第 51 卷 第 6 期 2002 年 6 月
1000-3290/2002/51(06)/1186-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.6,June,2002
©2002 Chin. Phys. Soc.

混沌动力系统小波变换模数的关联维数*

刘海峰 代正华 陈 峰 龚 欣 于遵宏

(华东理工大学资源与环境工程学院,上海 200237)

(2001 年 9 月 2 日收到;2001 年 11 月 13 日收到修改稿)

关联维数是描述动力系统混沌的重要参数.在仿真计算的基础上,发现尽管小尺度小波变换时,奇异吸引子的整体形状发生了改变,但小波变换模数的关联维数与动力系统本身是一致的.同时仿真计算还表明,随尺度的增加,关联积分与距离的标度关系逐渐变差,但在一定范围内仍可较准确地计算出关联维数.

关键词:混沌,关联维数,小波分析,尺度,相空间

PACC:0545

1. 引 言

近几年来,混沌信号的时间序列分析研究是目前非线性科学的前沿课题之一[1—3].在描述混沌信号时,关联维数(D_2)不仅是刻画系统动力学特性的一个重要参数,更重要的是能够促进人们对研究对象的物理本质的认识[3—9].目前无论在理论上,还是在实用中,混沌动力系统的关联维数一直受到广泛的关注.关联维数的计算一般使用 Grassberger 和 Procaccia[10] 于 1983 年提出的基于相空间重构技术的 GP 算法.

小波变换[11]是目前许多科学和工程技术领域研究的极为活跃的热门问题之一,已在诸如湍流[12,13]、分形[14,15]、信号处理[16,17]、混沌[18—22]等各种应用领域获得了广泛的应用.它既可以作为表示函数的一种基底,也可以作为时间-频率分析的一种技术.作者在文献[22]中利用离散动力系统小尺度小波变换模数计算了离散动力系统的最大李雅普诺夫指数.本文在上述工作的基础上通过仿真计算研究了离散和连续动力系统小波变换模数的关联维数,并着重探讨了小波变换时的尺度对计算结果的影响.

2. 关联维数和小波分析

设离散时间序列为

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n,$$

将其转化为

$$x_n(m,\tau) = (x_n, x_{n+\tau}, \cdots, x_{n+(m-1)\tau}), \quad (1)$$

式中,m 为嵌入相空间维数,τ 为延迟时间,是采样时间间隔 Δt 的整数倍.这样,$\{x_n\}$ 就形成该嵌入相空间的轨道[3].现已证明,只要 m 足够大($m \geqslant 2D+1$,D 为吸引子的维数),这样的 m 维空间就可以描述原来系统的运动.

计算关联维数的 GP 算法如下:

首先,将时间序列 $\{x_k : k = 1,2,\cdots,N\}$ 转化为 m 维相空间,得到 N_m 个样本点,其中

$$N_m = N - (m-1)\tau, \quad (2)$$

从这 N_m 个点中任选一个参考点 x_i,计算其余 $N_m - 1$ 个点到 x_i 的距离

$$r_{ij} = \left[\sum_{l=0}^{m-1}(x_{i+l\tau} - x_{j+l\tau})^2\right]^{1/2}. \quad (3)$$

对所有的 x_i 重复该过程,得到关联积分函数

$$C_m(r) = \frac{2}{N_m(N_m-1)}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{N_m} H(r - r_{ij}), \quad (4)$$

式中,H 为 Heaviside 函数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & (x > 0) \\ 0, & (x \leqslant 0), \end{cases} \quad (5)$$

当 r 取充分小时,关联积分函数有如下关系:

$$C_m(r) \propto r^{D(m)}, \quad (6)$$

当 $D(m)$ 不随维数 m 的升高而改变时,

* 国家重点基础研究发展规划(批准号:G1999022103)、教育部骨干教师基金资助的课题.

$$D_2 = \lim_{m\to\infty} D(m) \tag{7}$$

就是该系统的关联维数[23].

实际计算中,当时间序列长度大于 1000 时,在相空间中搜索每一个点的最近邻域需花费大量的机时,一般需采用更快速的邻域搜索算法.本文计算中采用了 Kantz 等提出的快速邻域搜索算法[3].

在 $L^2(R)$上的一维连续小波变换为[11]

$$\tilde{f}(b,a) = \frac{1}{|a|^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{W_{a,b}(x)}\,\mathrm{d}x,\quad f\in L^2(R), \tag{8}$$

其中 $a,b\in R$ 而 $a\neq 0$, $W_{a,b}(x)=\frac{1}{|a|^{1/2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, $\psi\in L^2(R)$满足'容许性'条件

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega < \infty. \tag{9}$$

本文通过仿真计算探讨由混沌动力系统产生的非线性时间序列小波变换模数的关联维数及其随变换尺度的变化.

3. 仿真结果及分析

3.1. 混沌系统

计算中我们选用了常见的属于离散动力系统的 Hénon 映射和属于连续动力系统中的 Lorenz 吸引子(计算中选 x 变量).表 1 列出了这两种混沌系统的有关参数及文献中给出的关联维数数值计算结果.

表 1　混沌动力系统及其关联维数

混沌系统	方程	D_2
Hénon	$x_{i+1}=1-1.4x_i^2+y_i$ $y_{i+1}=0.3x_i$	1.26[4]
Lorenz	$\dot{x}=16.0(y-x)$ $\dot{y}=x(45.92-z)-y$ $\dot{z}=xy-4.0z$	2.06[4]

本文采用文献中常用的四阶 Runge-Kutta 法求解 Lorenz 吸引子,计算步长为 0.01[24].

Stefanovska 等[25] 指出,计算所需的点数 n 应满足

$$n \geqslant \left(\frac{E}{r_{\min}}\right)^{D_2}, \tag{10}$$

式中 E 为重构的吸引子的直径,$r_{\min}$ 为距离下限.本文计算中对 Hénon 系统取 $n=20000$,对 Lorenz 吸引子取 $n=50000$,这样可保证计算时这两种系统大致具有两个数量级以上的标度区域.

由混沌序列本身计算的关联维数(D_{2d})结果呈现在表 2 和图 1 中.

表 2　仿真计算结果

混沌系统	n	m	D_{2d}	D_{2d}的相对误差/%
Hénon	20000	2	1.222	−3.016
		3	1.196	−5.079
		4	1.195	−5.159
		5	1.214	−3.651
		6	1.220	−3.175
		7	1.219	−3.254
		8	1.225	−2.778
Lorenz	50000	2	1.864	−9.515
		3	1.988	−3.495
		4	2.027	−1.602
		5	2.035	−1.214
		6	2.037	−1.117
		7	2.033	−1.311
		8	2.059	−0.049

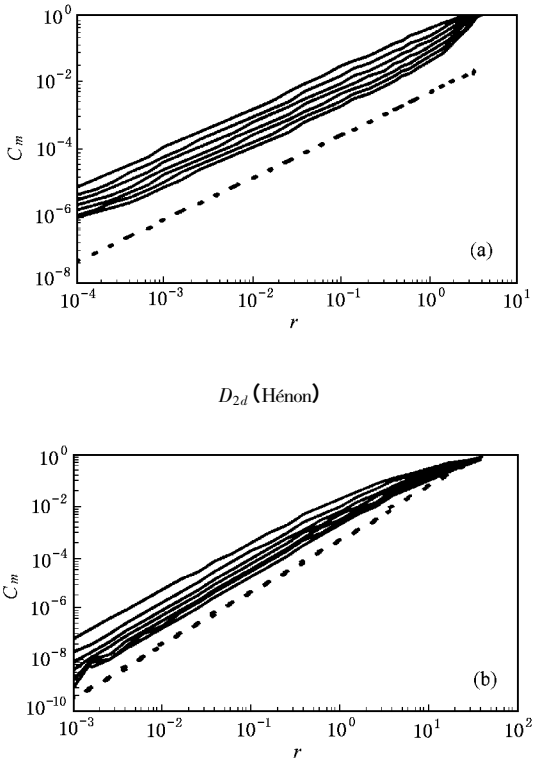


图 1　关联维数计算结果(虚线斜率为 D_2,从上到下 m 由 2 增加到 8)

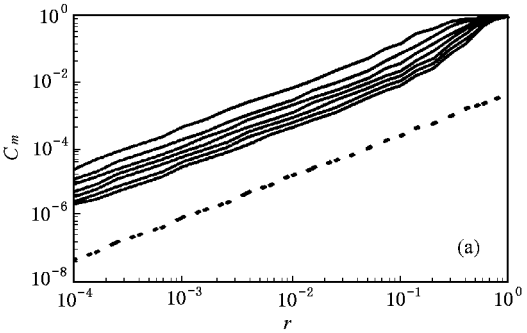
对上述两种混沌系统选择 Morlet, Mexican hat

和 Db4(正交小波)等 3 种不同的小波进行小波变换[11],关联维数($a=1$)的计算结果见表 3 及图 2.其中 D_{2w} 表示由混沌序列的小波变换模数(尺度 $a=1$)计算的关联维数.从表 3 中可以发现,D_{2w} 与 D_{2d} 基本相同,具有基本上相当的计算精确度.计算结果同时还表明,小波函数对关联维数计算结果的影响不大,小波的正交性对计算结果的影响也不大.

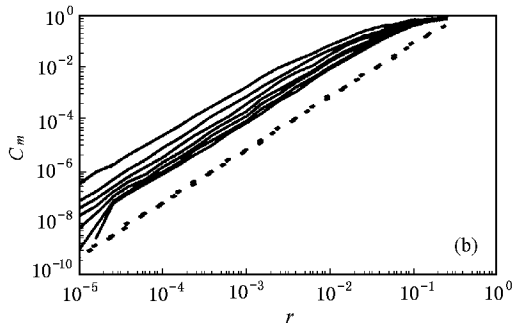
由此可以得出,对混沌动力系统而言,小尺度的小波变换模数的关联维数与系统本身是一致的.

表 3 小波函数对关联维数的影响

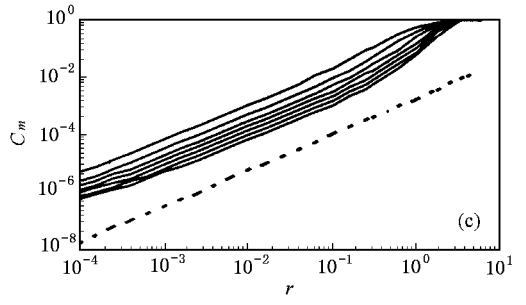
混沌系统	Wavelet	m	D_{2w}	D_{2w} 的相对误差/%
Hénon	Morlet	2	1.216	-3.492
		3	1.201	-4.683
		4	1.210	-3.968
		5	1.224	-2.857
		6	1.223	-2.937
		7	1.224	-2.857
		8	1.224	-2.857
	Mexican hat	2	1.221	-3.095
		3	1.222	-3.016
		4	1.222	-3.016
		5	1.221	-3.095
		6	1.224	-2.857
		7	1.223	-2.937
		8	1.225	-2.778
	Db4	2	1.219	-3.254
		3	1.222	-3.016
		4	1.239	-1.667
		5	1.251	-0.714
		6	1.254	-0.476
		7	1.251	-0.714
		8	1.241	-1.508
Lorenz	Morlet	2	1.842	-10.583
		3	2.025	-1.699
		4	2.029	-1.505
		5	2.043	-0.825
		6	2.054	-0.291
		7	2.051	-0.437
		8	2.047	-0.631
	Mexican hat	2	1.869	-9.272
		3	2.032	-1.359
		4	2.041	-0.922
		5	2.057	-0.146
		6	2.060	0.000
		7	2.059	-0.049
		8	2.051	-0.437
	Db4	2	1.857	-9.854
		3	1.975	-4.126
		4	1.983	-3.738
		5	1.985	-3.641
		6	2.003	-2.767
		7	2.017	-2.087
		8	2.019	-1.990



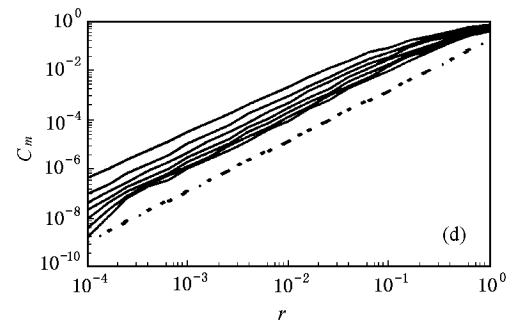
Morlet 小波(Hénon)



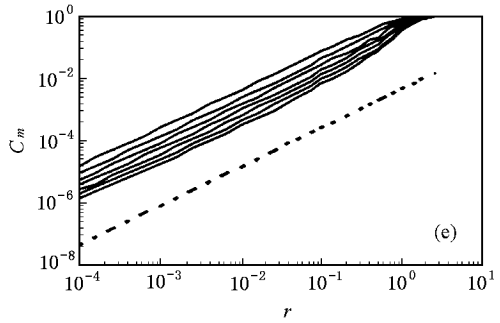
Morlet 小波(Lorenz)



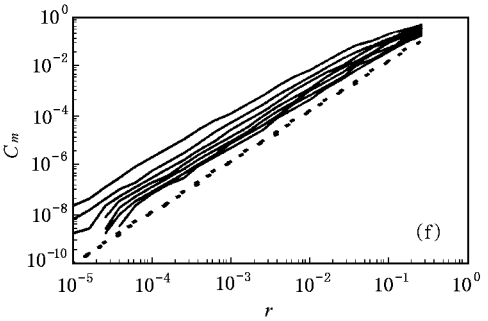
Mexican hat 小波(Hénon)



Mexican hat 小波(Lorenz)

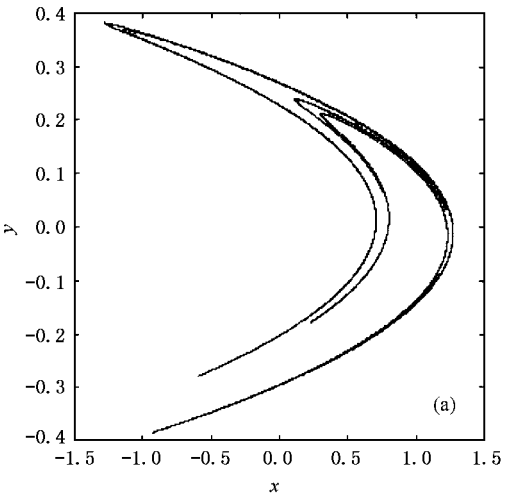


Db4 小波(Hénon)

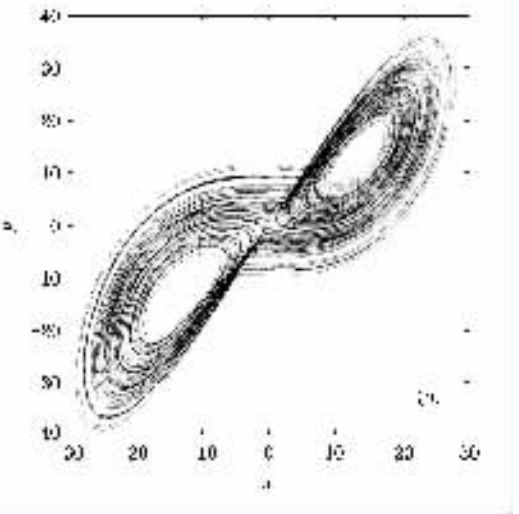


Db4 小波(Lorenz)

图 2　小波函数对关联维数的影响(虚线斜率为 D_2,从上到下 m 由 2 增加到 8)

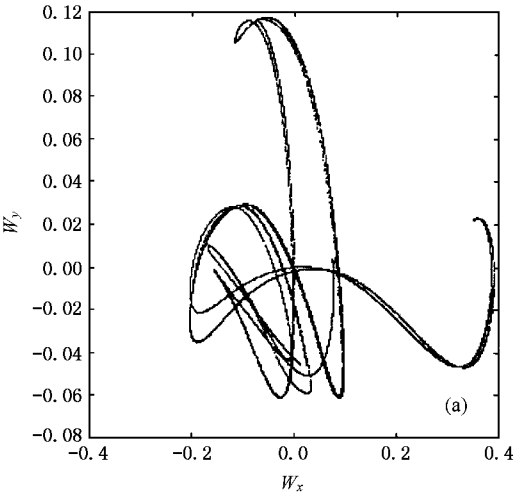


Hénon 吸引子

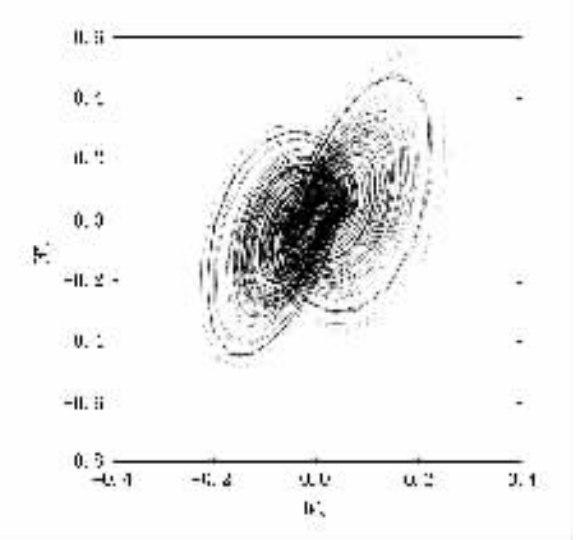


Lorenz 吸引子

图 3　奇异吸引子的图形



Hénon 吸引子



Lorenz 吸引子

图 4　Hénon 和 Lorenz 系统 x 和 y 变量的 Morlet 小波变换模数构成的图形($a = 1$)

3.2. 吸引子图形

绘制了上述两种奇异吸引子的图形，结果见图3.我们还绘制了上述两种奇异吸引子 x 和 y 变量的Morlet小波变换模数(分别为 W_x 和 W_y，$a=1$)构成的图形，结果见图4.比较图3和图4可以清楚发现，总体上二者之间存在着显著的差异.小波变换后，Hénon吸引子简洁的“弯月”形状消失了，形状变得更复杂，而Lorenz吸引子的两个“叶片”则靠的更近，并有部分重叠.但前述计算结果表明，这二者的关联维数是一致的.由此我们可以发现，小波变换时，奇异吸引子的整体形状并不能保持不变，但其内在的分形特性(比例自相似性)却保持不变.

3.3. 关联维数随小波变换尺度的变化

对上述两种离散和连续混沌动力系统，计算了小波变换尺度对关联维数的影响.图5是Hénon系统不同尺度Morlet小波变换模数关联积分的计算结果，图6是Lorenz吸引子不同尺度Morlet小波变换模数关联积分的计算结果.从中可见小波变换时的尺度对关联维数的计算结果有显著影响.对Hénon系统而言，比较图5及图2可以发现，随着小波变换尺度的增大，由小波变换模数计算的关联积分与距离的标度关系逐渐变差.但当小波变换尺度增大到5时，仍可在区间$[10^{-3},10^{-2}]$上找到近似的标度关系，当 $m=3$ 到8时，对应的关联维数与系统的关联维数的最大相对偏差小于10%.

对Lorenz系统而言，比较图6及图2可以发现，随着小波变换尺度的增大，由小波变换模数计算的关联积分与距离的标度关系逐渐变差.但当小波变换尺度增大到20时，仍可在区间$[10^{-2},10^{-1}]$上找到近似的标度关系，当 $m=3$ 到8时，对应的关联维数与系统的关联维数的最大相对偏差小于10%.

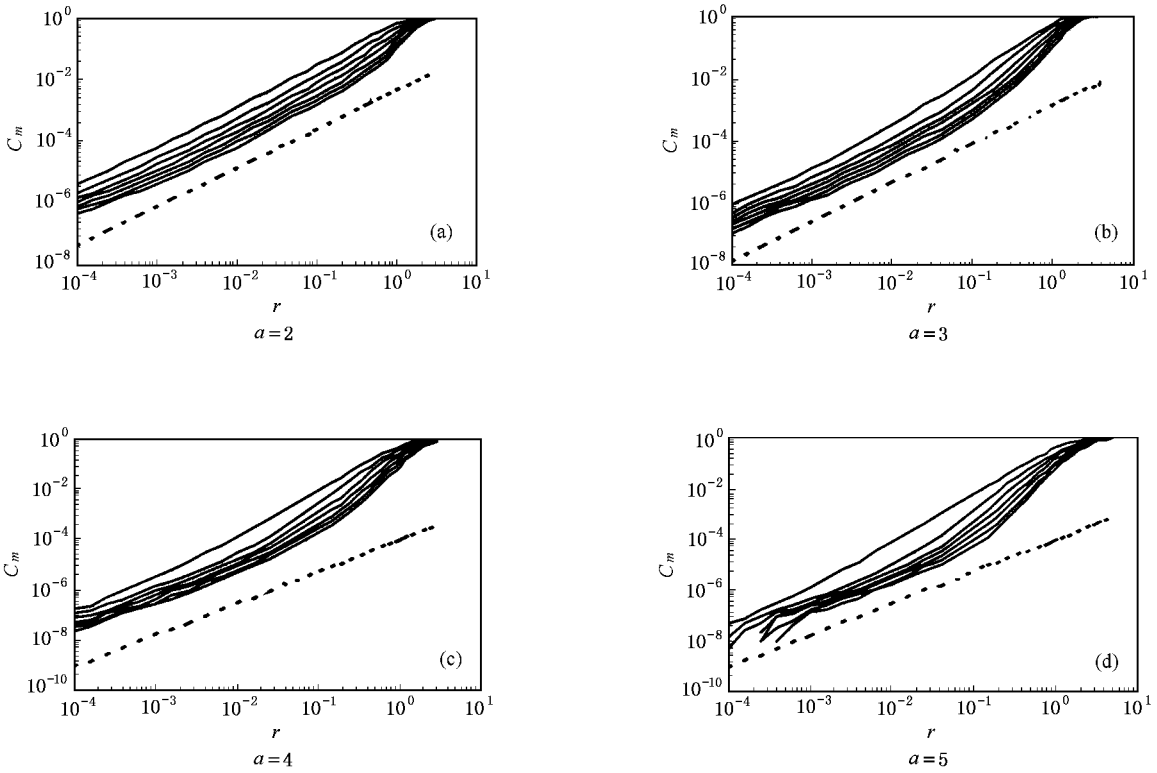


图5 Hénon系统不同尺度小波变换模数的关联积分(虚线斜率为 D_2，从上到下 m 由2增加到8)

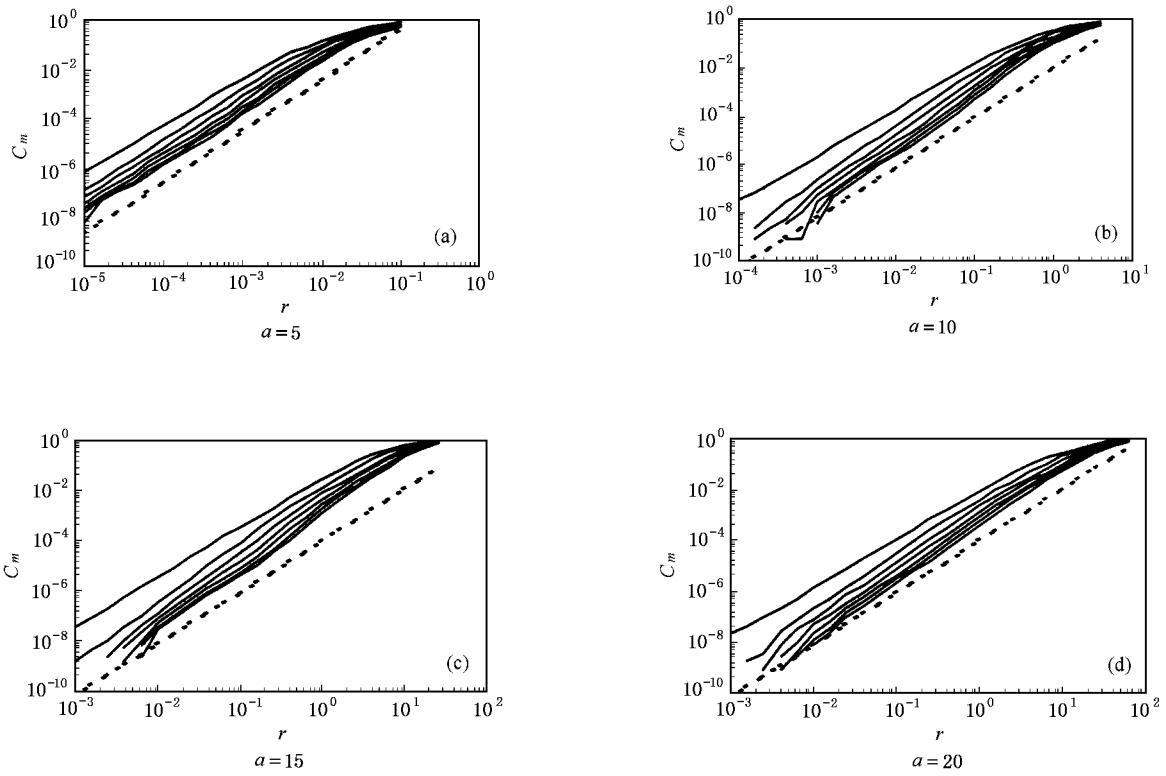


图 6　Lorenz 吸引子不同尺度小波变换模数关联积分(虚线斜率为 D_2,从上到下 m 由 2 增加到 8)

4. 结　论

本文通过仿真计算发现,小尺度小波变换时,奇异吸引子的整体形状发生了改变,但小波变换模数的关联维数与系统本身的关联维数是一致的.随尺度的增加,关联积分与距离的标度关系逐渐变差.但对 Hénon 系统而言,采用 Morlet 小波时,由 $a = 5$ 的小波变换模数仍可较准确地计算出关联维数;对 Lorenz 系统而言,由 $a = 20$ 的小波变换模数仍可较准确地计算出关联维数.

[1] Berge P *et al* 1984 *Order Within Chaos* (John Wiley & Sons Inc) p144

[2] Baker G L *et al* 1996 *Chaotic Dynamics*: *An Introduction* (Cambridge University Press) p110

[3] Kantz H *et al* 1997 *Nonlinear Time Series Analysis* (Cambridge University Press) p70

[4] Abarbanel H D *et al* 1993 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **65** 1331

[5] Grassberger P 1983 *Phys*. *Lett*. A **97** 227

[6] Osborne A R *et al* 1989 *Physica* D **35** 357

[7] Theiler J 1991 *Phys*. *Lett*. A **155** 480

[8] Provenzale A *et al* 1992 *Physica* D **58** 31

[9] Olbrich E *et al* 1997 *Phys*. *Lett*. A **232** 63

[10] Grassberger P and Procaccia I 1983 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **50** 346

[11] Daubechies I 1992 *Ten lectures on Wavelets* (CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math., Philadelphia: SIAM Press) p17

[12] Farge M 1992 *Annu*. *Rev*. *Fluid Mech*. **24** 395

[13] Farge M *et al* 1996 *Proc*. *of the IEEE* **84** 639

[14] Jaffard S 1994 *Some Mathematical Results About the Multifractal Formalism for Function, in Wavelet*: *Theory, Algorithms and Applications* (Academic Press) p325

[15] Karanikas C 2000 *Chaos, Solitons and Fractals* **11** 275

[16] Guillemain P *et al* 1996 *Proc*. *of the IEEE* **84** 561

[17] Forinash K *et al* 1998 *Physica* D **123** 123

[18] Garmero L G *et al* 1997 *Physica* A **246** 487

[19] Huang X G *et al* 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1810 (in Chinese) [黄显高等 1999 物理学报 **48** 1810]

[20] Fang J Q *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 435 (in Chinese) [方锦清等 2001 物理学报 **50** 435]

[21] Wang Z Y *et al* 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 206 (in Chinese) [王忠勇等 1999 物理学报 **48** 206]

[22] Liu H F *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2311(in Chinese)[刘海峰等 2001 物理学报 **50** 2311]
[23] Ding M Z *et al* 1993 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **70** 3872
[24] Rosenstein M T *et al* 1993 *Physica* D **65** 117
[25] Stefanovska A *et al* 1997 *Phys*. *Lett*. A **235** 24

Calculating the correlation dimension of dynamical system with wavelet analysis*

Liu Hai-Feng Dai Zheng-Hua Chen Feng Gong Xin Yu Zun-Hong
(*College of Resource and Environmental Engineering*, *East China University of Science and Technology*, *Shanghai* 200237, *China*)
(Received 2 September 2001; revised manuscript received 13 November 2001)

Abstract

The correlation dimension is an important parameter of detecting and characterizing chaos produced from a dynamical system. Based on emulation calculation, it has been found that the correlation dimension of the small-scale wavelet transform modulus of discrete and continuous chaotic dynamical system is the same as the system's, though the attractor shape changed after wavelet transform. At the same time, the influences of wavelet transform scale on the scaling law between integral sum and distance has been investigated.

Keywords: chaos, correlation dimension, wavelet analysis, scale, state space
PACC: 0545

* Project supported by the National Development Programming of Key Fundamental Researches of China (Grant No. G1999022103), and by the Foundation for University Key Teacher by the Ministry of Education, China.