

用探测棒研究颗粒堆中的最大静摩擦力*

孔维姝 胡林[†] 杜学能 张兴刚 王伟明 吴宇

(贵州大学理学院, 贵州省光电子技术与应用重点实验室, 贵阳 550025)

(2006 年 4 月 7 日收到, 2006 年 12 月 21 日收到修改稿)

实验研究了筒仓内颗粒堆中部的竖直探测棒被提拉时受到的最大静摩擦力 F . 研究发现: 当筒仓半径 R 小于 0.040 m 时, F 随 R 的增加而减少, 当 R 大于 0.045 m 时, F 几乎不受 R 的影响. F 随颗粒堆高度 h 变化的实验数据可以用公式 $F = A[h + B(e^{-h/B} - 1)]$ 拟合, 拟合参数 A 与探测棒横截面形状及备制颗粒堆的流量有关, 拟合参数 B 与备制颗粒堆的流量有关.

关键词: 颗粒物质, 静摩擦力, 数据拟合

PACC: 4630P, 0547

1. 引言

颗粒物质是一类复杂体系, 虽然单个颗粒以固体形态存在, 颗粒物质的集体行为却超越了固体、液体及气体的界限, 很难以固体、液体、气体的性质加以描述^[1-3]. 颗粒物质的研究正成为物理学界关注的热点之一. 目前对颗粒物质的认识还很不完善, 因此我们必须通过大量的实验研究来探索颗粒物质体系的一些规律. 颗粒物质中的力通过力链传递, 它的很多性质都与力链有关^[4]. 颗粒体系的复杂性, 导致颗粒间的摩擦规律复杂多样, 其摩擦力不仅与颗粒本身性质和外界因素有关, 还与物体的形状、颗粒物质的边界及备制方式等因素有关. 近年来报道了许多研究颗粒间摩擦力规律的实验和模拟计算^[5-9], Horvath 等^[6]实验研究了圆棒在不同堆积密度颗粒中的摩擦力, 结果表明, 颗粒物质中的摩擦力 F 随堆积密度 C 呈指数增长. 胡林等^[9]用类似的方法研究了直径不同的圆棒在不同深度的颗粒物质中的最大静摩擦力, 结果表明, 棒受到的静摩擦力 F 与颗粒堆积高度 h 的关系满足 $F = L\mu\alpha\rho g\lambda[h + \lambda(e^{-h/\lambda} - 1)]$. 本文通过实验及计算机拟合, 在文献^[9]的基础上进一步研究颗粒堆中探测棒受到的最大静摩擦力与颗粒的筒仓半径、备制颗粒堆的流量以及探测棒横截面形状之间的关系.

2. 实 验

实验中维持实验室温度为 $22\text{ }^\circ\text{C}$. 所用玻璃珠粒径 $d = 0.0010\text{ m}$. 三种铁质探测棒横截面形状分别为圆形、方形和扁形, 它们的横截面周长、材料和表面光洁度相同, 横截面的特征尺寸如下: 圆棒直径 $D = 0.0141\text{ m}$, 方棒边长 $a = 0.0111\text{ m}$, 扁棒短边 b 和长边 c 的边长分别为 $b = 0.0022\text{ m}$ 和 $c = 0.0200\text{ m}$. 高度相同的 6 个有机玻璃筒仓半径分别为 $R_1 = 0.015\text{ m}$, $R_2 = 0.035\text{ m}$, $R_3 = 0.045\text{ m}$, $R_4 = 0.060\text{ m}$, $R_5 = 0.077\text{ m}$, $R_6 = 0.092\text{ m}$, 高度 $H = 0.500\text{ m}$.

探测棒竖直地穿出筒仓底部由上下定位套保证其与筒仓同轴并避免与筒仓底部接触, 筒仓顶部有 8 个中心对称的下料圆孔. 填充时用两个锥形漏斗依次从四对对称圆孔循环下料, 以保证颗粒堆所受冲力均衡从而使整个颗粒堆各处均匀分布. 用电脑毫秒计时器记录每填充一杯颗粒的时间, 控制两种填充流量(单位时间填充颗粒的体积)分别为 $(2.40 \pm 0.05) \times 10^{-6}$ 和 $(7.20 \pm 0.05) \times 10^{-6}\text{ m}^3/\text{s}$ (以下简称小流量和大流量). 探测棒上端连接到带有弹簧和拉力传感器的电动提拉系统, 设定提拉距离并取掉上下定位套后进行提拉, 拉力传感器把探测棒感受到的力转换为电压信号, 经 A/D 转换输入计算机, 计算机自动采集及存储数据并显示每次测量的曲

* 国家自然科学基金(批准号: 30374021)、贵州省省长基金(批准号: 20061128)和贵州省高层次人才基金(批准号: 20061227)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: hulin53@sina.com

线,从曲线上对应点得到最大静摩擦力。

实验中维持颗粒堆高度 h 分别为 0.143, 0.253, 0.363 m,用小流量制备颗粒堆,圆棒受到的最大静摩擦力 F 与筒仓半径 R 的关系见图 1。

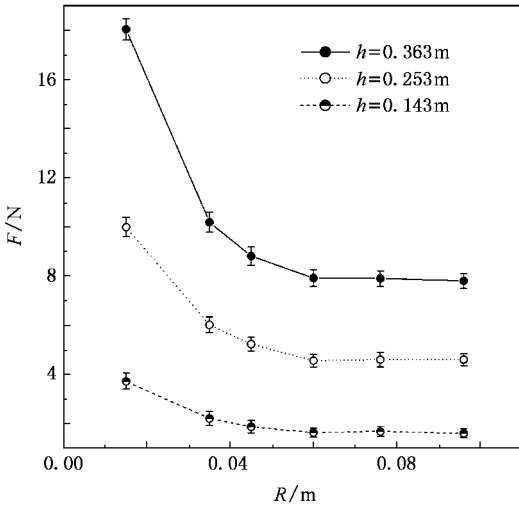


图 1 三种高度的颗粒堆中,圆棒受到的最大静摩擦力 F 与筒仓半径 R 的关系

在半径 $R_4 = 0.060$ m 和 $R_6 = 0.092$ m 的两种筒仓中分别用小流量和大流量制备颗粒堆,圆棒受到的最大静摩擦力 F 与颗粒堆高度 h 的关系见图 2。

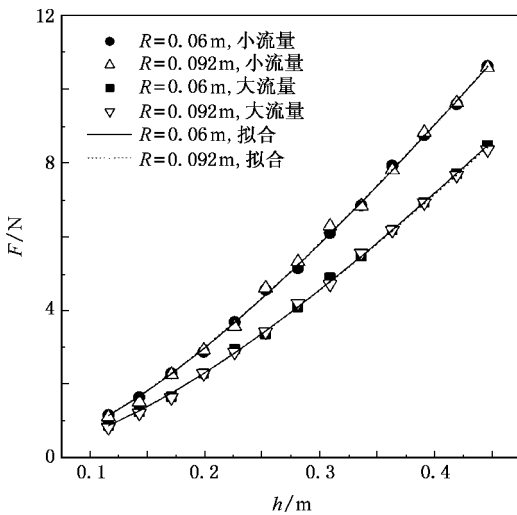


图 2 两种筒仓、两种流量制备的颗粒堆中,圆棒受到的最大静摩擦力 F 与颗粒堆高度 h 的关系

在半径 $R_2 = 0.060$ m 的筒仓中分别用大小两种流量制备颗粒堆,实验得到三种形状的棒(以下简称三种棒)受到的最大静摩擦力 F 与颗粒堆高度 h 的关系见图 3。

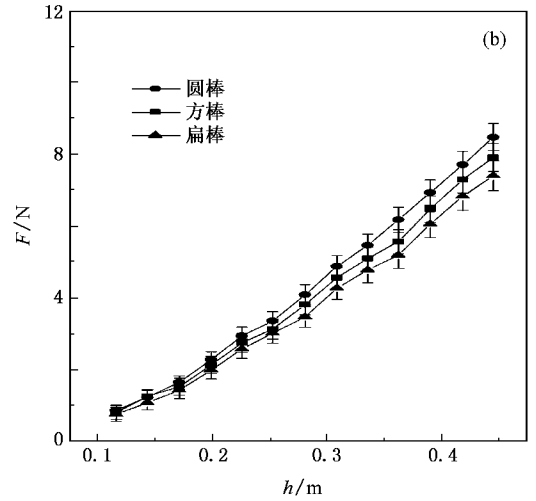
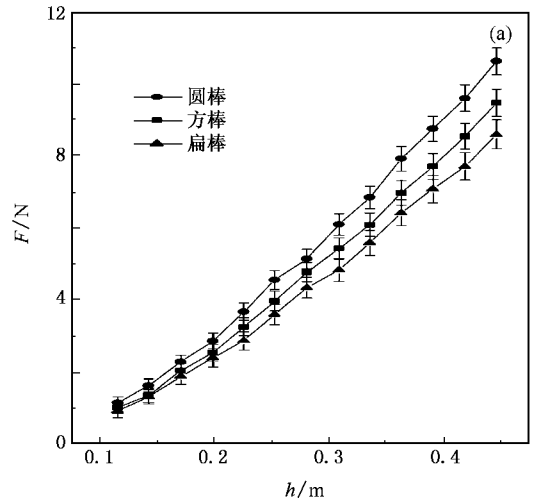


图 3 在半径 $R = 0.060$ m 的筒仓,大流量和小流量制备的颗粒堆中,三种棒受到的最大摩擦力 F 与颗粒堆高度 h 的关系 (a)大流量 (b)小流量

3. 实验结果及分析

从图 1 可以看出:当筒仓半径 $R < 0.040$ m 时,探测棒受到的最大静摩擦力随 R 的增加而减少;当 $R > 0.045$ m 时,探测棒受到的最大静摩擦力几乎不随 R 变化。

将图 2 中的实验数据进行计算机拟合,拟合公式为

$$F = A[h + B(e^{-h/B} - 1)], \quad (1)$$

所得拟合曲线见图 2。拟合参数 A 和 B 取值如下:
 $A_{1R_4} = 37.870, B_{1R_4} = 0.182; A_{1R_6} = 37.626, B_{1R_6} = 0.179;$
 $A_{2R_4} = 32.592, B_{2R_4} = 0.212; A_{2R_6} = 31.874,$

$B_{2R_6} = 0.205$. 这里下标 2 和 1 分别表示大小两种流量, R_4 和 R_6 分别表示半径为 0.060 和 0.092 m 的两种筒仓.

将图 3 中的实验数据用(1)式拟合, 所得拟合曲线见图 4. 拟合参数 A 和 B 取值如下: $A_{1c} = 37.983$, $B_{1c} = 0.183$; $A_{1s} = 33.765$, $B_{1s} = 0.183$; $A_{1f} = 30.376$, $B_{1f} = 0.179$; $A_{2c} = 32.704$, $B_{2c} = 0.213$; $A_{2s} = 30.625$, $B_{2s} = 0.214$; $A_{2f} = 29.029$, $B_{2f} = 0.220$. 这里下标 2 和 1 分别表示大小两种流量, 下标 c, s 和 f 分别表示圆棒、方棒和扁棒.

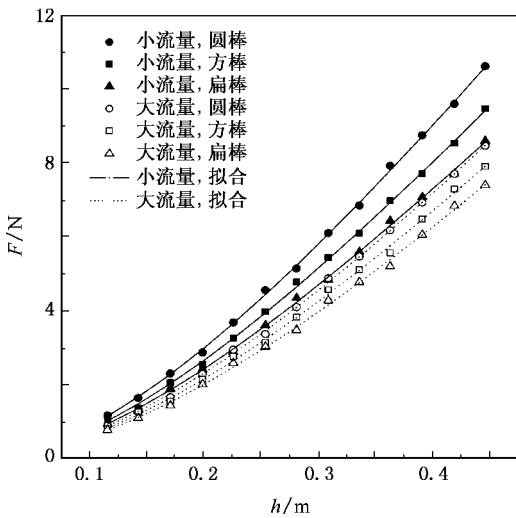


图 4 在半径 $R = 0.060$ m 的筒仓, 两种流量备制的颗粒堆中, 三种棒受到的最大静摩擦力 F 随颗粒堆高度 h 变化的关系

图 2 和图 4 的拟合结果表明: 在 $R > 0.045$ m 的两种筒仓中, 拟合参数 B 与筒仓的半径和棒的形状几乎无关, 与颗粒堆的制备流量有关, 小流量备制的颗粒堆 B 值较小, 大小两种流量备制的颗粒堆中 B 的平均值分别为 0.213 和 0.181. 图 4 拟合结果表明, 拟合参数 A 与棒的形状及制备颗粒堆的流量有关, 在筒仓半径和颗粒堆的制备流量相同的情况下, 圆棒的拟合参数 A_c 值最大, 扁棒的拟合参数 A_f 值最小. 在同一筒仓中, 方棒、扁棒和圆棒的拟合参数 A_s , A_f 和 A_c 的差值在小流量填充的颗粒堆中比在大流量填充的颗粒堆中大.

将图 4 的拟合结果 A , B 两参数代入(1)式可得: 在筒仓半径 $R = 0.060$ m 用小流量备制的颗粒堆中, 方棒的最大静摩擦力比圆棒的小 11.1%, 扁棒的最大静摩擦力比圆棒的小 20.0%; 在大流量填充的颗粒堆中, 方棒的最大静摩擦力比圆棒的小

6.4%, 扁棒的最大静摩擦力比圆棒的小 11.2%.

文献 [9] 在 Jansse 模型基础上推出的圆棒在颗粒中受到的静摩擦力为:

$$F = L\mu\alpha\rho g\lambda[h + \lambda(e^{-h/\lambda} - 1)], \quad (2)$$

其中 $\lambda = R(2\mu_w k)$; L , ρ 和 g 分别为棒横截面周长、颗粒密度和重力加速度; μ 和 μ_w 分别为颗粒与棒及颗粒与壁间的摩擦系数; α 和 k 分别是由纵向应力转换为对器壁和对棒侧壁的横向应力系数^[19] (以下设 α 和 k 相等并简称转向系数). (2) 式表明: 探测棒受到的静摩擦力 F 是筒仓半径 R 的增函数, 且函数收敛. 当 R 较小时, 这与图 1 所示的最大静摩擦力 F 与筒仓半径 R 的实验关系相矛盾, 我们认为这是由于提拉棒时筒仓带来的边界效应. 当 R 较大时, 则符合较好. 当筒仓半径较小时筒仓边界对仓内颗粒物质结构起到稳定作用, 使颗粒中的力链较为坚固, 颗粒物质抗剪切性较强, 提拉棒时力链不易断裂, 导致最大静摩擦力较大. 图 5 是在筒仓半径 $R = 0.015$ m, 小流量备制的颗粒堆中提拉圆棒时拍下的照片. 从图 5 可见, 棒与颗粒间的静摩擦力支撑了筒仓、筒仓底板上的铝块及颗粒的总重量, 这些力都是通过力链传递到棒的侧壁. 由此表明, 当筒仓半径 R 较小时颗粒中的力链较为坚固, 不易断裂. 随着筒仓半径的增大, 筒仓的边界效应减小, 当筒仓半径增大到一定程度, 筒仓对棒周围颗粒结构不再有影响, 颗粒堆的抗剪切性较弱, 提拉棒时力链容易断裂, 离棒较远的应力不能传递到棒的侧壁, 从而导致最大静摩擦力不再随筒仓半径的增加而减小.

(1) 式表明, 探测棒受到的最大静摩擦力是参数 B 的减函数, 将 (2) 式与 (1) 式比较可得

$$B = R(2\mu_w k).$$

由此可知, 参数 B 与颗粒的转向系数 k 成反比. 转向系数 k 与颗粒的形状及颗粒物质的结构有关, 对于球形颗粒处于最密集的三角堆积状态下 $k \approx 0.58$, 处于最稀疏的四方堆积状态下 $k \approx 0^{[1]}$. 小流量备制的颗粒堆中的拟合参数 B_1 比大流量备制的颗粒堆中的拟合参数 B_2 小, 这表明小流量备制的颗粒物质转向系数 k_1 比大流量备制的颗粒物质转向系数 k_2 大. 小流量备制的颗粒堆排列较紧密, 颗粒间的力链较强, 因此在提拉棒时, 小流量堆积下的颗粒堆可以反抗较大的剪切力, 从而棒所受到的最大静摩擦力较大.

三种棒在相同流量填充的颗粒堆中 B 值近似相同, 因此它们的转向系数 k 也近似相同. 所以, 在

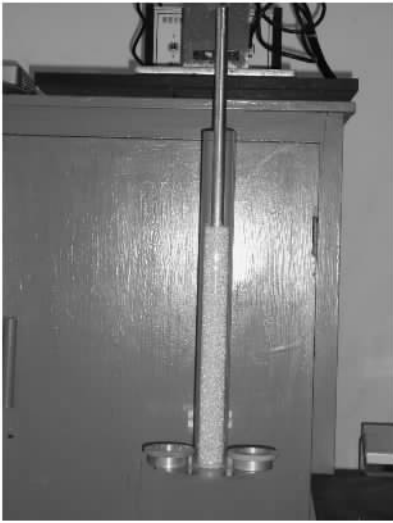


图5 在 $R = 0.015 \text{ m}$ 的筒仓中圆棒受到的静摩擦力支撑了大于颗粒总重量的重力

保证制备颗粒堆方式相同及棒的横截面线度比筒仓直径小得多的情况下,棒的形状对棒周围颗粒排列紧密程度几乎没有影响.但是,棒的形状对棒侧壁与颗粒的接触有明显的影响,圆棒的光滑界面与方棒、扁棒的棱角界面与颗粒的接触完全不同,棱角界面处颗粒与棒的接触近似为点点接触,而光滑界面处颗粒与棒的接触近似为点面接触,这使得棱角附近的颗粒物质抗剪切性能较差^[10].提拉棒时,有棱角的棒容易将颗粒堆中棱角附近的力链“剪”断,因此有棱角的棒受到的最大静摩擦力较小.再由(1)式可

知,方棒和扁棒的拟合参数 A_s 和 A_f 就比圆棒的拟合参数 A_c 小.与方棒相比,扁棒短边及棱角附近(即在更大范围内)的颗粒物质抗剪切性能都较差,棒更容易提拉,所以它受到的最大静摩擦力更小,拟合参数 A_f 也就更小.

大流量填充的颗粒堆结构疏松,力链相对较弱.这种情况下无论棒的横截面形状如何,颗粒物质的抗剪切性能都较差,因此所受摩擦力相差不大.由(1)式可知,方棒、扁棒和圆棒的拟合参数 A_s 、 A_f 和 A_c 的差值在大流量制备的颗粒堆中就比在小流量制备的颗粒堆中要小.

4. 结 论

我们用探测棒对颗粒堆的最大静摩擦力进行了实验及计算机拟合研究,通过改变颗粒堆的筒仓半径、制备流量和探测棒横截面的形状研究颗粒堆的边界、制备方式及物体的形状对颗粒堆中最大静摩擦力的影响.结果表明,筒仓的半径影响颗粒物质结构的稳定性,小半径的筒仓中颗粒物质结构较稳定,力链较坚固,抗剪切性较强,因此最大静摩擦力较大,大半径的筒仓的边界效应可以忽略.制备颗粒堆的流量影响颗粒物质的紧密程度,小流量制备的颗粒堆结构较紧密,力链较强,导致最大静摩擦力较大.探测棒的形状影响了颗粒物质的抗剪切性,界面无棱角的探测棒周围颗粒物质抗剪切性能较强,力链较坚固,从而最大静摩擦力较大.

[1] Duran J 2000 *Sand, Powder, and Grains* (New York: Springer) p1, 70
 [2] Bao D S, Zhang X S, Xu G L et al 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 401 (in Chinese) [鲍德松、张训生、徐光磊等 2003 物理学报 **52** 401]
 [3] Cai S H, Hu L, Dai L J et al 2000 *Chin. Phys.* **9** 450
 [4] Hou M Y, Peng Z, Liu R et al 2005 *Sci. Techn. Adv. Mater.* **6** 855
 [5] Janssen H A 1895 *Z. Ver. Dt. Ing.* **39** 1045
 [6] Horvath V K, Janosi I M, Vella P J et al 1996 *Phys. Rev. E* **54** 2005

[7] Rabinowicz E 1965 *Friction and Wear of Materials* (New York: Wiley)
 [8] Oron G, Herrmann H J 1998 *Phys. Rev. E* **58** 2079
 [9] Hu L, Yang P, Xu T et al 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 879 (in Chinese) [胡林、杨平、徐亭等 2003 物理学报 **52** 879]
 [10] Wu A X, Sun Y Z, Liu X P et al 2002 *Granular Dynamic Theory and Its Application* (Beijing: Metallurgical Industry Press) p27 (in Chinese) [吴爱祥、孙业志、刘湘平等 2002 散体动力学理论与应用(北京:冶金工业出版社)第27页]

Studies of maximum static friction force in granular pile with probing rod^{*}

Kong Wei-Shu Hu Lin[†] Du Xue-Neng Zhang Xing-Gang Wang Wei-Ming Wu Yu

(Key Laboratory for Photoelectric Technology and Application of Guizhou Province , School of Science , Guizhou University , Guiyang 550025 , China)

(Received 7 April 2006 , revised manuscript received 21 December 2006)

Abstract

Experiments are designed to explore the maximum static friction F on a dragged probing rod in a granular pile contained in a cylindrical vessel. The results show that F decreases with the radius R of the cylindrical vessel increasing when R is smaller than 0.040 m , and F scarcely changes with R for $R > 0.045$ m. Curve fitting shows that F is as a function of h (the height of the granular pile) , namely $F = A[h + B(e^{-h/B} - 1)]$, here the parameter A relates to the shape of probing rod and the flow rate of injecting granules into the cylindrical vessel , and parameter B depends on the flow rate of injecting granules into the cylindrical vessel.

Keywords : granular matter , friction force , data fitting

PACC : 4630P , 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10374021) , the Provincial Governor Foundation of Guizhou Province , China (Grant No. 20061128) and the Excellent Talents Foundation of Guizhou Province , China (Grant No. 20061227).

[†] Corresponding author. E-mail : hulin53@sina.com