

广义 Hénon 映射的滑模变结构控制同步^{*}

尹逊和 任 勇 山秀明

(清华大学电子工程系微波与数字通信技术国家重点实验室 北京 100084)

(2001 年 12 月 27 日收到 2002 年 2 月 28 日收到修改稿)

基于可线性化的非线性离散变结构跟踪控制方法实现了广义 Hénon 映射混沌系统的同步. 广义 Hénon 映射的混沌吸引子比 Hénon 映射的混沌吸引子要复杂得多, 对于保密通信来说, 这种复杂性正是所期望的. 提出的同步方法允许参数有适当的失配程度, 这对工程实现是非常有利的. 理论分析和仿真结果证实了该方法的有效性.

关键词: 广义 Hénon 映射, 混沌, 同步, 变结构控制

PACC: 0545

1. 引 言

同步问题就是使一个系统的状态复现和跟踪另一个系统的状态. 自 Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步概念, 并在电子线路上观测到混沌同步的现象后, 这一开创性的工作极大地推动了混沌同步的理论研究^[1,2], 拉开了利用混沌的序幕^[3,4]. 混沌同步的一个主要应用方面是保密通信. 广义 Hénon 映射的混沌吸引子比 Hénon 映射的混沌吸引子复杂, 因而对于保密通信来说, 具有更高的安全性. 而广义 Hénon 映射能否在保密通信中应用, 同步是关键. 一般的同步方法均采用时间连续驱动信号, 在数字通信占主流的今天, 时间离散驱动的同歩系统能够提供更高的频谱利用率和保密性能^[5,6]. 变结构控制方法是一种非线性控制策略, 其控制在某确定滑动面上具有不连续性. 变结构控制设计首先是选取能描述期望动力学行为的滑动面, 其次设计一个逻辑开关控制规律以保证系统轨迹先到达滑动面, 再停留上面. 这种同步控制机理的优越性, 在于当在滑模面上滑动时与系统的参数无关, 因而系统对参数摄动具有鲁棒性.

本文基于可线性化的非线性离散变结构跟踪控制方法实现了广义 Hénon 映射混沌系统的同步, 该方法允许参数有适当的失配程度, 这对工程实现是非常有利的. 理论分析和仿真结果证实了该方法的

有效性.

2. 广义 Hénon 映射的混沌特性

Hénon 映射是一个二维非线性映射, 因其独特的混沌吸引子而为人们所关注. Hitzl 等对 Hénon 映射作了深入研究, 并将其推广到三维的情形^[7], 即

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= -bx_3(k), \\x_2(k+1) &= bx_3(k) + x_1(k), \\x_3(k+1) &= 1 + x_2(k) - ax_3^2(k),\end{aligned}\quad (1)$$

(1) 式称为广义 Hénon 映射, 当 $1.07 \leq a \leq 1.097$ 和 $b = 0.3$ 时, 混沌吸引子如图 1 所示. 图 1 中广义 Hénon 映射的混沌吸引子比 Hénon 映射的混沌吸引子要复杂得多, 对于保密通信来说, 将获得更高的安全保密性.

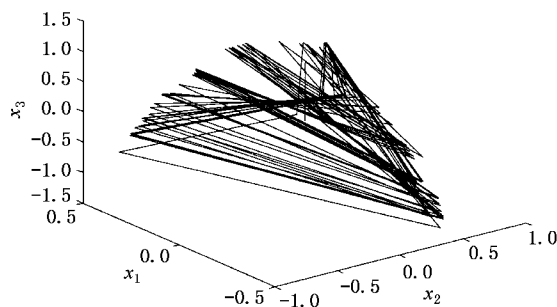


图 1 广义 Hénon 映射的混沌吸引子

^{*} 国家自然科学基金(批准号 60172023)资助的课题.

3. 非线性离散滑模变结构控制

3.1. 广义 Hénon 映射一般形式的线性化

广义 Hénon 映射的最后一个状态方程是非线性的. 针对这一特点, 考虑一类单输入非线性离散系统

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_1 x(k) \\ \alpha(x(k)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta(x(k)) \end{bmatrix} u(k), \quad (2)$$

式中 $x = [x_1(k) \dots x_n(k)]^T \in R_n$, x 是可测量的; A_1 为 $(n-1) \times n$ 常值矩阵; $\alpha(x(k))$ 和 $\beta(x(k))$ 是非线性标量函数; $u \in R$ 是标量控制. 显然, 前 $(n-1)$ 个方程是线性的. 若假设

$$\alpha(x(k)) + \beta(x(k))u = v(k), \quad (3)$$

那么, 方程 (2) 就能够被 (3) 式的非线性状态反馈控制律实现线性化, 显然

$$x_n(k+1) = v(k), \quad (4)$$

其中 $v(k)$ 表示外部控制输入, 它可以按状态跟踪的形式设计. 若 $\beta(x(k)) \neq 0, \forall k$, 那么由 (3) 式可以得到

$$u(k) = [\beta(x(k))]^{-1} \{-\alpha(x(k)) + v(k)\}. \quad (5)$$

3.2. 状态跟踪问题的提法

混沌同步问题在控制理论中属于状态跟踪问题. 状态跟踪问题的提法是: 给出希望的状态演化轨迹 $x_d(k) = [x_{1d}(k) \dots x_{nd}(k)]^T$, 设计一个线性化控制律 (5) 式使得跟踪误差 $\|e(k)\| = \|x(k) - x_d(k)\| \rightarrow 0$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时.

3.3. 滑模变结构控制器设计

构造滑模控制律包括两步: 1) 为了得到希望的跟踪目标要构造一个滑模面; 2) 为了获得所谓的准滑模要设计一个到达律.

对于状态跟踪问题, 滑模面 s 可定义为跟踪误差的加权和, 即

$$s(k) = c^T e(k) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i [x_i(k) - x_{id}(k)] + [x_n(k) - x_{nd}(k)], \quad (6)$$

其中 $c^T = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, 1]^T$, 系数 c_i 的选择须使下面的多项式

$$H(z) = z^{n-1} + c_{n-1}z^{n-2} + \dots + c_2z + c_1 \quad (7)$$

是 Hurwitz 多项式, 也就是方程 $H(z) = 0$ 的根全部在 z 平面的单位圆内. 这样, 当输出误差轨迹到达滑模面 $s = 0$ 的邻域并保持在这个领域内时, 可以得到下面的方程

$$e_n(k) + c_{n-1}e(k) + \dots + c_2e_2(k) + c_1e_1(k) = s(k),$$

这意味着当 $k \rightarrow \infty$ 时, 误差 $e(k)$ 为趋于零的有界集. 很明显, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 控制误差 $|e(k)| = |x(k) - x_d(k)| < k$.

从离散系统的性质出发, 合理的到达条件应该有以下的特点^[8]: 1) 于任意初始状态开始的运动单调地向滑模面趋近或穿越滑模面; 2) 运动一旦穿越滑模面, 它的每一个后继迭代均从另一面穿越滑模面, 并一直进行下去, 从而围绕滑模面形成一个锯齿形的运动, 不应该发生运动渐近地趋向滑模面而不穿越的情况; 3) 不应该发生运动从初始状态开始每一步均来回地穿越滑模面的情况, 也不应该发生一旦运动开始穿越滑模面, 每一步的长度不断增长的情况.

满足上述到达条件要求的到达律可按式构造^[8]:

$$s(k+1) - s(k) = -\epsilon s(k) - \gamma \text{sgn}(s(k)) \quad (8)$$

其中, $\epsilon > 0, \gamma > 0$ 分别表示到达速度、趋近速度指数. 这些常数都是待定的, 以下将给出它们应满足的条件.

到达律 (8) 式可改写为

$$s(k+1) = \delta s(k) - \gamma \text{sgn}(s(k)), \quad (9)$$

这里要求

$$0 < \delta = 1 - \epsilon < 1, \quad (10)$$

以保证任一运动首先趋近于滑模面, 然后转换为准滑动模态^[9], 趋近过程中不穿越滑模面.

准滑动模态是一族离散时间运动, 发生在滑模面的一个领域内, 这个领域可表示为

$$S^\Delta = \{e \mid |s(k)| = |c^T e(k)| < \Delta\},$$

即两个与 S 平行的超平面的内部的带域, 这两个超平面为

$$c^T e(k) = +\Delta, \quad c^T e(k) = -\Delta,$$

参数 Δ 可以通过系统的参数表达出来.

现在可以求出切换带的厚度. 设 $s(k) > 0$, 但非常靠近滑模面, 不妨设 $s(k) = 0^+$, 于是有 $s(k+1) = -\epsilon$, 就是说, 运动由 $s(k) > 0$ 穿越滑模面 $s(k) = c^T e(k) = 0$ 后, 应落在两个平行超平面 $s(k) = -\epsilon, s(k) = 0$ 之间. 同样, 运动从 $s(k) < 0$ 穿越切换面 $s(k) = c^T e(k) = 0$ 后, 应落在两个平行超平面 $s(k)$

$= 0, s(k) = +\varepsilon$ 之间. 总之, 得到准滑动模态区, 即切换带

$$S^\Delta = \{e \mid s(k) > -\Delta, s(k) < \Delta\},$$

其中带的厚度为 $2\Delta = 2\varepsilon$.

由此, 利用到达律式(9)式得到下列结论: (1) 到达律(9)式保证单调趋近的条件是(10)式(2)准滑动模态位于切换带内, 带厚为 $\Delta = \varepsilon$.

由 s 的定义(6)式, 很容易得到下面的方程

$$\begin{aligned} s(k+1) &= x_n(k+1) - x_{nd}(k+1) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} c_i [x_n(k+1) - x_{nd}(k+1)] \\ &= u(k) - x_{nd}(k+1) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i [x_n(k+1) \\ &- x_{nd}(k+1)]. \end{aligned} \quad (11)$$

由到达律(9)式和(11)式, 系统(4)的外部控制输入可以由下式给出:

$$u(k) = \delta s(k) - \gamma \operatorname{sgn}(s(k)) + \xi(k+n), \quad (12)$$

而 $\xi(k+n)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \xi(k+n) &= x_{nd}(k+1) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i [x_n(k+1) \\ &- x_{nd}(k+1)]. \end{aligned} \quad (13)$$

当被控系统的状态可利用时, 它是一个可执行信号. 所以, 提出的控制律(12)和(13)式保证了闭环系统中的信号和跟踪误差的有界性, 进而, 跟踪误差收敛于零的领域.

将(12)式代入(5)式就可以得到系统(2)的离散变结构控制律

$$\begin{aligned} u(k) &= [\beta(x(k))]^{-1} \{-\alpha(x(k)) + \delta s(k) \\ &- \gamma \operatorname{sgn}(s(k)) + \xi(k+n)\}. \end{aligned} \quad (14)$$

注: 在系统存在参数变化或外干扰等不确定性的情况下, 可以适当的通过选择反馈增益 α 和 β 来改变准滑动模态切换带的厚度, 实现离散时间滑模的到达条件.

4. 广义 Hénon 映射的变结构控制同步

本文的主要目的是设计一个变结构控制器使得两个初始值不同的广义 Hénon 系统实现状态同步. 假设系统(15)为发送器

$$\begin{aligned} x_{1d}(k+1) &= -bx_{3d}(k), \\ x_{2d}(k+1) &= bx_{3d}(k) + x_{1d}(k), \\ x_{3d}(k+1) &= 1 + x_{2d}(k) - ax_{3d}^2(k), \end{aligned}$$

$$y_d(k) = x_{1d}(k). \quad (15)$$

接收器定义为

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -bx_3(k), \\ x_2(k+1) &= bx_3(k) + x_1(k), \\ x_3(k+1) &= 1 + x_2(k) - ax_3^2(k) + u(k), \\ y(k) &= x_1(k). \end{aligned} \quad (16)$$

比较(15)式和(2)式可以看出, 二者的形式是一样的, 并且 $n=3, \alpha(x(k))=1+x_2(k)-ax_3^2(k)$ 和 $\beta(x(k))=1$, 这样就可以用第2节所讨论的方法来设计控制器. 令跟踪误差 $e(k)=x(k)-x_d(k)$, 由(6)式得到滑模面 s 为

$$\begin{aligned} s(k) &= x_3(k) - x_{3d}(k) + c_2 [x_2(k) - x_{2d}(k)] \\ &+ c_1 [x_1(k) - x_{1d}(k)]. \end{aligned} \quad (17)$$

按(7)式的条件, 选择系数 $c_2 = -0.2, c_1 = 0.01$.

由(14)式可得到控制律

$$\begin{aligned} u(k) &= -[1 + x_2(k) - ax_3^2(k)] + \alpha s(k) \\ &- \beta \operatorname{sgn}(s(k)) + \xi(k+3), \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi(k+3) &= x_{3d}(k+1) - c_2 [x_2(k+1) - x_{2d}(k+1)] \\ &- c_1 [x_1(k+1) - x_{1d}(k+1)] \\ &= 1 + x_{2d}(k) - ax_{3d}^2(k) + 0.2 [bx_3(k) \\ &+ x_1(k)] - (bx_{3d}(k) + x_{1d}(k)) \\ &+ 0.01 (bx_3(k) - bx_{3d}(k)). \end{aligned} \quad (19)$$

设系统(15)和(16)的初始条件分别为 $x_d(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T, x(0) = (0.9, 0.8, 0.9)^T$; 参数 $a = 1.08$ 和 $b = 0.3$, 其同步控制由(18)式给出, 且控制参数为 $\alpha = 0.3, \beta = 0.025$, 仿真结果如图2所示, 由图可见, 经过4—5步的暂态迭代过程, 发送系统和接收系统很快达到同步. 如果系统(15)和(16)的系统参数分别为 $a = 1.08, b = 0.3$ 和 $a = 1.18, b = 0.33$, 也就是两个系统存在参数失配的情况, 且在(15)式的右端加入均值为0, 方差为0.2的随机噪声, 而初始条件和控制器参数不变, 仿真结果如图3所示, 表明本文的方法具有参数鲁棒性和抗干扰性.

5. 结论和讨论

本文提出了一种非线性离散变结构跟踪控制方法, 并对两个初始条件不同的广义 Hénon 映射混沌系统, 实现了同步. 我们首先选取了能描述期望动力学行为的滑动面, 其次设计一个逻辑开关控制规律, 以保证系统轨迹先到达滑动面, 再停留上面. 这种

同步控制机理的优越性,在于当在滑模面上滑动时,系统对参数摄动具有鲁棒性.广义 Hénon 映射是一个比 Hénon 映射复杂得多的离散混沌系统,它的同步的实现推动其在保密通信领域中的应用具有重要意义,而且该方法允许参数有适当的失配程度,这对工程实现是非常有利的,理论分析和仿真结果证实了该方法的有效性.

本文讨论的是状态变量可测量的情况,因为作

者起初是假设发射系统和接收系统是用分立的电子线路搭建起来的,这样,全部状态变量可测的情况是存在的.而当在实际工程中状态变量不满足全部可测的情况时,就需要用系统的输出和可测量的状态来设计降维状态观测器,将不可测的状态“观测”出来,由于这种情况在本文讨论起来篇幅过长,作者将在另文讨论.

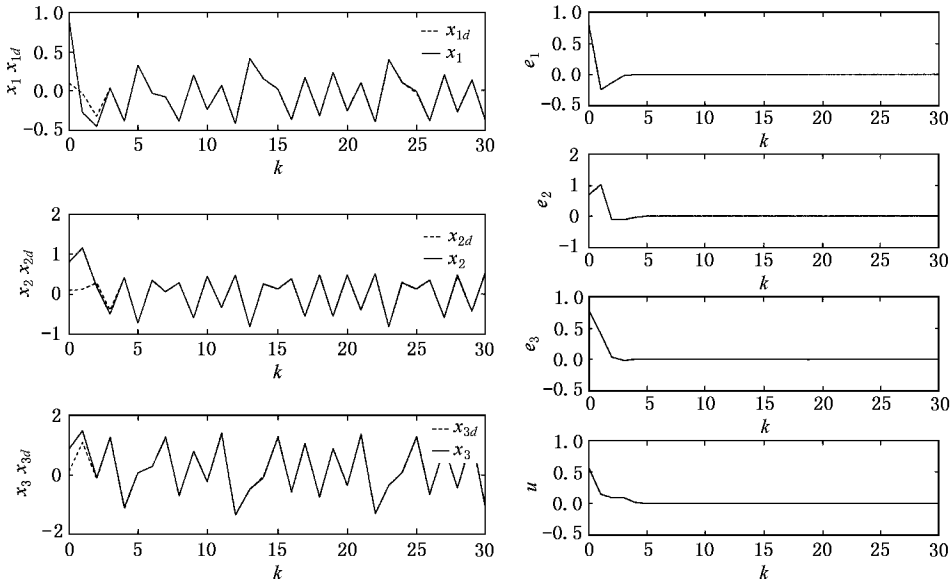


图 2 广义 Hénon 映射同步的时间响应(发送器和接收器的状态分别为 x_{id} 和 $x_i(i = 1, 2, 3)$, $e_i(i = 1, 2, 3)$ 为跟踪误差, u 为控制输入)

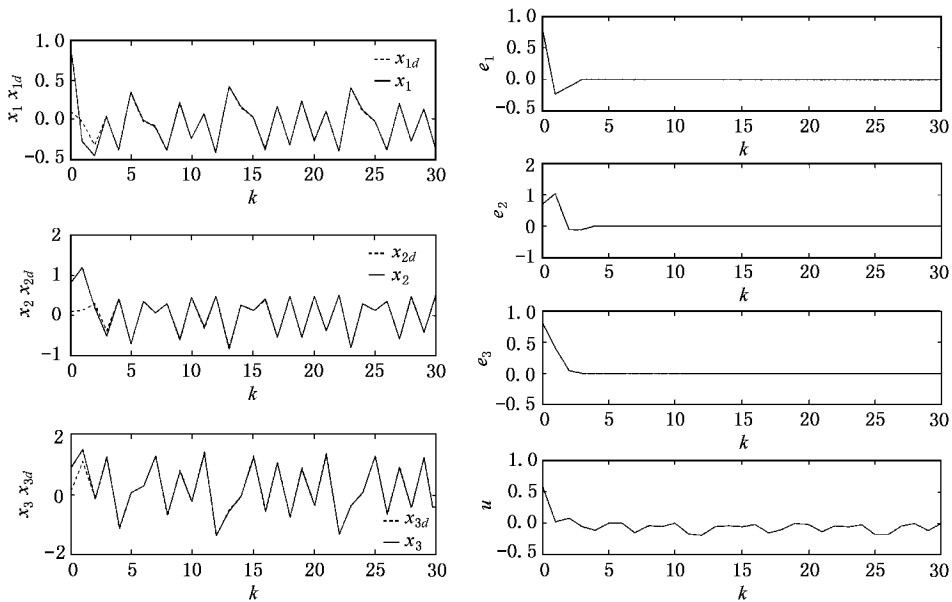


图 3 存在系统参数失配和干扰时,广义 Hénon 映射同步的时间响应(发送器和接收器的状态分别为 x_{id} 和 $x_i(i = 1, 2, 3)$, $e_i(i = 1, 2, 3)$ 为跟踪误差, u 为控制输入)

- [1] Liu F , Ren Y , Shan X M and Qiu Z L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2318 [in Chinese] 刘 锋、任 勇、山秀明、邱祖廉 2001 物理学报 **50** 2318]
- [2] Chen S H , Xie J , Lu J A *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 749 [in Chinese] 陈士华、谢 进、陆君安等 2002 物理学报 **51** 749]
- [3] Kuang J Y , Deng K and Huang R H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1856 [in Chinese] 匡锦瑜、邓 昆、黄荣怀 2001 物理学报 **50** 1856]
- [4] Yang T and Shao H H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 742 [in Chinese] 杨 涛、邵惠鹤 2002 物理学报 **51** 742]
- [5] He Z Y , Li K , Yang L X and Shi Y H 2000 *IEEE Trans. Circuits & Systems (I)* **47** 397
- [6] Yang T and Chua L Q 1997 *IEEE Trans. Circuits & Systems (I)* **44** 976
- [7] Hitzl D L and Zele F 1985 *Physica D* **14** 305
- [8] Gao W 1995 *IEEE Trans. Ind. Electron* **42** 117
- [9] Gao W B 1996 *Theory and design method of variable structure control* (Beijing Science Press [in Chinese] 高为炳 1996 变结构控制的理论和设计方法(北京 科学出版社)]

Synchronization of generalized Hénon map with variable structure control^{*}

Yin Xun-He Ren Yong Shan Xiu-Ming

(State Key Laboratory on Microwave and Digital Communications , Department of Electronic Engineering , Tsinghua University , Beijing 100084 , China)

(Received 27 December 2001 ; revised manuscript received 28 February 2002)

Abstract

Synchronization of generalized Hénon mapping chaos system is realized based on linearizable nonlinear discrete variable structure tracking control method. Chaos attractor of generalized Hénon map is much more complicated than that of Hénon map. Whereas it is this kind of complexity that is expected for security communication. In the synchronization method proposed in this paper , proper mismatch is permitted , which is advantageous in engineering realization. Theoretical analysis and simulation results proved the effectiveness of this method.

Keywords : generalized Hénon map , chaos , synchronization , variable structure control

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60172023).