第 57 卷 第 3 期 2008 年 3 月
1000-3290/2008/57(03)/1746-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.3,March,2008
©2008 Chin. Phys. Soc.

长波条件下二维声子晶体中的弹性波传播及各向异性*

蔡 力 韩小云 温熙森

(国防科技大学机电工程研究所,长沙 410073)

(2007 年 4 月 26 日收到;2007 年 7 月 8 日收到修改稿)

利用多散射方法研究了长波条件下二维声子晶体中弹性波的传播特性.由长波条件下散射体幂散射特性和结构周期特性分析得到了等效波速的解析表达式.通过对幂散射波各阶分波之间由于结构周期特性而产生的耦合作用进行分析,发现幂散射波的正负二阶分量之间的耦合作用具有明显的方向性,长波条件下弹性波的传播特性是否具有各向异性取决于幂散射波的二阶分量在多散射过程中是否有明显的作用.

关键词:声子晶体,多散射,各向异性

PACC:4320,4335

1. 引 言

近年来,关于弹性波在周期性复合介质中传播的研究比较活跃[1—10].弹性波受到材料弹性常数周期变化的调制,会产生弹性波禁带,即在一定频率范围内弹性波的传播被抑制或禁止,此类复合材料称为声子晶体[1].作为新型声学功能材料,声子晶体带隙特性、缺陷态特性及声学器件方面的研究正在成为一个新的热点[3—10].声子晶体理论中禁带的产生机理及弹性波在材料中传播的相速度和群速度是两个最基本的问题.

低频下当弹性波波长远大于复合介质结构单元尺寸时,其传播行为可以视为在等效均匀介质中的传播.这时利用均匀化理论或简化的微观模型等可以得到复合介质的等效参数[11,12].在声子晶体研究中,由于对等效波速进行深入研究可以有效地揭示声子晶体中的波传播行为,Kafesaki 及 Cervera 等研究了水中气泡系统和空气中钢柱系统长波条件下的等效波速[13—16],而近年来 Ni 及 Hou 等将声子晶体等效波速的研究扩展到了固/固体系和高频段[17,18].由结果可以看到,不同极化方式的弹性波其传播特性有很大差异.声波及固体中的 SH 波等效波速表现为各向同性而 Ni 及 Hou 等的结果表明 P 波和 SV 波表现出各向异性的特征,且对 P 波和 SV 波,各向异性变化规律也有很大的不同.对等效波速的影响因素和造成这种差异性的原因进行微观机理的分析,可以深入了解声子晶体中弹性波的传播机理和引起各向异性的直接原因.

本文采用多散射方法[19,20]研究了圆柱散射体以正方结构排列构成的二维声子晶体在长波条件下的弹性波传播特性和有效波速的变化规律,通过对散射体 Mie 散射系数和系统周期特性的分析得到了等效波速的解析公式.可以看出,等效波速为各向同性或各向异性取决于长波条件下幂散射波各阶分波之间由于结构周期特性而产生的耦合作用,当 Mie 散射二阶分量的耦合作用不可忽略时表现出各向异性.

2. 基本理论

假定无限大固体中嵌入按正方结构周期性排列的无限长圆柱形散射体.令沿圆柱体轴线方向为 z 轴,入射到散射体上的弹性波将在圆柱体内激发弹性波,在圆柱体外则存在入射波和散射波.圆柱散射体内外波场的位移 $\boldsymbol{u}$ 满足弹性波方程:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u} + \rho\omega^2\boldsymbol{u} = 0, \quad (1)$$

* 国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号:51307)资助的课题.

式中 ρ 为密度，λ 和 μ 为拉梅常数．对任一个弹性柱 i 外的弹性波场，采用柱坐标系，可以表示为

$$\boldsymbol{u}(r_i) = \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{in}}(r_i) + \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{sc}}(r_i) = \sum_{n\sigma}[a_{n\sigma}\boldsymbol{J}_{n\sigma}(r_i) + b_{n\sigma}\boldsymbol{H}_{n\sigma}(r_i)], \quad (2)$$

式中，$\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{in}}(r_i) = \sum_{n\sigma} a_{n\sigma}\boldsymbol{J}_{n\sigma}(r_i)$ 为入射场，$\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{sc}}(r_i) = \sum_{n\sigma} b_{n\sigma}\boldsymbol{H}_{n\sigma}(r_i)$ 为柱体散射产生的散射场．由多散射理论可以得到该系统的本征方程为[19]

$$\det\left|\delta_{ss'}\delta_{nn'}\delta_{\sigma\sigma'} - \sum_{n''\sigma''} t_{n''\sigma''n'\sigma'}^{s'} G_{n''\sigma''n\sigma}^{ss'}(k)\right| = 0, \quad (3)$$

s 和 s′ 标示一个周期单元中的各个散射体，$G_{n''\sigma''n\sigma}^{ss'}(k)$ 定义为

$$G_{n''\sigma''n\sigma}^{ss'}(k) = \sum_R G_{n''\sigma''n\sigma}(o_{s'} - o_s - R)\exp(\mathrm{i}k\cdot R), \quad (4)$$

o_s 和 $o_{s'}$ 为各个散射体的位置矢量，如果一个周期单元仅有一个散射体，$o_s = o_{s'} = 0$．晶格求和 $\sum_R$ 中 R 取周期结构的所有格点位置矢量．

(3)式中 $G_{n''\sigma''n\sigma}^{ss'}$ 是只与基体材料特性和结构周期特征有关的量，而 $t_{n''\sigma''n'\sigma'}^{s'}$ 为单个柱散射体的 Mie 散射特性．对这二者对波传播特性的影响进行深入分析可以深入揭示声子晶体中波传播特性的物理内涵．

在长波条件下复合介质的色散很小，系统的相速度与群速度相等且可由下式得到：

$$c_{\mathrm{eff}} = \lim_{k\to 0}(\omega/k), \quad (5)$$

将(5)式代入(3)式即可得到长波条件下声子晶体的等效速度．一般而言，(3)式中包含有一系列的 Bessel 函数，ω 与 k 的关系是非常复杂的，不能直接对 c_{eff} 进行分析．然而在长波条件下，$G_{n''\sigma''n\sigma}^{ss'}$ 和 $t_{n''\sigma''n'\sigma'}^{s'}$ 都可以用更为简单的形式表达，这时可以得到 c_{e} 的解析表达式．

3. 声子晶体的有效速度

考虑在 PVC 树脂中按二维正方结构排列圆柱形空腔形成的声子晶体，如图 1 所示．晶格常数 L 为 15 mm．材料参数如表 1 所示．对于正入射情况，二维固/固体系的带结构可以分解为两类非耦合模式：质点运动方向垂直于波传播平面的 z 模式(SH 波)和平行于传播平面的 x-y 模式(P 波 + SV 波)．一般而言，P 波和 SV 波在复合介质中是耦合传播的．但研究发现，在长波条件下，两者可以分别进行考虑[21]．

表 1　数值计算中用到材料的物理参数

材料	密度/kg·m^{-3}	纵波速度(c_1)/m·s^{-1}	横波速度(c_t)/m·s^{-1}
PVC	1430	2380	970
铅	11400	2160	860

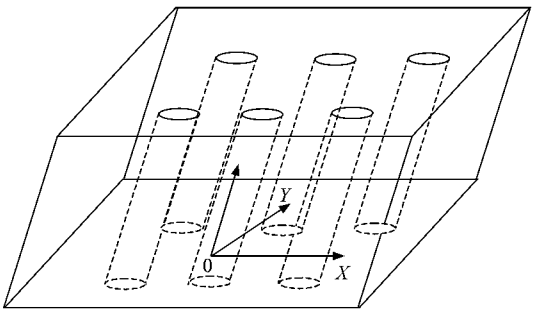

图 1　二维声子晶体示意图

首先考虑 SH 波的传播．这时对(3)式，$o_s = o_{s'} = 0$，$\sigma = \sigma' = 3$．由于多散射方法具有很好的收敛性[20]，在 $\omega\to 0$ 时，n 的截断取 $n = 1$ 即可得到与 $n = 4$ 相差仅 0.4% 的结果．这时(3)式化简为

$$\det\begin{vmatrix} t_{0,3,0,3}\cdot G_{0,3,0,3} - 1 & -2\cdot t_{0,3,0,3}\cdot G_{0,3,1,3} \\ -\cdot t_{1,3,1,3}\cdot G_{1,3,0,3} & t_{1,3,1,3}\cdot G_{1,3,1,3} - t_{1,3,1,3}\cdot G_{1,3,-1,3} - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

由多散射理论可知，对色散曲线上的任意一点，任一散射柱体的入射波为其周围柱体散射波之和，而每一个柱体的散射波与入射波之间遵循幂散射矩阵关系，每一个散射体周围的波场在多散射条件下都同时满足这两个关系．因而由(6)式得到的色散曲线上任一点表征的周期系统本征模式都是一个自洽的多散射过程．而对(6)式中 $G_{n,3,n',3}$，有[19]

$$H_{1,3}^{j}(r_j) = G_{1,3,-1,3}^{ij} J_{-1,3}^{i}(r_i) + G_{1,3,0,3}^{ij} J_{0,3}^{i}(r_i) + G_{1,3,1,3} J_{1,3}^{i}(r_i) + \cdots \quad (7)$$

在柱与柱之间的多次散射过程中入射波的任一阶柱面波分量与散射波的各阶柱面波分量发生耦合，耦合的大小由晶格求和 $G_{n,3,n',3}$ 表征．可见，周期结构中弹性波的传播是多散射过程，也是弹性波各阶分量彼此交换能量的耦合波传播过程．而(6)式表明 $\omega\to 0$ 时色散曲线描述的多散射过程主要包括弹性波零阶、一阶分量．

对 $G_{n'',3,n,3}(k)$ 有

$$G_{n'',3,n,3}(k) = \sum_R G_{n'',3,n,3}(R)\exp(\mathrm{i}k\cdot R) = \sum_R H_{n-n''}(\beta R_{ij})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n''-n)\phi_{ij}} \times \exp(\mathrm{i}k\cdot R). \quad (8)$$

该求和可以简化为[22]

$$G_{n'',3,n,3}(k) = P^{J}_{n-n''}(k) + \mathrm{i}\cdot P^{Y}_{n-n''}(k), \tag{9}$$

$$P^{J}_{n-n''}(k) = -\delta_{n-n'',0}, \tag{10}$$

$$P^{Y}_{n-n''}(k) = \left\{-\left[Y_1(\beta) + \frac{2}{\pi\beta}\right]\delta_{n-n'',0} - 4\cdot \mathrm{i}^{n-n''}\beta\sum_h \frac{J_{(n-n'')+1}(\boldsymbol{Q})_h}{\boldsymbol{Q}_h(\boldsymbol{Q}_h^2-\beta^2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-n'')\theta_h}\right\} / J_{(n-n'')+1}(\beta), \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{Q}_h = \boldsymbol{K}_h + k = (Q_h, \theta_h)$，$\boldsymbol{K}_h$ 为晶格的倒格矢，$h = 0,1,2,\cdots$. 以晶格常数 L 为 1 进行归一化，则 $\boldsymbol{K}_h = 2\pi h$.

这里考虑长波的极限，即 $\omega, k\to 0$ 的情况. 这时 $G_{n'',3,n,3}(k)$ 可简化为

$$G_{n'',3,n,3} \sim \frac{-4\mathrm{i}^{|n''-n|}k^{|n''-n|}}{\beta^{|n''-n|}(k^2-\beta^2)} - 8\sum_{h\neq 0}\frac{J_{|n''-n|+1}(2\pi h)}{(2\pi h)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|n''-n|\theta_h}. \tag{12}$$

当 $|n''-n| \leqslant 2$ 时，上式第二项远小于第一项. 所以对于(12)式中各项晶格求和，只需取第一项即可.

由边界连续性条件，(6)式中幂散射系数为

$$t_{n,3,n,3} = -\frac{J'_n(\beta a)}{H'_n(\beta a)}, \tag{13}$$

长波条件下可化简为

$$t_{0,3,0,3} = \frac{\mathrm{i}\pi^3 a^2}{c_t^2}w^2, \tag{14}$$

$$t_{1,3,1,3} = -\frac{\mathrm{i}\pi^3 a^2}{c_t^2}w^2. \tag{15}$$

将以上两式和(12)式代入(6)式，结合(5)式可得

$$c_{\mathrm{eff(SH)}} = \frac{c_t}{\sqrt{1+f}}, \tag{16}$$

f 为填充率.

对于 X-Y 模式，在 $\omega, k\to 0$ 时可以分解为 P 波和 SV 波传播模式. 这时对(3)式，$o_s = o_{s'} = 0$，$\sigma, \sigma' = 1,2$. 色散曲线计算可以发现，不论多低的频率，要得到准确的结果，n 的截断取 $n = 2$ 是必须的. 这说明这时色散曲线描述的多散射过程是主要包括弹性波零阶、一阶和二阶分量的耦合波传播过程. 在 $n = 2$ 时对(3)式进行进一步分解可以发现，P 波模式可由一 5×5 的矩阵描述，这里同时存在纵波、横波耦合和零阶、一阶、二阶分量之间的耦合.

$$\det\begin{vmatrix} t_{-2,1,-2,1}(G_{-2,1,-2,1}+G_{-2,1,2,1})-1 & t_{-2,1,-2,1}(G_{-2,1,-1,1}-G_{-2,1,1,1}) & 2t_{-2,1,-2,1}G_{-2,1,0,1} & t_{-2,1,-2,2}(G_{-2,2,-2,2}-G_{-2,2,2,2}) & t_{-2,1,-2,2}(G_{-2,2,-1,2}+G_{-2,2,1,2}) \\ t_{-1,1,-1,1}(G_{-1,1,2,1}-G_{-1,1,0,1}) & t_{-1,1,-1,1}(G_{-1,1,-1,1}-G_{-1,1,1,1})-1 & 2t_{-1,1,-1,1}G_{-1,1,0,1} & -t_{-1,1,-1,2}(G_{-1,1,2,1}+G_{-1,1,0,1}) & t_{-1,1,-1,2}(G_{-1,2,-1,2}+G_{-1,2,1,2}) \\ t_{0,1,0,1}G_{0,1,2,1} & -t_{0,1,0,1}G_{0,1,1,1} & t_{0,1,0,1}G_{0,1,0,1}-1 & 0 & 0 \\ t_{-2,2,-2,1}(G_{-2,2,-2,2}+G_{-2,2,2,2}) & t_{-2,2,-2,1}(G_{-2,2,-1,2}-G_{-2,2,1,2}) & 2t_{-2,2,-2,1}G_{-2,2,0,2} & t_{-2,2,-2,2}(G_{-2,2,-2,2}-G_{-2,2,2,2})-1 & t_{-2,2,-2,2}(G_{-2,2,-1,2}+G_{-2,2,1,2}) \\ t_{-1,2,-1,1}(G_{-1,1,2,1}-G_{-1,1,0,1}) & t_{-1,2,-1,1}(G_{-1,2,-1,2}-G_{-1,2,1,2}) & 2t_{-1,2,-1,1}G_{-1,2,0,2} & -t_{-1,2,-1,2}(G_{-1,2,2,2}+G_{-1,2,0,2}) & t_{-1,2,-1,2}(G_{-1,2,-1,2}+G_{-1,2,1,2})-1 \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

而 SV 波模式可由一 4×4 的矩阵描述，这里同时存在纵波、横波耦合和一阶、二阶分量之间的耦合.

$$\det\begin{vmatrix} t_{-2,1,-2,1}(G_{-2,1,-2,1}-G_{-2,1,2,1})-1 & t_{-2,1,-2,1}(G_{-2,1,-1,1}+G_{-2,1,1,1}) & t_{-2,1,-2,2}(G_{-2,2,-2,2}+G_{-2,2,2,2}) & t_{-2,1,-2,2}(G_{-2,2,-1,2}-G_{-2,2,1,2}) \\ t_{-1,1,-1,1}(G_{-1,1,2,1}+G_{-1,1,0,1}) & t_{-1,1,-1,1}(G_{-1,1,-1,1}+G_{-1,1,1,1})-1 & -t_{-1,1,-1,2}(G_{-1,1,2,1}-G_{-1,1,0,1}) & t_{-1,1,-1,2}(G_{-1,2,-1,2}-G_{-1,2,1,2}) \\ t_{-2,2,-2,1}(G_{-2,2,-2,2}-G_{-2,2,2,2}) & t_{-2,2,-2,1}(G_{-2,2,-1,2}+G_{-2,2,1,2}) & t_{-2,2,-2,2}(G_{-2,2,-2,2}+G_{-2,2,2,2})-1 & t_{-2,2,-2,2}(G_{-2,2,-1,2}-G_{-2,2,1,2}) \\ t_{-1,2,-1,1}(G_{-1,1,2,1}+G_{-1,1,0,1}) & t_{-1,2,-1,1}(G_{-1,2,-1,2}+G_{-1,2,1,2}) & -t_{-1,2,-1,2}(G_{-1,2,2,2}-G_{-1,2,0,2}) & t_{-1,2,-1,2}(G_{-1,2,-1,2}-G_{-1,2,1,2})-1 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

以上两式中 $t_{n\sigma''n'\sigma'}$ 同样可由幂散射表达式[18]在长波条件下进行化简. 化简可以发现，纵波、横波的零阶、一阶和二阶分量的幂散射系数都可表示为如下形式：

$$t_{n\sigma''n'\sigma'} = A_{n\sigma''n\sigma'}\omega^2, \tag{19}$$

其中 $A_{n\sigma''n\sigma'}$ 是与填充率和材料参数相关的常数.

而对 $G_{n''\sigma''n'\sigma'}(k)$，由(17)式分析可知，$|n-n''| \leqslant 2$ 时，$h\neq 0$ 的项都可以忽略. 而当 $|n-n''| = 3,4$ 时，$h = 1$ 是不可忽略的. 这时晶格求和为

$$G_{n'',3,n,3} \sim \frac{-4\mathrm{i}^{|n''-n|}k^{|n''-n|}}{\beta^{|n''-n|}(k^2-\beta^2)} - 8\frac{J_{|n''-n|+1}(2\pi)}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|n''-n|\theta_h}. \tag{20}$$

将结果代入(17)，(18)式，结合(5)式化简可得

$$c_{\mathrm{eff(l)}} = \frac{c_{\mathrm{t}}}{\sqrt{1 + f\left(\dfrac{c_{\mathrm{l}}^2 - c_{\mathrm{t}}^2}{c_{\mathrm{t}}^2 \Delta(\theta_h)}\right)}}, \tag{21}$$

$$c_{\mathrm{eff(SV)}} = c_{\mathrm{t}} \sqrt{\frac{2(\Omega(\theta_h) - f)}{1 + \dfrac{c_{\mathrm{t}}^2}{c_{\mathrm{l}}^2} + \sqrt{\left(1 + \dfrac{c_{\mathrm{t}}^2}{c_{\mathrm{l}}^2}\right)^2 - 4\dfrac{c_{\mathrm{t}}^2}{c_{\mathrm{l}}^2}\Omega(\theta_h)(\Omega(\theta_h) - f)}}}, \tag{22}$$

其中 $\Delta(\theta_h)$ 为

$$\Delta(\theta_h) = 1 + \frac{160 J_5(2\pi) a^4 (c_{\mathrm{l}}^2 - 2c_{\mathrm{t}}^2)}{\pi^2 (c_{\mathrm{l}}^2 - c_{\mathrm{t}}^2)} \cos(4\theta_h), \tag{23}$$

$$\Omega(\theta_h) = A + B\cos(4\theta_h), \tag{24}$$

$$\begin{aligned} A = {} & 1 + \frac{1280 J_5(2\pi)(c_{\mathrm{l}}^2 - 2c_{\mathrm{t}}^2) a^8}{\pi^2 (c_{\mathrm{l}}^2 - c_{\mathrm{t}}^2)} \\ & - \frac{800 J_5(2\pi)(c_{\mathrm{l}}^2 - 2c_{\mathrm{t}}^2) a^6}{\pi^6 (c_{\mathrm{l}}^2 - c_{\mathrm{t}}^2)} \\ & + \frac{150 J_5(2\pi)(c_{\mathrm{l}}^2 - 2c_{\mathrm{t}}^2) a^4}{\pi^4 (c_{\mathrm{l}}^2 - c_{\mathrm{t}}^2)}, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} B = {} & \frac{\pi^2 J_5(2\pi)(c_{\mathrm{l}}^2 - 2c_{\mathrm{t}}^2) a^2}{(c_{\mathrm{l}}^2 - c_{\mathrm{t}}^2)} \\ & - \frac{280 J_5(2\pi)(c_{\mathrm{l}}^2 - 2c_{\mathrm{t}}^2) a^4}{\pi^2 (c_{\mathrm{l}}^2 - c_{\mathrm{t}}^2)}. \end{aligned} \tag{26}$$

为验证分析的有效性.由(16),(21)和(22)式,取填充率为 0.503 时做出声子晶体的慢度曲面($1/c_{\mathrm{eff}}$ 随方向的变化),如图 2(a)所示,其结果与文献[17]是相符合的.图 2(b),(c)分别为填充率为 0.1 和 0.7 时的结果.随填充率增大,SH 波有效速度始终为各向同性而 P 波、SV 波有效速度的各向异性表现得越来越强烈.

由(16),(21)和(22)式可以看到,不同的弹性波模式填充率对其有效速度的影响是不同的,SH 波和 P 波传播时有效速度随填充率的变化规律有相似的地方,而 SV 波则与二者有很大区别.图 3 为 0°和 45°方向有效速度随填充率的变化.对 P 波,不同方向的变化规律是相近的,方向的不同只需对填充率的影响进行一定的修正.而 SV 波则变化很大.

4. 各向异性与 Mie 散射

在以上分析中,Mie 散射系数 $t_{n\sigma n''\sigma''}$ 是与方向无关的物理量,而晶格求和 $G_{n''\sigma''n'\sigma'}(k)$ 在 $|n - n''| \leqslant 2$ 时也没有方向性,因而 SH 波传播的有效速度是各向同性的.而当 $|n - n''| = 3, 4$ 时,由(20)式,$G_{n'',\sigma,n,\sigma}(k)$ 随 θ_h 变化,从而在(21)式和(22)式中引

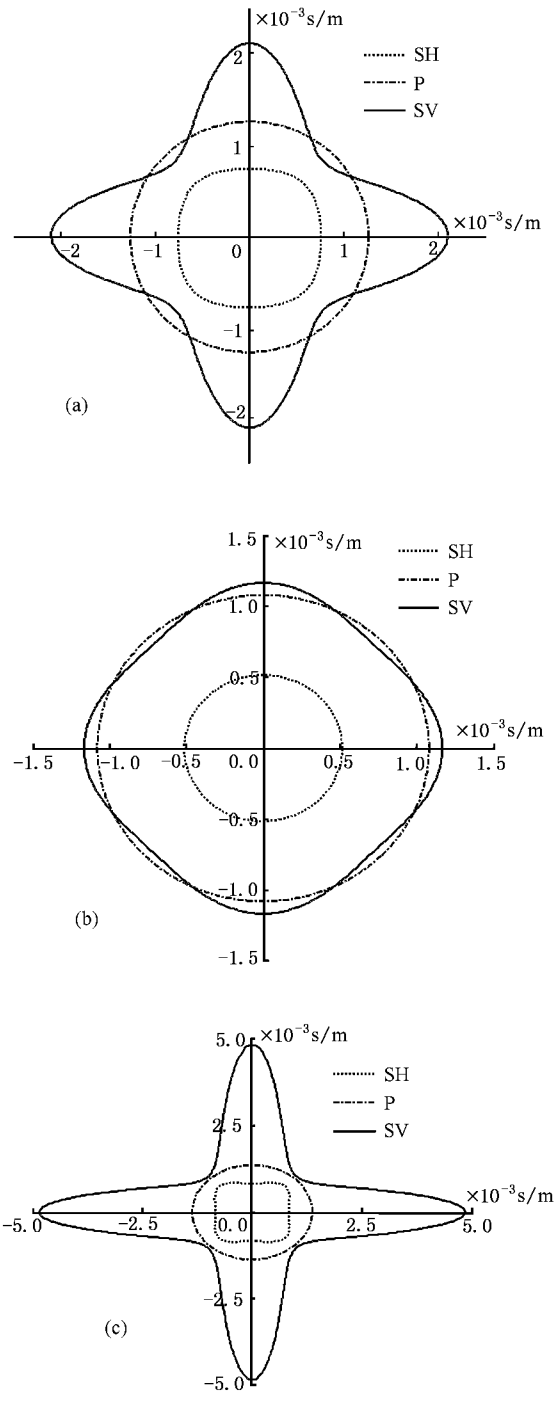

图2　PVC 树脂按正方结构周期排列圆柱形空洞形成的声子晶体在长波条件下的慢度曲面,填充率为(a)0.503,(b)0.1,(c)0.7

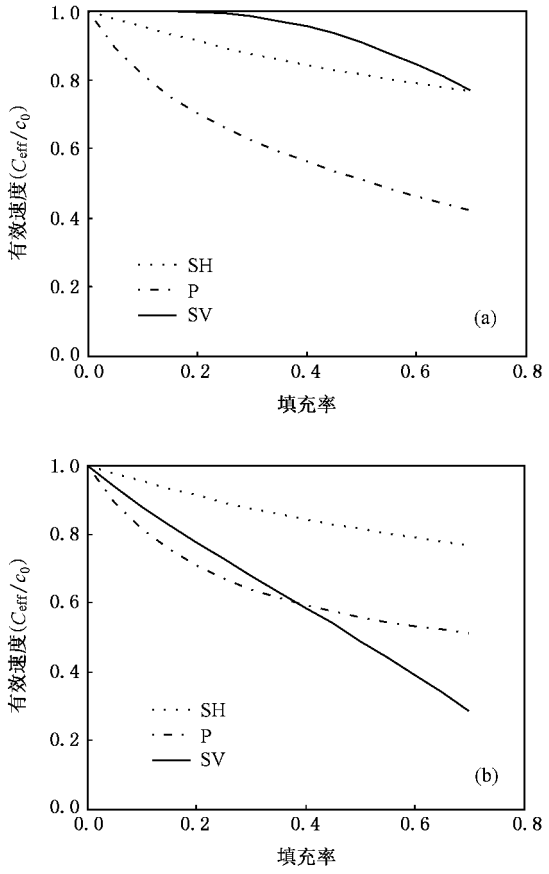

图 3 PVC 树脂按正方结构周期排列圆柱形空洞形成的声子晶体在长波条件下弹性波有效速度随填充率的变化

入了与方向相关的修正项.从结构对称性来说,正方晶格具有四重旋转对称性,当 $k=0$ 时,由(11)式只有 $|n-n''|$ 为 4 的整数倍时 $G_{n''n}(k)\neq 0$,因而在 $k\to 0$ 时 $G_{n'',3,n,3}\big|_{|n-n''|=4} \gg G_{n'',3,n,3}\big|_{|n-n''|=3}$,即 $G_{n'',3,n,3}\big|_{|n-n''|=4}$ 是使得 P 波和 SV 波传播模式和有效波速出现各向异性的主要原因,修正项中含有的 $J_5(2\pi)$ 和 $4\theta_h$ 也说明了这一点.

$G_{n'',3,n,3}\big|_{|n-n''|=4}$ 在(17),(18)式中表征的是正、负二阶柱面波分量之间的耦和作用.因此在长波条件下的 P 波、SV 波传播的多散射过程中,正、负二阶柱面波分量之间耦和作用随传播方向发生变化是使得波传播模式和等效波速出现各向异性的主要原因.那么,只有在柱面波二阶分量在多散射过程中不可忽略时,长波条件下的弹性波传播才会表现出各向异性.由(19)式,对 P 或 SV 入射波,其零阶、一阶和二阶幂散射系数都是关于频率的二次函数,因而二阶幂散射系数不能在低频下被忽略.而对 SH 入射波,其二阶幂散射系数在低频下可以简化为

$$t_{2,3,2,3} = -\frac{\mathrm{i}\pi^5 a^4}{2c_{\mathrm{t}}^4} w^4 . \tag{27}$$

与(14)和(15)式相比可知,在 $\omega, k\to 0$ 时其为零阶、一阶幂散射系数的更高阶无穷小量,可以被忽略.可见,在声子晶体中长波传播行为是否会表现出各向异性是与散射体的幂散射过程中二阶分量是否起作用直接相关的.基于此,我们对另两种情况的幂散射特性进行分析.一为固体圆柱散射体置于液体中的情况,二为弹性基体中插入固体圆柱散射体的情况.前一种情况下基体介质中只存在纵波,幂散射系数零、一、二阶分量可化简为

$$t_0 = \frac{-\mathrm{i}\pi^3 a^2}{c_1^{l2}}\left(1-\frac{\rho^{\mathrm{l}} c_1^{\mathrm{l}}}{\rho^{\mathrm{s}}\left(c_1^{s2}-c_{\mathrm{t}}^{s2}\right)}\right) w^2 , \tag{28}$$

$$t_1 = \frac{\mathrm{i}\pi^3 a^2}{c_1^{l2}}\left(\frac{\rho^{\mathrm{s}}-\rho^{\mathrm{l}}}{\rho^{\mathrm{s}}+\rho^{\mathrm{l}}}\right) w^2 , \tag{29}$$

$$t_2 = \frac{-\mathrm{i}\pi^5 a^4}{2c_1^4} w^4 , \tag{30}$$

式中 $\rho^{\mathrm{l}}, \rho^{\mathrm{s}}$ 为基体和散射体的密度,$c_1^{\mathrm{s}}, c_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}}$ 为散射体纵、横波波速,c_1^{l} 为基体纵波波速.可以看到,$\omega\to 0$ 时二阶分量系数是零、一阶分量的更高阶无穷小量,长波条件下二阶分量可以忽略,因而有效波速表现为各向同性.其结果与文献[23]是相符合的.

而后一种情况下基体介质和散射体中都同时存在纵波和横波,不容易直接得到幂散射系数的简化表达式.我们做出低频下零、一、二阶和三阶纵波-纵波幂散射系数随频率的变化曲线,如图 4 所示,计算对象为在 PVC 树脂中按二维正方结构排列圆柱形铅柱形成的声子晶体,材料参数如表 1 所示,晶格常数 L 为 15 mm,填充率为 0.503.这里以 200 Hz 时各阶幂散射系数为基准计算幂散射系数随频率的相对

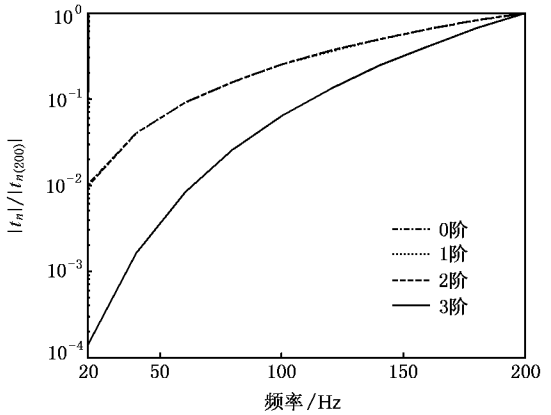

图 4 树脂中铅圆柱散射体 0—4 阶纵波-纵波幂散射系数随频率的相对变化

变化.结果表明零、一、二阶幂散射系数都与频率的平方成正比而三阶系数与其四次方成正比,.这时低频下二阶分量是不可忽略的,因而有效波速表现为各向异性.其结果与文献[18]是相符合的,这说明微观机理分析的结果与其宏观性质是一致的.

5. 结　论

声子晶体等效波速在不同的体系中表现出不同的变化规律.利用多散射方法将其中弹性波传播的物理图像视为柱散射波各阶分量相互耦合的传播过程,可以对这种差异性进行微观机理的分析.在长波条件下可由散射体幂散射特性和结构周期特性分析得到有效波速的解析表达式.通过对幂散射波各阶分波之间由于结构周期特性而产生的耦合作用进行分析发现,幂散射波正负二阶分量之间的耦合作用具有明显的方向性,而零阶、一阶分量则不具有这种方向性.因此长波条件下弹性波的传播特性是否具有各向异性取决于幂散射波的二阶分量在多散射过程中是否有明显的作用.

[1] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022

[2] Wu F G, Liu Y Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1434 (in Chinese) [吴福根、刘有延 2002 物理学报 **51** 1434]

[3] Wu F G 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 785

[4] Kushwaha M S, Halevi P, Martinez G, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B 1994 *Phys. Rev.* B **49** 2313

[5] Wen J H, Yu D L, Wang G, Zhao H G, Liu Y Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2298 (in Chinese) [温激鸿、郁殿龙、王　刚、赵宏刚、刘耀宗 2007 物理学报 **56** 2298]

[6] Liu Z Y, Chan C T, Sheng P, Goertzen A L, Page J H 2000 *Phy. Rev.* B **62** 2446

[7] Wu F G, Liu Z Y, Liu Y Y 2002 *Phys. Rev.* E **66** 046628

[8] Liu Z Y, Zhang X X, Mao Y W *et al* 2000 *Science* **289** 1734

[9] Wang G, Wen J H, Liu Y Z, Yu D L, Wen X S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1247 (in Chinese) [王　刚、温激鸿、刘耀宗、郁殿龙、温熙森 2005 物理学报 **54** 1247]

[10] Wang G, Wen J H, Han X Y, Zhao H G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1943 (in Chinese) [王　刚、温激鸿、韩小云、赵宏刚 2003 物理学报 **52** 1943]

[11] Tao R, Sheng P 1985 *J. Acoust. Soc. Am.* **77** 1651

[12] Bai D, Keller J B 1987 *J. Acoust. Soc. Am.* **82** 1436

[13] Kafesaki M, Penciu R S, Economou E N 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 6050

[14] Krokhin A A, Arriaga J, Gumen L N 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 264302

[15] Cervera F, Sanchis L, Sanchez-Perez J V, Martinez-sala R, Rubio C, Meseguer F, Lopez C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 023902

[16] Sanchis L, Hakansson A, Sanchez-Dehesa L 2003 *Phys. Rev.* B **67** 035422

[17] Ni Q, Cheng J C 2000 *Phys. Rev.* B **72** 014305

[18] Hou Z L, Wu F G, Fu X J, Liu Y Y 2005 *Phys. Rev.* E **71** 037604

[19] Mei J, Liu Z Y, Shi J, Tian D C 2003 *Phys. Rev.* B **67** 245107

[20] Kafesaki M S, Economou E N 1999 *Phys. Rev.* B **60** 11993

[21] Hou Z L, Kuang W M, Liu Y Y 2004 *Phys. Lett.* A **333** 172

[22] Chin S K, Nicorovici N A, McPhedran R C 1994 *Phys. Rev.* E **49** 4590

[23] Mei J, Liu Z Y, Wen W J, Sheng P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 024301

The elastic wave propagation in two-dimensional phononic crystal at low frequencies and the anisotropy of effective velocity *

Cai Li Han Xiao-Yun Wen Xi-Sen

(*Institute of Mechatronical Engineering, National University of Defense Technology, Changsha* 410073, *China*)

(Received 26 April 2007; revised manuscript received 8 July 2007)

Abstract

The propagation of elastic waves in two-dimensional phononic crystal is investigated theoretically in the long-wavelength limit by the MST method. Exact analytical formulas for effective velocities of elastic waves are derived according to the behavior of the Mie scattering solution and the lattice sum in the long-wavelength limit. It has been found that the coupling effect between the two second-order components of the cylindrical scattered wave changes with the propagation orientation. Therefore whether the effective velocities of the propagating modes are anisotropic depends on whether the second-order components of the Mie scattering are indispensable.

Keywords: phononic crystal, multiple scattering, anisotropy

PACC: 4320, 4335

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 51307).