

# 一类分数阶混沌系统的研究

赵品栋<sup>†</sup> 张晓丹

(北京科技大学应用科学学院, 北京 100083)

(2007 年 9 月 30 日收到 2007 年 10 月 23 日收到修改稿)

推广了一类分数阶混沌系统并证明了这类分数阶混沌系统的拓扑等价性, 指出分数阶系统产生混沌吸引子的必要条件是系统平衡点的稳定性不变. 通过数值模拟表明, 此分数阶系统与整数阶系统一样仍然产生一对互不相交的 2-涡卷混沌吸引子.

关键词: 分数阶, 混沌, 稳定性

PACC: 0545

## 1. 引言

近些年来, 由于混沌在图像数据加密、非线性系统辨识、计算机图形处理、通信和信息处理、生物医学等领域得到应用, 因此有关混沌的诱发、控制与反控制的研究得到了越来越多的关注<sup>[1,2]</sup>. 自从 1963 年 Lorenz<sup>[3]</sup>在三维自治系统中发现第一个混沌吸引子以来, 人们相继提出一些新的系统, 如 Chen 系统<sup>[4]</sup>, Lu 系统<sup>[5]</sup>, Liu 系统<sup>[6]</sup>, 统一系统<sup>[7]</sup>等.

虽然分数阶微分已有 300 多年的历史, 但是在物理和工程应用中, 特别是混沌及其同步方面一直未得到应有. 因此, 近些年来许多学者开始从事分数阶混沌动力系统的研究<sup>[8-20]</sup>.

本文在文献 21-23 基础上推广了一类分数阶混沌系统, 通过分析发现此类分数阶混沌系统二次项系数仅仅控制了吸引子的沿坐标轴方向的大小. 分数阶系统在平衡点的稳定性不变的情况下仍能产生混沌吸引子, 且同时产生一对互不相交的 2-涡卷混沌吸引子的特性保持不变.

## 2. 分数阶微积分

### 2.1. 分数阶微积分的定义

分数维微积分有两种常用的定义<sup>[24]</sup>, 即 Riemann-Liouville (R-L) 定义和 Caputo 定义, 在纯数学

领域中多用 R-L 定义. Caputo 定义有传统的易于物理上实现和解释的初始条件, 并且对常数的微分为 0, 所以在实际的应用中常用此定义. 本文采用 Caputo 定义.

定义 1 一元函数  $f(t)$  的  $\alpha$  阶积分定义为<sup>[24]</sup>

$${}_a D_1^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx, \quad (t > a, \alpha > 0), \quad (1)$$

其中  $a, t$  分别为积分的下限和上限,  $f(t)$  为被积函数,  $\alpha$  为积分次数,  $\Gamma(\alpha)$  为欧拉函数.

分数维微分是利用分数维积分来定义的, 其定义如下:

定义 2 一元函数  $f(t)$  的  $\alpha$  阶微分定义为<sup>[24]</sup>

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^{-(m-\alpha)} {}_a D_t^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx, \quad (n-1 < \alpha < n). \quad (2)$$

### 2.2. 分数阶线性系统的稳定性理论

分数阶线性系统的稳定性已经得到了充分的研究, 并且得到了分数阶线性系统稳定的充分必要条件<sup>[25,26]</sup>.

引理 1 考虑自制系统

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax, x(0) = x_0, \quad (3)$$

其中  $x \in R^n (n \in N)$ ,  $A \in R^{n \times n}$ .

1) 系统 (3) 是渐近稳定的, 当且仅当对任意的  $\lambda \in \text{spec}(A)$ ,  $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$  都成立.

<sup>†</sup> E-mail: zhaopd@126.com

2)系统(3)是稳定的,当且仅当对任意的  $\lambda \in \text{spec}(A)$ ,  $|\arg(\lambda)| \geq \alpha\pi/2$  都成立.

$\alpha$  阶线性系统的稳定性区域如图 1 所示,如果系统在平衡点处 Jacobian 矩阵的所有特征值在扇形区域外部,则此分数阶微分系统就是稳定的<sup>[25-27]</sup>.

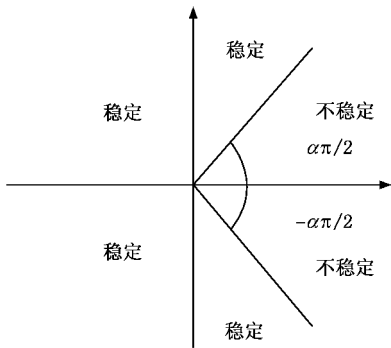


图 1  $\alpha$  阶线性微分方程的稳定性区域

三维非线性系统中,如果系统平衡点的一个特征值在不稳定的区域中而其他特征值都在稳定区域中,则此平衡点称指数为 1 的鞍点<sup>[27]</sup>;如平衡点只有一个特征值在稳定区域中,则称此平衡点是指数为 2 的鞍点.由引理 1 可知,若系统  $x = f(x)$  出现混沌,则分数阶系统  ${}_a D_t^\alpha x = f(x)$  仍保持混沌的必要条件是平衡点的稳定性保持不变,也就是说系统指数为 2 的鞍点的不稳定特征值  $\lambda$  满足

$$\tan\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) > \frac{|\ln(\lambda)|}{\text{Re}(\lambda)} \Rightarrow \alpha > \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{|\ln(\lambda)|}{\text{Re}(\lambda)}\right). \quad (4)$$

### 3. 拓扑等价性

2003年刘文波、陈关荣<sup>[21]</sup>提出了一个整数阶混

沌系统(如(5)式所示).2004年 Hsien 等<sup>[22]</sup>又提出与系统(5)类似的系统(如(6)式所示),Long-Jye Sheu 等<sup>[23]</sup>又将系统(6)推广为分数阶.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + yz, \\ \dot{y} &= by - xz, \\ \dot{z} &= cz - xy, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $b < 0, c < 0, 0 < a < -(b + c)$ ,本文中假设此条件成立.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - yz, \\ \dot{y} &= bx + xz, \\ \dot{z} &= cz + (1/3)xy. \end{aligned} \quad (6)$$

现将系统推广为更一般的情形

$$\begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= ax + d_1 yz, \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= by + d_2 xz, \quad d_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad 0 < q \leq 1, \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= cz + d_3 xy. \end{aligned} \quad (7)$$

显然(5)(6)式分别为(7)式的一种特殊形式.

定理 系统(7)与系统

$$\begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= ax \pm \text{sgn}(d_1)yz, \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= ay \pm \text{sgn}(d_2)xz, \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= cz \pm \text{sgn}(d_3)xy, \end{aligned} \quad (8)$$

拓扑等价.

证明

对系统(7)做线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{|d_2 d_3|}} & & \\ & \sqrt{\frac{1}{|d_1 d_3|}} & \\ & & \sqrt{\frac{1}{|d_1 d_2|}} \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}\frac{d^q}{dt^q} \left( \pm \sqrt{\frac{1}{|d_2 d_3|}} X \right) &= \pm a \sqrt{\frac{1}{|d_2 d_3|}} X + d_1 \sqrt{\frac{1}{|d_1^2 d_2 d_3|}} YZ, \\ \frac{d^q}{dt^q} \left( \pm \sqrt{\frac{1}{|d_1 d_3|}} Y \right) &= \pm b \sqrt{\frac{1}{|d_1 d_3|}} Y + d_2 \sqrt{\frac{1}{|d_1 d_2^2 d_3|}} XZ, \\ \frac{d^q}{dt^q} \left( \pm \sqrt{\frac{1}{|d_1 d_2|}} Z \right) &= \pm c \sqrt{\frac{1}{|d_1 d_2|}} Z + d_3 \sqrt{\frac{1}{|d_1 d_2 d_3^2|}} XY,\end{aligned}$$

从而有,

$$\begin{aligned}\frac{d^q X}{dt^q} &= ax \pm \operatorname{sgr}(d_1) YZ, \\ \frac{d^q Y}{dt^q} &= by \pm \operatorname{sgr}(d_2) XZ, \\ \frac{d^q Z}{dt^q} &= cz \pm \operatorname{sgr}(d_3) XY,\end{aligned}$$

因此系统(7)与系统(8)拓扑等价.

**推论 1** 当  $d_1 > 0, d_2 < 0, d_3 < 0$  时, 系统(7)与系统

$$\begin{aligned}\frac{d^q x}{dt^q} &= ax + yz, \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= by - xz, \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= cz - xy,\end{aligned} \quad (9)$$

和系统

$$\begin{aligned}\frac{d^q x}{dt^q} &= ax - yz, \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= by + xz, \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= cz + xy,\end{aligned} \quad (10)$$

拓扑等价.

**推论 2** 系统(5)与系统(6)拓扑等价.

由以上证明可知, 系统(7)二次项的系数仅仅影响系统轨迹相的形状, 当二次项参数变化时(符号不变)系统的相平面图仅在三个方向上进行拉伸或缩小, 而系统的稳定性没有任何变化.

以下考虑系统(7). 设  $b < 0, c < 0, 0 < a < -(b+c), d_1 > 0, d_2 < 0, d_3 < 0$ , 求得此系统有五个平衡点:

$$\begin{aligned}S_0 &= (0, 0, 0), \\ S_1 &= (x_-, y_+, z_+), \\ S_2 &= (x_+, y_-, z_+), \\ S_3 &= (x_+, y_+, z_-), \\ S_4 &= (x_-, y_-, z_-).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{其中 } x_+ &= \sqrt{\frac{bc}{d_2 d_3}}, y_+ = \sqrt{\frac{-ac}{d_1 d_3}}, z_+ = \sqrt{\frac{-ab}{d_1 d_2}}, x_- = \\ &-\sqrt{\frac{bc}{d_2 d_3}}, y_- = -\sqrt{\frac{-ac}{d_1 d_3}}, z_- = -\sqrt{\frac{-ab}{d_1 d_2}}.\end{aligned}$$

设  $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}}, z_{\text{eq}})$  为系统(9)的平衡点, 则此系统在  $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}}, z_{\text{eq}})$  处的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} a & d_1 z_{\text{eq}} & d_1 y_{\text{eq}} \\ d_2 z_{\text{eq}} & b & d_2 x_{\text{eq}} \\ d_3 y_{\text{eq}} & d_3 x_{\text{eq}} & c \end{bmatrix},$$

其特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - J| = \lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3,$$

其中

$$\begin{aligned}p_1 &= -(a + b + c), \\ p_2 &= ab + bc + ac - d_2 d_3 x_{\text{eq}}^2 \\ &\quad - d_1 d_3 y_{\text{eq}}^2 - d_1 d_2 z_{\text{eq}}^2 = 0, \\ p_3 &= ad_2 d_3 x_{\text{eq}}^2 + bd_1 d_3 y_{\text{eq}}^2 + cd_1 d_2 z_{\text{eq}}^2 \\ &\quad - 2d_1 d_2 d_3 x_{\text{eq}} y_{\text{eq}} z_{\text{eq}} - abc.\end{aligned}$$

为了解方程

$$\lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3 = 0, \quad (11)$$

令  $\lambda = \mu - \frac{p_1}{3}$ , 得到  $\mu^3 + p\mu + q = 0$ , 其中

$$p = p_2 - \frac{p_1^2}{3}, q = p_3 - \frac{p_1 p_2}{3} + \frac{2p_1^3}{27}.$$

记  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ . 根据卡丹公式, 如果  $\Delta > 0$ , 则方程

(11) 有一个实根

$$\lambda_1 = -\frac{p_1}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

和一对共轭复根

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3} &= -\frac{p_1}{3} - \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \right) \\ &\quad \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left( \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \right).\end{aligned}$$

如果取一组系数满足下列条件:

$$\begin{aligned}b < 0, c < 0, 0 < a < -(b+c), \\ d_1 > 0, d_2 < 0, d_3 < 0,\end{aligned}$$

$$\Delta > 0 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} < 0,$$

$$-\frac{p_1}{3} - \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \right) > 0,$$

(12)

则  $\lambda_1 < 0, \text{Re}(\lambda_{2,3}) > 0, |\lambda_1| > \text{Re}(\lambda_{2,3})$ . 此时系统(7)的平衡点满足 Shil'nikov 定理<sup>[28]</sup>.

当  $(a, b, c) = (5, -3.4, -10)$   $(d_1, d_2, d_3) = (2, -3, -4)$  时, 系统(7)满足条件(12). 系统(7)平衡点及其对应的特征值分别为

$$S_0 = (0 \ 0 \ 0):$$

$$\lambda_1 = 5 \ \lambda_2 = -3.4 \ \lambda_3 = -10,$$

$$S_1 = (-\sqrt{17/6} \ \sqrt{25/4} \ \sqrt{17/6}):$$

$$\lambda_1 = -12.649 \ \lambda_{2,3} = 2.1248 \pm 7.0172i,$$

$$S_2 = (\sqrt{17/6} \ -\sqrt{25/4} \ \sqrt{17/6}):$$

$$\lambda_1 = -12.649 \ \lambda_{2,3} = 2.1248 \pm 7.0172i,$$

$$S_3 = (\sqrt{17/6} \ \sqrt{25/4} \ -\sqrt{17/6}):$$

$$\lambda_1 = -12.649 \ \lambda_{2,3} = 2.1248 \pm 7.0172i,$$

$$S_4 = (-\sqrt{17/6} \ -\sqrt{25/4} \ -\sqrt{17/6}):$$

$$\lambda_1 = -12.649 \ \lambda_{2,3} = 2.1248 \pm 7.0172i.$$

### 4. 数值模拟

根据不等式(4), 要使系统(7)产生混沌, 则  $q > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{7.0172}{2.1248}\right) \approx 0.81$ . 取参数  $(a, b, c) = (5, -3.4, -10)$   $(d_1, d_2, d_3) = (2, -3, -4)$ , 根据预估-校正法<sup>[10 27 29]</sup>, 利用 Matlab 模拟了  $q = 0.80$  和  $q = 0.82$  的结果, 如图 2—6 所示.

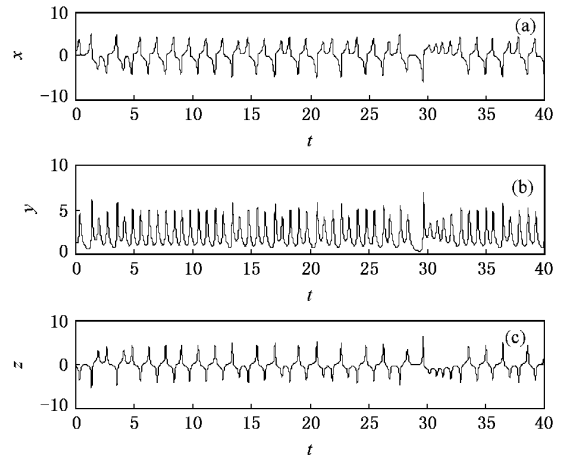


图 2 系统(7)的混沌时间序列 ( $q = 0.82, y_0 > 0$ ) (a)  $x(t)$  (b)  $y(t)$  (c)  $z(t)$

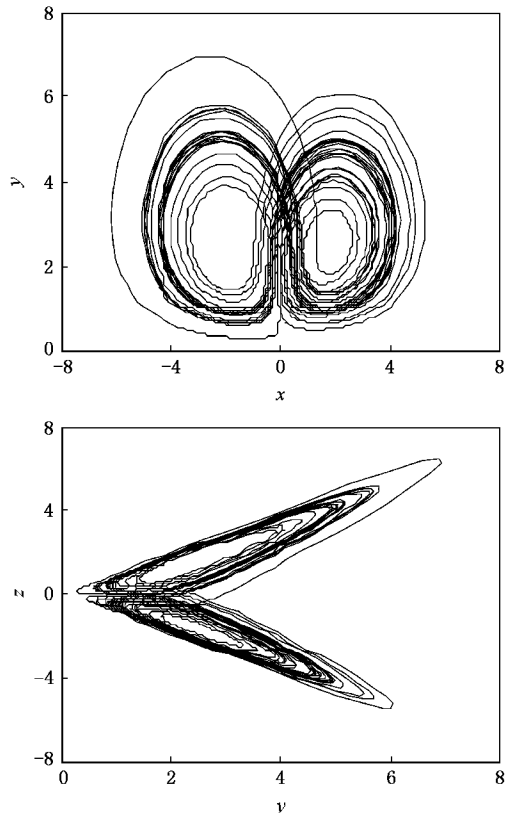
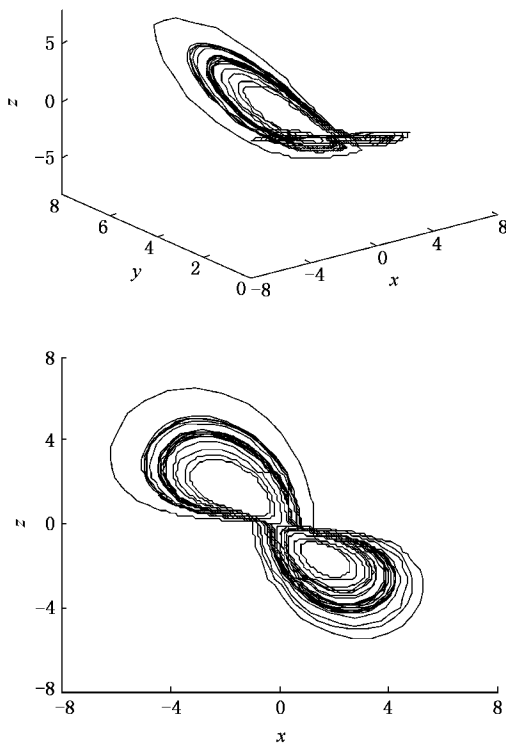


图 3 系统(7)的三维图像及相平面图 ( $q = 0.82, y_0 > 0$ )

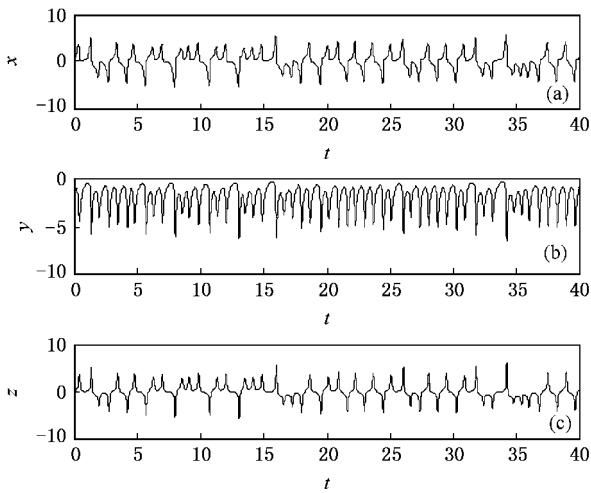


图 4 系统(7)的混沌时间序列 ( $q=0.82, y_0 < 0$ ) (a)  $x(t)$  (b)  $y(t)$  (c)  $z(t)$

由模拟结果可知,此系统同时存在左右两个不

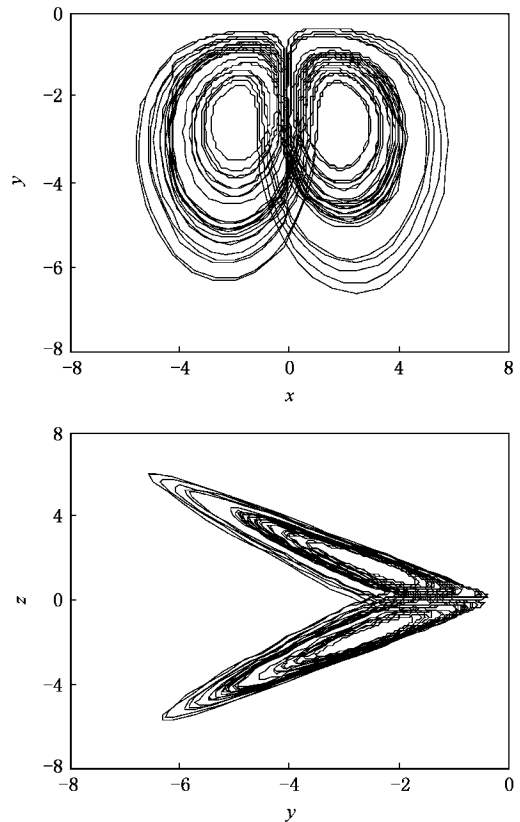
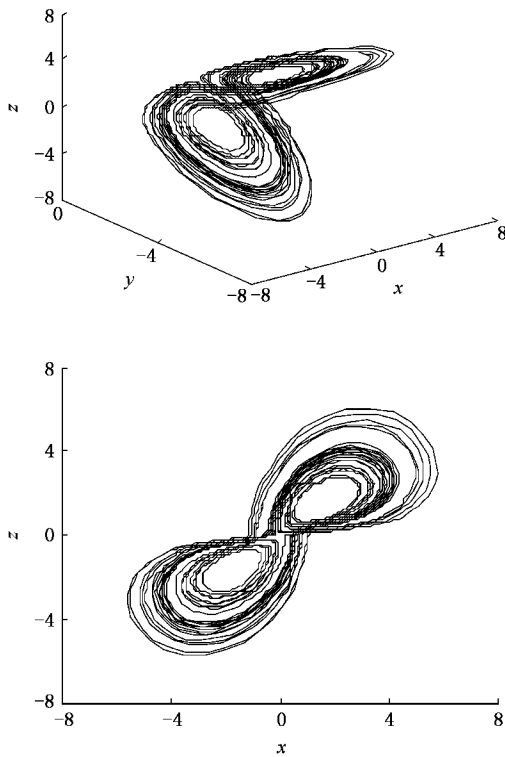


图 5 系统(7)的三维图像及相平面图 ( $q=0.82, y_0 < 0$ )

相交 2- 涡卷混沌吸引子. 当初始条件中  $y_0 < 0$ , 则始终有  $y(t) < 0$ ; 同样若  $y_0 > 0$ , 则始终有  $y(t) > 0$ . 如图 7 所示.

### 5. 结 论

当整数阶混沌系统在一组参数下产生混沌吸引子, 若在这组参数下将此系统推广到分数阶后仍出现混沌吸引子, 则必须满足系统平衡点处的稳定性保持不变. 本文分数阶混沌系统的二次项系数仅仅控制了吸引子的大小, 而丝毫没有影响系统的稳定性, 因此二次项系数可以在满足符号要求的条件下任意变动, 但并不会影响系统是否产生混沌吸引子. 此分数阶系统仍然存在一对互不相交的 2- 涡卷混沌吸引子. 得到系统产生混沌吸引子的最小阶为 2.46.

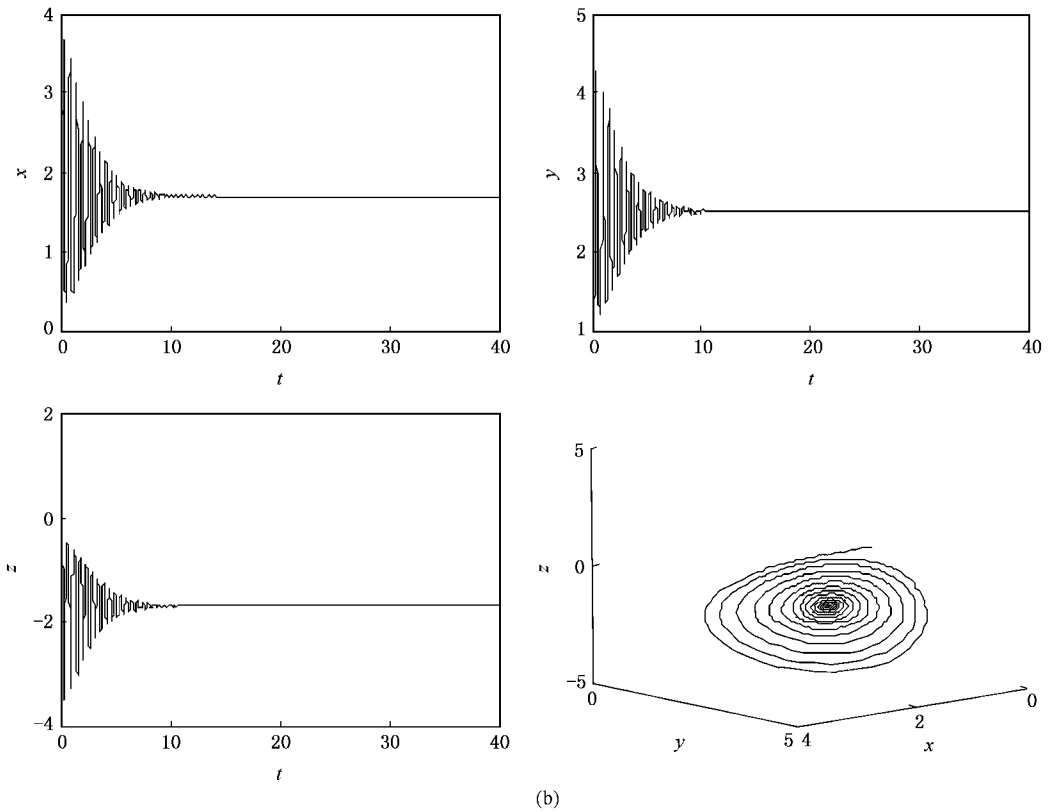
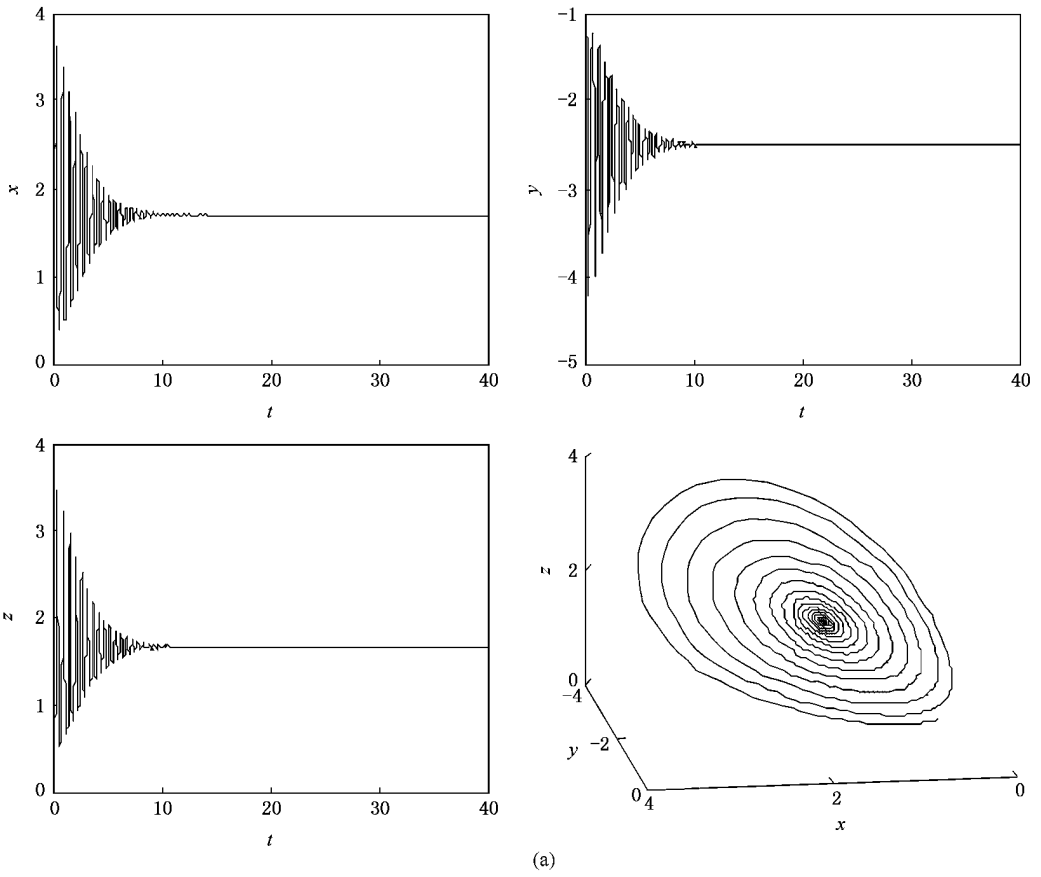


图 6 系统 (7) 的模拟结果  $q=0.80$  (a)  $y_0 < 0$  (b)  $y_0 > 0$

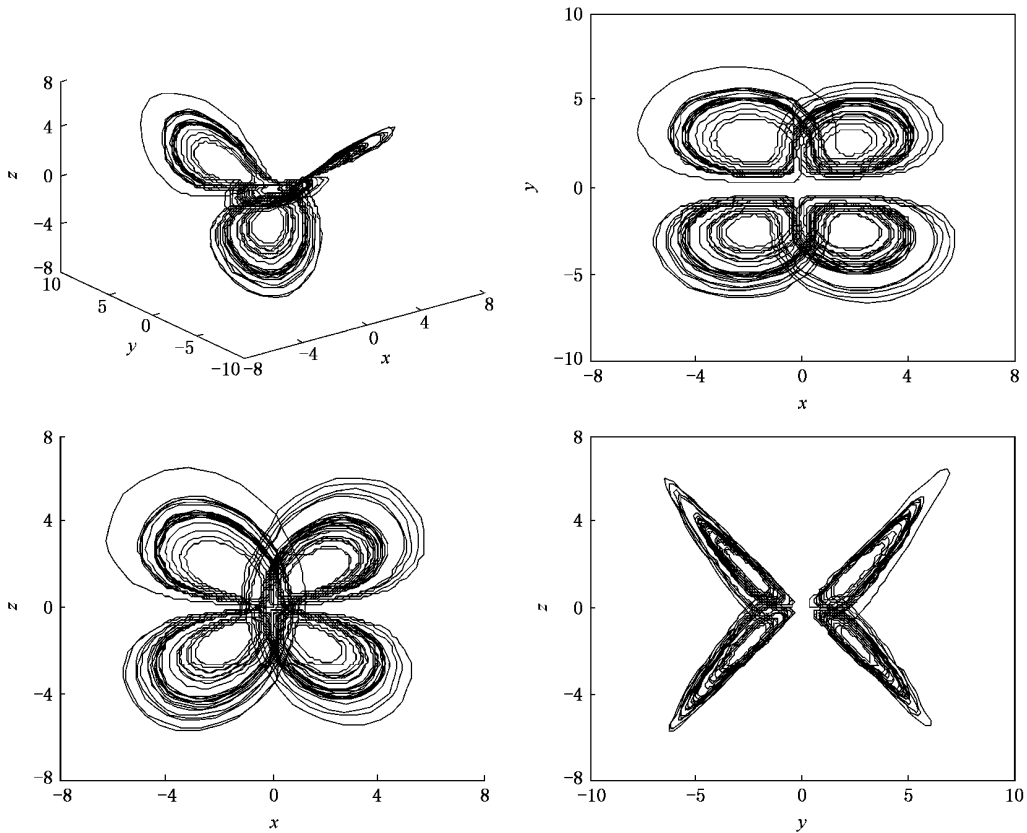


图 7 系统 7 同时存在的两个不相交的吸引子  $(a, b, c) = (5, -3.4, -10), q = 0.82$

- [ 1 ] Min L Q, Zhang X D, Chen G R 2005 *Int. J. Bifurc. Chaos* **15** 119
- [ 2 ] Zhang X D, Zhang L L, Min L Q 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 2114
- [ 3 ] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 131
- [ 4 ] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [ 5 ] Lu J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
- [ 6 ] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 1031
- [ 7 ] Lu J H, Chen G R, Chen D, Celikovsky S 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
- [ 8 ] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **16** 339
- [ 9 ] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 549
- [ 10 ] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 443
- [ 11 ] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys. Soc.* **14** 6
- [ 12 ] Lu J G 2005 *Chin. Phys.* **14** 1517
- [ 13 ] Lu J G, Chen G R 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **27** 685
- [ 14 ] Lu J G 2006 *Chin. Phys.* **15** 301
- [ 15 ] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 ( in Chinese )
- [ 王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922 ]
- [ 16 ] Lu J J, Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 1586
- [ 17 ] Shao S Q, Gao X, Liu X W 2007 *Chin. Phys.* **16** 2612
- [ 18 ] Wu Z M, Xie J Y 2007 *Chin. Phys.* **16** 1901
- [ 19 ] Zhou P 2007 *Chin. Phys.* **16** 1263
- [ 20 ] Zhang C F, Gao J F, Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 ( in Chinese ) [ 张成芬、高金峰、徐 磊 2007 物理学报 **56** 5124 ]
- [ 21 ] Liu W B, Chuan R C 2003 *Int. J. Bifur. Chaos* **13** 261
- [ 22 ] Hsien K C, Ching I L 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **21** 957
- [ 23 ] Long J S 2007 *Chaos, Solitons & Fractals* **31** 1203
- [ 24 ] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* ( San Diego, CA : Academic Press )
- [ 25 ] Matignon D 1996 *In : IMACS, IEEE-SMC, Lille, France* 963
- [ 26 ] Ahmed E, El-Sayed A M A, Elsaka H A A 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **325** 542
- [ 27 ] Mohammad S T, Mohammad H 2007 *Physics Letters A* **367** 102
- [ 28 ] Silva, C P 1993 *IEEE Trans. Circuits Syst-I* **40** 675
- [ 29 ] Wei H D 2007 *J. Computational and Applied Mathematics* **206** 174

# Study on a class of chaotic systems with fractional order

Zhao Pin-Dong<sup>†</sup> Zhang Xiao-Dan

( *Applied Science School , University of Science and Technology Beijing , Beijing 100083 , China* )

( Received 30 September 2007 ; revised manuscript received 23 October 2007 )

## Abstract

In this paper , a class of chaotic systems with fractional order is generalized and their topological equivalence is proved. It indicates that the necessary condition for a system with fractional order to generate chaotic attractor is to maintain the stability of the equilibrium points of the system. Numerical simulation shows that , similar to chaotic systems with integer order , the class of chaotic systems with fractional order can also generate a couple of double-scroll chaotic attractors .

**Keywords** : fractional order , chaos , stability

**PACC** : 0545

---

<sup>†</sup> E-mail : zhaopd@126.com