要(6)式中零阶方程可积, 也不难推广到非库仑势情形.

5. 对于 $k \approx 0$ 非偶极近似情形, 积分(29)式同样可计算 $I_0^*(k), I_1^*(k)$, 从而得到散射矩阵元的解析表示, 因而同样可从截面公式计算谱线强度.

[1] 李介平, 物理学报, **39**(1990), 1220.

[2] Л. Д. 朗道, E. M. 栗弗席茨, 量子力学, 高等教育出版社, (1980).

[3] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions U.S. Government Printing Office Washington, D.C. (1965).

[4] L. Dimou and F. H. M. Faisal, Phys. Rev. Lett., **59**(1987), 872.

PERTURBATION SOLUTION FOR ELECTRON SCATTERED BY COULOMB POTENTIAL IN A WEAK LASER FIELD

LI JIE-PING

Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875

(Received 19 September 1990)

ABSTRACT

In a laser field, for the electron scattered by Coulomb potential, when the wave function is expanded by Floquet partial wave, the Schrödinger equation separates into the radial form by separation of variables. The system of equations for the radial wave function is infinitely coupling linear second order differential equations. When weak laser field is considered as a perturbation, the equations can be reduced into second order ordinary differential equations and they are integrable. The radial wave function S -matrix and the cross section are obtained. Finally, the resonance lines appear for different cases of polarizations no matter whether the dipole approximation is used. The resonance energies, the intensities of resonance lines are also obtained.

PACC: 3280F; 0380