

静态堆积颗粒中的力链分布^{*}

孙其诚[†] 王光谦

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

(2007 年 12 月 4 日收到; 2008 年 2 月 28 日收到修改稿)

颗粒物质是由众多离散颗粒组成的软凝聚态物质, 涉及多个物理层次结构和机制, 是多尺度问题. 首先阐述了颗粒物质多尺度力学的研究框架, 指出颗粒间接触力链构成的细观尺度是核心, 颗粒物质显示出的独特静态堆积特性和动态流变特性都与细观尺度力链的复杂演变规律直接相关. 围绕着定量描述力链特征这一目标, 采用严格的球形颗粒 Hertz 法向接触理论和 Mindlin-Deresiewicz 切向接触理论, 对重力作用下 12000 个球心共面的二维等径颗粒静态堆积进行了离散动力学模拟, 对力链分布特征、接触力规律等做了量化分析, 考察了颗粒摩擦系数的影响. 这些结果有利于从力链角度揭示颗粒静态和动态性质.

关键词: 颗粒物质, 力链, 离散模型, 多尺度力学

PACC: 0320, 4610

1. 引 言

颗粒物质是由众多离散颗粒组成的软凝聚态物质, 毗邻颗粒间发生接触形成诸多强度迥异的力链, 它们相互交接构成网络并非均匀地贯穿于颗粒物质内. 图 1 为 13000 个颗粒在重力作用下静止堆积时内部的力链分布, 图中的浅灰色线表示弱力链, 深灰色线和黑色线则表示强力链, 线的粗细正比于接触力的大小, 法向和切向接触力分别采用文献 [1] 介绍的 Hertz 理论和 Mindlin-Deresiewicz 理论计算. 图中右侧所示为单条力链, 颗粒被挤压成拱形, 当颗粒受到接触力作用线处于摩擦角范围之内(图中虚线所示), 则力链中的颗粒处于自锁状态. 从图 1 可以看出, 虽然强力链数目较少, 却支撑了颗粒体系的大部分重量, 该力链上颗粒的轻微差异都会造成“蝼蚁之穴, 溃堤千里”的惊人效果, 如自然界中很小震动就可能引发雪崩和塌方. 从图 1 还可以看出, 弱力链数目按照指数规律增加, 几乎均匀地分布在颗粒介质内, 对强力链的稳定性具有辅助作用, 并参与强力链断裂后的重构. 已有的一些实验很好体现了强力链和弱力链的存在及其影响. 例如, 一根圆棒竖直穿行圆筒中的玻璃珠时, 圆棒受到的滑动摩擦力具有

宏观准周期性振荡和局部随机微小起伏的规律, 前者反映了强力链被滑动圆棒打断和重构的过程, 后者则源于弱力链上颗粒与圆棒的表面蠕动摩擦^[2]. 在二维颗粒流实验中, 当颗粒流量或出口尺寸处于某临界值时, 流量突然减小, 从稀疏流突变为密集流. 这种瓶颈效应的内在原因是由于开口处形成了架拱, 而架拱就是由一条或多条强力链组成的^[3].

人们对颗粒接触力进行了实验测量和数值模拟. 在重力或外载荷作用下, 稳定堆积颗粒介质中某一截面上的颗粒接触力易于实验测量. 例如, Løffvoll 等^[4]采用压力传感器检测了在重力作用下颗粒静态堆积时底部颗粒的接触力; 文献 [5, 6] 分别采用显色灵敏复写纸压痕方法和光弹性方法, 对外载荷作用下边壁处颗粒的接触力进行了测量. 目前, 实验方法存在的主要不足是无法检测弱接触力, 不能对颗粒介质内部接触力进行无干扰检测. 接触力链网络构型及强度除了与颗粒表面摩擦系数等参数有关外, 还对初始条件和边界条件非常敏感, 比如我们所熟知的沙堆内部压力凹陷分布就与形成历史密切相关. 目前, 更多的是在颗粒体系上有控制地施加干扰, 研究力链受激发后的演变规律. 例如, 当单一圆盘从圆筒内颗粒体系表面以恒定速度竖直下压时, 圆盘受阻力穿插深度增加而相继出现线性区、

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 50679032)和国家重点基础研究发展规划(批准号: 2007CB714100)资助的课题.

[†] E-mail: qcsun@tsinghua.edu.cn

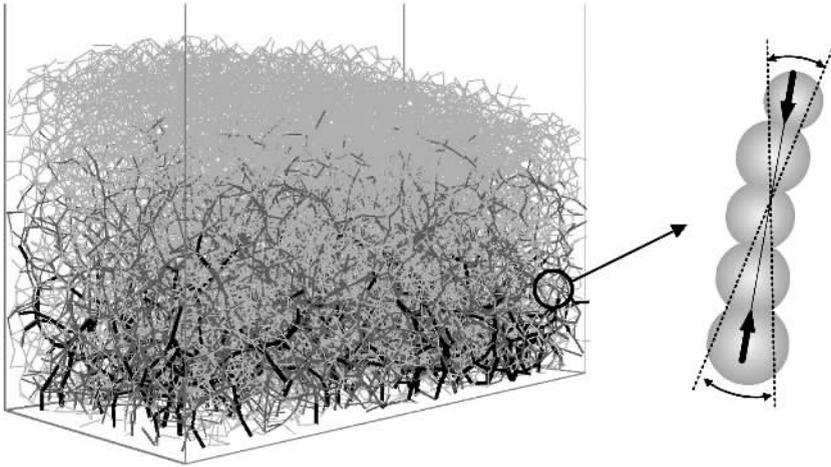


图 1 13000 个颗粒在重力作用下静止堆积时内部力链构型

Jassen 区和底部影响区等^[7];单根圆棒与颗粒物质发生水平剪切时,所受摩擦阻力随颗粒填充高度增加而分别出现锯齿形及随机变化和步进变化的周期性振荡^[8],都说明力链受局部应力扰动后的重构规律强烈地依赖于边界条件.颗粒物质表现出来的这些性质都是软凝聚态物质的基本特征.

2. 以力链为核心的多尺度力学

力链具有大于单个颗粒粒径、小于颗粒体系的尺寸,它不仅与颗粒材料的内禀性能(如杨氏弹性模量、泊松比和表面摩擦系数等)有关,而且又受颗粒体系边界条件、初始条件和外载荷的影响.因此,对颗粒物质的研究涉及多个物理层次结构和机制,必然是多尺度力学问题.微观尺度的单颗粒、细观尺度的力链和宏观尺度的颗粒体系,而细观尺度力链结构的形成及演变规律则是颗粒物质多尺度力学的核心.颗粒物质显示出许多独特的静力和动力特性,为现有力学和物理理论所不能描述^[9,10],其根源就是我们目前对细观尺度力链结构及其复杂力学行为不清晰造成的.

颗粒介质研究的三个尺度,各自有特定的研究内容(图 2).微观尺度研究的关键是颗粒接触力学理论,现已比较成熟.比如法向接触力理论,在不计表面能时可采用线性胡克定律或 $3/2$ 幂次的 Hertz 接触力定律.在考虑表面能时可采用 Johnson-Kendall-Roberts (JKR) 理论和 Derjagin-Muller-Toropov (DMT) 理论,JKR 理论适用于大粒径、高黏附能的软材料,DMT 理论则适用于小粒径、低黏附能的坚硬

材料.目前的难题是湿颗粒动力学问题,亦即颗粒与间隙液体的耦合,涉及黏附力和润滑力的计算等.细观尺度的研究重点是力链构型及其演变规律的定性描述和定量化以及颗粒内禀性能参数和外界控制参数的影响,目前这方面的实验和理论研究工作较多,但是仍不系统.宏观尺度的研究重点在于静态性质的确定、应力-应变关系的确定、运动规律的确定等^[11].

图 2 简要描述了三个尺度间的关系.微观尺度主要决定于颗粒材料内禀性能参数,细观尺度则基于微观尺度的接触力构成力链,并在宏观尺度控制参数下演变.细观力链抵抗外载荷而动态演化规律决定了宏观尺度的摩擦响应和弹性、流变关系等宏观统计规律.例如,Hidalgo 等^[12]进行了封闭容器内三维颗粒体系的单轴压缩实验,发现压力 $F \propto \delta^{2.6}$,其中 δ 为形变,大于 Hertz 接触力 $F \propto \delta^{1.5}$;彭政等^[13]分析认为,该体系的形变包含细观的力链重组形变和力链上颗粒的 Hertz 微观形变两部分,对形变的幂次贡献分别为 1.0 左右和 1.5.一般而言,颗粒表面摩擦系数和颗粒物质所占的体积分数更是直接影响力链结构及其稳定性.当颗粒物质所占的体积分数较小时,颗粒较为松散而不能形成强力链;同样,当表面摩擦系数较小时,即使微小剪切也会使得力链断裂,因而也不能形成稳定力链.所以这两个参数是决定颗粒介质静力性质、特别是流动形态的重要参数^[10,14,15].

基于合理的颗粒接触力理论,离散颗粒动力学方法逐渐成为研究颗粒物质静态堆积和动态演变规律的有力工具.Silbert 等^[16]对不同颗粒表面摩擦系

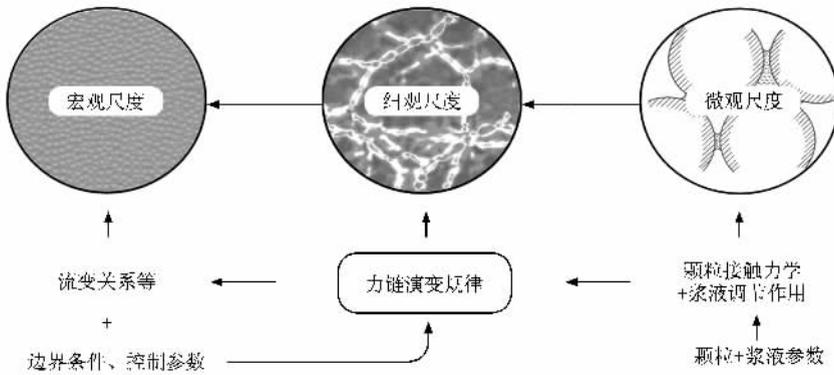


图2 颗粒介质的多尺度力学研究框架

数下三维颗粒堆积的模拟发现,内部排布规律强烈地依赖于颗粒摩擦系数,当摩擦系数减至零时,配位数峰值平滑地从4增加到6。

3. 离散颗粒动力学模型

离散颗粒动力学不同于连续介质方法对颗粒物质的描述,根据颗粒间接触变形计算作用力,依此更新每个颗粒的速度和位置,进而确定性地演化颗粒系统^[17],逐渐成为研究颗粒介质静态和动态现象、提取实验不可能获得的内部应力和运动信息的有效工具。颗粒接触理论是离散颗粒动力学的核心,基于刚度系数概念的软球模型使用较为广泛,目前大部分工作中采用颗粒间线弹性接触本构,其中刚度系数为常数。事实上,刚度系数除了与颗粒材料的内禀性能参数(杨氏弹性模量、泊松比等)有关外,在接触过程中还随着接触形变量而变化。孙其诚和王光谦^[10]以单个沙粒与边界的动态接触为例,计算发现刚度系数会非线性变化近10倍。Storakers等^[18]在研究二维颗粒体试样应力-应变关系时,考虑了表面光滑颗粒的非线性Hertz接触本构,但是他们在处理切向接触力时忽略了切向接触力对加载历史的依赖,这样必然造成颗粒接触过程及颗粒运动状态的差异,进而对颗粒介质内力链的形成过程以及整个力链网络构型和强度造成影响,正如沙堆中压力凹陷与制备历史相关一样。这是软球模型不可克服的主要缺陷之一,文献^[10]对此做了细致讨论,认为合理的标定刚度系数是采用软球模型进行基础研究的关键。

本文模拟了12000个球心共面等粒径颗粒的稳定堆积,选取沙粒的物性参数,粒径 $d = 2.5 \text{ mm}$,密

度 $\rho = 2650 \text{ kg/m}^3$,杨氏模量 $E = 100 \text{ MPa}$,泊松比 $\nu = 0.3$,摩擦系数 $\mu = [0, 0.75]$ 。沙粒间的黏连作用可以忽略不计,法向和切向接触力分别采用Hertz理论和Mindlin-Deresiewicz理论计算。这些理论严密,仅需颗粒杨氏模量、泊松比和摩擦系数等可测参数,无人为雕琢空间。

3.1. 法向接触力(Hertz接触理论)

如图3所示,半径分别为 R_1 和 R_2 的两球形颗粒发生接触,法向重叠量 α 为

$$\alpha = R_1 + R_2 - |r_1 - r_2| > 0,$$

其中 R_1 和 R_2 分别为颗粒1和颗粒2的半径, r_1 和 r_2 是两颗粒的球心位置矢量。如果接触变形不大,相应的法向接触力 F 可由Hertz理论计算,即

$$F = \frac{4}{3} E^* (R^*)^2 \alpha^{3/2}, \quad (1)$$

其中 R^* 和 E^* 分别为当量半径和杨氏模量当量,

$$1/R^* = 1/R_1 + 1/R_2,$$

$$1/E^* = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2.$$

其中 E_1 和 ν_1 , E_2 和 ν_2 分别为颗粒1、颗粒2的杨氏模量和泊松比。

由(1)式得到在一个时步内如果两接触颗粒之间的重叠量增量为 $\Delta\alpha$ 时,相应的法向接触力增量为

$$\Delta F = 2aE^* \Delta\alpha, \quad (2)$$

其中 a 为接触半径,

$$a = (\alpha R^*)^{1/2}.$$

在一个时步内颗粒间重叠量和法向接触力予以更新,

$$\begin{aligned} \alpha^{\text{new}} &= \alpha^{\text{old}} + \Delta\alpha, \\ F^{\text{new}} &= F^{\text{old}} + \Delta F. \end{aligned} \quad (3)$$

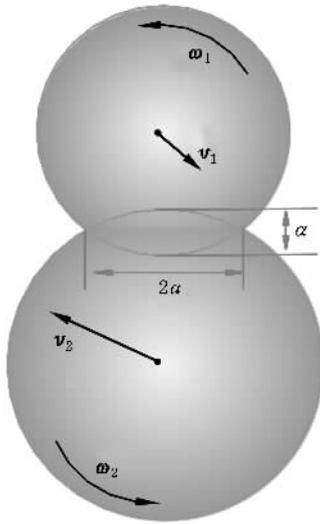


图3 质心速度和旋转速度分别为 v_1, v_2 和 ω_1, ω_2 的两球形颗粒接触变形示意图 重叠量为 α , 接触区域半径为 a

这里上标 old 和 new 分别表示该时步开始和结束.

3.2. 切向接触力(Mindlin-Deresiewicz 接触理论)

接触表面相对切向位移增量 $\Delta\delta$ 对应的切向力增量 ΔT 与加载历史有关,

$$\Delta T = 8aG^* \theta_\kappa \Delta\delta + (-1)^\kappa \mu (1 - \theta_\kappa) \Delta F, \quad (4)$$

$\kappa = 0, 1, 2$ 分别对应加载、卸载和卸载后重新加载的情况.

如果 $|\Delta T| < \mu \Delta F$, 则有 $\theta_\kappa = 1$. 如果 $|\Delta T| \geq \mu \Delta F$ 则有

$$\begin{aligned} \theta_\kappa &= \left(1 - \frac{T + \mu \Delta F}{\mu F}\right)^{1/3} \quad (\kappa = 0), \\ \theta_\kappa &= \left(1 - \frac{(-1)^\kappa (T - T_\kappa) + 2\mu \Delta F}{2\mu F}\right)^{1/3} \quad (\kappa = 1, 2). \end{aligned} \quad (5)$$

这里 G^* 是剪切模量当量,

$$G^* = (2 - \nu_1) G_1 + (2 - \nu_2) G_2,$$

其中 G_1 和 G_2 分别是两颗粒的剪切模量; T_κ 是考虑卸载或重加载历史的切向接触力, 在每一时步予以更新,

$$T_\kappa = T_\kappa - (-1)^\kappa \mu \Delta F.$$

从(4)式可以看出, 由切向位移增量 $\Delta\delta$ 引起的切向力增量 ΔT , 不仅依赖于加载历史, 也受到法向接触力的影响.

在一个时步内颗粒间切向重叠量和接触力予以更新,

$$\begin{aligned} \delta^{\text{new}} &= \delta^{\text{old}} + \Delta\delta, \\ T^{\text{new}} &= T^{\text{old}} + \Delta T. \end{aligned} \quad (6)$$

3.3. 时间步长

两颗粒接触变形时, 接触面受到交变应力作用而产生沿颗粒表面传播的瑞利偏振波. 实验中发现颗粒发生接触碰撞时, 总能耗的 70% 是通过瑞利波消耗的. 两颗粒间的接触作用应仅限于发生碰撞的两颗粒上, 而不应该通过瑞利波传递到其他颗粒上, 因此离散颗粒动力学方法中的时间步长应小于瑞利波传递半球面所需要的时间. 对于由不同颗粒不同时间组成的颗粒系统, 时间步长可表示为

$$\Delta t_c \leq \pi \left[\frac{R}{0.1631\nu + 0.8766\sqrt{\frac{\rho}{G}}} \right]_{\min}. \quad (7)$$

4. 结果与分析

4.1. 接触力链和接触应力的分布

本文模拟得到了 12000 个球心共面等粒径颗粒在重力作用下的稳定堆积. 设无量纲接触力 f 为接触力与接触力平均值的比值, 图 4 显示了不同 f 的力链分布. 在水平方向上采用周期性边界条件, 进而避免了压强在底部发生饱和. 重力加速度为 9.8 m/s^2 , 在模拟中仅改变颗粒表面摩擦系数 $\mu = [0, 0.75]$.

从图 4(a) 可以看出, 当 $\mu = 0$ 时, 颗粒体系内出现明显的晶格裂纹, 整个体系被分成几个块体, 这是表面光滑且等径颗粒规则排布时的特有现象. 颗粒块体中绝大部分都是弱力链, 而极少量的强力链分布在晶格裂纹带上, 主要来自毗邻颗粒块体的挤压. 计算表明此时颗粒物质的体积分数为 0.82, 配位数峰值为 6, 平均值为 5.2. 从图 4(b) 可以看出, 当 $\mu = 0.75$ 时, 表面摩擦系数增大, 颗粒分布具有随机性. 力链分布变化很大, 弱力链仍然贯穿于整个颗粒体系; 由于重力作用, 强力链主要分布在中底部, 中部的强力链呈准直线形, 底部强力链相互链接形成架拱. 此时颗粒物质的体积分数为 0.74, 配位数峰值为 4, 平均值为 3.8. 颗粒物质的体积分数和颗粒表面摩擦系数往往是决定力链稳定性和强度的重要参数, 一般而言, 摩擦系数和体积分分数越大则力链会越稳定, 但是从图 4 可以看出两者存在不可分割的内在影响: 摩擦系数增大时, 颗粒体积分分数降低. 因而,

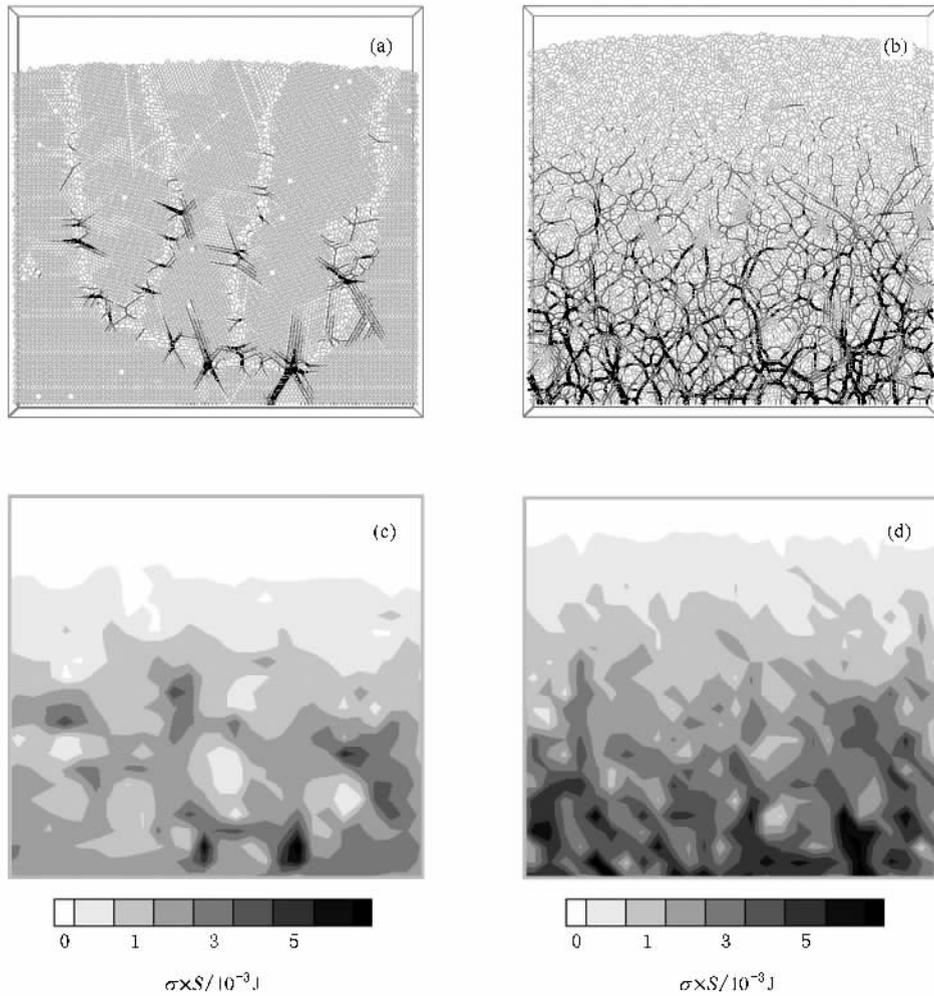


图4 12000个球心共面颗粒在重力作用下堆积时的力链构型和应力分布。浅灰色线表示弱力链($f \leq 1.3$)，深灰色线($1.3 < f \leq 3.0$)和黑色线($f > 3.0$)表示强力链。线的粗细与接触力大小成正比。(a) $\mu = 0$ 时的力链构型，(b) $\mu = 0.75$ 时的力链构型。(c) $\mu = 0$ 时的应力分布，(d) $\mu = 0.75$ 时的应力分布。

这两个参数对力链的影响需综合加以考虑。

散乱排布的接触力链的量化非常困难，一般需进行简化。例如，类比分子运动论中的各态历经假设，提出了各种力链在颗粒体内空间各处出现的概率相等的假设，进而建立了关于力链的系综理论。对于规则排布的颗粒，则从几何角度分析了力链构型。对力链的描述是必须要解决的难题，是颗粒物质多尺度研究的重点之一。在本文中，我们把颗粒离散接触力的分布与堆积颗粒中面积为 S 的区域内平均应力对应起来，

$$\sigma = \frac{1}{S} \sum_{\langle ij \rangle} f_{ij}^c \quad (8)$$

这里

$$r_{ij}^c = r_j - r_i,$$

其中 r_i 和 r_j 分别是该区域中发生接触的颗粒 i 和

颗粒 j 的位置矢量； f_{ij} 是颗粒 i 作用在颗粒 j 上的力。

图4(c)和(d)给出了计算得到的应力分布，图中的应力值大小相差13倍。图4(c)中的大应力分布位置与图4(a)中强力链的分布位置基本一致，而图4(d)中的应力和图4(b)中力链分布有差距，大应力区域沿着重力方向呈长条形分布，这说明接触力在重力方向更为集中，能更有效抵抗重力，而水平方向力链架拱对应力的贡献并不大。

4.2. 接触力的分布

Radjai 等^[19]在二维和三维的数值模拟中发现，当 $f < 1$ 时，分布概率

$$P(f) \propto f^\alpha;$$

当 $f > 1$ 时，分布概率

$$P(f) \propto e^{-\beta f},$$

其中 $\alpha \approx 0$, 且 $\alpha > 0$; $1.0 < \beta < 1.9$. Mueth 等^[20]在三维颗粒的单轴压缩中提出了

$$P(f) = a(1 - b(e^{-f})^\alpha) e^{-\beta f},$$

其中 $a = 3$, $b = 0.75$, $\beta = 1.5$. 这一公式可以很好拟合他们的实验结果, 但没有给出解释. 在本工作中, 我们采用

$$P(f) = kf^\alpha e^{-\beta f} \quad (9)$$

对计算结果进行了拟合, 结果如图 5 所示.

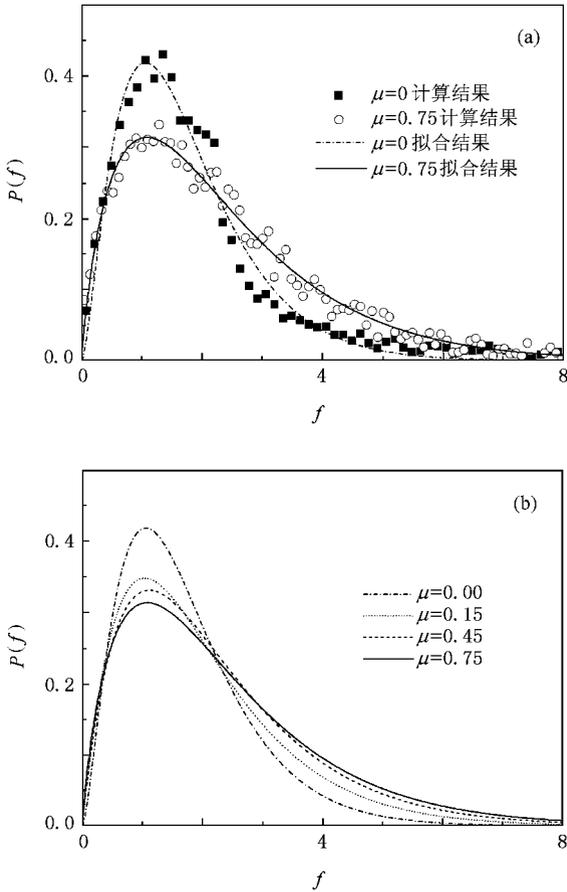


图 5 颗粒表面摩擦系数对 f 分布概率 $P(f)$ 的影响 (a) f 的计算数据及其拟合曲线 (b) 当 μ 取不同值时的 f 分布

从图 5 可以看出, 接触力分布峰值均在 $f = 1.1$ 附近, 颗粒摩擦系数对此没有影响. 但是随着 μ 的增加, 分布曲线变得较为平缓. 当 μ 从 0 增大到 0.75 时, 拟合系数 k 从 1.859 减小为 0.689, α 从 1.590 减小为 0.861, β 从 1.498 减小为 0.794.

本文的结果与 Mueth 等^[20]的实验结果有差异. 本文得到的结果是分布更宽泛, f 从 0 到 8, 使得分布概率曲线峰值稍小, 主要原因是本文研究重力作用下二维颗粒堆积情况, 而没有另外施加载荷.

Silbert^[21]在单纯考虑重力的情况下, 所得结果与本文工作得到的结果非常接近. Ngan^[22]考虑了单纯施加外载荷的情况, 发现当外载荷很小的情况下, 接触力几乎为零时的分布概率趋于峰值 0.75. 随着接触力的增大分布概率指数逐渐减小. 在本工作中颗粒间法向和切向接触力分别采用 Hertz 理论和 Mindlin-Deresiewicz 理论计算, 细致考虑了切向加载历史的依赖, 因此本文的计算结果更为准确.

4.3. 力链长度

离散动力学模拟提供了静态堆积颗粒的详尽接触细节, 我们统计了不同接触力的力链长度以及颗粒间接触力与重力夹角, 采用下式可以计算得到不同接触力 f 下的力链长度 L 和夹角 θ :

$$L = \sum_{\langle ij \rangle} |r_{ij}|, \quad (10)$$

$$\theta = \sum_{\langle ij \rangle} \theta_{ij},$$

其中

$$\theta_{ij} = \arccos[\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{g} / (|\mathbf{r}_{ij}| |\mathbf{g}|)] \quad (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{g} > 0),$$

$$\theta_{ij} = \pi - \arccos[\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{g} / (|\mathbf{r}_{ij}| |\mathbf{g}|)] \quad (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{g} \leq 0).$$

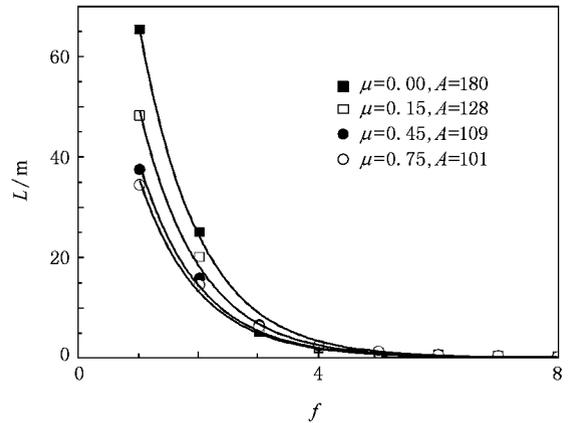


图 6 当 μ 取不同值时, 力链长度 L 与接触力的关系. 曲线为相应的拟合结果

图 6 所示为不同摩擦系数下力链长度 L 与接触力 f 的关系, 图中数据点为利用(10)式计算得到的结果, 曲线为拟合结果, 拟合函数为 $A \cdot e^{-f}$. 从图 6 可以看出, 随着接触力的增加而力链总长度按指数快速衰减, 这说明强力链数量很小. 这一点不难理解, 当两个颗粒发生接触时, 每一个接触力对应一个长度, 约为一个颗粒粒径, 因此每一个接触力分布区域内力链的总长度应为接触力数目与粒径的乘积. 由于当接触力大于 1.1, 接触力按指数减少, 此时力

链长度也必然按指数下降。从图 6 还可以看出,随着颗粒摩擦系数的增加,接触力链衰减的趋势变弱,这也与图 5 中接触力随摩擦系数的变化趋势一致。

4.4. 接触力与重力的夹角

由于颗粒随机地分散于颗粒体系内,一般情况下力链方向与外载荷方向并不一致,而是存在一定的夹角,采用(10)式计算得到了颗粒间接触力与重力的夹角 θ 随 f 的变化,结果如图 7 所示,图中数据点为计算结果,直线段为拟合结果,拟合函数为 $\theta =$

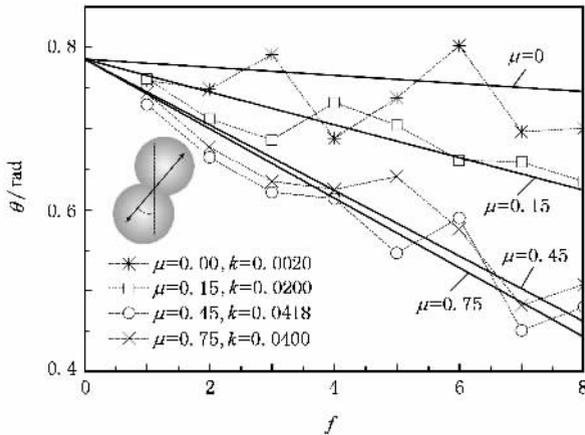


图 7 当 μ 取不同值时,颗粒间接触力与重力的夹角 θ 随 f 的变化

$\pi/4 + kf$, 内插图是重力方向与颗粒间接触力夹角 θ 示意图。接触力是法向和切向的合力,并不一定通过两接触颗粒的球心。从图 7 可以看出,当接触力较小时,夹角逼近 $\pi/4$,随着接触力的增加,夹角呈线性减小,当摩擦系数增大时,夹角减小更快。例如,当 $\mu = 0.75$ 时,夹角从 45° 减小到 26° 。这说明力链方向逐渐与重力方向一致。可以设想,当外载荷很大时强力链的方向基本与外载荷方向重合。Silbert 等^[16]统计了颗粒层内一截面上的颗粒接触力方向的分布,也发现强力链有很明显的方向性。

5. 结 论

通过对 12000 个球心共面的二维等径颗粒静态堆积的离散模拟发现,接触力分布峰值均在 $f = 1.1$ 附近, μ 对此没有影响,随着 μ 的增加,分布曲线变得较为平缓。当接触力较小时,接触力与重力夹角逼近 $\pi/4$,随着接触力的增加,夹角呈线性减小,当摩擦系数增大时,夹角减小更快。可以设想,当外载荷很大时强力链的方向基本与外载荷方向重合。这些结果揭示了颗粒物质内的多个物理层次结构和机制,为开展力链的动态演变规律研究打下了基础。

[1] Li Y, Xu Y, Thornton C 2005 *Powder Techn.* **160** 219
 [2] Du X N, Hu L, Kong W S, Wang W M, Wu Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6488 (in Chinese) [杜学能、胡林、孔维妹、王伟明、吴宇 2006 物理学报 **55** 6488]
 [3] Hou M Y, Chen W, Zhang T, Lu K Q, Chen C K 2004 *Physics* **33** 473 (in Chinese) [厚美瑛、陈唯、张彤、陆坤权、陈志强 2004 物理 **33** 473]
 [4] Işvöll G, Málþý K J, Flekký E G 1999 *Phys. Rev. E* **60** 5872
 [5] Blair D L, Mueggenburg N W, Marshall A H, Jaeger H M, Nagel S R 2001 *Phys. Rev. E* **63** 041304
 [6] Corwin E I, Jaeger H M, Nagel S R 2005 *Nature* **433** 1075
 [7] Stone M B, Barry R, Bernstein D P, Pelc M D, Tsui Y K, Schiffer P 2004 *Phys. Rev. E* **70** 041301
 [8] Albert I, Tegzes P, Kahng B, Albert R, Sample J G, Pfeifer M, Barabási A L, Vicsek T, Schiffer P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5122
 [9] Liu A J, Nagel S R 1998 *Nature* **396** 21
 [10] Sun Q C, Wang G Q 2008 *Adv. Mech.* **38** 87 (in Chinese) [孙其诚、王光谦 2008 力学进展 **38** 87]

[11] Jop P, Forterre Y, Pouliquen O 2006 *Nature* **441** 727
 [12] Hidalgo R C, Grosse C U, Kun F, Reinhardt H W, Herrmann H J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 205501
 [13] Peng Z, Hou M Y, Shi Q F, Lu K Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1195 (in Chinese) [彭政、厚美瑛、史庆藩、陆坤权 2007 物理学报 **56** 1195]
 [14] Campbell C S 2005 *J. Fluid Mech.* **539** 273
 [15] Goldenberg C, Goldhirsch I 2005 *Nature* **435** 188
 [16] Silbert L E, Grest G S, Landry J W 2002 *Phys. Rev. E* **66** 061303
 [17] Xu Y, Sun Q C, Zhang L, Huang W B 2003 *Adv. Mech.* **33** 251 (in Chinese) [徐泳、孙其诚、张凌、黄文彬 2003 力学进展 **33** 251]
 [18] Storakers B, Biwa S, Larsson P L 1997 *Int. J. Solids Struct.* **34** 3061
 [19] Radjai F, Jean M, Moreau J J, Roux S 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 274
 [20] Mueth D M, Jaeger H M, Nagel S R 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3164
 [21] Silbert L E 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 098002
 [22] Ngan A H W 2004 *Physica A* **339** 207

Force distribution in static granular matter in two dimensions^{*}

Sun Qi-Cheng[†] Wang Guang-Qian

(*State Key Laboratory for Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(Received 4 December 2007; revised manuscript received 28 February 2008)

Abstract

Granular matter is a large assemblage of individual solids, which is fundamentally different from any other type of matters, such as solid and liquid. The intrinsic nature of granular matter is of multi-scale, inclusive of microscale of particle size, mesoscale of force chain and macroscale of the bulk of granular matter. The mesoscale of force chain bridges single particle and granular matter, and leads to unique properties and behaviours of granular matters, and thus acts as the key issue in the study of granular matter. In this work, we firstly propose a multiscale methodology for granular matter dynamics, and point out that the characteristics of force chain is the key to the granular dynamics. We then propose a discrete element model based on rigorous Hertzian contact law and Mindlin-Deresiewicz contact theory for normal and tangential contact forces, respectively. The static packing of 12000 sand grains under the action of gravity in two dimensions is simulated, and the force chain pattern and stress distribution are obtained. The force distribution, force chain length distribution and the angle distribution are calculated and analyzed. Friction coefficient of particle is found to be a very sensitive factor affecting properties of granular matter, and thus its influence on the above parameters is studied as well.

Keywords : granular matter, force chain, discrete element method, multi-scale mechanics

PACC : 0320, 4610

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50679032) and the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2007CB714100).

[†] E-mail : qcsun@tsinghua.edu.cn