

装载于外势场中的玻色-爱因斯坦凝聚 N -孤子间的相互作用^{*}

宗丰德 张解放[†]

(浙江师范大学非线性物理研究所, 金华 321004)

(2007 年 8 月 7 日收到, 2007 年 9 月 30 日收到修改稿)

首先建立起玻色-爱因斯坦凝聚孤子链的微扰复数 Toda 链理论, 然后深入研究玻色-爱因斯坦凝聚 N -孤子间的绝热相互作用, 分别通过对二次外势场、周期性外势场和二者叠加的复合外势场所引起的三类微扰, 利用微扰的复数 Toda 链理论给出了解析处理, 并和基于分步傅里叶变换的直接数值方法进行比较, 发现微扰的复数 Toda 链方程能够充分揭示上述三类外势场中的 N -孤子链的动力学行为和特征. 同时还给出了从孤子链中提取一个或多个局域态的倾斜势场或周期性势场的强度临界值, 这可为玻色-爱因斯坦凝聚的实验研究和具体应用提供理论参考.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, Gross-Pitaevskii 方程, 物质波孤子, 相互作用

PACC: 0365, 0290

1. 引言

色散和非线性相互作用导致的孤子局域态是非线性系统中最显著的现象之一, 而这些局域态在外势场中显示出有趣动力学的特性. 自孤子理论建立以来, 这些局域态间的相互作用研究一直是学术界感兴趣的课题. 如在利用光孤子作为信息传播载体的光纤通信系统中, 由于孤子链内相邻孤子间的相互作用限制了通信系统的传输容量, 因此研究孤子间的相互作用对优化信息采集和传输率的设计就变得十分重要^[1]; 又如在约瑟夫森(Josephson)长结中相互作用的孤子(磁通量子)链也扮演了重要的角色, 由于外磁场感应所引起的约瑟夫森长结的动力学行为可被用于构造有趣的通量流振子^[2,3], 而这在超导毫米和次毫米波电子学中有具体的应用; 还有在光子晶体^[4]和玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)^[5]中, 孤子的相互作用也起着关键作用.

我们知道, BEC 孤子最近在理论和实验上引起了极大的关注^[6-11], 尤其是发现了能在空间无失真传播的自俘获态, 对脉冲原子孤子激光、原子纳米雕刻和高精度干涉量度术等^[12-18]都产生了极其重要

的影响, 还有作为磁光囚禁和波导在外势场作用下的 BEC 孤子传输在未来的技术中也将发挥作用.

本文致力于在弱外势场中的非线性 Schrödinger 方程的 N -孤子间绝热相互作用的孤子链动力学行为的研究. 作为物理模型, 我们考虑相互吸引原子的准一维 BEC 的物质波孤子, 如⁷Li, ⁸⁷Rb, 或¹³⁷Cs, 而这对非线性光学和光子晶体的研究同样也有价值. 本文将已被成功应用于光孤子链领域, 在绝热近似下有效的微扰复数 Toda 链方程(PCTC)^[19-25]作为研究非线性 Schrödinger 方程的 N -孤子间相互作用的模型, 分别研究了被囚禁于二次势场和周期性势场中的 N -孤子链的动力学性质^[25]. 我们的研究结果为先期文献^[26, 27]中观察到的在不同物理环境下周期性势场的稳定性提供了佐证. 尤其是对于囚禁于弱二次势场中 N -孤子链情形, 我们发现, 如果孤子链的中心与势场的最小值位置重合, 那么孤子链出现了收缩和膨胀的振动现象, 而孤子链的中心位置未发生变化. 如果孤子链的中心与势场的最小值位置有偏移, 那么孤子链的中心围绕着势场的最小值位置作振动, 同时孤子链也出现了相对于其孤子链中心的收缩和膨胀的运动现象. 当二次势场的强度增强时, 从数值仿真中, 我们发现 N -孤子链动力学

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10672147)和浙江省自然科学基金(批准号: Y605312)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: jf_zhang@zjnu.cn

行为变得异常复杂, 发生由于整个孤子链振动引起的收缩(膨胀)而导致链内各个孤子的湮没(分立)现象. 这种行为类似于文献[28]报道的“丢失孤子”现象. 我们还研究了倾斜周期性势场(周期性和倾斜势场的叠加)中的物质波孤子链的动力学行为, 发现只要倾斜势场的强度足够大, 总能从处于周期性势场中的物质波孤子束缚态内提取出一个或多个局域态. 这就证实了存在能从孤子链中提取一个或多个局域态的倾斜势场强度的临界值. 我们还发现这种孤子提取现象的倾斜势场的临界强度随孤子链中的孤子数目的不同而改变, 同时对这种孤子提取现象, PCTC 理论的分析同样显得十分充分.

需要指出的是, 既然势场强度的临界值可以作为 N -孤子链能量的间接测量, 那么人们就能利用处在被加速的光晶格中的 BEC 孤子链测量出 N -孤子物质波的能量, 因此也就能利用被加速的光晶格重现倾斜势场的作用, 并测量出从孤子链中提取一个或多个孤子的临界加速度. 我们希望这能为实验的实现提供理论指导.

2. 理论模型

当绝对温度为充分接近零度时, 在平均场近似下凝聚体的动力学遵循三维的 Gross-Pitaevskii 方程(GPE)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) + \frac{4\pi\hbar^2 a_s N_{\text{tot}}}{m} |\Psi|^2 \right] \Psi, \quad (1)$$

其中 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 是被归一化的凝聚体宏观波函数; N_{tot} 是凝聚体内的原子总数目; m 是原子质量; a_s 是 s -波散射长度(下面我们考虑吸引的 BEC, 即取 $a_s < 0$);

$$V(x, y, z) = \frac{m}{2} [\omega_x^2 x^2 + \omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2)] \quad (2)$$

是轴对称势阱, 并假设 $\omega_x^2/\omega_{\perp}^2 \ll 1$, 即它在横截面(y, z)上提供了紧束缚, 而在轴向是松散的. 当横向束缚足够强时, 使得横向振动量子能比特征平均场相互作用能大得多, 即

$$\hbar\omega_{\perp} \gg \frac{4\pi\hbar^2 |a_s| N_{\text{tot}}}{m} |\Psi|^2, \quad (3)$$

在此情况下, 把凝聚体动力学看成一维是有效的. 因此, 波函数 $\Psi(x, y, z, t)$ 可看成横向和纵向波函数的乘积 $\psi(x, t)\phi(y, z)$, 其中 $\phi(y, z) = \exp[-(y^2 +$

$z^2)/2a_{\perp}^2] \mathcal{W}(\sqrt{\pi}a_{\perp})$ 是横向二维谐振子的归一化基态波函数, 而 $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ 是对应的横向谐振子长度. 需要指出的是, 由于物质波密度 $N_{\text{tot}} |\Psi|^2$ 与 $N_{\text{tot}}/(\pi a_{\perp}^2 a_x)$ 相当, 因此我们能使确保凝聚体的横向和纵向模式不耦合的条件方程(3)写成 $N_{\text{tot}} |a_s|/a_x \ll 0.25$. 另一方面, 在轴对称势阱中吸引的 BEC 崩塌的临界原子数目是 $N_{\text{cr}} = \kappa a_x / |a_s|$ [29], 而 κ 是一个取决于势阱外形系数 $\lambda = \omega_x/\omega_{\perp}$ 的无量纲常数. 对于 $\lambda = 1/100$, 发现 $\kappa = 0.314$ [29], 而且如果不等式(3)有效, 那么避免崩塌的条件 $N_{\text{tot}} < N_{\text{cr}}$ (即 $N_{\text{tot}} |a_s|/a_x < \kappa$) 就会自动满足. 将上述波函数的乘积形式代入三维 GPE(1), 并在横截面(y, z)方向上进行积分, 就可得到有效的一维方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \omega_x^2 x^2 + g_{1D} N_{\text{tot}} |\psi|^2 \right] \psi, \quad (4)$$

在这里我们忽略了横向运动的零点能($\hbar\omega_{\perp}$)和定义了一维非线性系数

$$g_{1D} = 4\pi\hbar^2 a_s m^{-1} \int |\phi(y, z)|^4 dy dz = 2a_s \hbar\omega_{\perp}.$$

为了简便, 对(4)式中时间和空间变量及波函数进行变换, 并取 $t \rightarrow \omega_{\perp} t, x \rightarrow x/a_{\perp}, u \rightarrow \sqrt{2N_{\text{tot}} |a_s|} \psi$, 方程(4)即为

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V_2 x^2 u + |u|^2 u = 0, \quad (5)$$

其中 $V_2 = \omega_x^2 (2\omega_{\perp}^2)$ 是表征外二次势场强度的小参数. 在 Rice 大学的实验[28]中, 构建了一个由玻色凝聚⁷Li 原子($a_s = -0.21$ nm, $m = 11.65 \times 10^{-27}$ kg)组成的物质波孤子链(链内孤子数 $N \sim 10$ 个孤子), 横向束缚较强($\omega_{\perp} \sim 800$ Hz), 同时轴向束缚较弱($\omega_x \sim 3$ Hz). 在其他实验[30]中, 构建了一个⁷Li BEC 的孤子, 势阱外形系数稍大: $\omega_{\perp} \sim 710$ Hz, $\omega_x \sim 50$ Hz. 因此在现实实验条件下, V_2 的取值范围可以是 $10^{-5} - 10^{-3}$. 下面我们将考虑其他类型的轴向 x 势场取代(或与之联合)方程(5)中的二次势场[31, 32], 但需要指出的是, 二次势场(包括倾斜势场)在轴向 x 无穷边界为无穷大, 使得由方程(5)控制的系统发散, 因此, 在实验中采用的一维光晶格轴向 x 有限范围内, 把上述势场当作弱势场[33, 34], 并把它们移到控制方程的右边当微扰项处理 $i\hbar R[u] = V(x)u(x, t)$ 则描述凝聚体 N -孤子链动力学的微扰非线性 Schrödinger(PNLS)方程为

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = i\epsilon R[u]. \quad (6)$$

对于方程(6)微扰项中的势场,我们主要讨论三种情形:1)磁阱(MT)的二次势场

$$V(x) = V_2 x^2 + V_1 x + V_0, \quad (7)$$

而代表重力场作用的倾斜势场是二次势场当 $V_2 = 0$ 时的特例.2)一维光晶格势阱(OLT)的周期性势场

$$V(x) = A \cos(\Omega x + \Omega_0); \quad (8)$$

3)OLT和重力场作用叠加的倾斜周期性势场

$$V(x) = A \cos(\Omega x + \Omega_0) + V_1 x, \quad (9)$$

其中 V_2, V_1, V_0, A, Ω 和 Ω_0 是适当选择的常数.

3. BEC 孤子链的 PCTC 理论

3.1. 一般描述

这里,首先将已成功应用于光孤子链领域的 PCTC 方法推广到 BEC 孤子动力学问题的研究中,建立起相应的 BEC 孤子链 PCTC 理论.为了建立与 PNLs 方程(6)相对应的 PCTC 方程,我们可选择 N -孤子链的初始条件为

$$u(x, t = 0) = \sum_{k=1}^N u_k^s(x, t = 0),$$

$$u_k^s(x, t) = 2v_k \operatorname{sech} \zeta_k e^{i\phi_k}, \quad (10)$$

$$\zeta_k(x, t) = 2v_k[x - \xi_k(t)],$$

$$\xi_k(t) = 2\mu_k t + \xi_{k,0}, \quad (11)$$

$$\phi_k(x, t) = \frac{\mu_k}{v_k} \zeta_k + \delta_k(t),$$

$$\delta_k(t) = w_k t + \delta_{k,0}, \quad (12)$$

其中振幅 v_k 、速度 μ_k 、孤子的中心位置 ξ_k 和相位 δ_k 是孤子链中的单个孤子的四个参数.在绝热近似下,描述孤子链中的孤子间相互作用的重叠效应随孤子间距离的增加呈指数衰减.因此,这些孤子参数必须满足^[35]

$$\begin{aligned} |v_k - v_0| &\ll v_0, \\ |\mu_k - \mu_0| &\ll \mu_0, \\ |v_k - v_0| |\xi_{k+1,0} - \xi_{k,0}| &\ll 1, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $v_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k$ 和 $\mu_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mu_k$ 分别是孤子链的平均振幅和速度.应该强调的是:在 BEC 孤子链的形成过程中,可通过调整凝聚体的初始尺寸和 s 波散射长度改变凝聚体孤子链内孤子数目、单个孤子的振幅和相邻孤子间距离^[28, 36, 37] A_N 个孤子链参

数完全可以满足方程(13),这样就保证了 $4N$ 个孤子链参数随时间缓慢变化.

在绝热近似下,对于确定的微扰 $iR[u] = V(x)u(x, t)$,描述孤子参数动力学的 PCTC 方程有下列形式^[19, 22]:

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = -4v_0(e^{Q_{k+1}-Q_k} - e^{Q_k-Q_{k-1}}) + \Lambda_k + i\Pi_k, \quad (14)$$

$$\frac{d\xi_k}{dt} = 2\mu_k + \Theta_k,$$

$$\frac{d\delta_k}{dt} = 2(\mu_k^2 + v_k^2) + \Sigma_k, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} Q_k(t) &= 2i\lambda_0 \xi_k(t) + 2k \ln(2v_0) \\ &\quad + [k\pi - \delta_k(t) - \delta_0], \end{aligned} \quad (16)$$

$\lambda_k = \mu_k + iv_k$ 和 $\Sigma_k = 2\mu_k \Theta_k + Y_k$. 还有 $\lambda_0 = \mu_0 + iv_0$, $\xi_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j$ 是孤子链的位置中心, $\delta_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_k$. 而方程(14)和(15)右边中的 $\Pi_k, \Lambda_k, \Theta_k$ 和 Y_k 由微扰项 $R[u]$ 确定,具体表达式为

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta_k}{\cosh \zeta_k} \operatorname{Re}(R[u] e^{-i\phi_k}), \quad (17)$$

$$\Lambda_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta_k \sinh \zeta_k}{\cosh^2 \zeta_k} \operatorname{Im}(R[u] e^{-i\phi_k}), \quad (18)$$

$$\Theta_k = \frac{1}{4v_k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_k d\zeta_k}{\cosh \zeta_k} \operatorname{Re}(R[u] e^{-i\phi_k}), \quad (19)$$

$$Y_k = \frac{1}{2v_k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta_k (1 - \zeta_k \tanh \zeta_k)}{\cosh \zeta_k} \operatorname{Im}(R[u] e^{-i\phi_k}). \quad (20)$$

根据上述结论,我们就可以建立起相对应具体微扰的 PCTC 方程.

3.2. 二次和倾斜势场的 PCTC 方程

对于微扰项 $iR[u] = V(x)u(x, t)$ 中的势场(7),由方程(17)–(20)积分可得

$$\Pi_k = 0, \Theta_k = 0, \Lambda_k = -V_2 \xi_k - \frac{V_1}{2},$$

$$Y_k = V_2 \left(\frac{\pi^2}{48v_k^2} - \xi_k^2 \right) - V_1 \xi_k - V_0, \quad (21)$$

和 $\Sigma_k = Y_k$. 因此,由(14)和(15)式得到二次势场对应的 PCTC 方程具体形式为

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_k}{dt} + i \frac{dv_k}{dt} &= -4v_0(e^{Q_{k+1}-Q_k} - e^{Q_k-Q_{k-1}}) \\ &\quad - V_2 \xi_k - \frac{V_1}{2}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} &= 2\mu_k, \\ \frac{d\delta_k}{dt} &= \chi(\mu_k^2 + v_k^2) + V_2 \left(\frac{\pi^2}{48v_k^2} - \xi_k^2 \right) \\ &\quad - V_1 \xi_k - V_0, \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $Q_k(t)$ 由(16)式给出. 根据方程(22)和(23)可得 $dv_0/dt = 0$ 和

$$\frac{d\mu_0}{dt} = -V_2 \xi_0 - \frac{V_1}{2} \frac{d\xi_0}{dt} = 2\mu_0, \quad (24)$$

对于 $V_2 > 0$ 方程(24)有简单解

$$\begin{aligned} \mu_0(t) &= \mu_{00} \cos[\Phi(t)], \\ \xi_0(t) &= \sqrt{\frac{2}{V_2}} \mu_{00} \sin[\Phi(t)] - \frac{V_1}{2V_2}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $\Phi(t) = \sqrt{2V_2}t + \Phi_0$, μ_{00} 和 Φ_0 是积分常数. 因此, 这样一个二次势场的综合效果是使孤子链作为一个整体作缓慢的周期运动.

3.3. 周期性势场的 PCTC 方程

对于微扰项 $iR[u] = V(x)u(x, t)$ 中的势场(8)同理可得周期性势场对应的 PCTC 方程具体形式为

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_k}{dt} + i \frac{dv_k}{dt} &= -4v_0(e^{Q_{k+1}-Q_k} - e^{Q_k-Q_{k-1}}) \\ &\quad + \frac{\pi A \Omega^2}{8v_k} \frac{1}{\sinh Z_k} \\ &\quad \times \sin(\Omega \xi_k + \Omega_0), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} &= 2\mu_k, \\ \frac{d\delta_k}{dt} &= \chi(\mu_k^2 + v_k^2) - \frac{\pi^2 A \Omega^2}{16v_k^2} \frac{\cosh Z_k}{\sinh^2 Z_k} \\ &\quad \times \cos(\Omega \xi_k + \Omega_0), \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $Z_k = \Omega \pi(4v_k)$, $Q_k(t)$ 由(16)式给出. 根据方程(26)和(27)可得 $dv_0/dt = 0$.

3.4. 倾斜周期性势场的 PCTC 方程

对于微扰项 $iR[u] = V(x)u(x, t)$ 中的势场(9)同理可得倾斜周期性势场对应的 PCTC 方程具体形式为

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_k}{dt} + i \frac{dv_k}{dt} &= -4v_0(e^{Q_{k+1}-Q_k} - e^{Q_k-Q_{k-1}}) \\ &\quad + \frac{\pi A \Omega^2}{8v_k} \frac{1}{\sinh Z_k} \sin(\Omega \xi_k + \Omega_0) \\ &\quad - \frac{1}{2} V_1, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} &= 2\mu_k, \\ \frac{d\delta_k}{dt} &= \chi(\mu_k^2 + v_k^2) - \frac{\pi^2 A \Omega^2}{16v_k^2} \frac{\cosh Z_k}{\sinh^2 Z_k} \\ &\quad \times \cos(\Omega \xi_k + \Omega_0) - V_1 \xi_k, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $Z_k = \Omega \pi(4v_k)$, $Q_k(t)$ 由(16)式给出. 根据方程(28)和(29)又可得 $dv_0/dt = 0$.

4. 具体算例

在孤子链中的每一个孤子动力学取决于外势场和相邻孤子间相互影响共同作用, 而相邻孤子的相互作用既可以是排斥的也可以是吸引的, 这由它们之间的相位关系来决定. 作为特例, 在无外势场的情况下, 如果相邻孤子的振幅相等且它们之间的初相差是 π (下面考虑的情形之一), 那么它们相互排斥最终导致膨胀运动^[19, 20]. 然而, 外势场可以平衡这种膨胀运动, 试图将孤子囚禁于外势场的最小值处. 正是因为这两个因素的共同作用, 即相邻孤子间的相互影响和外势场的作用, 导致了 N -孤子链丰富的动力学行为.

为了证实 PCTC 理论对于描述在外势场中 N -孤子链动力学的充分性, 我们将 PCTC 方程数值解与基本 PNLs 方程的直接数值仿真的比较. 这里我们利用分步傅里叶变换直接数值仿真 PNLs 方程^[38], 同时监控基本守恒量和整个孤子链的能量, 同时又利用自适应步长控制的 Runge-Kutta 方法数值求解 PCTC 方程^[39].

在无外势场 $V(x) = 0$ 的情况下, N -孤子链的演化规律是众所周知的^[20, 22]. 下面我们将主要使用下列初始条件参数: $v_k(0) = 1/2$, $\mu_k(0) = 0$, $\xi_{k+1}(0) - \xi_k(0) = r_0$ 和两种不同的相位选择,

$$\delta_k(0) = k\pi, \quad (30)$$

$$\delta_k(0) = 0. \quad (31)$$

在这方面的数值仿真中, 这两类初始条件(IC)的应用最为普遍.

在无外势场的情况下, IC(30)能确保 N -孤子链出现自由渐近动力学属性, 即每个孤子以自己的速度发展演化, 相邻孤子间的距离随时间线性增大, 但孤子链中心却保持静止(如图 1(a)所示); 而在 IC(31)情形下, 每当孤子间的距离不是足够大时, 它们就相互吸引导致碰撞. 下面我们将研究在两种 IC 条件下外势场对孤子链运动属性的影响.

4.1. 装载于二次势场中的 N -BEC 孤子间的相互作用

二次势场对在 IC(30)条件下的孤子链的影响是平衡孤子间的排斥作用,使之形成束缚态(如图1和2所示).

图1和2表明 PCTC 理论和 PNLs 方程(6)的直接数值仿真的结果非常一致.它们呈现出二次势场对 N -孤子链运动影响的二种类型:1)如果孤子链的中心与势场的最小值位置一致,孤子链作收缩和膨胀的振动;2)如果孤子链的中心对势场的最小值位置有偏移,整个孤子链围绕势场的最小值位置作振

动,且孤子链相对于其中心位置作收缩和膨胀运动.至于后一种类型的运动周期,由 PCTC 理论和 PNLs 方程(6)的直接数值仿真得到的结果完全符合.从方程(25)可得孤子链中心的运动周期为 $T = 2\pi/\sqrt{2V_2}$.对于图2(a)(b)(c)(d)的参数我们有 $T \cong 628$ (9-孤子链), $T \cong 314$ (7-孤子链).还可从图2中看出,PNLs 方程(6)的直接数值仿真结果展现了较强的二次势场能导致在孤子链收缩时的每一个孤子的湮没现象和在孤子链膨胀时的每一个孤子的恢复现象.这使我们想起在实验^[28]中的“丢失孤子”现象,当然,这已超出了 PCTC 模型的有效性范围.

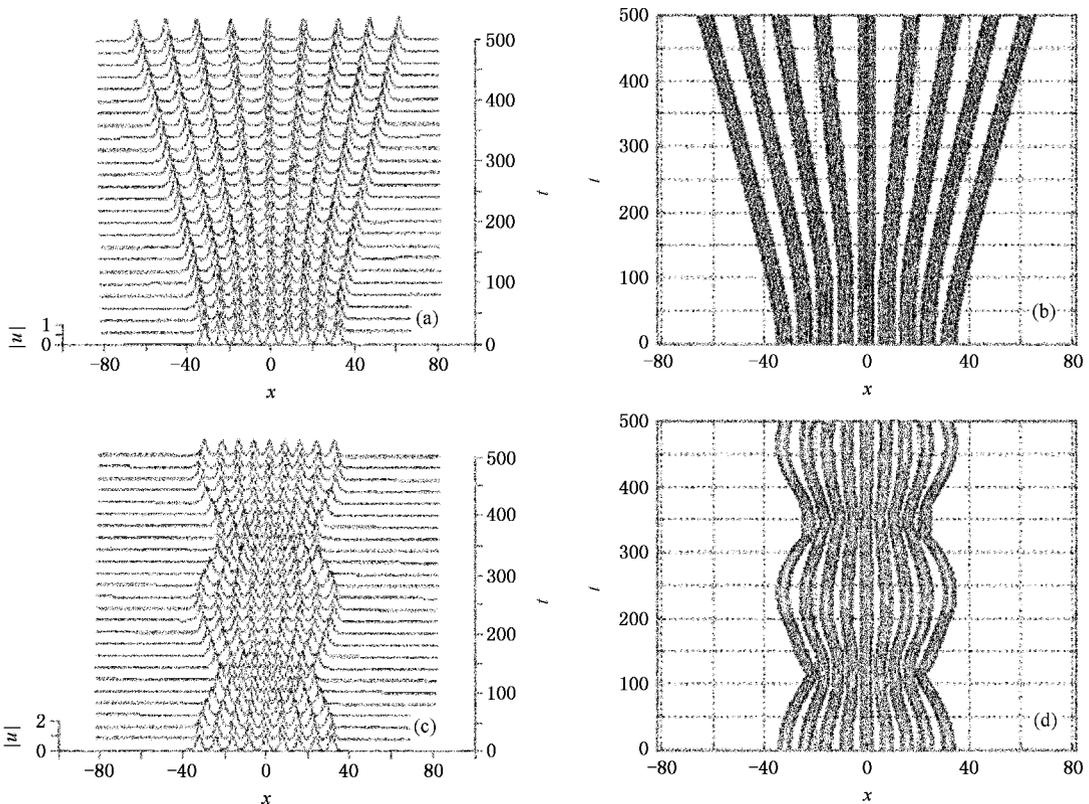


图1 初始位置是关于二次势场的最小值 $x = 0$ 对称、初始条件是 IC(30)和 $r_0 = 8$ 的9-孤子链的动力学行为.(a)(c)基于 PNLs 方程(6)直接数值仿真的演化图 (b)(d)基于 PCTC 方程(22)和(23)解的轮廓图(a)(b) $V_2 = V_1 = V_0 = 0$ (c), (d) $V_2 = 0.00005, V_1 = V_0 = 0$)

4.2. 装载于倾斜周期性势场中的 N -BEC 孤子间的相互作用

现在我们考虑囚禁于倾斜周期性势场中的 N -孤子链动力学行为,这种势场在 BEC 领域的 Bloch 振动研究中特别有趣.装载于这种势场中的相互排斥 BEC 孤子链确实展现了 Bloch 振动^[40].在这些振

动的每个周期内,存在于各个光晶格单元中凝聚态原子实现了相干的势垒隧穿.这是第一次实验证实了脉冲原子孤子激光^[40].最近,脉冲原子孤子激光的理论新模型已在文献^[41]中提出,他们把相互吸引的 BEC 孤子作为相干原子脉冲的载体.

在上述的应用中,对物质波孤子的受控操作是个非常重要的课题.下面我们可通过调整倾斜势场

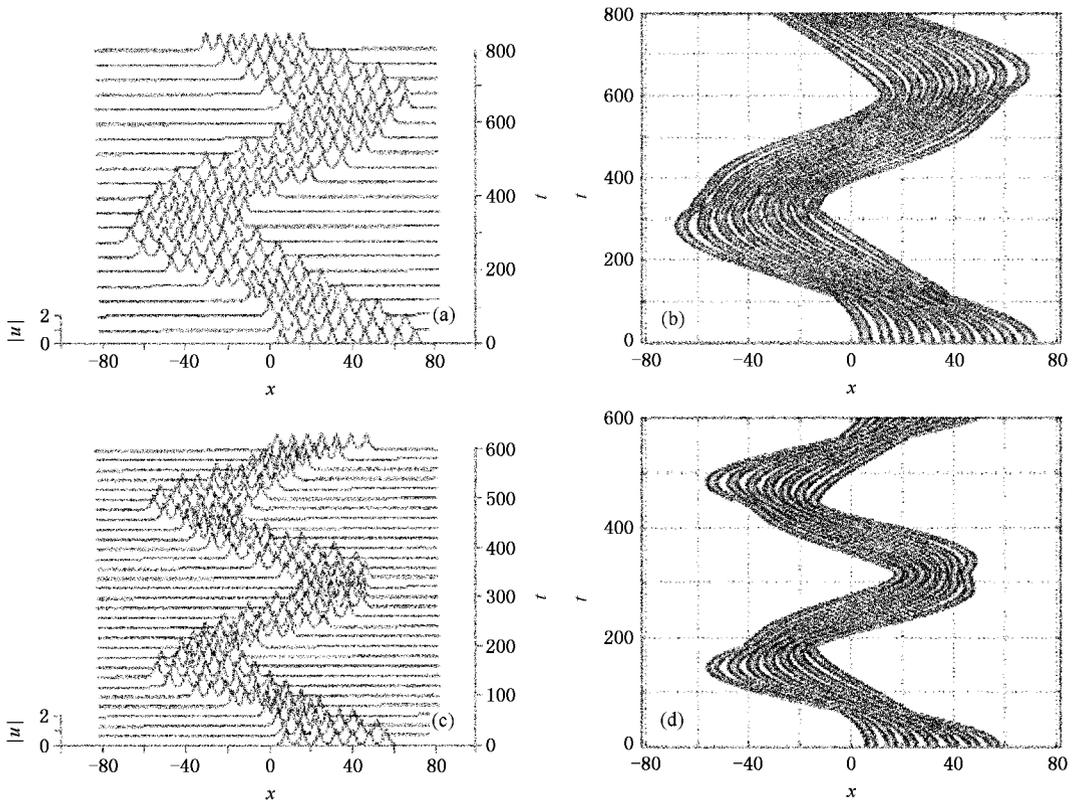


图2 初始位置对于二次势场的最小值 $x = 0$ 有偏移, 初始条件是 $1C(30)$ 和 $r_0 = 8$ 的 N -孤子链的谐振动。(a)(c) 基于 PNLs 方程 (6) 直接数值仿真的演化图 (b)(d) 基于 PCTC 方程 (22) 和 (23) 解的轮廓图 (a)(b) $V_2 = 0.00005, V_1 = V_0 = 0$ (c)(d) $V_2 = 0.001, V_1 = V_0 = 0$

强度的方法灵活地操控囚禁于 OLT 中的相互吸引 BEC 孤子的情景. 图 3 给出了倾斜势场强度 V_1 的不同临界值时从 5-孤子链中提取出不同孤子数目的图像, 而这是由 PNLs 方程 (6) 的直接数值仿真和 PCTC 方程的数值解分别得到的结果. 从图中可以清楚地看出, PCTC 理论给出了在倾斜周期性势场中的 N -孤子链动力学的充分描述.

4.3. 装载于周期性势场中的 N -BEC 孤子间的相互作用

N -孤子链显示出有趣动力学性质的另一个外势场是周期性势场, 这也跟囚禁于 OLT 中的物质波孤子链直接相关.

由于孤子链中的每一个孤子都受到周期性势场的束缚力和相邻孤子的排斥力的共同作用, 因此, 孤子的平衡位置与周期性势场的最小值不一致. 倘若周期性势场的强度大到足以使孤子被束缚, 那么初始被放置在周期性势场最小值处的孤子将围绕这个最小值位置作小振幅的振动. 与此相反, 弱的周期性

势场不可能束缚孤子. 相邻孤子的排斥力(相位差为 π 时)引起整个孤子链的非束缚膨胀. 而在某一个中间态, 当周期性势场的束缚力跟相邻孤子的排斥力可比拟时, 我们观察到了更有趣的动力学行为, 如来自孤子链边缘孤子的被驱逐现象, 如图 4 所示. 这种现象充分揭示了孤子链内在动力学的复杂性. 其产生原因解释如下: 在相邻孤子的排斥力作用下每个孤子在各自势阱内作非线性振动. 当某些特殊孤子的振动振幅增大且两个孤子相互紧密靠近时, 强大的回复动量使得某个孤子离开孤子链. 在图 4(a) 中, 这现象发生在边缘孤子上, 而其余的孤子在很长的时间演化过程中仍然保持束缚态. 值得强调的是 PCTC 理论很好地描述了这种现象, 这可从图 4(b) 中显而易见. 在图 4(c)(d) 中, 我们取 $A = -0.0005$ 和 $r_0 = 9$, 孤子链就形成了束缚态. 因此, 对任何一个初始距离 r_0 而言, 总存在着一个周期性势场强度 A 的临界值 $A_{cr}(r_0)$. 只要满足条件 $A > A_{cr}(r_0)$, 在 $1C(30)$ 条件下的孤子链将形成束缚态.

我们还考虑了在 $1C(31)$ 条件下(即相邻孤子的

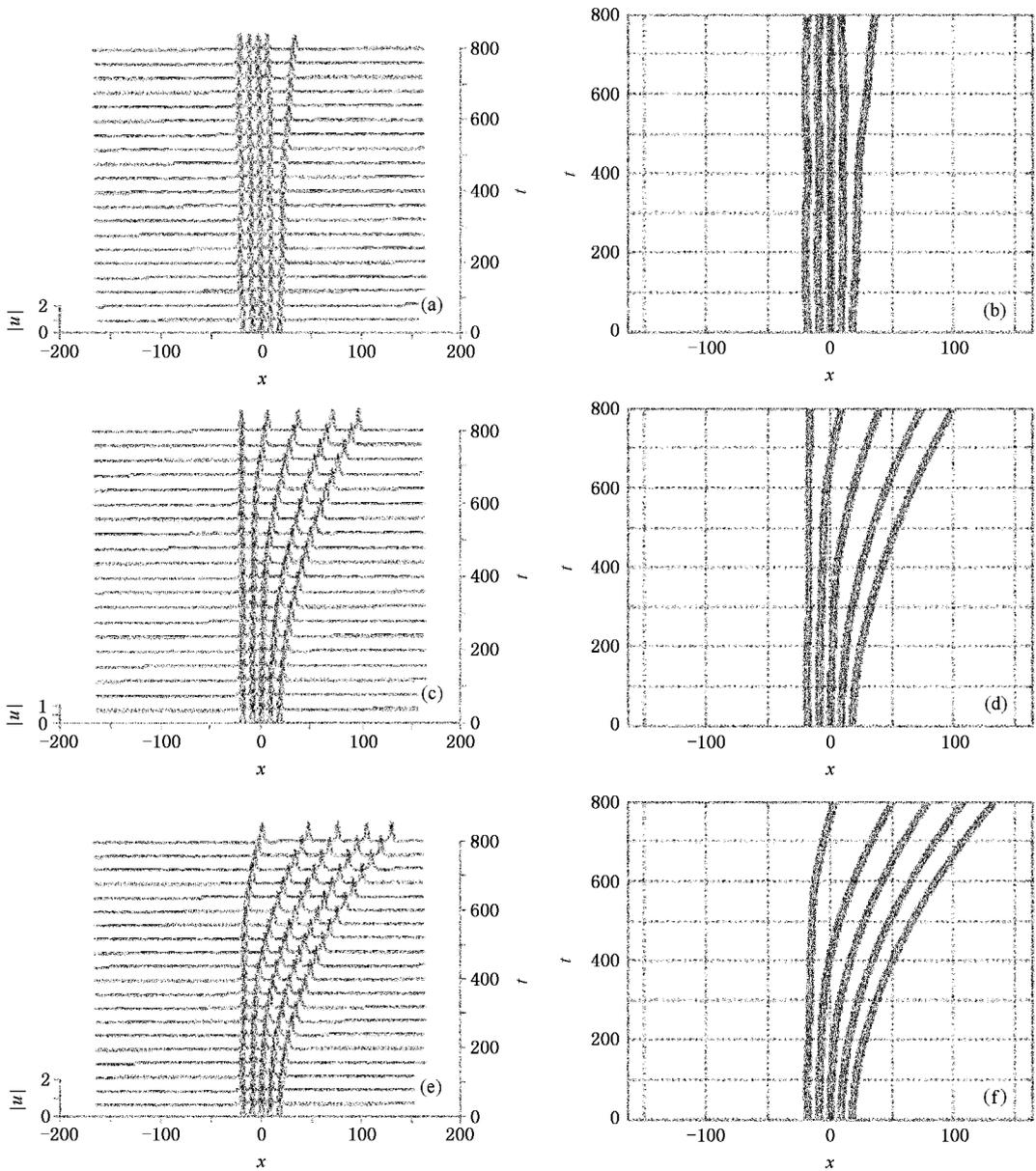


图3 初始位置是与周期性势场 $A = -0.0005$, $\mu\Omega = 2\pi/9$, $\mu\Omega_0 = 0$ 的最小值一致、初始条件是 $IC(30)$ 和 $r_0 = 9$ 的 5- 孤子链在倾斜势场强度 V_1 取不同临界值时的受控提取孤子行为。(a)(c)(e) 基于 PNLS 方程 (6) 直接数值仿真的演化图 (b), (d)(f) 基于 PCTC 方程 (28) 和 (29) 解的轮廓图 (a)(b) 当 $V_1 = -0.0003$ 时提取一个孤子 (c)(d) 当 $V_1 = -0.0002$ 时提取四个孤子 (e)(f) 当 $V_1 = -0.0003$ 时提取五个孤子)

相位差是零,使得它们之间的相互作用力是吸引的) 周期性势场能起到稳定作用的情形. 如果周期性势场足够强,那么孤子链中的孤子就不会发生碰撞,弱的周期性势场则不能防止孤子的碰撞,最终导致孤子链的崩塌,如图 5 所示. 对任何一个初始距离 r_0 来说,又总存在着一个周期性势场强度 A 的临界值 $A'_c(r_0)$. 只要满足条件 $A > A'_c(r_0)$,在 $IC(31)$ 条件下的孤子链也将形成束缚态并避免了孤子间的碰撞.

5. 结 论

我们利用从 PCTC 理论出发的解析处理研究了囚禁于外势场中(二次势场、周期性势场、倾斜和周期性势场) N -孤子链的动力学,同时从基本的 PNLS 方程出发进行了直接的数值仿真,表明 PCTC 理论对在弱外势场作用下的绝热 N -孤子链的相互作用的描述是充分的. 作为直接相关的物理系统,我们考

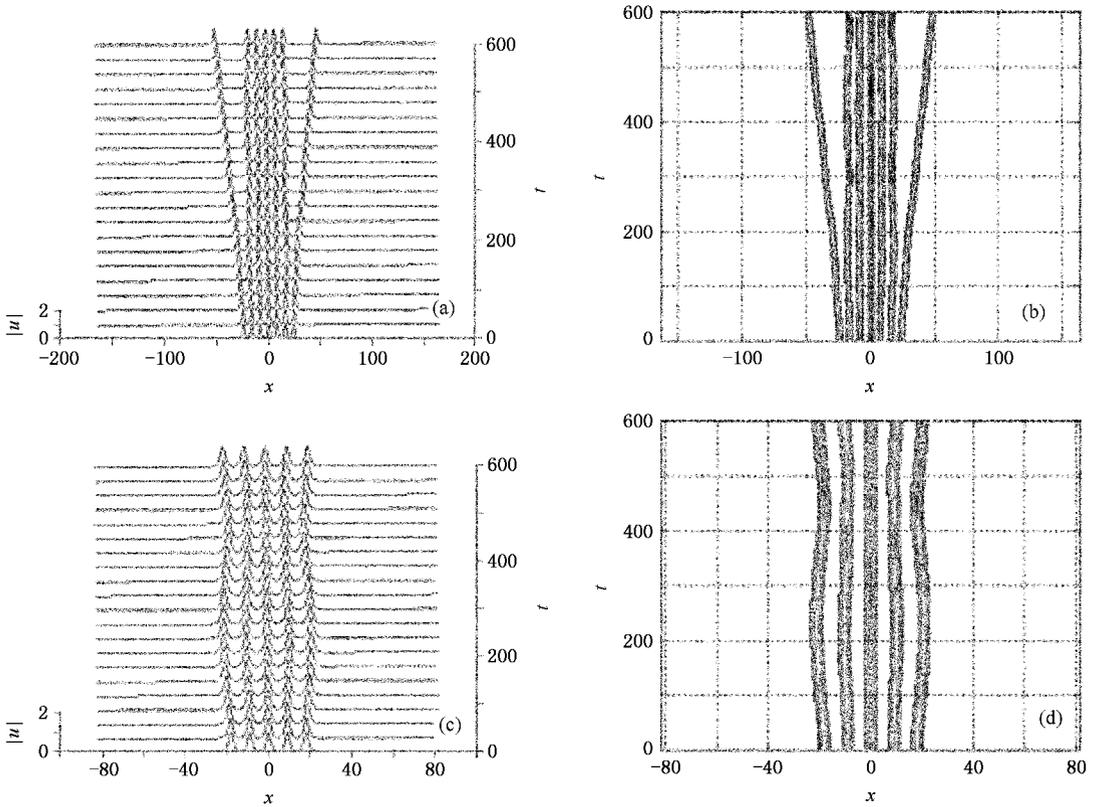


图4 (a)(b) $N=7$ -孤子链中的孤子驱逐现象, 初始位置是与周期性势场 ($A = -0.001, \Delta\Omega = \pi/4, \Delta\Omega_0 = 0$) 的最小值一致, 初始条件是 $1C(30)$ 和 $r_0 = 8$; (c)(d) $N=5$ -孤子链的束缚态, 初始位置是与周期性势场 ($A = -0.0005, \Delta\Omega = 2\pi/9, \Delta\Omega_0 = 0$) 的最小值一致, 初始条件是 $1C(30)$ 和 $r_0 = 9$ (a)(c) 基于 PNLs 方程 (6) 直接数值仿真的演化图 (b)(d) 基于 PCTC 方程 (26) 和 (27) 解的轮廓图)

虑了在磁场俘获和光晶格势阱中的物质波孤子链. 采用了在 BEC 孤子链实验中的俘获势场的参数来进行解析预测和数值仿真, 结果表明, 基于 PCTC 理论的解析分析和基于 PNLs 方程的数值仿真的结果一致符合; 当周期性势场的强度达到临界值时, 孤子的驱逐现象发生, 而对于这种现象的解析预测也与数值仿真的结果高质量的一致. 可以推测, 我们发展的 BEC 孤子链 PCTC 理论同样可以应用于物质波孤子链的受控操作研究.

需要指出的是: 对于本文研究的系统 (6), 在考虑了周期性振动外场并控制其强度参量的情形下系统出现了混沌运动^[42]; 在考虑了周期性边界条件并

控制其有限边界参量的情形下系统出现了混沌运动^[43]; 在考虑了一维加速光晶格并同时控制倾斜势场强度和晶格间隧穿参量的情形下系统出现了动力学不稳定性^[44]; 在考虑了一维倾斜光晶格并同时控制内外势场强度参量的情形下系统出现了 Wannier-Stark 混沌^[33]; 在考虑了一维移动光晶格并同时控制光晶格势场强度和阻尼参量的情形下系统出现了 Melnikov 混沌^[34]等. 大家知道, 在 BEC 崩塌的过程中混沌出现^[45, 46], 并进而毁坏 BEC 系统. 因此, 预测和控制混沌对于 BEC 的形成和应用都是非常重要的. 方程 (6) 的 N -孤子链的稳定性详细分析正在进行中.



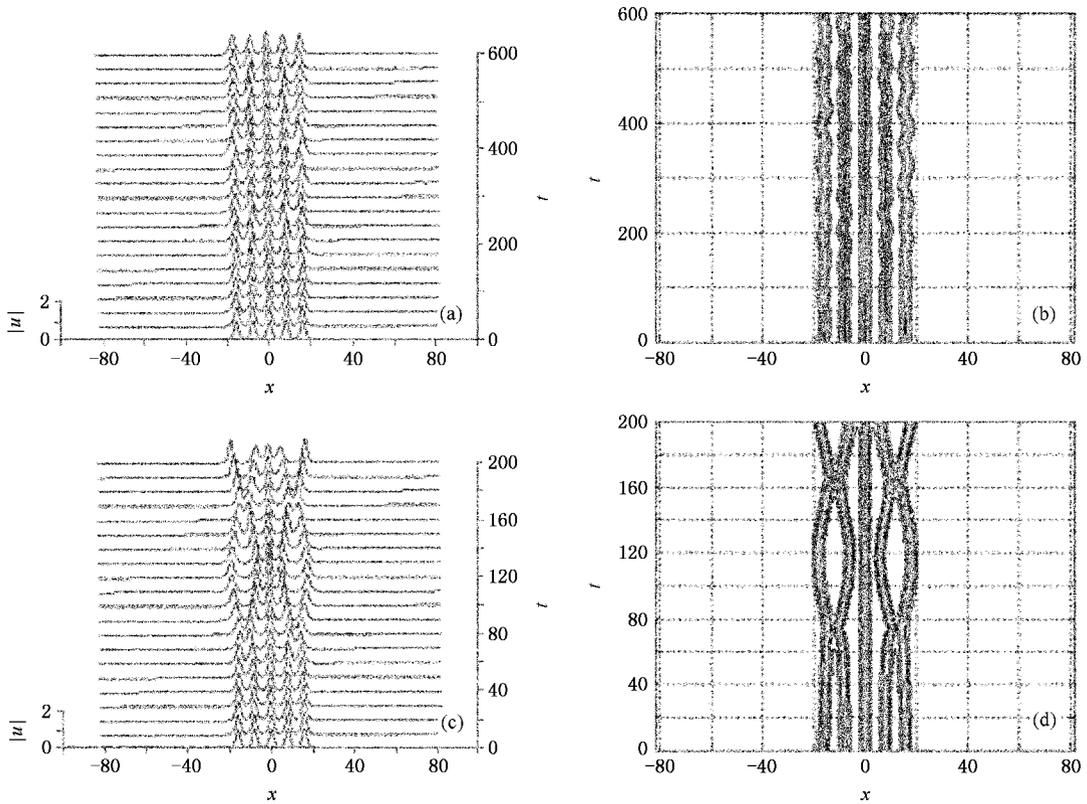


图 5 初始位置是与周期性势场 ($\Omega = \pi/4, \mu\Omega_0 = 0$) 的最小值一致、初始条件是 $1C(31)$ 和 $r_0 = 8$ 的 5- 孤子链动力学行为。(a)(b) 当周期性势场的强度 $A = -0.02$ 时, 孤子链保持束缚态, 但每个孤子都绕各自单元的最小值作小振幅的振动 (c), (d) 当较弱的周期性势场强度 $A = -0.01$ 时, 孤子链中的孤子因碰撞而导致孤子链崩塌 (a)(c) 基于 PNLSE 方程 (6) 直接数值仿真的演化图 (b)(d) 基于 PCTC 方程 (26) 和 (27) 解的轮廓图)

- [1] Hasegawa, Kodama Y 1995 *Solitons in Optical Communications* (Oxford : Clarendon Press)
- [2] Barone, Paternó G 1982 *Physics and Applications of the Josephson Effect* (New York : Wiley)
- [3] Xiao Y F, Wang D L, Wang F J, Yan X H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 547 (in Chinese) [肖宇飞、王登龙、王凤姣、颜晓红 2006 物理学报 **55** 547]
- [4] Kivshar Y, Agrawal G 2003 *Optical Solitons : From Fibers to Photonic Crystals* (San Diego : Academic Press)
- [5] Baizakov B B, Malomed B A, Salerno M 2004 *Phys. Rev. A* **70** 053613
- [6] Xu J, Hai W H, Li H 2007 *Chin. Phys.* **16** 2244
- [7] Abdullaev F K, Gammal A, Kamchatnov A M, Tomio L 2005 *Int. J. Mod. Phys. B* **19** 3415
Brazhnyi V A, Konotop V V 2004 *Mod. Phys. Lett. B* **18** 267
- [8] Li H M 2006 *Chin. Phys.* **15** 2216
- [9] Xu Z J, Shi J Q, Lin G C 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 666 (in Chinese) [徐志君、施建青、林国成 2007 物理学报 **56** 666]
- [10] Qian F, Huang H B, Qi G X, Shen C K 2006 *Chin. Phys.* **15** 1577
- [11] Xu Z, Zhou S Y, Qu Q Z, Liu H, Zhou S Y, Wang Y Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5643 (in Chinese) [徐震、周蜀渝、屈求智、刘华、周善钰、王育竹 2006 物理学报 **55** 5643]
- [12] García-Ripoll J J, Zoller P, Cirac J I 2005 *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **38** 567
Harald W 2005 *J. Phys. B* **38** 579
Pierre M 2005 *J. Phys. B* **38** 617
Immanuel B 2005 *J. Phys. B* **38** 629
Petrov D S, Salomon C, Shlyapnikov G V 2005 *J. Phys. B* **38** 645
Markus D, Ferenc K 2005 *J. Phys. B* **38** 727
- [13] Cheng R, Liang J Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 834
- [14] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳、傅立斌、赵鸿、刘杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [15] Hao Y J, Liang J Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 1161
- [16] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云、傅立斌、杨志安、刘杰 2006 物理学报

- 55 5623]
- [17] Wei W 2005 *Chin. Phys.* **14** 2407
- [18] Yu X C , Ye Y T , Cheng L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 551 (in Chinese) [余学才、叶玉堂、程琳 2006 物理学报 **55** 551]
- [19] Gerdjikov V S , Kaup D J , Uzunov I M , Evstatiev E G 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3943
- [20] Gerdjikov V S , Uzunov I M , Evstatiev E G , Diankov G L 1997 *Phys. Rev. E* **55** 6039
- [21] Arnold J M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 979
- [22] Gerdjikov V S , Evstatiev E G , Kaup D J , Diankov G L , Uzunov I M 1998 *Phys. Lett. A* **241** 323
- [23] Gerdjikov V S , Uzunov I M 2001 *Physica D* **152 – 153** 355
- [24] Gerdjikov V S 2002 *Complex Toda Chain-An Integrable Universal Model for Adiabatic N -soliton Interactions* (Gallipoli : Proceedings of the Workshop Nonlinear Physics : Theory and Experiment. II edited by Ablowitz M , Boiti M , Pempinelli F , and Prinari B)
- [25] Gerdjikov V S , Baizakov B B , Salerno M 2005 *Theor. Math. Phys.* **144** 1138
- [26] Wabnitz S 1993 *Electron. Lett.* **29** 1711
- [27] Uzunov I M , Gölles M , Lederer F 1995 *Phys. Rev. E* **52** 1059
- [28] Strecker K E , Partridge G B , Truscott A G , Hulet R G 2002 *Nature (London)* **417** 150
Strecker K E , Partridge G B , Truscott A G , Hulet R G 2005 *Adv. Space Res.* **35** 78
- [29] Gammal A , Frederico T , Lauro Tomio 2001 *Phys. Rev. A* **64** 055602
- [30] Khaykovich L , Schreck F , Ferrari G , Bourdel T , Cubizolles J , Carr L D , Castin Y , Salomon C 2002 *Science* **296** 1290
- [31] Bronski J C , Carr L D , Deconinck B , Kutz J N , Promislow K 2001 *Phys. Rev. E* **63** 036612
Bronski J C , Carr L D , Deconinck B , Kutz J N , Promislow K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 1402
Bronski J C , Carr L D , Carretero-Gonzalez R , Deconinck B , Kutz J N , Promislow K 2001 *Phys. Rev. E* **64** 056615
Abdullaev F Kh , Baizakov B B , Darmanyan S A , Konotop V V , and Salerno M 2001 *Phys. Rev. A* **64** 043606
- [32] Carretero-Gonzalez R , Promislow K 2002 *Phys. Rev. A* **66** 033610
- [33] Fang J S , Hai W H 2005 *Physica B* **370** 61
- [34] Chong G S , Hai W H , Xie Q T 2004 *Phys. Rev. E* **70** 036213
- [35] Karpman V I , Solov 'ev V V 1981 *Physica D* **3** 487
- [36] Hai W H , Lee C H , Chong G S 2004 *Phys. Rev. A* **70** 053621
- [37] Salasnich L , Parola A , Reatto L 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 080405
- [38] Taha T R , Ablowitz M J 1984 *J. Comput. Phys.* **55** 203
- [39] Press W H , Teukolsky S A , Vetterling W T , Flannery B P 1996 *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing* (Cambridge , UK : Cambridge University Press)
- [40] Anderson P , Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
- [41] Carr L D , Brand J 2004 *Phys. Rev. A* **70** 033607
- [42] Kazuhiro Nozaki , Naoaki Bekki 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1226
- [43] Moon H T , Huerre P , Redekopp L G 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 458
- [44] Zheng Yi , Marijan Koštrun , Juha Javanainen 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 230401
- [45] Filho V S , Gammal A , Frederico T , Tomio L 2000 *Phys. Rev. A* **62** 033605
- [46] Saito H , Ueda M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 1406

N -soliton interactions of Bose-Einstein condensates in external potentials^{*}

Zong Feng-De Zhang Jie-Fang[†]

(*Institute of Nonlinear Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)

(Received 7 August 2007 ; revised manuscript received 30 September 2007)

Abstract

In this paper, a perturbed complex Toda chain has been employed to describe the adiabatic interactions in an N -soliton train of the Gross-Pitaevskii equation. Perturbations induced by weak quadratic and periodic external potentials are analytically and numerically studied. It is found that the perturbed complex Toda chain adequately models the N -soliton train dynamics for both types of potentials. As an application of the developed theory, we consider the dynamics of a train of matter-wave solitons confined in a quadratic trap and optical lattice, as well as tilted periodic potentials. In the last case, we demonstrate that there exist critical values of the strength of the linear or periodic potential for which one or more localized states can be extracted from a soliton train. In addition, some interesting results in the experiments and applications of the Bose-Einstein condensates are also obtained.

Keywords : Bose-Einstein condensates, Gross-Pitaevskii equation, matter-wave solitons, interactions

PACC : 0365, 0290

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10672147) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y605312).

[†] Corresponding author. E-mail : jf_zhang@zjnu.cn