

# 玻色-爱因斯坦凝聚体系中的混沌隧穿行为<sup>\*</sup>

房永翠 杨志安<sup>†</sup>

(济南大学理学院, 济南 250022)

(2007 年 12 月 28 日收到, 2008 年 8 月 29 日收到修改稿)

研究了双势阱玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)系统在外加周期调制下的混沌相变过程,着重讨论了混沌现象对 BEC 系统隧穿的影响. 当外加调制频率与系统固有频率达到共振时,相平面会出现不稳定现象,即混沌现象. 在量子情况下,研究了系统的 Husimi 函数随时间的演化. 研究发现:当混沌现象出现时,系统中粒子间相互作用增大,使得混沌区域扩大,进而引起混沌辅助隧穿程度的变化.

关键词:玻色-爱因斯坦凝聚,混沌,隧穿

PACC: 0365, 0155, 7335

## 1. 引 言

1995 年在实验上实现了玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)<sup>[1,2]</sup>. BEC 的研究有着十分重要的科学意义和潜在的应用价值,已成为近年来理论研究和实验研究的热门课题<sup>[3-24]</sup>. 双势阱 BEC 模型虽然形式上简单,却蕴藏着丰富的物理内涵,被广泛地应用于研究 BEC 的各种动力学性质,并得到了许多非常有意义的现象,如隧穿现象<sup>[7-10]</sup>、自囚禁现象<sup>[22-24]</sup>、不稳定(混沌)现象<sup>[25-28]</sup>等. 其中,隧穿现象是量子系统一个特有的过程,即在经典情况下不能逾越的区域在量子情况下却可以穿越. 不稳定(混沌)现象的出现能够破坏 BEC 原子间的相干性,导致 BEC 的瓦解,因此对 BEC 中出现的不稳定(混沌)现象的作用、控制及应用的研究,引起了人们的关注. 本文考虑周期驱动引起的 BEC 系统相空间的不稳定(混沌)现象以及混沌现象对隧穿的影响,主要

研究在 BEC 双势阱模型中的两势阱能量差项上加周期驱动引起的系统相变过程,特别是混沌相变过程. 引入了 Husimi 函数<sup>[29,30]</sup>,利用系统的 Husimi 函数的演化刻画系统的混沌现象. 着重研究在量子情况下混沌现象的出现对系统隧穿的影响以及隧穿随相互作用强度增强的变化情况. 研究发现,系统相互作用强度增大使得相空间混沌区域扩大,进而引起混沌辅助隧穿程度的变化.

## 2. 相空间结构随相互作用强度的变化

本文采用的双势阱 BEC 系统的两模近似薛定谔方程为<sup>[7-9]</sup>

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中  $a, b$  分别是粒子出现在两个势阱中的概率幅,总概率  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . 体系的哈密顿量为

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} - \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) & -\frac{v}{2} \\ -\frac{v}{2} & -\frac{\gamma}{2} + \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

式中  $\gamma$  是两势阱的能量差,  $c$  表示粒子间的相互作用

强度<sup>[10,22]</sup>,  $v$  是两势阱的耦合系数.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10474008,10604009)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: ss\_yangza@ujn.edu.cn

令

$$a = |a| e^{i\theta_a},$$

$$b = |b| e^{i\theta_b},$$

并引入布居数差  $s = |b|^2 - |a|^2$  和相对相位  $\theta = \theta_b - \theta_a$ , 得到系统的经典形式哈密顿量为

$$H = -\frac{c}{2}s^2 + \gamma s + v\sqrt{1-s^2}\cos\theta, \quad (3)$$

式中  $s, \theta$  是经典哈密顿系统的一对正则变量, 满足

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s}.$$

于是有

$$\dot{s} = v\sqrt{1-s^2}\sin\theta, \quad (4a)$$

$$\dot{\theta} = -cs + \gamma - \frac{vs}{\sqrt{1-s^2}}\cos\theta. \quad (4b)$$

在系统的两势阱能量差项上外加形式为  $\gamma = A\sin(\omega t)$  的周期调制<sup>[16]</sup> 则(3)式变为

$$H = -\frac{1}{2}cs^2 + A\sin(\omega t)s + v\sqrt{1-s^2}\cos\theta. \quad (5)$$

相应地,  $s$  和  $\theta$  的动力学方程(4a)和(4b)变为

$$\dot{s} = v\sqrt{1-s^2}\sin\theta, \quad (6a)$$

$$\dot{\theta} = -cs + A\sin(\omega t) - \frac{vs}{\sqrt{1-s^2}}\cos\theta. \quad (6b)$$

此时相空间哈密顿系统的演化行为由(6)式支配. 我们感兴趣的是粒子间相互作用的大小对系统相空间结构的影响. 令周期驱动频率  $\omega$  和振幅  $A$  取固定值, 本文中取  $\omega = 2, A = 5$ , 考察相互作用参数  $c$  的改变对系统相空间结构、隧穿的影响. 本文的讨论是基于粒子间的相互作用为排斥作用( $c > 0$ )的情况, 同时, 为了方便比较和计算, 取  $v = 1$ .

当相互作用参数的变化在  $0 < c < 0.8$  的范围时, 相空间为周期轨道, 没有混沌现象出现, 如图 1(a)所示. 从图 1(a)中可以看出, 此时相空间有  $p_1, p_2, p_3, p_4$  四个不动点, 其中  $p_1, p_2, p_3$  是稳定的椭圆不动点,  $p_4$  是双曲不动点. 以  $s = 0$  为界,  $s < 0$  表示大多数粒子处于  $a$  势阱中,  $s > 0$  表示大多数粒子处于  $b$  势阱中. 图 1(a)中的不动点  $p_1$  所处的位置表示大多数粒子处在  $a$  势阱中,  $p_2$  所处的位置表示大多数粒子处在  $b$  势阱中. 围绕不动点  $p_1$  振荡的轨道中心位置为  $s = -0.9, \theta = 2\pi/5$ , 围绕不动点  $p_2$  振荡的轨道中心位置为  $s = 0.9, \theta = 2\pi/5$ . 在不动点  $p_1, p_2$  附近, 相对相位和布居数差都在平衡点附近振荡, 粒子不是平均分布, 处于自囚禁状态.

附近振荡, 表示粒子不是平均分布的, 出现了自囚禁现象. 在不动点  $p_3$  周围, 相对相位  $\theta$  在  $[0, 2\pi]$  内变化, 布居数差  $s$  在  $[-1, 1]$  之间变化, 粒子分布是平均分布. 不动点  $p_3$  周围的轨道对应于粒子在双势阱间振荡, 即约瑟夫森振荡. 不动点  $p_4$  实际上是等效经典系统哈密顿的鞍点, 是不稳定不动点, 当相互作用增强时, 不动点  $p_4$  附近的轨道会首先被破坏.

当相互作用增强, 参数  $c > 0.8$  后, 外加调制频率与系统固有频率达到共振, 不稳定不动点  $p_4$  附近的周期轨道被破坏, 开始出现不稳定(即混沌)现象. 混沌所占的区域随着相互作用的增强而不同, 如图 1(b)-(d)所示.

图 1(b)示出了  $c = 1.5$  时的相空间结构. 从图 1(b)可以看出, 不稳定不动点  $p_4$  附近的轨道变成不稳定的离散点, 即出现了混沌现象, 但此时混沌区域较小. 这时周期轨道被局限在四个区域内, 这四个周期区域被混沌区域隔开. 稳定的不动点  $p_3$  被混沌区域分成两个稳定不动点  $p_3$  和  $p_5$ . 相空间中有  $p_1, p_2, p_3, p_5$  四个稳定的椭圆不动点. 不动点  $p_1$  所处的位置  $s < 0$ , 表示大多数粒子处在  $a$  势阱中, 围绕不动点  $p_1$  振荡的轨道中心位置为  $s = -0.9, \theta = 2\pi/5$ .  $p_2$  所处的位置  $s > 0$ , 表示大多数粒子处在  $b$  势阱中, 围绕不动点  $p_2$  振荡的轨道中心位置为  $s = 0.9, \theta = 2\pi/5$ . 在不动点  $p_1, p_2$  附近, 相对相位和布居数差都在平衡点附近振荡, 粒子不是平均分布, 处于自囚禁状态. 在不动点  $p_3, p_5$  周围, 对应于粒子在双势阱间振荡, 处于约瑟夫森振荡状态.

图 1(c)示出了  $c = 2.2$  时的相空间结构. 与图 1(b)相比, 可以看出  $c = 2.2$  时混沌所占区域变得更大, 周期轨道所占区域变少, 且被混沌海分成六个周期岛. 相空间的不动点数由  $c = 1.5$  时的四个变成  $c = 2.2$  时的  $p_1, p_{1a}, p_2, p_{2a}, p_3, p_5$  六个稳定椭圆不动点. 不动点  $p_1$  和  $p_{1a}$  构成了二周期不动点, 在  $p_1$  和  $p_{1a}$  附近  $s < 0$ , 表示大多数粒子处在  $a$  势阱中, 围绕不动点  $p_1$  振荡的轨道中心位置为  $s = -0.85, \theta = 2\pi/5$ . 同样, 不动点  $p_2$  和  $p_{2a}$  也构成了二周期不动点, 在  $p_2$  和  $p_{2a}$  附近  $s > 0$ , 表示大多数粒子处在  $b$  势阱中, 围绕不动点  $p_2$  振荡的轨道中心位置为  $s = 0.85, \theta = 2\pi/5$ . 在不动点  $p_1, p_2$  附近, 相对相位和布居数差都在平衡点附近振荡, 粒子不是平均分布, 处于自囚禁状态. 在不动点  $p_3$  和  $p_5$  周围的轨道, 对应于粒子在双势阱间振荡, 处于约瑟夫森振

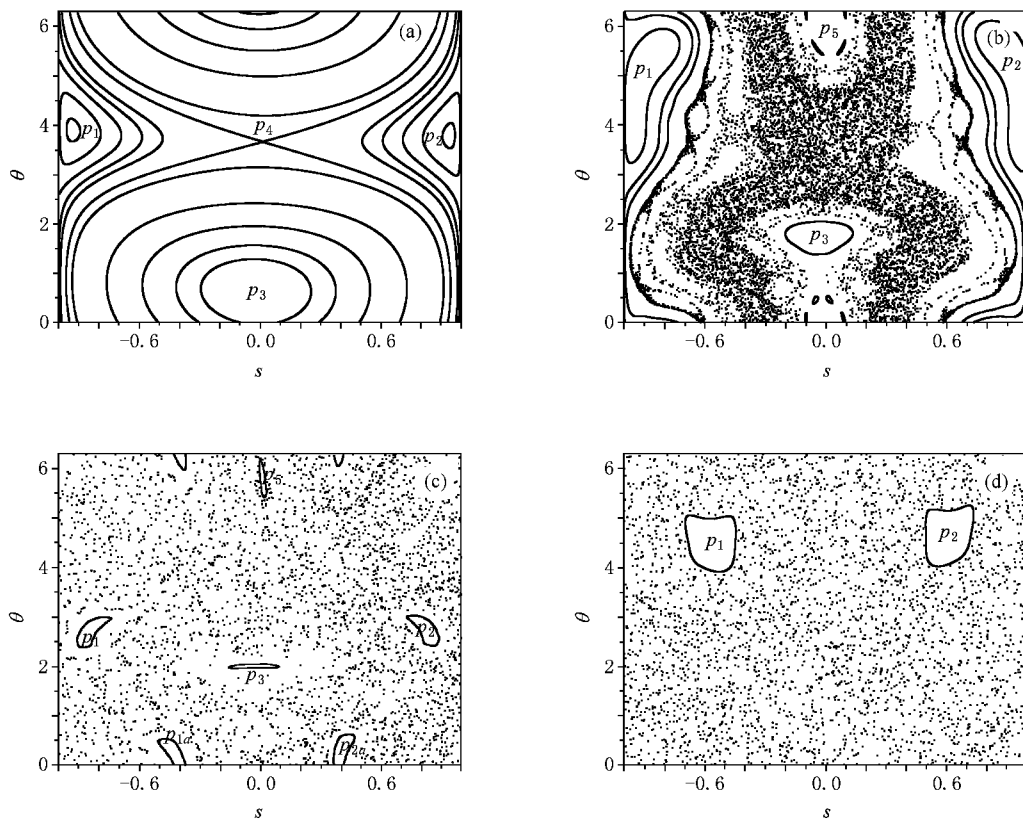


图 1 相平面中系统哈密顿量的演化 (a) $c=0.3$  (b) $c=1.5$  (c) $c=2.2$  (d) $c=4.0$

荡状态.

图 1(d) 示出了  $c=4.0$  时的相空间结构. 从图 1(d) 可以看出, 不稳定不动点  $p_4$  附近的轨道已经全部变为混沌, 周期轨道被混沌海分成两个孤立的周期岛. 相空间中仅存有  $p_1$  和  $p_2$  两个稳定的椭圆不动点. 不动点  $p_1$  所处的位置  $s < 0$ , 表示大多数粒子处在  $a$  势阱中, 围绕不动点  $p_1$  振荡的轨道中心位置为  $s = -0.6, \theta = 2\pi 18/25$ .  $p_2$  所处的位置  $s > 0$ , 表示大多数粒子处在  $b$  势阱中, 围绕不动点  $p_2$  振荡的轨道中心位置为  $s = 0.6, \theta = 2\pi 18/25$ . 不动点  $p_1, p_2$  附近轨道, 相对相位和布居数差都在平衡点附近振荡, 粒子不是平均分布, 处于自囚禁状态. 当相互作用参数  $c=4.0$  时, 原来处于约瑟夫森振荡状态的轨道不再存在, 相空间大部分区域是混沌的.

### 3. 量子情况下的混沌隧穿

从图 1 中可以很清楚地看出, 双势阱 BEC 系统在外加周期驱动下出现了混沌现象以及混沌现象随 BEC 体系粒子间相互作用的变化情况. 为了更加清

晰地刻画 BEC 系统的隧穿演化过程, 讨论混沌对隧穿的影响, 本文研究了在不同相互作用参数下 Husimi 函数的演化.

#### 3.1. Husimi 函数

在量子情况下, 为了方便计算, 用  $\hat{s}$  和  $\hat{\theta}$  对系统哈密顿量(5)式进行量子化, 以  $\hat{s}$  的本征态作为基矢,  $\hat{s}$  的本征方程为

$$\hat{s} |n\rangle = n\hbar |n\rangle,$$

$\hat{s}$  的本征态为

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta} |0\rangle.$$

在这种情况下, 系统的薛定谔方程变为

$$i\hbar \frac{d}{dt} |m\rangle \langle n| \psi(t) = \sum H_{mm} |n\rangle \langle n| \psi(t), \quad (7)$$

式中

$$H_{n,n} = -\frac{c}{2} n^2 \hbar^2 + A \sin(\omega t) n \hbar, \quad (8a)$$

$$H_{n,n-1} = \frac{v}{4} (\sqrt{1-n^2 \hbar^2} + \sqrt{1-(n-1)^2 \hbar^2}), \quad (8b)$$

$$H_{n,n+1} = \frac{v}{4} (\sqrt{1-n^2 \hbar^2} + \sqrt{1-(n+1)^2 \hbar^2}). \quad (8c)$$

Husimi 函数的定义为<sup>[30]</sup>

$$\rho(s, \theta) = \left| \sum_n \phi_{s, \theta} |n\rangle \langle n| \psi(t) \right|^2, \quad (9)$$

式中  $|\psi(t)\rangle$  是满足薛定谔方程(7)的波函数,  $|\phi_{s, \theta}\rangle$  是双势阱 BEC 在  $(s, \theta)$  表象中的相干态. 当  $s$  和  $\theta$  都取平均值时,  $|\phi_{s, \theta}\rangle$  是在布居数差和相对相位描述下的最小不确定函数.

谐振子的相干态定义为

$$|z\rangle = -\frac{1}{2} |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

式中  $z = p + iq$ ,  $p$  和  $q$  分别是广义动量和广义坐标. 选  $s$  和  $\theta$  作为双势阱 BEC 模型的作用量和角变量, 则用  $(s, \theta)$  表示的相干态为

$$\begin{aligned} \phi_{s, \theta} = & \left( \frac{\mu\omega'}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left( -\frac{\mu\omega'}{2\hbar} (\theta - \bar{\theta})^2 \right) \\ & + i \frac{\bar{s}}{\hbar} \theta - i \frac{\bar{\theta} \bar{s}}{2\hbar} \end{aligned} \quad (10)$$

在计算中我们取  $\mu = 1$ ,  $\omega' = 1$ ,  $\hbar = \frac{2}{N}$ ,  $N$  为系统粒

子数. 本文中取  $N = 50$ .

Husimi 函数提供了一个以  $\hbar$  为最小尺度的相空间分布, 是与经典相空间分布最相近的量子对应体. 因此, 用 Husimi 函数可以更清晰地研究相空间出现的混沌现象对量子情况下隧穿的影响.

### 3.2. 混沌隧穿随相互作用强度的变化

本文中主要关注被混沌海分开, 分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中的两个处于自囚禁状态孤立周期岛之间的隧穿.

#### 3.2.1. $0 < c < 0.8$ 的情况

当  $0 < c < 0.8$  时, 相空间为周期轨道, 此时还未出现混沌现象, 如图 1(a) 所示. 当粒子间相互作用参数  $c = 0.3$  时, 围绕不动点  $p_1$  振荡的轨道中心位置为  $s = -0.9$ ,  $\theta = 2\pi/5$ , 处于  $a$  势阱中. 我们把处于这个中心位置的波包作为  $c = 0.3$  时 Husimi 函数的初态, 得到了 Husimi 函数的演化图, 如图 2 所示. 图 2 中的  $\rho$  是 Husimi 函数,  $\rho$  的大小表征着粒子数

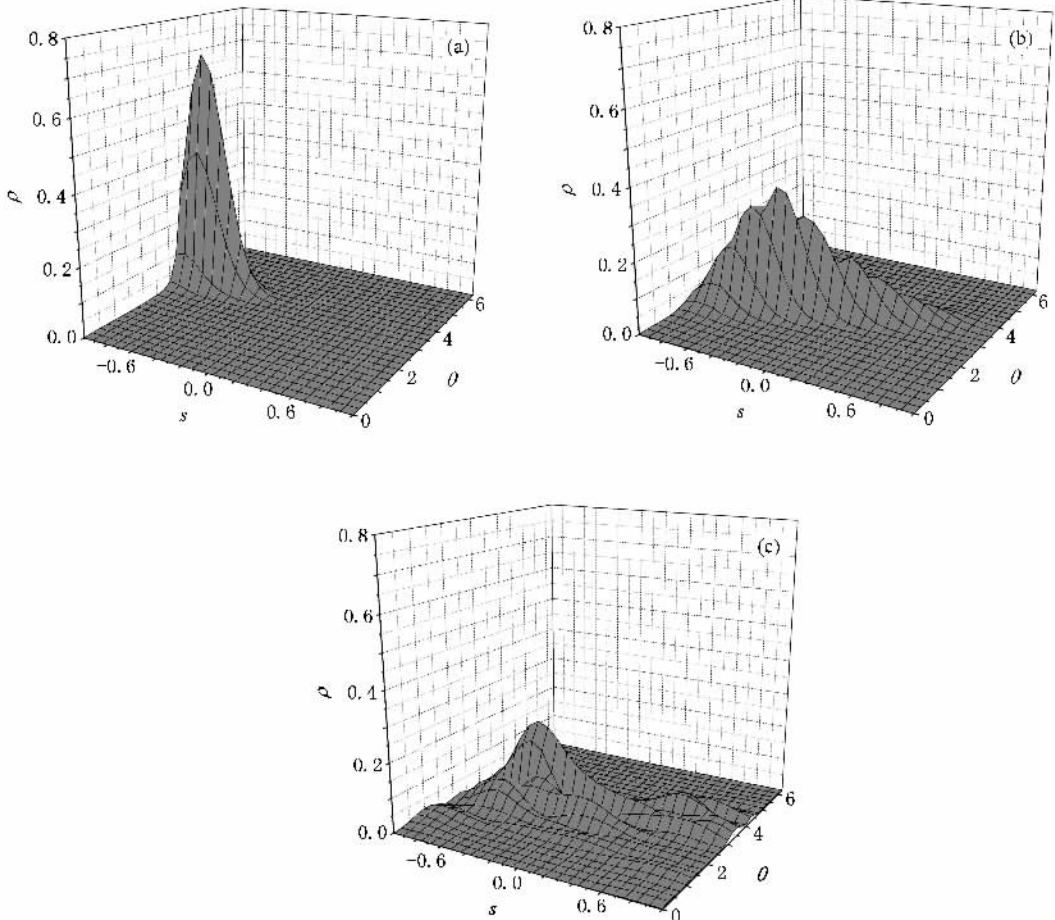


图 2 Husimi 函数在  $c = 0.3$  时的演化 (a)  $t = 0$  (b)  $t = 5\tau$  (c)  $t = 50\tau$

的多少,  $\tau$  是外加周期调制的周期,  $\tau = 2\pi/\omega$ . 从图 2 可以看出, 在  $t = 5\tau$  时, 波包所占的区域已经越过了  $s = 0$  的位置, 表明波包所处的区域由初始时  $s < 0$  的区域演化到了  $s > 0$  的区域, 说明在  $t = 5\tau$  时就有粒子开始离开  $a$  势阱, 向  $b$  势阱中扩散. 随着演化时间的增长, 扩散范围变大. 当  $t = 50\tau$  时, 扩散到  $b$  势阱的粒子数变得更多, 有少量的粒子已经扩散到了围绕不动点  $p_2$  振荡的轨道中心位置  $s = 0.9, \theta = 2\pi/5$  所在的区域. 但是, 此时  $\rho$  的峰值还处在  $s < 0$  的位置, 表示大多数粒子还是处于  $a$  势阱中. 从图 2 还可以看出, 当  $0 < c < 0.8$  时, 隧穿可以发生在  $a$  势阱和  $b$  势阱之间, 也可以发生在被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个周期岛之间, 但从  $a$  势阱隧穿到  $b$  势阱的粒子数所占的概率不多, 大多数粒子还是处于  $a$  势阱中.

### 3.2.2.0.8 < c < 2.0 的情况

当粒子间相互作用增强, 参数  $c > 0.8$  后, 相空

间开始出现混沌现象, 相互作用强度的增大使得混沌区域扩大, 进而引起混沌辅助隧穿的程度变化.

当  $0.8 < c < 2.0$  时, 相空间虽然出现了混沌现象, 但混沌区域较小, 如图 1(b) 所示. 粒子间相互作用参数  $c = 1.5$ , 围绕不动点  $p_1$  振荡的轨道中心位置为  $s = -0.9, \theta = 2\pi/6$ , 处于  $a$  势阱中. 我们把处于这个中心位置的波包作为  $c = 1.5$  时 Husimi 函数的初态, 得到了 Husimi 函数的演化图, 如图 3 所示. 从图 3 可以看出, Husimi 函数随时间的演化几乎只在  $a$  势阱中扩散. 当  $t = 50\tau$  时, Husimi 函数的波包  $\rho$  始终还处于  $s < 0$  的区域, 几乎没有粒子扩散到  $b$  势阱中, 更没有粒子扩散到围绕不动点  $p_2$  振荡的轨道中心位置  $s = 0.9, \theta = 2\pi/6$  所在的区域, 隧穿变得很困难. 这说明当  $0.8 < c < 2.0$  时, 相空间出现了混沌现象, 但隧穿变得很困难, 只有极少量的粒子从  $a$  势阱隧穿到  $b$  势阱, 隧穿更不会发生在被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个孤立的周期岛之间. 上述情况表明, 随

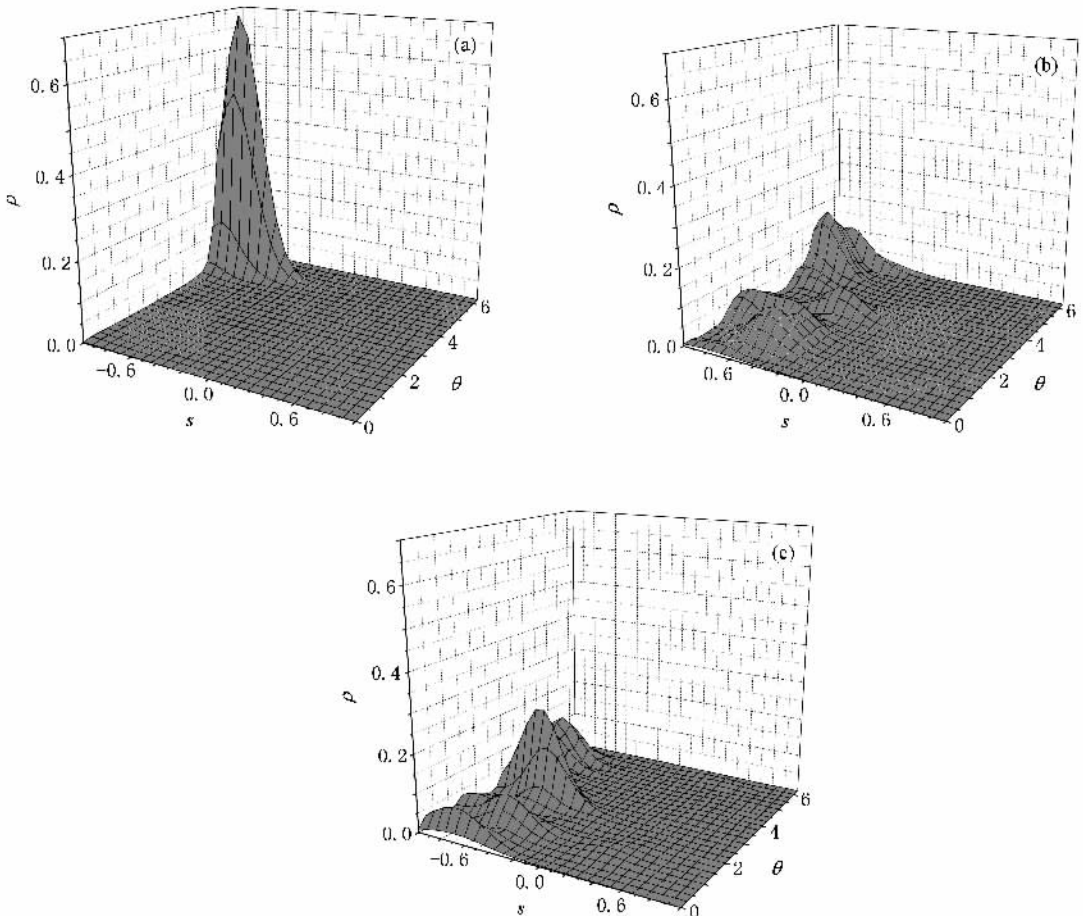


图 3 Husimi 函数在  $c = 1.5$  时的演化 (a)  $t = 0$  (b)  $t = 5\tau$  (c)  $t = 50\tau$

着相互作用的增强,系统出现了混沌现象,但此时混沌区域较小,还不足以使隧穿发生在被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个孤立的周期岛之间.

### 3.2.3. $2.0 < c < 2.6$ 的情况

随着相互作用参数继续增大,当  $2.0 < c < 2.6$  时,相空间的混沌区域比  $0.8 < c < 2.0$  时更加扩大,周期轨道所占的区域进一步变小,如图 1(c) 所示. 粒子间相互作用参数  $c = 2.2$ , 围绕不动点  $p_1$  振荡的轨道中心位置为  $s = -0.85, \theta = 2\pi 21/50$ , 处于  $a$  势阱中. 我们把处于这个中心位置的波包作为  $c = 2.2$  时 Husimi 函数的初态,得到了 Husimi 函数的演化图,如图 4 所示. 此时的隧穿与  $0.8 < c < 2.0$  时的隧穿相比发生了变化. 随着演化时间的增加,初始波包不仅仅在  $a$  势阱中扩散,开始有较多的粒子离开  $a$  势阱,向  $b$  势阱隧穿,如图 4(b)(c) 所示. 但此时  $\rho$  的峰值还处在  $s < 0$  的位置,表示大多数粒子

还是处于  $a$  势阱中,扩散到  $b$  势阱中的粒子是非常有限的,几乎没有粒子扩散到围绕不动点  $p_2$  振荡的轨道中心位置  $s = -0.85, \theta = 2\pi 21/50$  所在的区域. 这说明当  $2.0 < c < 2.6$  时,相空间混沌区域相对于  $0.8 < c < 2.0$  时扩大,粒子从  $a$  势阱隧穿到  $b$  势阱的概率较  $0.8 < c < 2.0$  时大,但被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个孤立的周期岛之间的隧穿还是很困难.

### 3.2.4. $c > 2.6$ 的情况

当相互作用参数再增大,  $c > 2.6$  后,整个相空间的中部都已经变为混沌区域,周期轨道被混沌海分成孤立的两个稳定周期岛,如图 1(d) 所示. 粒子间相互作用参数  $c = 4.0$ , 围绕不动点  $p_1$  振荡的轨道中心位置为  $s = -0.6, \theta = 2\pi 18/25$ , 处于  $a$  势阱中. 我们把处于这个中心位置的波包作为  $c = 4.0$  时 Husimi 函数的初态,得到了 Husimi 函数的演化图,如图 5 所示. 此时, Husimi 函数演化到一定时间后,

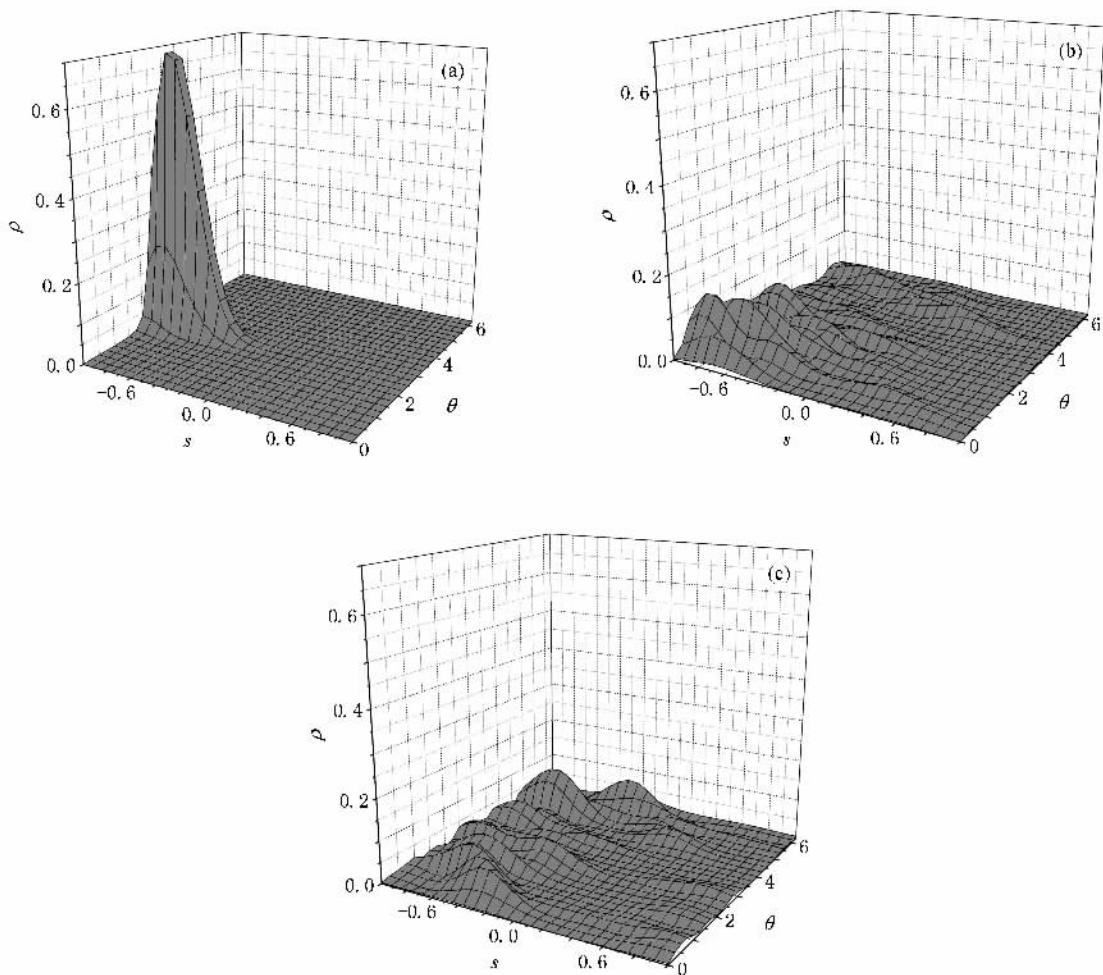


图 4 Husimi 函数在  $c = 2.2$  时的演化 (a)  $t = 0$  (b)  $t = 20\tau$  (c)  $t = 50\tau$

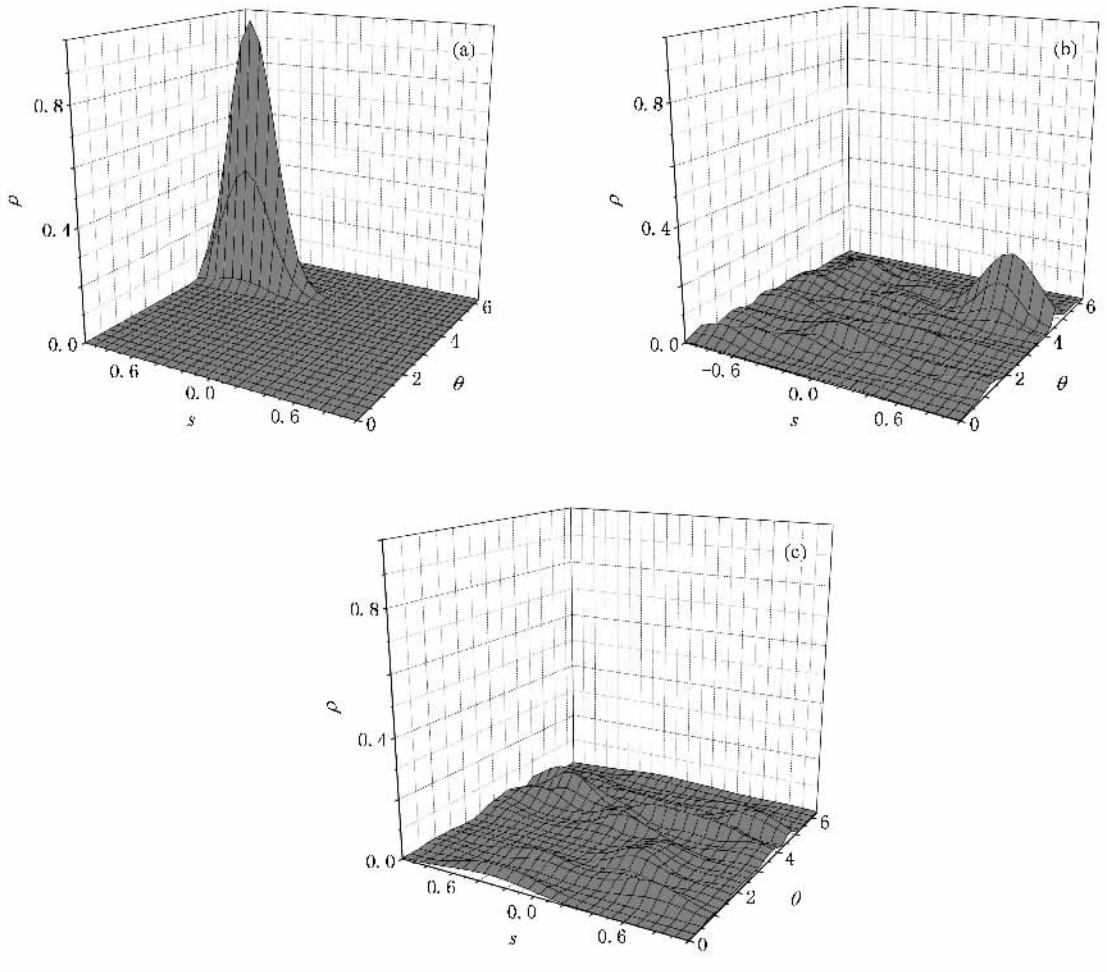


图 5 Husimi 函数在  $c = 4.0$  时的演化 (a)  $t = 0$  (b)  $t = 20\tau$  (c)  $t = 41\tau$

波包会由初始的稳定周期岛隧穿到另一个稳定周期岛. 随着时间的继续增长, 波包还可以再回到原来的初始位置, 但由于扩散很严重, 只有少量的粒子可以回到初始波包的位置. 从图 5 可以看到, 在  $t = 20\tau$  时, 初始时位于  $a$  势阱中稳定岛位置的波包, 隧穿到了围绕不动点  $p_2$  振荡的轨道中心  $s = 0.6, \theta = 2\pi 18/25$  的位置, 也就是  $b$  势阱中稳定岛的中心位置, 而且  $\rho$  的峰值处在  $s > 0$  的区域, 到达了  $b$  势阱中稳定岛的中心位置, 说明大多数粒子隧穿到了  $b$  势阱中稳定岛的中心位置, 而且隧穿的概率很大. 在  $t = 41\tau$  时, 部分粒子已经回到了初始波包在  $a$  势阱中稳定岛的位置, 而另一部分粒子由于渗透到了经典情况的混沌区域, 不再能回到初始波包在  $a$  势阱中稳定岛的位置. 这说明当相互作用参数  $c > 2.6$  后, 隧穿会发生在  $a$  势阱和  $b$  势阱之间, 也会发生在被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个孤立稳定岛之间, 随着时间的

演化, 被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个孤立稳定岛之间的隧穿可以形成 Rabi 振荡现象, 但振幅不断衰减. 上述情况表明, 当相互作用更大时, 系统更加混沌, 混沌区域更大, 使得隧穿变得更加容易, 此时混沌现象的出现辅助了被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个孤立稳定岛之间隧穿的发生.

## 4. 结 论

本文主要研究了在两势阱能量差项上加周期驱动后双势阱中 BEC 系统的混沌相变过程, 特别是混沌现象的出现对系统隧穿的影响. 当相互作用较小 ( $0 < c < 0.8$ ) 时, 系统还未出现混沌现象, 相空间为周期轨道, 隧穿可以发生在  $a$  势阱和  $b$  势阱之间, 也可以发生在处于自囚禁状态的两个孤立的周期轨道之间, 但从  $a$  势阱隧穿到  $b$  势阱的粒子所占概率

不多,大多数粒子还是处于  $a$  势阱中.随着相互作用的增强,当  $c > 0.8$  时,系统相空间出现了混沌现象,相互作用的增强使得混沌区域扩大,进而引起隧穿的不同.当  $0.8 < c < 2.0$  时,相空间出现了混沌现象,但由于混沌区域较小隧穿变得很困难,只有极少量的粒子从  $a$  势阱隧穿到  $b$  势阱,隧穿更不会发生在被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个孤立的周期岛之间.当  $2.0 < c < 2.5$  时,混沌区域变大,粒子从  $a$  势阱隧穿到  $b$  势阱的概率较  $0.8 < c < 2.0$  时大,但被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个孤立的周期岛之间的隧穿还是很困难.当  $c > 2.6$  后,混沌区域变得更大,两个周期轨道区域完全被混沌海包围,形成两个孤立的周期岛,此时隧穿会发生在  $a$  势阱和  $b$  势阱之间,也会发生在被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个稳定岛之间.随着时间的演化,这一隧穿可以形成 Rabi 振荡现象.

通过分析我们发现,当给 BEC 双势阱模型外加周期驱动使系统发生混沌现象时,在经典情况下,分

别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中的两个处于自囚禁状态的稳定岛是完全孤立的,而在量子情况下,初始位于  $a$  势阱处于自囚禁状态稳定岛中心的粒子可以隧穿到  $b$  势阱处于自囚禁状态稳定岛位置.这种隧穿受相互作用项以及混沌区域大小的影响比较大.当相互作用参数较小( $0.8 < c < 2.0$ )时,虽然有混沌现象的出现,但混沌区域较小,隧穿很难发生.当  $2.0 < c < 2.6$  时,混沌区域变大,隧穿可以发生在两个势阱之间,但只是少量粒子的隧穿,且隧穿几乎不会发生在被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个孤立岛之间.当  $c > 2.6$  后,混沌区域变得更大,此时隧穿才会发生在被混沌海分开的分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中处于自囚禁状态的两个孤立稳定岛之间.这种处于自囚禁状态分别位于  $a$  势阱和  $b$  势阱中的两个孤立稳定岛之间的隧穿,在没有混沌时不会出现.这意味着  $c > 2.6$  时混沌的出现辅助了这种隧穿现象.

感谢北京应用物理与计算数学研究所刘杰研究员和傅立斌研究员的有益指导.

- [ 1 ] Franco D , Giorgini S , Lev P , Sandro S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [ 2 ] Anthony L J 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 307
- [ 3 ] Liu J , Wang W G , Zhang C W , Niu Q , Li B W 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063623
- [ 4 ] Liu J , Wang W G , Zhang C W , Niu Q , Li B W 2005 *Phys. Lett. A* **353** 216220
- [ 5 ] Liu J , Zhang C W , Raizen M G , Niu Q 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013601
- [ 6 ] Zhang L , Ge M L 2000 *Fashionable Problem in Quantum Mechanics* ( Beijing : Tsinghua University Press ) ( in Chinese ) [ 张 礼、葛墨林 2000 量子力学的前沿问题 ( 北京 清华大学出版社 ) ]
- [ 7 ] Wu B , Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023402
- [ 8 ] Liu J , Wu B , Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404
- [ 9 ] Wu B , Liu J , Niu Q 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 140402
- [ 10 ] Liu J , Fu L B , Qu B Y , Chen S G , Choi D , Wu B , Niu Q 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023404
- [ 11 ] Smerzi A , Fantoni S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3589
- [ 12 ] Kagan Y , Surkov E L , Shlyapnikov G V 1997 *Phys. Rev. A* **55** R18
- [ 13 ] Milburn G J , Corney J , Wright E M , Walls W F 1997 *Phys. Rev. A* **55** 4318
- [ 14 ] Raghavan S , Smerzi A , Fantoni S , Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620
- [ 15 ] Martin H 2001 *Phys. Rev. A* **64** R011601
- [ 16 ] Wang G F , Fu L B , Zhao H , Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 ( in Chinese ) [ 王冠芳、傅立斌、赵 鸿、刘 杰 2005 物理学报 **54** 5003 ]
- [ 17 ] Wang G F , Fu L B , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013619
- [ 18 ] Fu L B , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 063614
- [ 19 ] Fu L B , Chen S G 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016607
- [ 20 ] Fu L B , Chen S G , Hu B 2004 *Phys. Lett. A* **323** 460
- [ 21 ] Fu L B , Liu J , Chen S G 2002 *Phys. Lett. A* **298** 388
- [ 22 ] Wang G F , Ye D F , Fu L B , Chen X Z , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 033414
- [ 23 ] Ma Y , Fu L B , Yang Z A 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5628 ( in Chinese ) [ 马 云、傅立斌、杨志安 2006 物理学报 **55** 5628 ]
- [ 24 ] Liu Z Z , Yang Z A 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1245 ( in Chinese ) [ 刘泽专、杨志安 2007 物理学报 **56** 1245 ]
- [ 25 ] Lee C H , Hai W H , Shi L , Zhu X W , Gao K L 2001 *Phys. Rev. A* **64** 053604
- [ 26 ] Liu B , Fu L B , Yang S P , Liu J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 033601
- [ 27 ] Fang Y C , Yang Z A 2007 *J. Univ. Jinan ( Sci. Tech. )* **21** 96 [ 房永翠、杨志安 2007 济南大学学报( 自然科学版 ) **21** 96 ]
- [ 28 ] Fang Y C , Yang Z A , Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 ( in Chinese ) [ 房永翠、杨志安、杨丽云 2008 物理学报 **57** 661 ]
- [ 29 ] Khan W M , Heidi P , William P R 2005 *Phys. Rev. A* **71** 023615
- [ 30 ] Lin W A , Ballentine L E 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 2928



# Chaos tunneling of Bose-Einstein condensates<sup>\*</sup>

Fang Yong-Cui Yang Zhi-An<sup>†</sup>

(*School of Science, University of Jinan, Jinan 250022, China*)

(Received 28 December 2007; revised manuscript received 29 August 2008)

## Abstract

Phase transition to chaos of Bose-Einstein condensates in double-well trap with external periodic modulation is investigated in this paper. Particularly, chaos tunneling is studied. It is found that, when resonance between external periodic frequency and natural frequency is established, this system can turn to instability (chaos). The evolutions of Husimi function in quantum condition are discussed. It is found that, when chaos emerges, chaos region and chaos tunneling varies with the interaction between the particles.

**Keywords** : Bose-Einstein condensate, chaos, tunneling

**PACC** : 0365, 0155, 7335

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10474008, 10604009).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : ss\_yangza@ujn.edu.cn