第 55 卷 第 2 期 2006 年 2 月
1000-3290/2006/55(02)/0539-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.2, February, 2006

Reissner-Nordström de Sitter 黑洞的量子隧穿效应*

李慧玲　蒋青权　杨树政†

(西华师范大学理论物理研究所,南充　637002)

(2005 年 6 月 10 日收到;2005 年 7 月 10 日收到修改稿)

运用 Parikh 的量子隧穿模型,研究了 Reissner – Nordström de Sitter 黑洞的量子隧穿效应。结果表明,在能量守恒的条件下,黑洞外视界和宇宙视界处的粒子出射率与 Bekenstein – Hawking 熵有关,辐射谱不再是严格的纯热谱。

关键词:Reissner-Nordström de Sitter 黑洞,能量守恒,隧穿辐射

PACC:0420,9760L

1. 引　言

Hawking 证明了黑洞具有热辐射,且辐射谱为纯热谱[1],这一发现对恒星演化的认识和进一步研究具有积极的意义.近几十年来,人们对静态、稳态和动态黑洞进行了一系列的研究[2—21].然而,Hawking 辐射是在时空背景不变的前提下得到的纯热谱,在讨论此辐射过程中有两点明显值得争议之处:其一是信息丢失,黑洞信息丢失意味着纯量子态将衰变成混合态,这就违背了量子力学的幺正性原理;其二是技术上的问题,尽管目前已明确黑洞辐射是量子隧道效应的结果,但对隧穿势垒的产生机制却不清楚,有关文献也不是用量子隧穿语言来讨论问题,并非是真正意义上的量子隧穿方法.最近,Parikh 运用量子隧穿模型,研究了 Schwarzschild 黑洞的 Hawking 隧穿辐射.研究结果表明,考虑能量守恒和视界要发生改变,黑洞的辐射谱已不再是严格的纯热谱[22].此种方法克服了 Hawking 辐射缺陷,指出正是由于自引力作用提供了量子隧穿的势垒.这样对黑洞热辐射的研究又有了新的内容.

本文将尝试着讨论渐近 de Sitter 背景下 Reissner-Nordström 黑洞的量子隧穿辐射,这对人们重新认识黑洞辐射无疑是一项有意义的工作.与 Reissner-Nordström 黑洞不同,Reissner-Nordström de Sitter 黑洞有事件视界和宇宙视界,此黑洞的量子隧穿效应是一个尚未被研究的课题.以下采用自引力壳层模型对这两个视界处的 Hawking 隧穿辐射进行研究.研究结果表明,两个视界的辐射都不再是严格的纯热谱,出射率都与熵变有关,在特殊的情况(考虑静态黑洞的情形),所得结果可以退回到 Schwarzschild 黑洞的量子隧穿情形,与已知结论完全一致.

2. Reissner-Nordström de Sitter 黑洞的视界

Reissner-Nordström de Sitter 黑洞的时空线元为[23]

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dt_R^2 \\ & +\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1}dr^2 \\ & + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \end{aligned} \tag{1}$$

式中 t_R 表示 Reissner-Nordström de Sitter 黑洞的坐标时间,m,Q 和 Λ 分别为黑洞的质量和电荷以及宇宙学常数.从其零曲面方程

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}=0 \tag{2}$$

得出确定 Reissner-Nordström de Sitter 黑洞的视界面方程

* 国家自然科学基金(批准号:10347008)和四川省科技厅应用基础研究基金(批准号:05JY029-092)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:szyang@cwnu.edu.cn

$$1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2=0, \tag{3}$$

由(3)式得到黑洞的内、外视界和宇宙视界分别为

$$r_{\text{内}}=r_-=-\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z_2}+\sqrt{Z_3},$$
$$r_{\text{外}}=r_h=\sqrt{Z_1}-\sqrt{Z_2}+\sqrt{Z_3},$$
$$r_{\text{宇宙}}=r_c=\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z_2}-\sqrt{Z_3}, \tag{4}$$

其中参数 $\sqrt{Z_1}$, $\sqrt{Z_2}$, $\sqrt{Z_3}$ 和 α 分别为

$$\sqrt{Z_1}=\frac{1}{\sqrt{2\Lambda}}\left[1+\sqrt{1-4\Lambda Q^2}\cos\frac{\alpha}{3}\right]^{1/2},$$
$$\sqrt{Z_2}=\frac{1}{\sqrt{2\Lambda}}\left[1-\sqrt{1-4\Lambda Q^2}\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right]^{1/2},$$
$$\sqrt{Z_3}=\frac{1}{\sqrt{2\Lambda}}\left[1-\sqrt{1-4\Lambda Q^2}\cos\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{1/2},$$
$$\alpha=\arccos\left[-\frac{1-18m^2\Lambda+12Q^2\Lambda}{(1-4\Lambda Q^2)^{3/2}}\right]. \tag{5}$$

3. Painleve 坐标变换

为了研究黑洞在事件视界处的量子隧穿行为，必须要消除视界处的坐标奇异性，因此作 Painleve 坐标变换[24]

$$t_R=t+f(r), \tag{6}$$

(6)式的微分形式为

$$dt_R=dt+f'(r)dr, \tag{7}$$

其中 $f'(r)=\frac{df(r)}{dr}$，令

$$g(r)=\frac{2m}{r}-\frac{Q^2}{r^2}+\frac{1}{3}\Lambda r^2, \tag{8}$$

于是线元(1)可化为

$$\begin{aligned}ds^2=&-(1-g(r))dt^2-2f'(r)(1-g(r))dtdr\\&+\left[\frac{1}{(1-g(r))}-(1-g(r))f'^2(r)\right]dr^2\\&+r^2d\Omega^2.\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $d\Omega^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2$，考虑到某一时空片上的三维空间超曲面是径向欧氏的，则可令

$$\frac{1}{1-g(r)}-(1-g(r))f'^2(r)=1, \tag{10}$$

于是得到 Painleve 坐标系下的 Reissner-Nordström de Sitter 黑洞的时空线元为

$$\begin{aligned}ds^2=&-\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dt^2\\&\pm 2\sqrt{\frac{2m}{r}-\frac{Q^2}{r^2}+\frac{1}{3}\Lambda r^2}\,dtdr\\&+dr^2+r^2d\Omega^2.\end{aligned} \tag{11}$$

其中取‘+’号对应黑洞视界处出射粒子的背景时空线元，取‘−’号对应宇宙视界处入射粒子的背景时空线元.由(11)式所对应的时空线元可以看出，在 Painleve 坐标系下此时空线元具有优良的特征：在视界处没有奇异性；它的视界面与无限红移面重合；其径向空间是欧氏化的.这些特征对于研究黑洞的量子隧穿辐射提供了优越的条件.

4. 事件视界处的隧穿辐射

以下根据能量守恒，研究不带电粒子在视界处的量子隧穿过程，由线元(11)式可得类光出射测地线方程为

$$\dot{r}\equiv\frac{dr}{dt}=1-\sqrt{\frac{2m}{r}-\frac{Q^2}{r^2}+\frac{1}{3}\Lambda r^2}. \tag{12}$$

根据能量守恒，当我们固定时空总能量而允许黑洞质量涨落时，黑洞辐射出能量为 ω 的粒子后，黑洞时空线元为

$$\begin{aligned}ds^2=&-\left(1-\frac{2(m-\omega)}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dt^2\\&2\sqrt{\frac{2(m-\omega)}{r}-\frac{Q^2}{r^2}+\frac{1}{3}\Lambda r^2}\,dtdr\\&+dr^2+r^2d\Omega^2.\end{aligned} \tag{13}$$

对于静止质量为零的粒子，显然不带电，所以黑洞电荷不变.我们把遂穿辐射的粒子视作具有能量为 ω 的壳层，由于视界面与无限红移面重合，则在视界处该壳层的 s 波有无限蓝移，其频率无限高，波长无限短，在这里任何波包的特征波长都是任意小，因而几何光学近似可靠，几何光学极限允许用粒子语言来描述这些 s 波的出射，因而不需要用二次量子化的方法，在半经典极限下，可以用 WKB 近似.按 WKB 法，粒子贯穿势垒的概率 Γ 与作用量虚部 S 的关系为[25]

$$\Gamma\sim e^{-2\mathrm{Im}S}, \tag{14}$$

其中作用量虚部为

$$\mathrm{Im}S=\mathrm{Im}\int_{r_i}^{r_f}P_r dr=\mathrm{Im}\int_{r_i}^{r_f}\int_0^{P_r}dP'_r dr, \tag{15}$$

(15)式中 r_i, r_f 是粒子在黑洞外视界出射前后的始末位置.由于黑洞视界的收缩，可将 r_i 和 r_f 视为势垒的两个转折点，此两点间的距离由粒子的能量决定.为了计算(15)式的积分，应考虑 Hamilton 方程，由 Hamilton 方程可得

$$\dot{r}=\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}P_r}\right|_r,$$

$$\mathrm{d}P_r=\frac{\mathrm{d}H}{\dot{r}}. \tag{16}$$

由于辐射后，$H=m-\omega'$，因此有 $\mathrm{d}H=\mathrm{d}(-\omega')$，由(15)式和(16)式可得

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}S&=\operatorname{Im}\int_m^{m-\omega}\int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}}\mathrm{d}H\\&=\operatorname{Im}\int_0^{\omega}\int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}r}{1-\sqrt{\frac{2(m-\omega')}{r}-\frac{Q^2}{r^2}+\frac{1}{3}\Lambda r^2}}\mathrm{d}(-\omega'),\end{aligned} \tag{17}$$

对此式进行积分处理，先对 ω 积分，令 $u=2(m-\omega')$，$A=\frac{Q^2}{r}-\frac{1}{3}\Lambda r^3+r$，于是有

$$\int_0^{\omega}\frac{1}{2}\cdot\frac{r\left[1+\sqrt{\frac{u}{r}-\frac{Q^2}{r^2}+\frac{1}{3}\Lambda r^2}\right]}{u-A}\mathrm{d}u=-\mathrm{i}\pi r, \tag{18}$$

再对 r 积分，可得

$$\int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{f}}(-\mathrm{i}\pi r)\mathrm{d}r=-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(r_\mathrm{f}^2-r_\mathrm{i}^2). \tag{19}$$

从而得到

$$\operatorname{Im}S=-\frac{\pi}{2}(r_\mathrm{f}^2-r_\mathrm{i}^2). \tag{20}$$

所以粒子在黑洞视界处的出射率为

$$\Gamma\sim\mathrm{e}^{-2\operatorname{Im}S}=\mathrm{e}^{\pi(r_\mathrm{f}^2-r_\mathrm{i}^2)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}(A_\mathrm{f}-A_\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{\Delta S_{\text{B-H}}}. \tag{21}$$

此时，$r_\mathrm{i}=r_\mathrm{h}$，$r_\mathrm{f}=r'_\mathrm{h}$，$r'_\mathrm{h}$ 不同于 r_h 之处在于将(4)式中的质量参数 m 以 $(m-\omega)$ 来代替，其中，A_i 和 A_f 分别是黑洞辐射前后的视界面积，$\Delta S_{\text{B-H}}$ 是 Bekenstein-Hawking 熵变. 由此可见，Reissner-Nordström de Sitter 黑洞在视界处的辐射谱已不再是严格的纯热谱.

5. 宇宙视界处的隧穿辐射

根据 de Sitter 时空特征，粒子在宇宙视界处的隧穿效应是粒子穿越宇宙视界到达宇宙视界之内，由线元(11)可得入射粒子的类光测地线方程为

$$\dot{r}\equiv\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-1+\sqrt{\frac{2m}{r}-\frac{Q^2}{r^2}+\frac{1}{3}\Lambda r^2}. \tag{22}$$

同样保证能量守恒，考虑黑洞时空背景在改变，对应于在宇宙视界处入射能量为 ω 的粒子后的时空线元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&-\left(1-\frac{2(m+\omega)}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right)\mathrm{d}t^2\\&-2\sqrt{\frac{2(m+\omega)}{r}-\frac{Q^2}{r^2}+\frac{1}{3}\Lambda r^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}r\\&+\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\Omega^2.\end{aligned} \tag{23}$$

对于静止质量为零的粒子，不带电，因此黑洞电荷不变. 按照 WKB 法，粒子贯穿势垒的概率与作用量虚部的关系为 $\Gamma\sim\mathrm{e}^{-2\operatorname{Im}S}$，作用量虚部为

$$\operatorname{Im}S=\operatorname{Im}\int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{f}}P_r\mathrm{d}r=\operatorname{Im}\int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{f}}\int_0^{P_r}\mathrm{d}P'_r\mathrm{d}r. \tag{24}$$

其中 r_i，r_f 是粒子在黑洞宇宙视界入射前后的始末位置. 由哈密顿方程 $\dot{r}=\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}P_r}\right|_r$，并考虑 de Sitter 时空中的 ADM 质量，则由(24)式得到

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}S\\&=-\operatorname{Im}\int_0^{\omega}\int_{r_\mathrm{i}}^{\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}r}{-1+\sqrt{\frac{2(m+\omega')}{r}-\frac{Q^2}{r^2}+\frac{1}{3}\Lambda r^2}}\mathrm{d}\omega'\\&=-\frac{\pi}{2}(r_\mathrm{f}^2-r_\mathrm{i}^2).\end{aligned} \tag{25}$$

所以出射率

$$\Gamma\sim\mathrm{e}^{-2\operatorname{Im}S}=\mathrm{e}^{\pi(r_\mathrm{f}^2-r_\mathrm{i}^2)}=\mathrm{e}^{\Delta S_{\text{B-H}}}. \tag{26}$$

其中 $r_\mathrm{i}=r_c$，$r_\mathrm{f}=r'_c$，$\Delta S_{\text{B-H}}$ 是 Bekenstein-Hawking 熵变. 可见，宇宙视界处的辐射也不是严格的纯热谱.

6. 结　　论

由以上得到的黑洞事件视界处和宇宙视界处的粒子出射率可以看出，粒子隧穿辐射都与熵变有关，Hawking 辐射只是一种理想情况. 所得结果 $\Gamma\sim\mathrm{e}^{\Delta S_{\text{B-H}}}$ 表明，黑洞的隧穿辐射谱偏离纯热谱，并可知黑洞辐射过程中携带信息是可能的. 当 $\Lambda=0$，$Q=0$ 时，Reissner-Nordström de Sitter 黑洞退回到 Schwarzschild 黑洞，此时 $r_\mathrm{i}=2m$，$r_\mathrm{f}=2(m-\omega)$，由(21)式可得

$$\Gamma\sim\mathrm{e}^{-2\operatorname{Im}S}=\mathrm{e}^{-8\pi\omega\left(m-\frac{\omega}{2}\right)}=\mathrm{e}^{\Delta S_{\text{B-H}}}. \tag{27}$$

此结果与已知结果一致[22]，(27)式即为 Schwarzschild 黑洞的量子隧穿出射率.

作者曾与张靖仪教授、任军博士作过有益的讨论，在此深表感谢！

[1] Hawking S W 1975 *Commun*. *Math*. *Phys*. **43** 199
[2] Zhang J Y，Zhao Z 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2399（in Chinese）[张靖仪、赵 峥 2002 物理学报 **51** 2399]
[3] Yang S Z 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 4007（in Chinese）[杨树政 2004 物理学报 **53** 4007]
[4] Zhang J Y，Zhao Z 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2096（in Chinese）[张靖仪、赵 峥 2003 物理学报 **52** 2096]
[5] Zhao Z，Liu W B，Jiang Y L 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 586（in Chinese）[赵 峥、刘文彪、蒋亚铃 2000 物理学报 **49** 586]
[6] Chen J H，Jing J L，Wang Y J 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 1071
[7] Song T P，Yao G Z 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1144（in Chinese）[宋太平、姚国政 2002 物理学报 **51** 1144]
[8] Sun M C，Zhao R，Zhao Z 1995 *Acta Phys*. *Sin*. **44** 1018（in Chinese）[孙鸣超、赵 仁、赵峥 1995 物理学报 **44** 1018]
[9] Lv J L，Wang Y J 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 389（in Chinese）[吕君丽、王永久 1999 物理学报 **48** 389]
[10] Tian G H，Zhao Z 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1662（in Chinese）[田贵花、赵 峥 2004 物理学报 **53** 1662]
[11] Zhao Z 1999 *Thermal Property of Black Hole and Singularity of Space Time*（Beijing：Beijing Normal University Press）p81—146（in Chinese）[赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性（北京：北京师范大学出版社）第 81—146 页]
[12] Liu W B，Zhao Z 2001 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **18** 310
[13] Han Y W，Yang S Z，Liu W B 2005 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **43** 382
[14] Wu S Q，Cai X 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **11** 661（in Chinese）[吴双清、蔡 勖 2002 物理学报 **11** 661]
[15] Li Z H，Zhao Z 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 1273（in Chinese）[黎忠恒、赵 峥 1997 物理学报 **46** 1273]
[16] Liu L，Xu D Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **29** 1617（in Chinese）[刘辽、许殿彦 2002 物理学报 **29** 1617]
[17] Liu W B，Zhu J Y，Zhao Z 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 581（in Chinese）[刘文彪、朱建阳、赵 峥 1999 物理学报 **49** 581]
[18] Li H L Jiang Q Q，Li J L 2004 *J*. *China West Normal University*（Nature Science）**25** 353（in Chinese）[李慧玲、蒋青权、李家烈 2004 西华师范大学学报(自然科学版)**25** 353]
[19] Yang S Z，Lin L B 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 619
[20] Jiang Q Q，Yang S Z，Li H L 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 1736
[21] Yang S Z 1996 *Acta Phys*. *Sin*. **45** 1947（in Chinese）[杨树政 1996 物理学报 **45** 1947]
[22] Parkh M K，Wilczek F 2000 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **85** 5042
[23] Lake K 1979 *Phys*. *Rev*. D **19** 421
[24] Painleve P 1921 *C*. *R*. *Acad*. *Sci*. **173** 677
[25] Kraus P，E. Keski-Vakkuri E 1997 *Nucl*. *Phys*. B **491** 219

The quantum tunneling effect of Reissner-Nordström de Sitter black hole*

Li Hui-Ling Jiang Qing-Quan Yang Shu-Zheng†
(*Institute of Theoretical Physics*，*China West Normal University*，*Nanchong* 637002，*China*)
(Received 10 June 2005；revised manuscript received 10 July 2005)

Abstract

Adopting Parikh 's mode of quantum radiation as tunneling，the tunneling effect of Reissner-Nordström de Sitter black hole is studied. Under implementation of energy conservation ，the result shows that the emission of the particle on the event horizon and the cosmic horizon is related with the change of Bekenstein-Hawking entropy and that the spectrum is not precisely thermal.

Keywords：Reissner-Nordström de Sitter black hole，energy conservation，quantum radiation as tunneling
PACC：0420，9760L

* Project Supported by the National Natural Science Foundation of China（Grant No. 10347008）and the Foundation for Fundamental Research of Sichuan Provincial Science and Technology Department，China（Grant No. 05JY029-092）.

† Corresponding author. E-mail：szyang@cwnu.edu.cn