

# 基于改进粒子群优化算法的 混沌系统参数估计方法\*

高 飞<sup>†</sup> 童恒庆

(武汉理工大学数学系, 武汉 430070)

(2005 年 5 月 30 日收到, 2005 年 6 月 20 日收到修改稿)

估计混沌系统的未知参数是混沌控制与同步中必须解决的关键问题. 利用群集智能的新进展粒子群优化算法 (PSO) 的全局搜索能力, 从初始粒子群的产生、目标函数的处理的角度改进 PSO, 将改进的 PSO 引入混沌系统参数估计和在线估计. 仿真试验表明, 改进算法具有良好的适应性、较高的收敛可靠性及精度, 对信号叠加噪声的情形也具有较高的鲁棒性, 是混沌系统参数估计的一种成功算法.

关键词: 混沌系统, 参数估计, 在线估计, 粒子群优化算法

PACC: 0545

## 1. 引 言

20 世纪 90 年代以来, 群集智能 (swarm intelligence) 的研究<sup>[1]</sup> 引起了众多学者的极大兴趣; Eberhart 和 Kennedy 于 1995 年提出的粒子群优化 (PSO) 算法作为一种高效并行优化方法, 得到了众多学者的重视和研究<sup>[1,2]</sup>, 可用于求解大量非线性、不可微和多峰值的复杂优化问题<sup>[3,4]</sup>, 因其程序实现异常简洁, 需要调整的参数少, 因而发展很快, 出现了多种改进的 PSO, 并已应用于多个科学和工程领域<sup>[4]</sup>.

近年来, 混沌的控制与同步已成为非线性科学中重要的研究方向之一, 已经提出很多有效的控制与同步方法<sup>[5-8]</sup>. 然而, 这些方法一般在混沌系统的精确参数已知的前提下提出. 在实际中, 由于混沌系统的复杂性, 它的某些参数难以测量或确定, 或者出于某种特殊原因, 系统的某些参数不可知 (例如保密通信的需要). 这时, 要实现混沌系统的控制或同步, 上述方法有相当的局限性, 必须估计混沌系统的未知参数<sup>[5,9,10]</sup>.

实际上, 参数估计是混沌控制与同步中首先必须解决的课题, 具有更重要的现实意义. 文献 9 提出了未知参数辨识观测器的概念, 并对 Lorenz 系统

的参数进行了有效的辨识; 文献 8 提出一种并行遗传算法用于 PID 控制器结构和参数的同时优化; 文献 10 通过构造一个适当的适应度函数, 将混沌系统的参数估计问题转化为一个参数的寻优问题, 对混沌系统的参数进行估计.

基于 PSO 具有全局优化搜索的能力, 本文用均匀设计方法设计群体<sup>[11]</sup>、偏转目标函数<sup>[4,12]</sup> 以改善 PSO 的收敛性能; 在文献 10 的基础上, 采用改进的 PSO 对混沌系统进行参数估计以及在线估计和校正, 并以典型的 Lorenz 混沌系统为例进行仿真, 结果表明, 即使在测量信号叠加噪声的情况下, 这种方法也能得到较好的参数估计结果.

## 2. 粒子群优化及改进

### 2.1. 粒子群优化

PSO 是一种相对较新的基于群体的演化计算方法 (EA). 根据对环境的适应度将群体中的个体移动到好的区域; 它不像其他 EA 那样对个体使用演化算子, 而是将每个个体看作  $D$  维搜索空间中的一个没有体积的微粒; 所有的粒子都有一个被优化的函数决定的适应值, 主要特点<sup>[3,4,12,13]</sup> 为: 1) 每一粒子都

\* 科技部技术创新基金 (批准号: 02C26214200218), 武汉理工大学校基金 (批准号: XJJ2004113) 及武汉理工大学大学生创新 (UIRT) 计划项目 (批准号: A156, A157) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: gaofei@mail.whut.edu.cn

被赋予了初始随机速度并在解空间中流动; 2) 个体具有记忆功能; 3) 个体的进化主要根据自身以及同伴的飞行经验进行动态调整, 通过迭代找到最优解.

PSO 的优势在于算法的简洁性, 易于实现, 没有很多参数需要调整, 且不需要梯度信息. PSO 是非线性连续优化、组合优化和混合整数非线性优化问题的有效工具, 被广泛应用于函数优化、神经网络训练、模糊控制器设计、车间作业调度、机器人实时路径规划、自动目标检测、时频分析等<sup>[12, 13]</sup>.

$$\begin{cases} Tp_{i,d}(k) = \text{rand}(0, c_1) \times [p_{i,d}(k) - x_{i,d}(k)], \\ Tq_{i,d}(k) = \text{rand}(0, c_2) \times [q_{g,d}(k) - x_{i,d}(k)], \\ v_{i,d}(k+1) = w \times v_{i,d}(k) + Tp_{i,d}(k) + Tq_{i,d}(k), \\ x_{i,d}(k+1) = x_{i,d}(k) + v_{i,d}(k+1), \end{cases} \quad (1)$$

其中  $w$  为惯性权重 (inertia weight),  $c_1$  认知加速常数 (cognition acceleration constant),  $c_2$  为社会加速常数 (social acceleration constant),  $\text{rand}(a, b)$  产生在  $[a, b]$  范围内变化的随机数. 速度  $V_i(k)$  被一个最大速度  $VM$  限制: 如果当前对微粒的加速导致它在某维的速度  $v_{i,d} \geq VM_d$ , 则  $v_{i,d} := VM_k$ <sup>[12, 13]</sup>.

按上述思想的 PSO 是全局版的, 虽然收敛快,

$$\begin{cases} Tp_{i,d}(k) = \text{rand}(0, c_1) \times [p_{i,d}(k) - x_{i,d}(k)], \\ Tq_{i,d}(k) = \text{rand}(0, c_2) \times [q_{g,d}(k) - x_{i,d}(k)], \\ Tl_{i,d}(k) = \text{rand}(0, c_3) \times [l_{i,d}(k) - x_{i,d}(k)], \\ v_{i,d}(k+1) = w \times v_{i,d}(k) + Tp_{i,d}(k) + Tq_{i,d}(k) + Tl_{i,d}(k), \\ x_{i,d}(k+1) = x_{i,d}(k) + v_{i,d}(k+1), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $c_3$  为邻域加速常数 (neighborhood acceleration constant), 其他与全局版 PSO 相同. 实验表明, 局部版比全局版收敛慢, 但不容易陷入局部最优<sup>[12, 13]</sup>.

(2) 式中的  $v_{i,d}(k+1)$  可改进为

$$v_{i,d}(k+1) = \chi [w \times v_{i,d}(k) + Tp_{i,d}(k) + Tq_{i,d}(k) + Tl_{i,d}(k)], \quad (3)$$

其中  $\chi$  为收缩因子, 通常  $\chi = 0.9$ .

## 2.2. 改进策略

从社会认知学的角度看, PSO 理论基础主要包括<sup>[12, 13]</sup> 刺激的评价; 与近邻的比较; 对领先近邻的

设  $k$  时刻, 第  $i$  个微粒 ( $i = 1, \dots, M$ ) 表示为  $X_i(k) = (x_{i,1}(k), \dots, x_{i,D}(k))$ , 它经历过的最好位置 (有最好的适应值) 记为  $p_{\text{best}} = P_i(k) = (p_{i,1}(k), \dots, p_{i,D}(k))$ ; 在群体所有微粒经历过的当前最好位置的索引号表示为  $g_{\text{best}} = Q_g(k) = (q_{g,1}(k), \dots, q_{g,D}(k))$ . 微粒  $i$  的速度用  $V_i(k) = (v_{i,1}(k), \dots, v_{i,D}(k))$  表示.  $X_i(t)$  的第  $d$  维 ( $1 \leq d \leq D$ ) 根据如下方程<sup>[1]</sup>变化:

但有时会陷入局部最优. 而局部版 PSO 通过保持多个吸引子来避免早熟, 对每一个粒子  $X_i$ : 把所有粒子按序号排成一圈,  $X_i$  两侧各  $l$  个粒子和  $X_i$  组成的共  $2 \times l + 1$  个粒子的集合称为  $X_i$  的环状邻域  $N_i$ , 从  $N_i$  中选出最好的, 标记为  $l_{\text{best}} = L_i(t) = (l_{i,1}(t), \dots, l_{i,D}(t))$ ,  $X_i(t)$  的第  $d$  维 ( $1 \leq d \leq D$ ) 根据如下方程<sup>[2]</sup>变化:

模仿.

与遗传算法 (GA) 比较, PSO 的信息共享机制是很不同的. 在 GA 中, 染色体互相共享信息, 整个种群比较均匀的向最优区域移动. 在 PSO 中, 只有  $g_{\text{best}}$  (或  $l_{\text{best}}$ ) 给出信息给其他的粒子, 这是单向的信息流动. 整个搜索更新过程是跟随当前最优解的过程; 与 GA 比较, 在大多数的情况下, PSO 所有的粒子可能更快的收敛于最优解; 另外, PSO 算法对种群大小不十分敏感, 即种群数目下降时性能下降不是很大<sup>[12, 13]</sup>.

尽管 PSO 具有是在算法的早期收敛快的特点,

但也存在着精度较低、易发散等缺点.若加速常数、最大速度等参数太大,粒子群可能错过最优解,算法不收敛,而在收敛的情况下,由于所有的粒子都向最优解的方向飞去,粒子趋同,后期收敛速度明显变慢,并且算法收敛到一定精度时,无法继续优化,所能达到的精度也比 GA 低.因此很多学者都致力于改善 PSO 算法的性能,如采用惯性权重法、压缩因子法、混合法、空间邻域法、社会趋同法、动态目标函数法、协同法、结合复杂系统的自组织临界性等<sup>[13]</sup>.

在分析 PSO 理论基础、实现方式的基础上,结合在计算数学中的一些常用手段,本文从初始点集的选取和目标函数的处理两个方面对 PSO 进行改进.

在反映目标函数在搜索空间中分布性质这一点上随机分布的初始群体不如均匀设计的方法产生的点集<sup>[11]</sup>.设  $u_{ij}$  是均匀设计表  $U_n(n^N)$  中的元素,  $a_{ij} = (2u_{ij} - 1) / 2n, j = 1, \dots, N$ , 则集合  $P_M = \{a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kN}), k = 1, \dots, M\}$  是  $[0, 1]^N$  中的均匀散布的  $M$  个点,图 1 是在  $[0, 1]^2$  中用均匀设计方法和随机方法分别产生的 30 个点组成的点集  $\{(x_i, y_j)\}$ <sup>[11]</sup>.

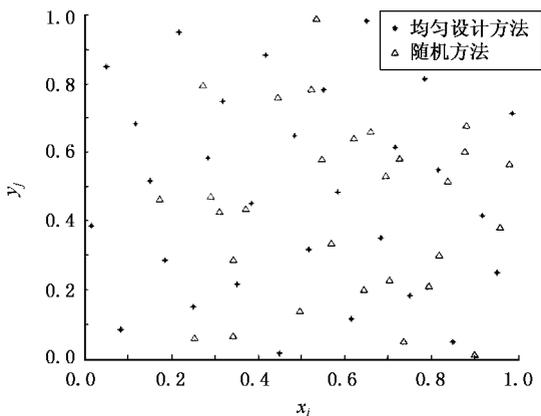


图 1 初始点集对比图

从图 1 可以看出均匀设计的方法产生的点集所构成的初始群体比随机的初始群体更能从统计意义上反映出目标函数的特性.

若目标函数  $f(x)$  为多峰函数,EA 在求解时往往易陷入局部极小点,引入偏转(deflection)目标函数方法<sup>[12]</sup>,以免算法再次收敛到相同极小解:

$$F(X) = \prod_{i=1}^k [ \tan(\lambda_i \| X - x_i^* \| ) ]^2 f(X), \tag{4}$$

其中  $\lambda_i \in (0, 1), x_i^* (i = 1, 2, \dots, k)$  是已经找到的  $k$  个极小解,亦可以引入拉伸(Stretching)目标函数方

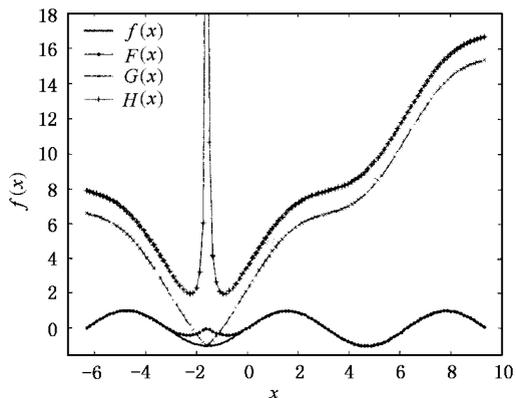


图 2 函数偏转、拉伸效果图

法<sup>[12]</sup>,以免算法再次收敛到相同极小解:

$$G(x) = f(x) + \beta_1 \| x - x_i^* \| [ 1 + \text{sgn}(f(x) - f(x_i^*)) ], \tag{5}$$

$$H(x) = H(x) + \beta_2 \frac{1 + \text{sgn}(f(x) - f(x_i^*))}{\tan[\delta(G(x) - G(x_i^*))]} \tag{6}$$

其中参数  $\beta_1, \beta_2, \delta > 0$ , 将  $H(X)$  作为新的目标函数.图 2 是偏转、拉伸函数  $f(x) = \sin x$  在  $x = -\frac{\pi}{2}$  附近函数值的图像.

在此基础上,提出 PSO 的改进算法如下:

算法 1 改进 PSO 算法

- 第 1 步 初始化.确定初始参数  $w, c_1, c_2, c_3, l, \chi$ ,用均匀设计的方法产生初始粒子群中的  $M$  个个体  $X_i(k)$  和初始速度  $V_i(k) (i = 1, \dots, M), k$  是迭代次数,设计目标函数  $f(x)$ ;
- 第 2 步 计算适应值,标记  $p_{\text{best}}, g_{\text{best}}, l_{\text{best}}$ ;
- 第 3 步 根据(2)和(3)式更新粒子群,  $k = k + 1$ ;
- 第 4 步 停止条件判断.若  $k \leq 200$ ,回到第 3 步,否则,输出当前的  $g_{\text{best}}$ ,用(4)或(6)式更新  $f(x)$ ,返回第 3 步,直到算法找到所有的最优解.

### 3. 基于改进粒子群优化算法的混沌系统参数估计

在文献[9,10,14,15]的基础上,将混沌系统的参数估计问题转化为一个参数的寻优问题,以典型的 Lorenz 混沌系统为例,说明基于改进 PSO 混沌系统参数估计.

Lorenz 混沌系统是 Lorenz 于 1963 年提出的一个表现奇异吸引子的动力系统<sup>[6]</sup>：

$$\begin{cases} x' = \sigma \cdot (y - x), \\ y' = \gamma \cdot x - x \cdot z - y, \\ z' = x \cdot y - b \cdot z, \end{cases} \quad (7)$$

其中参数  $\sigma = 10, \gamma = 28$ , 参数  $b$  未知. 当  $b = 8/3$  时, (7) 式所表示的系统是混沌的. 在数值仿真中用四阶龙格-库塔算法求解系统 (7), 步长  $h = 0.01$ .

算法 2 基于 PSO 对参数  $b$  进行估计

第 1 步 初始化. 随机产生初始种群中的  $M$  个个体  $P_i^t(k)$  ( $i = 1, \dots, M$ ),  $k$  是迭代次数, 且  $b_{\min} \leq P_i^t(k) \leq b_{\max}$ , 其中  $b_{\min}, b_{\max}$  参数  $b$  取值的上、下限, 根据已有经验和经验给定;

第 2 步 计算适应值. 设第  $k$  代第  $i$  个个体  $P_i^t(k)$  所对应的状态变量为

$$(x(P_i^t(k)), y(P_i^t(k)), z(P_i^t(k))).$$

根据测得的系统状态变量  $(x(t), y(t), z(t))$ , 计算相应的适应值

$$f_i = \sum_{t=0}^T [(x(P_i^t(k)) - x(t))^2 + (y(P_i^t(k)) - y(t))^2 + (z(P_i^t(k)) - z(t))^2], \quad (8)$$

其中  $t$  取为从 0 到  $T$  的一系列离散时间序列;

第 3 步 粒子群寻优. 对当前粒子群按照算法 1 寻优;

第 4 步 停止条件判断. 若  $k \leq 100$ , 则停止; 否则  $k := k + 1$ , 回到第 2 步.

一般而言, 在预先估计的未知参数区间上, 目标函数 (8) 的解空间是多峰的, 具有非常复杂的结构. 与其他搜索方法, 如爬山法、穷举法以及随机搜索法比较, EA 在解决多峰函数的优化问题时有其独特的优点<sup>[1, 16]</sup>.

本文选取 EA 的新进展 PSO 求解, 先让 Lorenz 系统自由演化, 在经历过暂态之后任意选取一点作为初值, 并以此作为 0 时刻, 由此初值出发再任其演化至  $T = 300h$  处, 得到未知参数的 Lorenz 混沌系统在离散时间序列  $0h, h, \dots, 300h$  上的标准状态变量值  $(x, y, z)$ .

选取  $b_{\min} = 2, b_{\max} = 3$ , 为了能够获得比较精确的结果, 先进行 20 次的数值实验, 每次实验初始种群中的个体都在可行域内随机设定, 然后取每次实验结果的最优解, 取平均值作为参数  $b$  的最终估计结果, 本文得到的参数  $b$  的估计结果为 2.66666623060554, 与

真实值已经非常接近. 图 3 是算法 2 所求的参数  $b$ , 其中  $N$  是试验次数,  $\lg\left|b - \frac{8}{3}\right|$  表示参数  $b$  估计值与真实值的距离的对数, 由于本文算法的结果较为精确, 所以取对数.

为检验算法的有效性, 考虑实际应用中噪声对结果的影响, 将标准状态变量  $(x, y, z)$  叠加上  $[-0.1, 0.1]$  的白噪声, 并设  $\epsilon = 0.1$ . 由于每次实验结果都受到噪声的影响, 直接将这 20 个最优解进行平均, 得到了存在噪声时参数  $b$  的最终估计结果为 2.6779781064157, 同真实值比较接近. 图 4 为算法 2 独立运行 20 次的实验结果,  $b$  为参数估计值,  $N$  是试验次数.

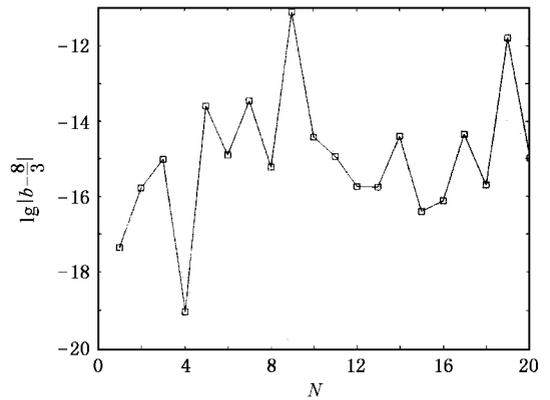


图 3 未加噪声是参数  $b$  的试验结果

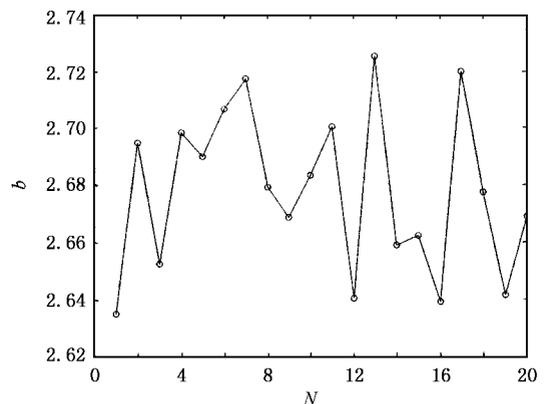


图 4 加噪声后参数  $b$  的试验结果

由于混沌系统的特性, 即使参数估计结果与真实值非常接近, 也仅能在短时间内有意义. 随着系统的长时间演化, 估计参数所表征系统与真实系统之间的误差将增大. 图 5 给出系统在无噪声 ( $b = 2.66666623060554$ ) 和有噪声 ( $b = 2.6779781064157$ )

情况下,参数  $b$  所表征的系统  $(x_b, y_b, z_b)$  与真实系统  $(x, y, z)$  间误差  $p^2 = (x_b - x)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2$  随时间演化结果.

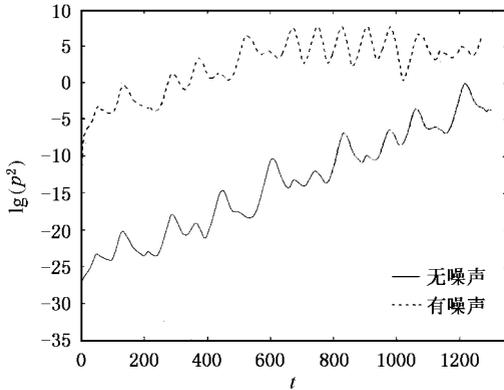


图5 无噪声、有噪声下误差对比图

由图5可以看出,即使估计参数  $b$  与真实值很接近,经过长时间演化,两系统之间误差变得不能容忍.因此,在实际应用中必须对混沌系统的参数进行在线校正,不断修正估计结果.采用如下方法可以对混沌系统的参数进行在线估计和校正:从初始点开始,用四阶龙格-库塔算法求解系统(7),步长  $h = 0.01$ ,用算法2求解出当前的参数  $b$  的估计;以当前  $b$  的估计带入到系统(7),计算出其轨迹,把最后一个点作为初始点,重复上述步骤,从而实现混沌系统的参数进行在线校正.

图6表示无噪声下在线校正  $b$  的 Lorenz 曲线对比图;图7中曲线  $a$  表示无噪声下,在线估计参数  $b$  时的系统误差,曲线  $b$  表示有噪声下,在线估计参数  $b$  时的系统误差,曲线  $c$  表示有噪声时参数  $b$  所对应系统误差.

从图6可以看出,无噪声下,基于本文改进的 PSO 对混沌系统的参数进行在线估计和校正,模拟曲线基本与 Lorenz 曲线重合,取得效果非常好;从图7可以看出,在叠加噪声的情形,本文方法在线估计亦可以大幅降低误差(特别是在  $t \leq 1000$  时),仅比无噪声的在线估计情形略差.

#### 4. 结束语

在本文的数值模拟中,假设预先知道未知参数  $b$  的大致取值范围.然而,即使在参数完全未知甚至没有任何经验可供参考的情况下,也可以使用 PSO

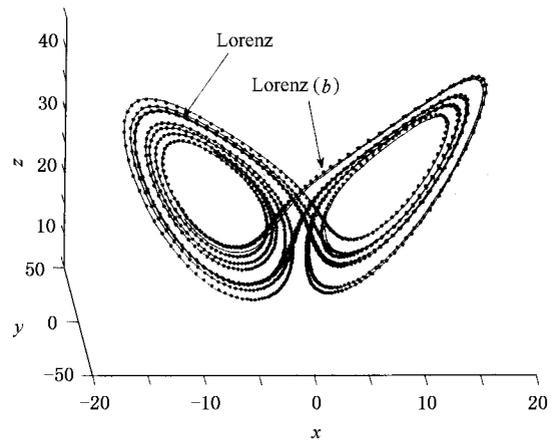


图6 无噪声下在线校正  $b$  的 Lorenz 曲线对比图

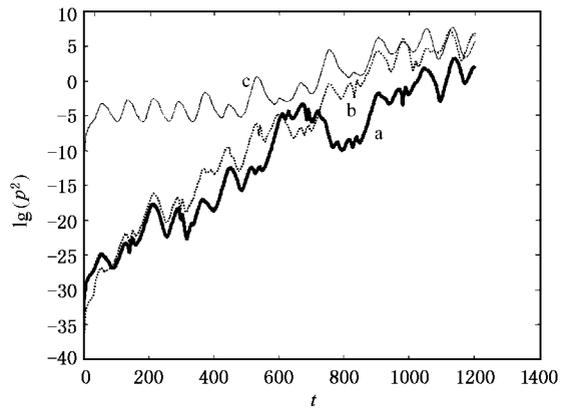


图7 在线估计系统误差对比图

先在一个较大的范围内进行搜索,然后采用本文介绍的排除局部极值的方法,根据结果逐步缩小搜索范围,直到最优解满足要求为止.

同时本文是在对未知系统已经基本知道其动力学规律(例如,上述的 Lorenz 系统)的情况下,对其进行参数估计的问题,而不是系统的模式识别问题.而在化学反应、流体力学等实际系统中,通常可知道系统的动力学描述方程,但系统的某些参数却是不可测或是难以测量的<sup>[5,6,14]</sup>,且它们对深入理解系统的动力学特性和对系统实施适当的控制具有重要作用<sup>[10]</sup>.

本文将改进的 PSO 引入混沌系统的参数估计中和在线估计,充分发挥了 PSO 的全局优化搜索能力,以典型的 Lorenz 混沌系统为例进行了数值模拟,结果表明使用改进的 PSO 可以得到很好的参数估计结果,且对噪声具有鲁棒性.

- [ 1 ] Whitley D 2001 *Information and Software Technology* **43** 817
- [ 2 ] Eberhart R C , Shi Y 2000 *Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation* , Piscataway , N J ( IEEE Service Center ) p84
- [ 3 ] Schutte J F , Reinbolt J A , Fregly B J *et al* 2004 *Int. J. Numer. Meth. Engin.* **61** 2296
- [ 4 ] Parsopolos K E , Vrahatis M N 2002 *Natural Computing* **1** 235
- [ 5 ] Fang J Q 2002 *Control Chaos and Develop High Technique* ( Beijing : Atom Energy Press )( in Chinese )[ 方锦清 2002 驾驭混沌与发展高新技术(北京·原子能出版社)]
- [ 6 ] Chen G R , Lü J H 2003 *Dynamics of the Lorenz System Family : Analysis , Control and Synchronization* ( Beijing : Science Press )( in Chinese [ 陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 族的动力学分析、控制与同步(北京·科学出版社)]
- [ 7 ] Duchateau A , Bradshaw P , Bersini H 1999 *Int. J. Control.* **72** 727
- [ 8 ] Wang D F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1495 ( in Chinese [ 王东风 2005 物理学报 **54** 1495 ]
- [ 9 ] Guan X P , Peng H P , Li L X *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 26 ( in Chinese [ 关新平、彭海朋、李丽香等 2001 物理学报 **50** 26 ]
- [ 10 ] Dai D , Ma X K , Li F C *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2459 ( in Chinese [ 戴 栋、马西奎、李富才等 2002 物理学报 **51** 2459 ]
- [ 11 ] Ma C X 1999 *Uniform Design Based On Centered L2 Discrepancy*  $U_n(n^s)$  , <http://www.math.hkbu.edu.hk/Uniformdesign/Un-n^s.html> ,
- [ 12 ] Magoulas G D , Vrahatis M N , Androulakis G S 1997 *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.* **30** 4545
- [ 13 ] Xie X F , Zhang W J , Yang Z L 2003 *Control and Decision* **18** 129 ( in Chinese [ 谢晓锋、张文俊、杨之廉 2003 控制与决策 **18** 129 ]
- [ 14 ] Ye M Y , Wang X D 2004 *Chin. Phys.* **13** 454
- [ 15 ] Tan W , Wang Y N 2005 *Chin. Phys.* **14** 72
- [ 16 ] Michalewicz Z , Fogel D B 2000 *How to Solve It : Modern Heuristics* ( Berlin : Springer-Verlag )

## Parameter estimation for chaotic system based on particle swarm optimization<sup>\*</sup>

Gao Fei<sup>†</sup> Tong Heng-Qing

( School of Science , Wuhan University of Technology , Wuhan 430070 , China )

( Received 30 May 2005 ; revised manuscript received 20 June 2005 )

### Abstract

It's of vital importance to estimate the unknown parameters of chaos systems in chaos control and synchronization. We firstly improve the newly developed particle swarm optimization ( PSO ) in view of the population initialization and objective function treatment. Then we use the improved algorithms for parameter estimation and on-line estimation of chaotic system for its global searching ability. Experiments show that the improved method has better adaptability , reliability and high precision is robust to noise. It is proved to be a successful approach in parameter estimation for chaotic systems.

**Keywords** : chaos system , parameter estimation , on-line estimation , particle swarm optimization

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the Science Foundation for Technology Creative Research from the Ministry of Science and Technology of China ( Grant No. 02C26214200218 ) , the Foundation ( Grant No. XJJ2004113 ) and the UIRT Project ( Grant Nos. A156 , A157 ) of Wuhan University of Technology of China.

<sup>†</sup> E-mail : gaofei@mail.whut.edu.cn