第 58 卷 第 3 期 2009 年 3 月
1000-3290/2009/58(03)/1456-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58, No.3, March, 2009

超混沌分数阶 Lü 系统电路实验与追踪控制*

闵富红[1)†] 余 杨[1)] 葛曹君[2)]

1)(南京师范大学电气与自动化工程学院,南京 210042)

2)(南京师范大学基建处,南京 210042)

(2008 年 8 月 9 日收到;2008 年 8 月 20 日收到修改稿)

对提出的新型超混沌 Lü 系统,研究了其分数阶混沌系统,通过数值仿真和电路实验,证实了分数阶超混沌 Lü 系统的混沌行为.利用分数阶系统稳定性理论,设计简单的线性反馈控制器,成功地实现了分数阶超混沌 Lü 系统的所有状态向量与正弦信号和任意不动点的追踪控制.仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词:分数阶 Lü 系统,超混沌系统,电路实验,追踪控制

PACC:0545

1. 引 言

分数阶微积分是整数阶微积分理论的推广,利用分数阶微积分算子能够更准确地描述混沌系统的动力学特性,以及能反映系统呈现的工程物理现象,从而促进了分数阶混沌的研究.目前,人们已经研究了许多分数阶系统的混沌动力学行为[1—5].同时,分数阶混沌系统的电路实现也逐渐引起了人们的兴趣和关注[6—9].另外,分数阶混沌系统的控制和同步也有了相关研究[10—12],以上研究,大多数基于三维系统,对于超混沌的四维分数阶系统的混沌现象、电路实验、控制与同步的研究还比较少.尤其是分数阶混沌系统追踪控制的研究也不多.

在 2002 年,Lü 和 Chen 发现了一个新的临界混沌系统,称为 Lü 系统[13],代表了 Lorenz[14] 和 Chen 系统[15]之间的转换,他们将 Lorenz 系统、Lü 系统和 Chen 系统用一个光滑的连续变换统一起来,被称为统一混沌系统[16,17].可见,Lü 系统起到了一个桥梁的作用,因而具有重要的应用研究价值.在 2006 年,Chen 和 Lu 等人,通过给 Lü 系统增加一个状态反馈控制器,构造了一个四维的超混沌 Lü 系统[18],通过改变系统的参数,出现了复杂的动力学行为,具有一定的研究价值.对于其复杂的分数阶混沌系统更值得深入研究,因为分数阶系统在保密通信等领域有着更广泛的应用前景.

针对新型的超混沌 Lü 系统,本文首先研究其分数阶的混沌动力学行为,基于频域近似方法,进行数值仿真,以及运用最新的软件 Multism 10 设计电路实验,证实分数阶 Lü 系统混沌行为的存在.其次,基于分数阶系统的稳定性理论,设计合适的线性反馈控制器,实现分数阶 Lü 混沌系统的追踪控制,使得其所有的状态向量能够追踪任意期望的不动点或者正弦信号.

2. 分数阶微分定义、近似和分数阶微分系统的稳定性

在分数阶微积分理论发展过程中,有很多种函数的分数阶微积分定义,其中最常用的定义是 Riemann-Liouville(R-L)定义[3—12]

$$\frac{\mathrm{d}^q f(t)}{\mathrm{d}t^q}=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t^n}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}}d\tau,\quad(1)$$

其中,$\Gamma(n-q)$是 Gamma 函数,$n-1\leqslant q\leqslant n$,$n$ 为整数,q 为分数微分的阶数.在零初始条件下,(1)式的拉普拉氏变换为

$$L\left\{\frac{\mathrm{d}^q f(t)}{\mathrm{d}t^q}\right\}=s^q L\{f(t)\}.\quad(2)$$

因而,分数阶微分算子 q 可以在频域中用传递函数 $F(s)=1/s^q$ 表示.文献[1]基于波特图的频域近似方法,推导出近似误差分别为 2 dB 和 3 dB 时,q

* 国家自然科学基金(批准号:60774060)和江苏省普通高校自然科学基金(批准号:08KJB51006)资助的课题.

† E-mial:minfuhong@njnu.edu.cn

从 0.1 到 0.9 的 $1/s^q$ 的展开式. 在本文的数值仿真以及电路实验中，就是采用这种近似误差来分析.

考虑如下分数阶微分系统[18]：

$$\frac{\mathrm{d}^q X(t)}{\mathrm{d}t^q} = AX(t), x(0) = x_0 \tag{3}$$

是渐近稳定的，当且仅当其系统矩阵 A 的特征值幅角大于 $q\pi/2$，即 $|\arg(\mathrm{spec}(A))| > q\pi/2$.

3. 超混沌分数阶 Lü 系统及其电路实现

3.1. 分数阶超混沌 Lü 系统

分数阶 Lü 混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^q x}{\mathrm{d}t^q} &= a(y - x) + w,\\
\frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}t^q} &= -xz + cy,\\
\frac{\mathrm{d}^q z}{\mathrm{d}t^q} &= xy - bz,\\
\frac{\mathrm{d}^q w}{\mathrm{d}t^q} &= xz + dw,
\end{aligned} \tag{4}$$

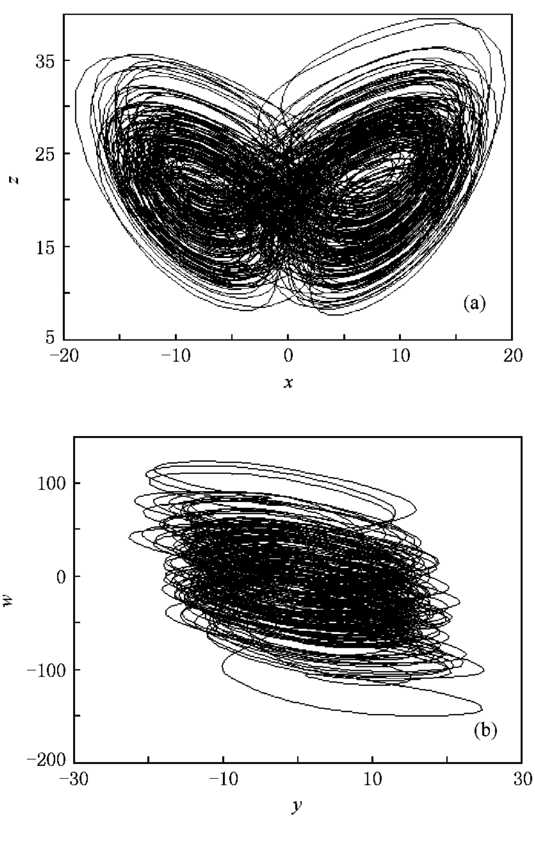

图 1　分数阶 Lü 混沌吸引子($q = 0.9$，2 dB 误差逼近)

其中 a，b，c，d 是参数. 当 $q = 1$ 时，系统(4)为整数阶超混沌 Lü 系统. 它是 Chen 等[18]在三维 Lü 混沌系统的基础上，通过增加一个状态反馈控制器，构造的一个四维新型的超混沌 Lü 系统，因而研究其分数阶混沌系统更有意义.

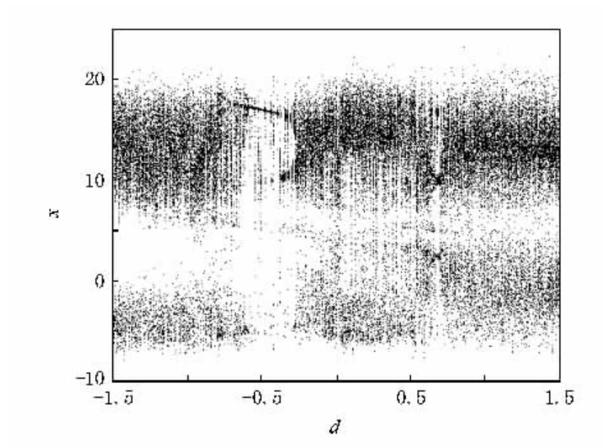

图 2　参数 d 变化的分数阶超混沌 Lü 系统分岔图($q = 0.9$，2 dB 误差逼近)

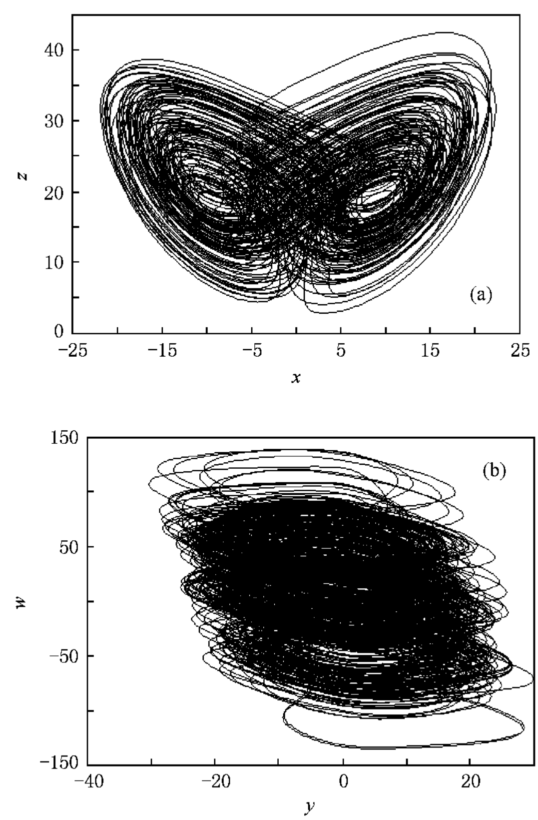

图 3　分数阶 Lü 混沌吸引子($q = 0.1$，3 dB 误差逼近)

采用文献[1]中的的近似方法，利用四阶龙格库塔法进行数值仿真. 系统参数为 $a = 36$，$b = 3$，$c = 20$，$d = 1.3$，对分数阶 $q = 0.9$—0.1 都进行了数值仿真. 当取逼近误差为 2 dB 时，$q = 0.9$，0.2，0.1 时，系

统(4)都存在混沌吸引子;而取逼近误差为3 dB时,只有 $q=0.1$ 时,系统(4)存在混沌现象.其他情形都只出现周期轨道,如图1—3所示.图2表示改变参数 d,得到的向量 x 的分岔图,可见混沌区域很多.

3.2. 电路实现

基于波特图的频率近似方法,文献[6,7]设计了一种 q 从0.1到0.9的 $1/s^q$ 展开式的多个 RC 模块串联的单元电路,如图4所示.图4中 A 与 B 之间的等效电路的复频域表达式为

$$F(s)=\frac{1/C_1}{s+1/R_1C_1}+\frac{1/C_2}{s+1/R_2C_2}+\cdots+\frac{1/C_n}{s+1/R_nC_n},\tag{5}$$

式中 n 为 q 从0.1到0.9的 $1/s^q$ 展开式分母中 s 的最高阶.文献[7]中,已经计算了逼近误差为2 dB时,单元电路中的电阻和电容值.这里以逼近误差3 dB为例,参照文献[1],有表达式

$$\frac{1}{s^{0.1}}\approx\frac{501.14(s+0.6811)}{(s+0.3162)(s+681.1)},\tag{6}$$

将(5)和(6)两式比较,令(5)式中 $n=2$,有 $R_1=849.5\ \mathrm{k\Omega}$,$R_2=735.4\ \mathrm{k\Omega}$,$C_1=3.723\ \mu\mathrm{F}$,$C_2=2.0\ \mu\mathrm{F}$,从而得到了 $1/s^{0.1}$ 时,3 dB近似误差的分数阶单元电路.同理,可以将3 dB误差逼近的,q 从0.1到0.9的 $1/s^q$ 的等效电路中的所有 RC 值求出.

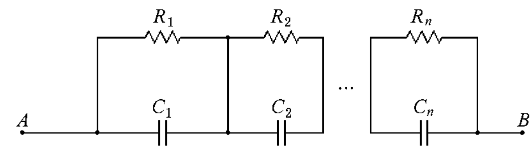

图4 分数阶 $1/s^q$ 的单元电路实现形式

利用Multisim 10电路仿真软件,设计超混沌分数阶Lü系统的电路原理图.选用3554BM的运算放大器,选用MUL TIPLIER普通乘法器,输出增益为1,用该乘法器可以实现混沌系统中的非线性部分.

首先,设计当 $q=0.9$,2 dB误差近似时,超混沌分数阶Lü系统的电路原理图,如图5所示.分数阶等效模块 AB 中电阻电容值参照文献[7],$R_a=62.84\ \mathrm{M\Omega}$,$R_b=250\ \mathrm{k\Omega}$,$R_e=2.5\ \mathrm{k\Omega}$,$C_a=1.232\ \mu\mathrm{F}$,

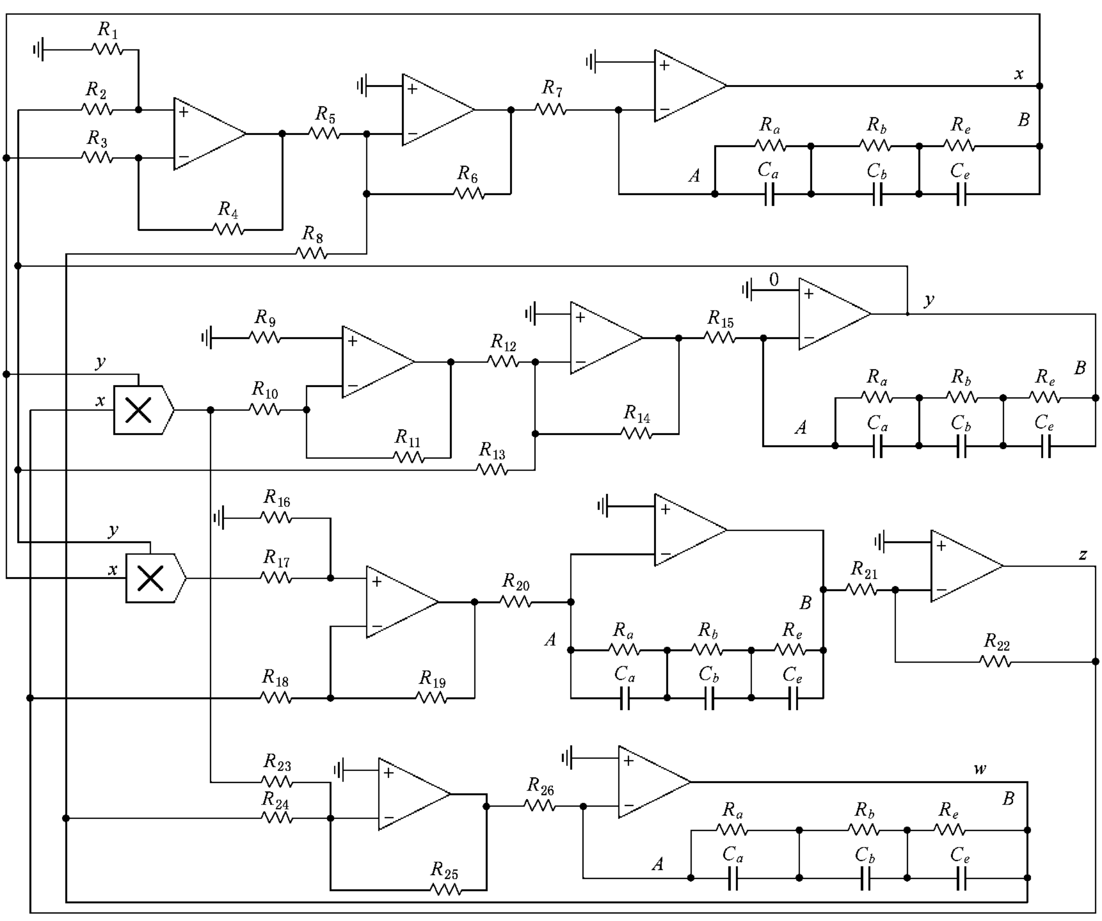

图5 超混沌分数阶Lü系统的电路原理图($q=0.9$,2 dB误差逼近)

$C_b = 1.84\ \mu\mathrm{F}$，$C_e = 1.1\ \mu\mathrm{F}$. 其他的电阻值按照系统的参数计算，得到 R_1，$R_4 = 36\ \mathrm{k\Omega}$，$R_{13} = 5\ \mathrm{k\Omega}$，$R_7$，$R_8$，$R_{15}$，$R_{20}$，$R_{26} = 100\ \mathrm{k\Omega}$，$R_{24} = 76.92\ \mathrm{k\Omega}$，剩下的电阻值都是 10 kΩ. 经过仿真，得到混沌相图图 6. 将图 6 与图 1 比较，电路实验图与数值仿真图形，基本是一致的. 说明了电路设计的有效性.

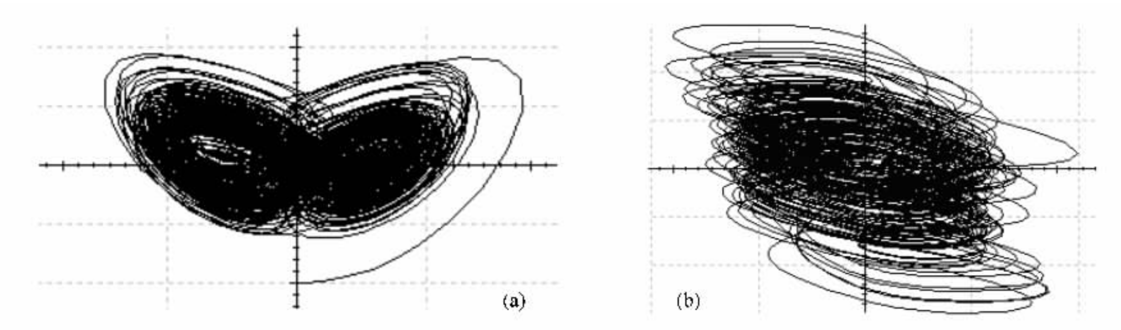

图 6　Lü 混沌系统电路实验相图（$q = 0.9$，2 dB 误差逼近）（a）x-z（1 V/div，1 V/div）；（b）y-w（1 V/div，5 V/div）

其次，还可以设计分数阶算子 $q = 0.1$，3 dB 误差逼近时，Lü 混沌系统的电路图. 只需将图 5 中的四个电路模块 AB 两端中，所有电容电阻值更改为前面计算出的值，即 $R_a = 849.5\ \mathrm{k\Omega}$，$R_b = 735.4\ \mathrm{k\Omega}$，$C_a = 3.723\ \mu\mathrm{F}$，$C_b = 2.0\ \mathrm{pF}$，$R_e$ 和 C_e 都去掉，短接. 具体电路图这里省略. 经过电路实验，得到电路相图如图 7 所示. 由于电路实验时，初始值的大小以及仿真步长的原因，所以开始时存在一些不稳定的值，但是图 7 与图 2 基本一致，证实了混沌的存在.

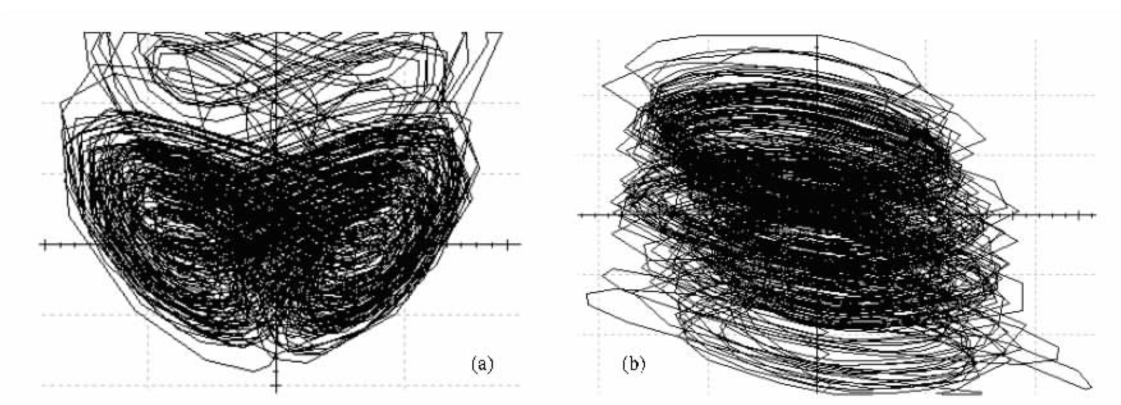

图 7　Lü 混沌系统电路实验相图（$q = 0.1$，3 dB 误差逼近）（a）x-z（1 V/div，1 V/div）；（b）y-w（1 V/div，5 V/div）

4. 追踪控制分数阶 Lü 混沌系统

在文献[11]中，基于严格数学分析，采用线性反馈法控制分数阶 Rössler 混沌系统达到任意稳定的不动点，缺少数值仿真，理论分析繁琐.

这里利用线性反馈控制器，使得超混沌分数阶 Lü 系统所有的状态向量能够达到任意所需的稳定不动点，或者追踪正弦信号等. 选定希望的追踪输出状态为（x^*，y^*，z^*，w^*）. 为了能够使得分数阶 Lü 混沌系统稳定到该状态，采用如下的线性反馈控制，受控系统如下：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^q x}{\mathrm{d}t^q} &= a(y - x) + w \\
&\quad + (k_1 + a)(x - x^*) + \phi_1, \\
\frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}t^q} &= -xz + cy + (k_2 - c)(y - y^*) \\
&\quad + z^*(x - x^*) + x^*(z - z^*) + \phi_2, \\
\frac{\mathrm{d}^q z}{\mathrm{d}t^q} &= xy - bz + (k_3 + b)(z - z^*) \\
&\quad - y^*(x - x^*) - x^*(y - y^*) + \phi_3, \\
\frac{\mathrm{d}^q w}{\mathrm{d}t^q} &= xz + dw + (k_4 + d)(w - w^*) \\
&\quad - z^*(x - x^*) - x^*(z - z^*) + \phi_4,
\end{aligned} \tag{7}$$

其中，

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= a(x^* - y^*) - w^*,\\
\phi_2 &= x^* z^* - c y^*,\\
\phi_3 &= -x^* y^* + b z^*,\\
\phi_4 &= -x^* z^* - d w^*,
\end{aligned} \tag{8}$$

而且,$k_i(i=1,2,3,4)$为线性反馈控制增益.

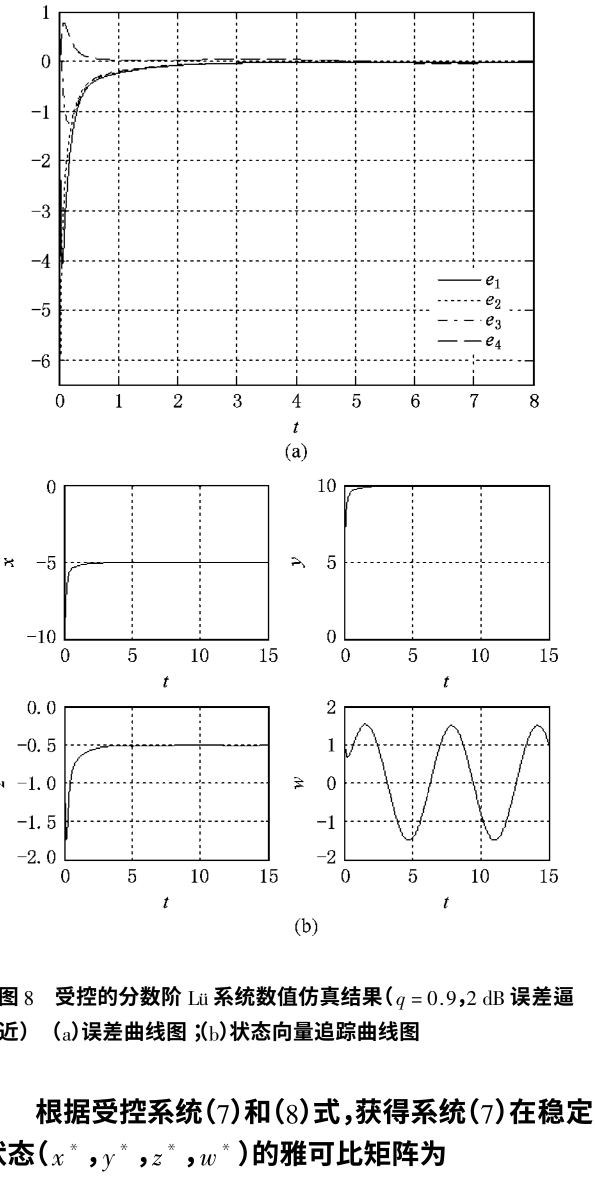

图 8 受控的分数阶 Lü 系统数值仿真结果($q=0.9$,2 dB 误差逼近) (a)误差曲线图;(b)状态向量追踪曲线图

根据受控系统(7)和(8)式,获得系统(7)在稳定状态(x^*,y^*,z^*,w^*)的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} k_1 & a & 0 & 1\\ 0 & k_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

则系统的特征值分别为 $\lambda_1 = k_1$,$\lambda_2 = k_2$,$\lambda_3 = k_3$ 以及 $\lambda_4 = k_4$.

按照分数阶微分系统(3)的稳定条件,只要矩阵(9)的所有特征值满足$|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2$,$i = 1,2,3,4$.那么就能够使得受控分数阶 Lü 混沌系统(7),稳定到任意输出状态 x^*,y^*,z^*,w^*,即每个状态向量可以稳定到不同的任意不动点,或者有界的正弦信号等.

接着,利用仿真软件 Matlab7.0,对受控系统进行数值仿真.假设所要追踪的任意输出为 $x^* = -5$,$y^* = 10$,$z^* = -0.5$,$w^* = 1.5\sin(t)$.其中,系统参数取$(a,b,c,d) = (36,3,20,1.3)$,分数阶微分算子 $q = 0.9$,2 dB 误差逼近.取控制增益$(k_1,k_2,k_3,k_4) = (-30,-20,-10,-40)$.令误差 $e_1 = x - x^*$,$e_2 = y - y^*$,$e_3 = z - z^*$,$e_4 = w - w^*$.仿真结果如图 8 所示.

可见,分数阶 Lü 混沌系统所有状态向量都能够快速地追踪到期望的状态.误差曲线很快衰减到零,稳定性能好.该方法的优点是控制参数的选取与追踪的值无关,而且可以追踪任意有界的信号,甚至混沌信号.

5. 结　论

本文研究了四维的超混沌 Lü 系统的分数阶动力学行为,基于频率近似法,得出了丰富的数值仿真结果,并且构造了电路图进行实验,证实了分数阶超混沌 Lü 系统中的混沌现象.同时,基于分数阶微分稳定性理论,设计了简单灵活的线性反馈控制器,成功地将超混沌分数阶 Lü 系统的所有状态向量追踪控制,到任意期望的平衡态或者正弦信号.控制增益选择灵活,控制效果好,误差曲线衰减快.该方法还可以推广到追踪任意的混沌信号.总之,该方法具有普适性,简单灵活.

[1] Ahmad W,Sprott J C 2003 *Chaos. Solitons Fract.* **16** 339

[2] Li C G,Chen G 2004 *Physica* A **341** 55

[3] Grigorenko I,Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101

[4] Li C P,Peng G J 2004 *Chaos. Solitons Fract.* **22** 443

[5] Lu J G 2006 *Phys. Lett.* A **354** 305

[6] Wang F Q,Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese)

[王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
[7] Liu C X 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865]
[8] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y Y 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、王发强、李永郧 2008 物理学报 **57** 1416]
[9] Chen X R, Liu C X, Wang F Q 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 1614
[10] Zhang C F, Gao J F, Xu L 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 5124 (in Chinese) [张成芬、高金峰、徐 磊 2007 物理学报 **56** 5124]
[11] Zhou P, Zhang N Y 2007 *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications* **19** 756 (in Chinese) [周 平、张年英 2007 重庆邮电大学学报 **19** 756]
[12] Wang X Y, He Y J 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 1485 (in Chinese) [王兴元、贺毅杰 2008 物理学报 **57** 1485]
[13] Lü J H, Chen G R 2002 *Int*. *J*. *Bifur*. *Chaos* **12** 659
[14] Lorenz ED N 1963 *J*. *Atmas*. *Sci*. **20** 130
[15] Chen G R, Ueta T 1999 *Int*. *J*. *Bifur*. *Chaos* **9** 1465
[16] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z, Celikovsk Y S 2002 *Int*. *J*. *Bifur*. *Chaos* **12** 2917
[17] Li C P, Yan J P 2007 *Chaos*. *Solitons Fract*. **32** 751
[18] Chen A M, Lu J A, Lü J H, Yu S M 2006 *Physics* A **364** 103

Circuit implementation and tracking control of the fractional-order hyper-chaotic Lü system*

Min Fu-Hong[1)†] Yu Yang[1)] Ge Cao-Jun[2)]

1) (*School of Electronic Engineering and Automation*, *Nanjing Normal University*, *Nanjing* 210042, *China*)

2) (*Department of Capital Construction*, *Nanjing Normal University*, *Nanjing* 210042, *China*)

(Received 9 August 2008; revised manuscript received 20 August 2008)

Abstract

This paper studies the fractional-order Lü system which has been presented recently, and designed an electronic circuit to realize it. The hyper-chaotic behavior of the fractional-order Lü system is verified by numerical simulation and circuit experiment. Based on the stability theory of the fractional-order system, a simple linear feedback controller is designed to make full states of a fractional order Lü system to track control sinusoidal waves or arbitrarily fixed point. The simulation results are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: fractional order Lü system, fhyper-chaotic system, fcircuit implementation, ftracking control

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60774060) and the Natural Science Foundation of the Jiangsu Higher Education Institutions of China (Grant No. 08KJB510006).

† E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn