

# 等离子体的分段线性电流密度递推卷积 FDTD 算法\*

刘少斌<sup>1,2)</sup> 莫锦军<sup>1)</sup> 袁乃昌<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 国防科技大学电子科学与工程学院,长沙 410073)

<sup>2)</sup> 南昌大学物理系,南昌 330047)

(2002 年 11 月 14 日收到,2003 年 2 月 28 日收到修改稿)

给出了一种新的色散介质的时域有限差分(FDTD)算法,称为分段线性电流密度递推卷积 FDTD 算法.利用电流密度和电场强度的卷积关系,给出了该算法的计算公式.通过计算碰撞冷均匀等离子体平板对电磁波的反射系数和透射系数,验证了该算法的高效性和高精度.

关键词:色散介质, FDTD 算法, 电磁波

PACC: 5225, 5240, 5265, 4270

## 1. 引 言

自从 Yee 的文章发表后<sup>[1]</sup>,几十年来,时域有限差分(FDTD)算法已广泛应用于各种介质的电磁仿真.近年来,出现了大量的处理色散介质电磁仿真的 FDTD 算法的文献.其中包括递推卷积(RC)法<sup>[2-6]</sup>,辅助方程(ADE)法<sup>[7-9]</sup>,Z 变换法<sup>[10]</sup>,电流密度卷积(JEC)法<sup>[11]</sup>,Young 氏直接积分(DI)法<sup>[12-14]</sup>,分段线性递推卷积(PLRC)法<sup>[15]</sup>.上述算法中,RC 法计算效率最高,但精度较低<sup>[15,16]</sup>.DI 法需要较少的存储单元,效率较高,计算精度也很高<sup>[16]</sup>.PLRC 法则具有最高的计算精度<sup>[17]</sup>.

本文给出一种新的色散介质的 FDTD 算法公式,称为分段线性电流密度递推卷积(PLCDRC) FDTD 算法计算公式.通过计算等离子体平板对电磁波的反射系数和透射系数验证了该算法的有效性.

## 2. PLCDRC 算法

在碰撞冷等离子体色散介质中,Maxwell 方程组和相关的联立方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m} \mathbf{E} - \nu \mathbf{u}_e, \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = -en_e \mathbf{u}_e, \quad (4)$$

式中  $\mathbf{E}$  是电场强度, $\mathbf{H}$  是磁场强度, $\mathbf{J}$  是极化电流密度, $\epsilon_0, \mu_0$  分别是真空中的介电常数和磁导率, $n_e$  是电子密度, $\nu$  是等离子体碰撞频率, $e, m$  分别是电子的电量和质量.

从方程(3)和(4),可以得到  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{J}$  的频域时谐关系为

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\omega) &= \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{j\omega + \nu} \mathcal{E}(\omega) \\ &= \alpha(\omega) \mathcal{E}(\omega), \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\omega_p = \sqrt{n_e e^2 / m \epsilon_0}, \quad (6)$$

$$\alpha(\omega) = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{j\omega + \nu}. \quad (7)$$

取方程(5)和(7)的逆 Fourier 变换,可得

$$\mathcal{J}(t) = \int_0^t \mathcal{E}(t - \tau) \alpha(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$\alpha(\tau) = \epsilon_0 \omega_p^2 \exp(-\nu\tau) U(\tau), \quad (9)$$

式中  $U(\tau)$  是单位阶跃函数.

使用 Yee 的符号,令  $t = n\Delta t$ ,极化电流密度  $\mathbf{J}$  和电场强度  $\mathbf{E}$  的各个分量可写为

\* 国家重点基础研究项目(批准号 2002AA731181)及国防科技重点实验室基金项目(批准号 51483010301KG0102)资助的课题.

$$J_i(n\Delta t) = J_i^n = \int_0^{n\Delta t} E_i(n\Delta t - \tau) \alpha(\tau) d\tau, \quad (10)$$

式中  $i = x, y, z$ .

如文献 [2—6], RC 法在计算卷积时, 假设电场强度在  $\Delta t$  时间内为常量, 因而产生较大误差. 在文献 [15] 中, Kelley 等人首次引入分段线性近似, 即假设电场强度在  $\Delta t$  时间内线性变化. 因而 [  $k\Delta t$  (  $k + 1$  )  $\Delta t$  ] 时间内, 电场强度可写为

$$E(t) = E^k + \frac{E^{k+1} - E^k}{\Delta t} (t - k\Delta t). \quad (11)$$

于是 (10) 式卷积中的电场强度为 (参阅文献 [15] 中图 1b)

$$E_i(n\Delta t - \tau) = E_i^{n-m} + \frac{E_i^{n-m-1} - E_i^{n-m}}{\Delta t} (\tau - m\Delta t). \quad (12)$$

把 (9) 和 (12) 式代入 (10) 式, 并采用文献 [15] 类似的处理方法, 有

$$J_i^n = \sum_{m=0}^{n-1} [ E_i^{n-m} \sigma^m + ( E_i^{n-m-1} - E_i^{n-m} ) \xi^m ], \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} \sigma^m &= \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \alpha(\tau) d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\nu} [ 1 - \exp(-\nu\Delta t) ] \exp(-m\nu\Delta t), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \xi^m &= \frac{1}{\Delta t} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} (\tau - m\Delta t) \alpha(\tau) d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\nu^2 \Delta t} [ 1 - (1 + \nu\Delta t) \exp(-\nu\Delta t) ] \exp(-m\nu\Delta t). \end{aligned} \quad (15)$$

下一时间步的电流密度可写为

$$J_i^{n+1} = \sum_{m=0}^n [ E_i^{n+1-m} \sigma^m + ( E_i^{n-m} - E_i^{n+1-m} ) \xi^m ]. \quad (16)$$

从 (16) 和 (13) 式, 可得

$$\begin{aligned} J_i^{n+1} &= J_i^n + ( \sigma^0 - \xi^0 ) E_i^{n+1} + \xi^0 E_i^n \\ &\quad - \sum_{m=0}^{n-1} [ E_i^{n-m} ( \sigma^m - \sigma^{m+1} ) \\ &\quad + ( E_i^{n-m-1} - E_i^{n-m} ) ( \xi^m - \xi^{m+1} ) ]. \end{aligned} \quad (17)$$

为了简化符号, 令

$$\Delta\sigma^m = \sigma^m - \sigma^{m+1}, \quad (18)$$

$$\Delta\xi^m = \xi^m - \xi^{m+1}, \quad (19)$$

并令 (17) 式中, 求和项为递推卷积  $\psi_i^n$ , 则有

$$\begin{aligned} \psi_i^n &= \sum_{m=0}^{n-1} [ E_i^{n-m} \Delta\sigma^m \\ &\quad + ( E_i^{n-m-1} - E_i^{n-m} ) \Delta\xi^m ]. \end{aligned} \quad (20)$$

于是 (17) 式可写为

$$J_i^{n+1} = J_i^n + ( \sigma^0 - \xi^0 ) E_i^{n+1} + \xi^0 E_i^n - \psi_i^n. \quad (21)$$

显然, 从 (14) 和 (15) 式可以看出,  $\Delta\sigma^m$  和  $\Delta\xi^m$  具有指数递推特性:

$$\Delta\sigma^m = \exp(-\nu\Delta t) \Delta\sigma^{m-1}, \quad (22)$$

$$\Delta\xi^m = \exp(-\nu\Delta t) \Delta\xi^{m-1}. \quad (23)$$

于是, 可得递推卷积  $\psi_i^n$  的迭代式如下:

$$\begin{aligned} \psi_i^n &= ( \Delta\sigma^0 - \Delta\xi^0 ) E_i^n \\ &\quad + \Delta\xi^0 E_i^{n-1} + \exp(-\nu\Delta t) \psi_i^{n-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

采用中心差分近似, 方程 (1) 的  $y$  分量表达式为

$$(\Delta \times \mathbf{H})_y^{n+1/2} = \epsilon_0 \frac{E_y^{n+1} - E_y^n}{\Delta t} + \frac{J_y^{n+1} + J_y^n}{2}. \quad (25)$$

(21) 和 (25) 式联立, 可求出电场强度  $E_y$  和电流密度  $J_y$  的差分迭代式, 即

$$\begin{aligned} E_y^{n+1} &= \frac{1}{2\epsilon_0 \frac{\Delta t}{\Delta t} + \sigma^0 - \xi^0} \left[ \left( \frac{2\epsilon_0}{\Delta t} - \xi^0 \right) E_y^n \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{A} (\nabla \times \mathbf{H})_y^{n+1/2} - 2J_y^n + \psi_y^n \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} J_y^{n+1} &= \frac{1}{2\epsilon_0 \frac{\Delta t}{\Delta t} + \sigma^0 - \xi^0} \left[ \left( \frac{2\epsilon_0}{\Delta t} - \sigma^0 + \xi^0 \right) J_y^n \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{A} \sigma^0 - \xi^0 (\nabla \times \mathbf{H})_y^{n+1/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\epsilon_0}{\Delta t} \sigma^0 E_y^n - \frac{2\epsilon_0}{\Delta t} \psi_y^n \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

电场强度和电流密度其他分量的推导类似.

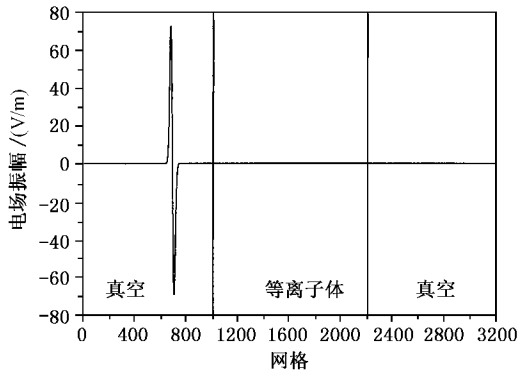
### 3. 算法的有效性与精度

从上面的推导可以看出, 有两种可能的原因使上述 PLCDRC FDTD 算法具有较高的精度. 第一, RC 算法中存在微分项  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ,  $\mathbf{D}$  为电位移矢量. 计算时采用了差分近似, 而本文则没有该项, 取而代之的是采用电流密度的递推卷积, 而且递推卷积又采用了二阶精度的分段线性递推卷积. 第二, RC 算法中, 递推卷积采用一阶近似, 本文的递推卷积为二阶近似.

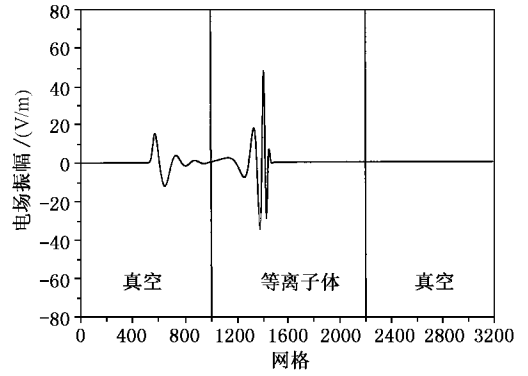
为了检验上述算法的正确性, 本文计算了 9cm 厚平板等离子体对电磁波的反射系数和透射系数. 入射电磁波为高斯脉冲的导数, 如图 1(a) 所示. 等离子体的参数为

$$\omega_p = 2\pi \times 28.7 \times 10^9 \text{ rad/s}, \quad (28)$$

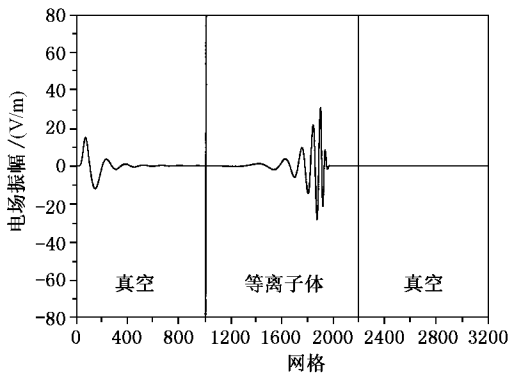
$$\nu = 20 \times 10^9 \text{ Hz}. \quad (29)$$



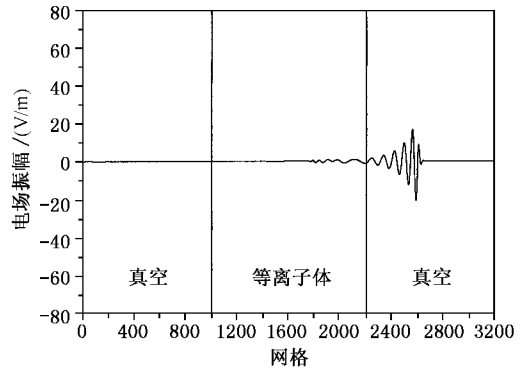
(a) 1500 步



(b) 2500 步

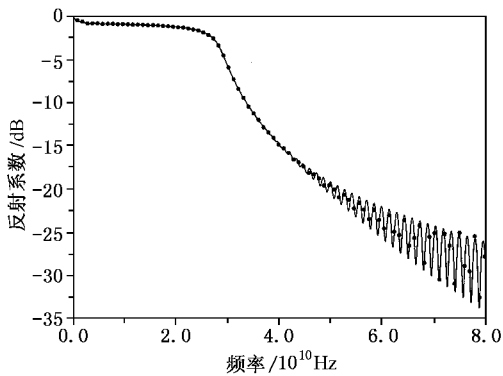


(c) 4000 步

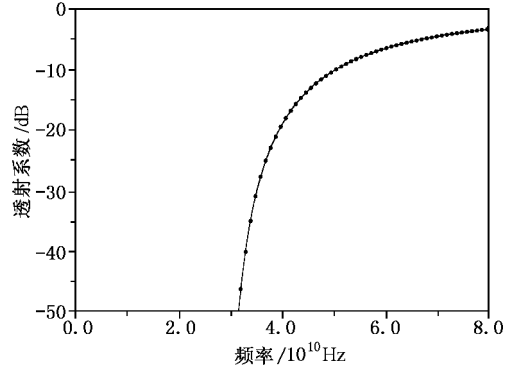


(d) 5500 步

图 1 不同时间步的电场强度



(a) 反射系数



(b) 透射系数

图 2 PLCDRC 算法(●)与解析法(—)的比较

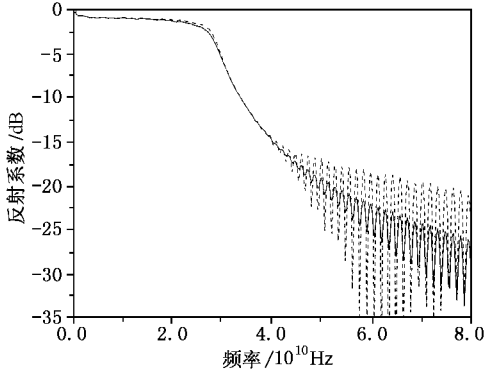
计算时,计算空间分为 3200 个计算网格,两端 PML 吸收边界各 5 个网格,等离子体占中间 1200 个网格,其余为真空,如图 1 所示.计算空间步长为  $75 \mu\text{m}$ ,时间步长为  $0.125 \text{ ps}$ .

图 1 给出不同时间步网格空间电场值.(a)—(d)分别为 1500,2500,4000 和 5500 步时的电场值.

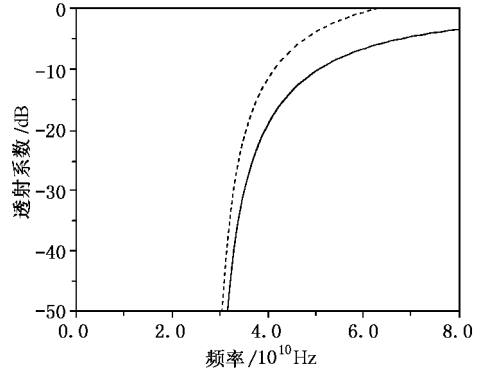
计算空间的两端设置了 PML 以吸收电磁波在边界处的反射.

图 2 给出 PLCDRC FDTD 算法计算的  $9 \text{ cm}$  厚等离子体平板的反射系数和透射系数,并与解析结果进行比较.解析结果的公式来自文献 [18].图 3 给出 PLCDRC FDTD 算法与 JEC-FDTD 算法计算的反射系

数和透射系数. 结果显示: PLCDRC FDTD 算法是正确的, 且具有较高的计算精度.



(a) 反射系数



(b) 透射系数

图3 PLCDRC算法(——)与JEC算法(.....)的比较

## 4. 结 论

本文给出一种新的色散介质的 FDTD 算法, 称为分段线性电流密度递推卷积 FDTD 算法计算公式. 由于该算法消除了 RC 法中微分项  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , 取而

代之的是采用电流密度的递推卷积, 而且递推卷积又采用了二阶精度的分段线性递推卷积. 因此, 该算法既保证了计算的高效率, 又有较高的计算精度. 此外, 通过计算等离子体平板对电磁波的反射系数和透射系数, 验证了该算法的有效性和高精度.

- [ 1 ] Yee K S 1966 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **14** 302
- [ 2 ] Luebbers R J, Hunsberger F, Kunz K S, Standler R and Schneider M 1990 *IEEE Trans. Electromagn. Comput.* **32** 222
- [ 3 ] Luebbers R J, Hunsberger F and Kunz K S 1991 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **39** 29
- [ 4 ] Hunsberger F, Luebbers R and Kunz K 1992 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **40** 1489
- [ 5 ] Luebbers R J and Hunsberger F 1992 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **40** 1297
- [ 6 ] Siushansian R and LoVetri J 1995 *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* **5** 426
- [ 7 ] Kashiwa T, Yoshida N Y and Fukai I 1988 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **36** 1096
- [ 8 ] Nickisch L J and Franke P M 1992 *IEEE Antennas Propagat. Mag.* **34** 33

- [ 9 ] Gandhi O P, Gao B Q and Chen T Y 1993 *IEEE Trans. Microwave Theor. Technol.* **41** 658
- [ 10 ] Sullivan D M 1992 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **40** 1223
- [ 11 ] Chen Q, Katsurai M and Aoyagi P H 1998 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **46** 1739
- [ 12 ] Young J L 1994 *Radio Sci.* **29** 1513
- [ 13 ] Young J L 1995 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **43** 422
- [ 14 ] Young J L 1996 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **44** 1283
- [ 15 ] Kelley D F and Luebbers R J 1996 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **44** 792
- [ 16 ] Mo J J, Liu S B and Yuan N C 2002 *Chin. J. Radio Sci.* **17** 69 in Chinese [ 莫锦军、刘少斌、袁乃昌 2002 电波科学学报 **17** 69 ]
- [ 17 ] Cummer S A 1997 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **45** 392
- [ 18 ] Ginzburg V L 1970 *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas* ( New York : Pergamon )

# A novel FDTD simulation for plasma piecewise linear current density recursive convolution \*

Liu Shao-Bin<sup>1,2)</sup> Mo Jin-Jun<sup>1)</sup> Yuan Nai-Chang<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>*Institute of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*

<sup>2)</sup>*Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330047, China*

(Received 14 November 2002; revised manuscript received 28 February 2003)

## Abstract

A novel finite-difference time-domain (FDTD) method, called piecewise linear current density recursive convolution method is developed for dispersive media. The formulation of this method is derived using the convolution relationship between the current density and the electric field. The high accuracy and efficiency of this method are confirmed by computing the reflection and transmission coefficients of electromagnetic waves through a collisional plasma slab in one dimension.

**Keywords** : dispersive media, FDTD methods, electromagnetic wave

**PACC** : 5225, 5240, 5265, 4270

---

\* Project supported by the State Key Program of Basic Research of China( Grant No.2002AA731181 ) and the National Defense Research Foundation of China ( Grant No. 51483010301KG0102 ).