第 58 卷 第 7 期 2009 年 7 月
1000-3290/2009/58(07)/4493-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.7,July,2009
©2009 Chin.Phys.Soc.

用元胞自动机模型研究二维激发介质中的非线性波*

张立升† 邓敏艺 孔令江 刘慕仁 唐国宁
(广西师范大学物理与电子工程学院,桂林 541004)

(2008 年 9 月 25 日收到;2008 年 11 月 25 日收到修改稿)

采用 Greenberg-Hasting 元胞自动机模型研究了激发介质中非线性波的有关性质.在零流边界条件下根据计算机数值模拟研究了行波波速随邻域半径、激发阈值的变化关系,分析得到激发介质的激发条件;同时模拟研究了螺旋波波头轨迹受不应态数和激发阈值的影响并分析产生这些影响的内在微观机理.

关键词:元胞自动机,激发介质,非线性波
PACC:0547

1. 引 言

激发介质中的非线性波广泛地存在于物理、生物和化学系统中[1—5],并且其动力学行为的普适性规律、复杂的非线性特征及潜在的应用价值引起了非线性科学研究者的广泛关注.在激发介质中产生的行波和螺旋波是两种常见的非线性波.其中由空间均匀分布、可激发单元组成的反应扩散系统可能出现行波,行波是最简单的非线性波,可以用来同其他非线性波进行比较研究和进行介质性质的分析.欧阳颀的研究表明行波波速受控于系统的激发强度和扩散速度[6].螺旋波的波头是一个时空拓扑缺陷,螺旋波波头运动规律的研究对螺旋波形成机理、演化行为乃至螺旋波的控制都非常关键.Barkley 研究了螺旋波波头出现复杂漫游的机理[7];欧阳颀等人用实验给予了验证[8];Hwang 等[9]和 Tung 等[10]分别采用局域周期调制和负反馈方法对波头进行控制.螺旋波波头至今仍是非线性科学研究者的关注焦点.

描述激发介质的动力学方程一般为偏微分方程,对激发介质中非线性波的研究通常借助对偏微分方程的数值求解来进行,因而选用高效简单的数值模型对非线性波研究非常重要.元胞自动机(cellular automata,CA)是一种时间、空间、状态均离散的数值模型,由于其算法简单、并行计算性好[11]而且易于在计算机上有效模拟激发介质中宏观物理量的微观变化机理,因此在激发介质的研究中得到了广泛的应用和发展[3,12—18].Greenberg-Hasting 元胞自动机模型[19]是一种激发介质模型,其可靠性得到了实验的验证[20].很多研究者以此模型为基础研究激发介质中的非线性波:Nishiyama 等研究了靶波波速随激发阈值的变化关系[21],Zemlin 等对激发介质中负回归曲线对螺旋波稳定性的影响进行了模拟讨论[22],Bub 等研究了系统参数对靶波演化行为的影响[23]等.

本文使用 Greenberg-Hasting 元胞自动机模型对激发介质中的非线性波进行研究:计算机数值模拟研究行波波速随邻域半径、激发阈值的变化关系,根据这些关系进一步分析激发介质的激发条件;计算机数值模拟研究螺旋波波头轨迹受不应态数和激发阈值的影响并分析产生这些影响的内在微观机理.

2. 模 型

在二维 Greenberg-Hasting 模型中,元胞均匀分布在四方格子上,相邻格点间距为 1.采用扩展的 Moore 邻居,邻域半径为 R.邻域内共有$(2R+1)^2$ 个元胞,邻域内中心元胞共有$(2R+1)^2-1$ 个邻居.t 时刻格位 $\boldsymbol{r}$ 的状态 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 在集合 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 中取值.其中 n 代表元胞的状态数.状态 $\phi(\boldsymbol{r},t)=0$ 代表静息态,$\phi(\boldsymbol{r},t)=h$ 代表激发态($h\in[1,E]$,1

* 国家自然科学基金(批准号:10562001,10765002)资助的课题.

† E-mail:rulinshenhua@126.com

$\leqslant E < n-1$),$\phi(\boldsymbol{r},t)=g$ 代表不应态($g\in[E+1,n-1]$).其中 g,h 和 E 均为正整数.演化规则如下:

1)如果 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 是激发态或不应态,则 $\phi(\boldsymbol{r},t+1)=\phi(\boldsymbol{r},t)+1\bmod n$.

2)如果 $\phi(\boldsymbol{r},t)=0$,则在下一时步继续保持静息态,除非格位 $\boldsymbol{r}$ 的邻域中处于激发态的元胞个数达到一个固定的阈值 K,这时格位 $\boldsymbol{r}$ 的元胞才被激发为激发态.K 称为激发阈值.

3. 数值模拟与分析

3.1. 激发介质中行波性质的研究

3.1.1. 单个激发态下的行波

为考察均匀激发介质中行波的运动规律,采用二维 Greenberg-Hasting 模型进行数值模拟,模拟时系统大小为 300×300 个格子(下同),采用零流边界条件(下同).使系统边界 K 行元胞在初始时处于激发态.由于系统中同一行元胞具有相同的激发条件和演化规则,所以激发态在同一行元胞上的传递相位和速度相同,于是可观察到系统有行波传播现象.为得到行波速度 C_0 随激发阈值 K 以及邻域半径 R 的变化关系,通过改变系统参数 R 和 K 产生行波进行观测,结果见图 1.

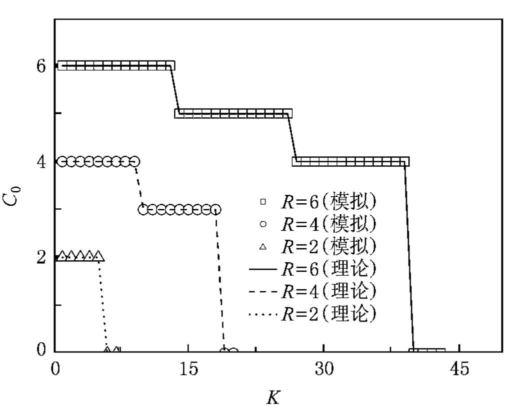

图 1 C_0 随 K 及 R 的变化

下面从微观机理上对 C_0 与 R 及 K 的关系进行分析.作系统任意中心元胞邻域的横截面图,见图 2.图中深灰色部分代表中心元胞所在邻域与激发区域交叠部分,该部分是能使中心元胞被激发的临界最小值;浅灰色部分代表下一时步随中心元胞一起被激发的区域;黑色元胞代表中心元胞.根据图 2 分析,当激发阈值为 K 时,中心元胞被激发要求其邻域中至少有 $\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil$ 行元胞被激发(见图 2 中深灰色区域).下一时步被激发的元胞包括邻域中与激发区域未交叠的 $R-\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil$ 行和中心元胞所在行(见图 2 中浅灰色区域).其中⌈·⌉代表不小于·的最小整数.

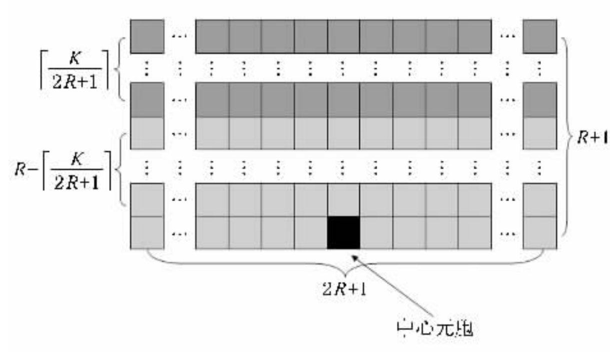

图 2 系统的任意一中心元胞邻域横截面图

显然行波的波速 C_0 等于单位时步行波传播的行数,即

$$C_0=R+1-\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil.$$

为了保证行波随时间不断向前推移,要求

$$R+1-\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil\geqslant\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil.$$

从以上分析得到 C_0 与 R 及 K 的关系为

$$C_0=R+1-\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil\geqslant\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil,\tag{1}$$

此式的计算结果也见图 1.可见数值模拟结果与计算结果完全一致.根据(1)式得系统产生行波的 R,K 关系

$$\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil\leqslant\frac{1}{2}(R+1).\tag{2}$$

由演化规则知,K 越大系统的激发性越差,要使系统能被激发,K 应该小于某个阈值.(2)式就给出了这个阈值与 R 的关系,它就是可激发系统的激发条件.计算机数值模拟得到系统激发相图,并由此作出系统激发的临界曲线,见图 3.将根据(2)式计算得到的系统激发临界曲线也同时标在图中,可以看出两者完全一致.

由激发规则知元胞经 n 个状态变化后回到原态,所以元胞的激发周期就是 n,即行波传播的周期就是 n.于是有行波波长 λ 和波速 C_0 的关系

$$\lambda = nC_0.\tag{3}$$

根据(3)式和计算机数值模拟分别得 λ-C_0 关系,见

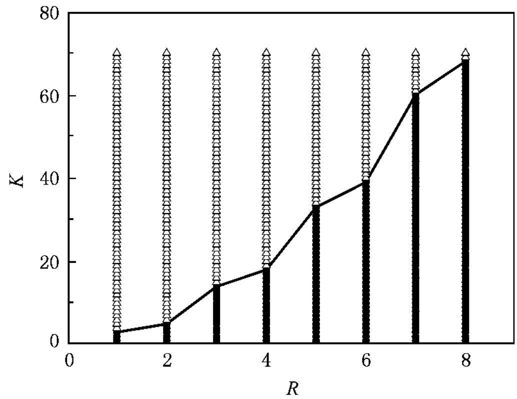

图 3　系统的激发相图及激发临界曲线(●代表激发相,△代表非激发区相,┈代表模拟所得激发临界曲线,—代表根据(2)式所得激发临界曲线)

图 4,可以看出两者一致.

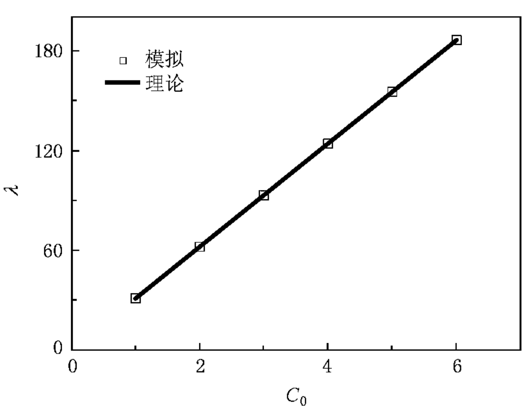

图 4　λ 随 C_0 的变化

3.1.2. 多个激发态下的行波

参照单个激发态下行波的激发条件,多个激发态下为了保持行波持续向前传播,多个激发态下行波的激发条件为

$$E\left(R+1-\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil\right)\geqslant\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil . \tag{4}$$

将(4)式与(1)式进行对比,显然,多个激发态下的行波激发条件在 $E=1$ 时就变为单个激发态下的行波激发条件.激发态个数满足 $E\geqslant R$ 时,由(4)式和激发规则可知,此时行波激发与 E 无关,这时系统产生行波的 R,K 关系为

$$\left\lceil\frac{K}{2R+1}\right\rceil\leqslant R. \tag{5}$$

将多激发态下系统激发临界曲线的数值模拟结果与(5)式计算结果进行比较,见图 5,可以看出两个结果一致.同时,将单激发态下系统激发临界曲线也标示在图 5 中.可以看出,多激发态行波的存在区域(曲线与横轴所围区域)比单激发态行波的存在区域要大,表明激发态个数的增加使介质激发性增强.同时看出,多激发态下的系统激发临界曲线非常平滑,这是由于激发态个数变大造成的.

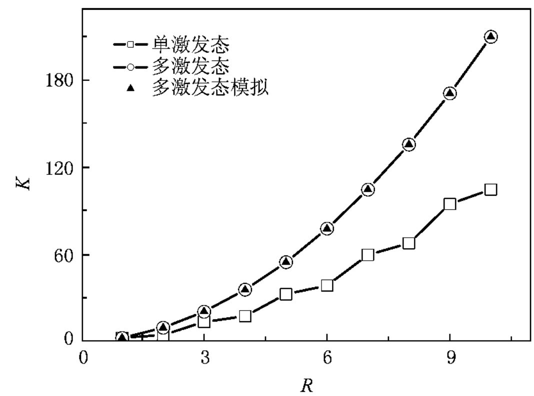

图 5　多激发态($E=10$)与单激发态系统激发临界曲线

3.2. 单激发态下螺旋波波头轨迹的研究

首先产生一列行波,在这个行波传播到系统中间时将其抹掉一半,系统不断演化就产生了螺旋波,激发波前的尽头为螺旋波的波头,见图 6 及图中箭头所示.下面对螺旋波波头轨迹进行探讨.

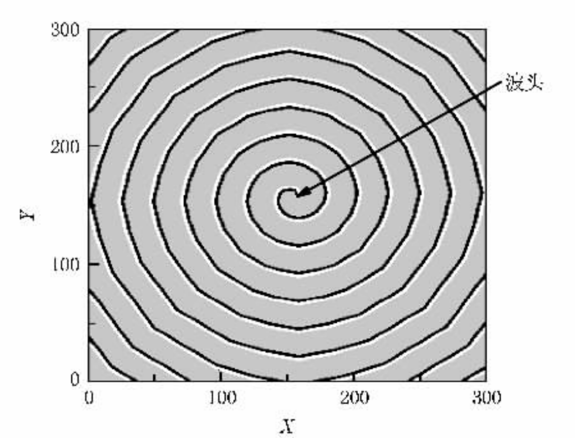

图 6　激发介质中的螺旋波($E=1$,$R=3$,$K=6$,$n=9$,其中黑色代表激发态,灰色代表不应态,白色代表静息态)

3.2.1. 不应态个数 m 对波头运动轨迹的影响

对于单激发态的系统,显然有 $m=n-2$.分别做出 $m=2$ 和 $m=18$ 的波头运动轨迹,见图 7.可以看出系统的 m 越大波头轨迹越长.

从螺旋波的形成过程来解释 m 的大小对波头轨迹长短的影响.在二维可激发系统中制造一个线

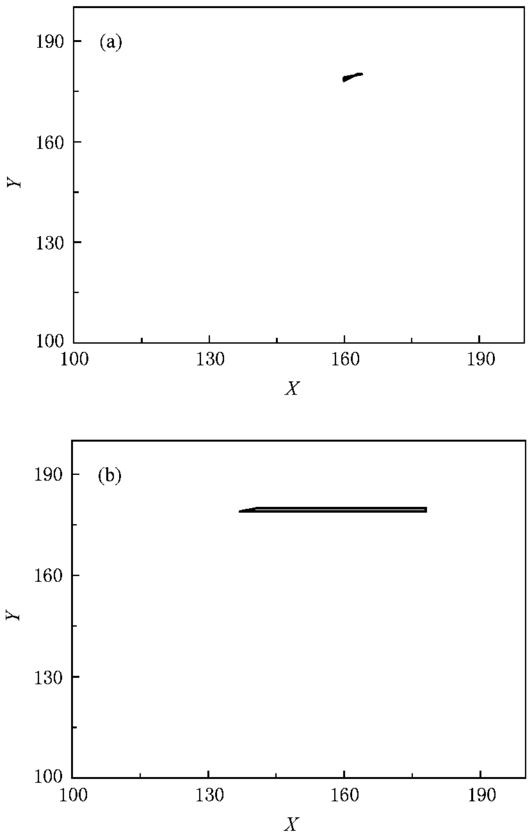

图 7 m 对波头运动轨迹的影响（$R=5$，$K=10$） （a）$m=2$；（b）$m=18$

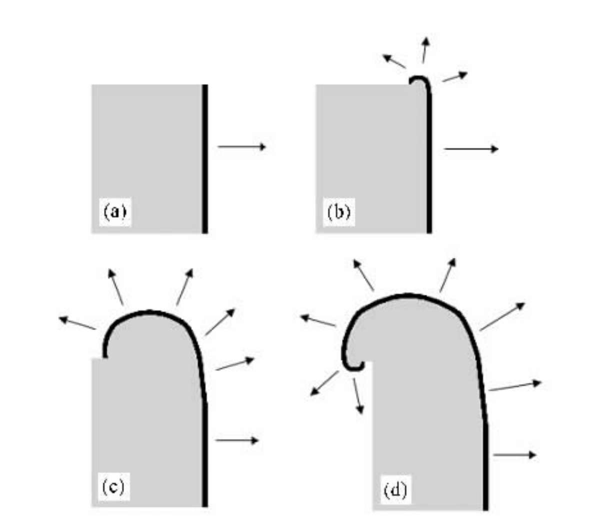

图 8 螺旋波的形成过程（$R=5$，$K=10$，其中黑色代表激发态，灰色代表不应态，白色代表静息态） （a）第 30 个时步；（b）第 32 个时步；（c）第 40 个时步；（d）第 44 个时步

状波，波的行进方向与线波垂直，当线波被截断并去掉一半时，在线波上就造出一个端点. 这样，在远离端点的区域，线波波前的邻近点由于受到线波左右两个方向的激发，激发较强，因而速度较快，在端点区域线波波前的邻近点只受到来自一方的激发，激发较弱，所以速度较慢. 这样从整体上看，当线波向前移动时，端点的相对位置会有一个滞后，这个滞后会使得线波在端点附近弯曲，线波的局部运动方向发生变化，由于这种端点效应总是存在，随着时间的增长，线波会逐渐转变成螺旋波[6]. 图 8（a），（b），（c），（d）表示了这个动力学过程. 可以看出，在端点（即波头）附近发生弯曲时，波头开始沿着不应态截断面运动，当波头绕过截断面时开始形成螺旋波；而系统的 m 越大，系统形成的行波截断面就越宽，波头沿行波截断面所走的路径就越长，于是出现了图 7 中 m 越大波头轨迹越长的现象.

3.2.2. 激发阈值对螺旋波波头运动轨迹的影响

数值模拟结果发现波头轨迹随 K 增大而增大，见图 9. 为探讨这种变化的微观机理，我们作了波头附近的波前近似图，见图 10.

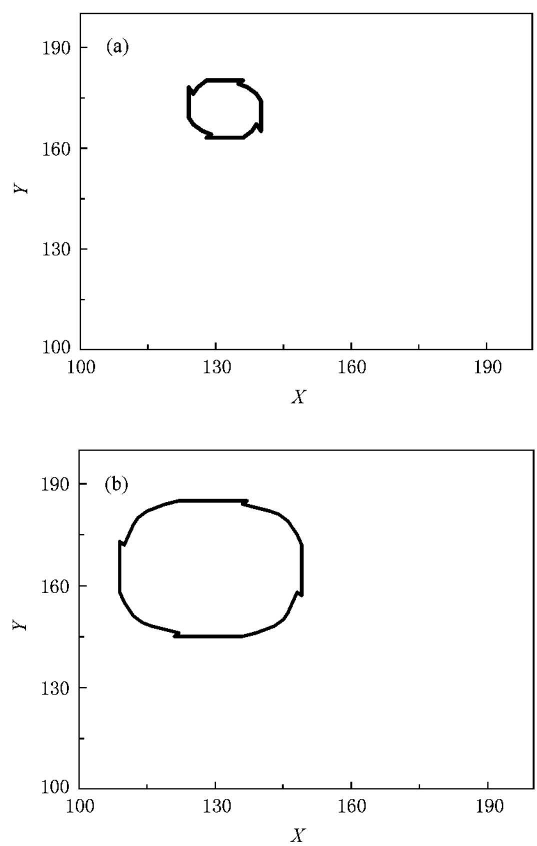

图 9 激发域值对波头轨迹的影响（$R=5$，$n=7$） （a）$K=17$；（b）$K=18$

图 10 中点 O 是正方形的中心，它代表邻域中心元胞；正方形代表 O 所在的元胞邻域. 浅灰色区

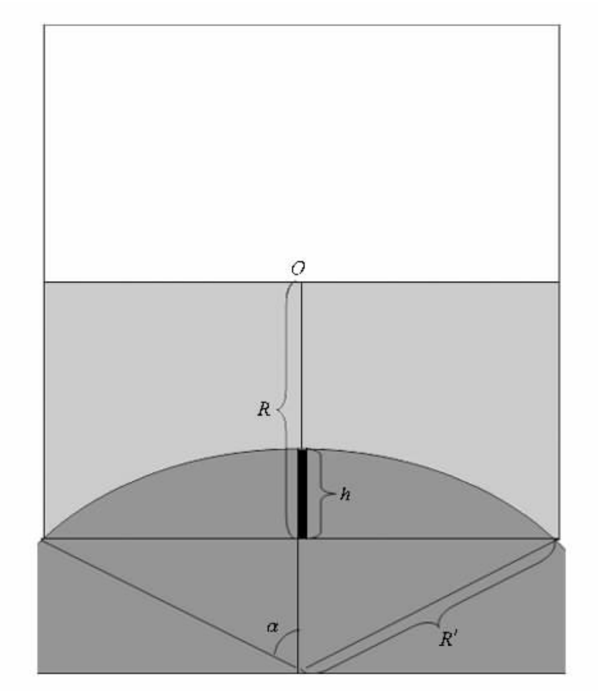

图 10　波头附近的波前同邻域元胞之间的关系

域代表下一时步 O 所在的邻域中被激发的元胞;深灰色区域代表当前时步中已经被激发的元胞;扇形区域与正方形的交叠部分代表能使浅灰色元胞激发的最少元胞数.设交叠部分的最高处高为 h,O 所在的邻域半径为 R,扇形所在的圆的半径为 R',扇形所对应的圆心角的一半为 α.因为交叠区域中包含的元胞数就为 K,根据几何关系有

$$(R' - h)^2 + \left(R + \frac{1}{2}\right)^2 = R'^2, \tag{6}$$

$$\alpha = \arccos \frac{R' - h}{R'}, \tag{7}$$

$$K = \frac{2\alpha}{2\pi}\pi R'^2 - \frac{1}{2}(2R + 1)(R' - h). \tag{8}$$

设波头附近波前的行进速度大小为 v_0,则由图 10 中

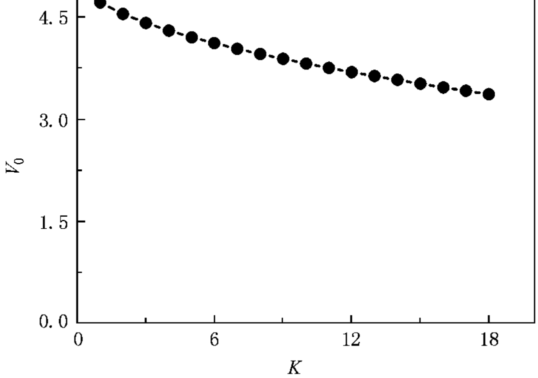

图 11　v_0 随 K 的变化

的几何关系有

$$v_0 = R - h. \tag{9}$$

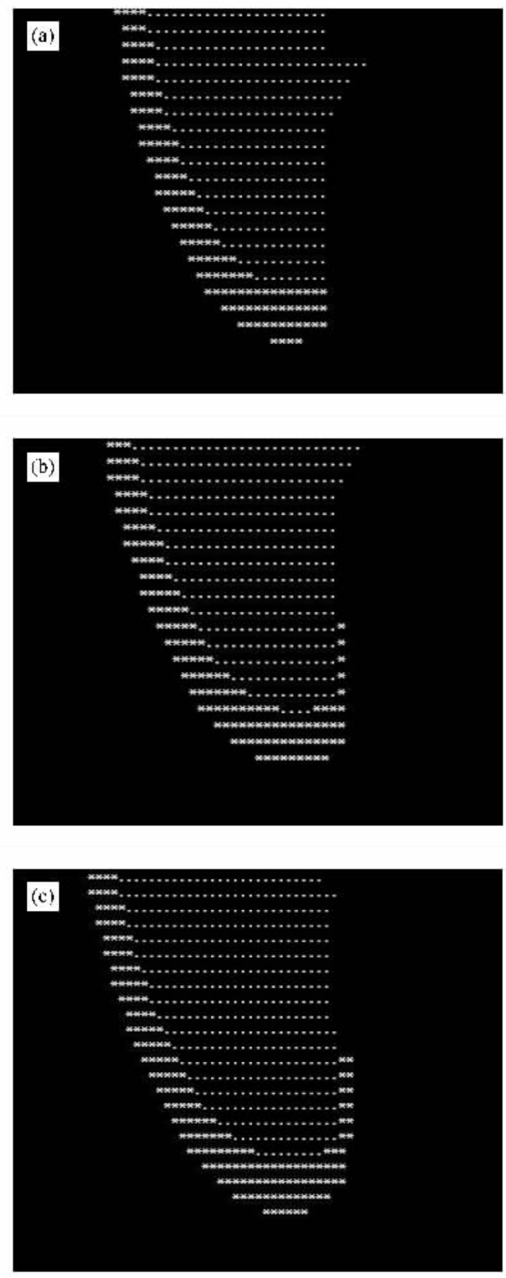

图 12　波头转变运动方向微观图(其中白色 * 代表激发态,白色□代表不应态,黑色区域代表静息态)　(a)转向开始前一时步;(b)转向开始第一时步;(c)转向开始第二个时步

根据(6),(7),(8),(9)式作出 v_0 随 K 的变化关系见图 11.由图 11 可见 v_0 随 K 增加而减小,其原因是 v_0 变小时,波头相邻两次转向的时间间隔变大,致使波头轨迹的线性部分加大从而使波头轨迹变大;v_0 变小使波头顶点的激发速度变慢,波头的转向时间变长从而使波头转向时轨迹变大.

从图 9 还可以看出波头轨迹并不是严格光滑的

曲线,而是对称分布着四个小尖角和线性部分.其原因是 根据波头转变运动方向的微观图 12 知,当螺旋波波头转向时有一串激发元胞率先出现在不应态与静息态的交界处,见图 12(b),这是波头转向的基础.类似的激发点在后续时步中继续产生,而波头沿着与这串激发元胞垂直的方向运动,见图 12(c),直至再次转向.转向时,第一个时步产生的那串激发元胞较长,使得第二个时步中产生的激发元胞未能及时与其对齐,于是前后两个时步的激发元胞串就产生阶梯式差异,从而形成了波头轨迹上的尖角.

4. 结 论

本文采用 Greenberg-Hasting 激发介质元胞自动机模型对均匀激发介质中非线性波的性质进行计算机模拟和分析,发现 :1)行波波速随邻域半径增大而增大,随激发域值增大而减少 ;2)系统的激发条件与邻域半径、激发阈值有关 ;3)不应态个数越大螺旋波波头轨迹越长 ;4)激发阈值越大螺旋波波头轨迹越大.本文还对以上现象的原因进行了微观机理的分析.

当前,激发介质中非线性波的研究主要依赖数值模拟,对于理论上的计算与推导还有很多工作要做.对于激发介质中各种非线性波的演化机理、控制方法及其相互关系还需要深入研究.鉴于元胞自动机模型的简单、直观和运算量小等特点,使用元胞自动机模型来研究激发介质必然能为激发介质的研究提供帮助.

[1] Zaikin A N,Zhabotinsky A M 1970 *Nature* **225** 535

[2] Lee K J,Cox E C,Goldstein R E 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **76** 1174

[3] Bub G,Shrier A,Glass L 2002 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **88** 058101

[4] Deng M Y,Shin J,Li H B *et al* 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 2012 (in Chinese)[邓敏艺、施 娟、李华兵等 2007 物理学报 **56** 2012]

[5] Ma J,Jin W Y,Li Y L *et al* 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 2456 (in Chinese)[马 军、靳伍银、李延龙等 2007 物理学报 **56** 2456]

[6] Ouyang Q 2001 *Physics* **30**(1) 30 (in Chinese)[欧阳颀 2001 物理 **30**(1) 30]

[7] Barkley D 1994 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **72** 164

[8] Li G,Ouyang Q,Petrov V *et al* 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **77** 2105

[9] Hwang S M,Choe W G,Lee K J 2000 *Phys*. *Rev*. E **62** 4799

[10] Tung C K,Chan C K 2002 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **89** 248302

[11] Wolfram S 1983 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **55** 601

[12] Fisch R,Gravner J,Griffeath D 1991 *Statistics and Computing* **1** 23

[13] Fast V G,Efimov I R 1991 *Physica* D **49** 75

[14] Weimar J R,Tyson J J,Watson LT 1992 *Physica* D **55** 309

[15] Feldman A B,Chernyak Y B,Cohen R J 1998 *Phys*. *Lett*. E **57** 7025

[16] Bub G,Shrier A 2002 *Chaos* **12** 747

[17] Adamatzky A 2007 *Chaos*,*Solitons and Fractals* **34**(2) 307

[18] Szakúly T,Lagzi I,Izsúk F *et al* 2007 *Central European Journal of Physics* **5** 471

[19] Greenberg J M,Hasting S P 1978 *SIAM Journal on*. *Applied Mathematics* **34** 515

[20] Zhao Y,Billings S A,Routh A F 2007 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **17** 1687

[21] Nishiyama A,Tanaka H,Tokihiro T 2008 *Physica* A **387** 3129

[22] Zemlin C W,Panfilov A V 2001 *Phys*. *Rev*. E **63** 041912

[23] Bub G,Shrier A,Glass L 2005 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **94** 028105

The cellular automaton model for the nonlinear waves in the two-dimensional excitable media*

Zhang Li-Sheng† Deng Min-Yi Kong Ling-Jiang Liu Mu-Ren Tang Guo-Ning

(*College of Physics and Electronic Engineering, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China*)

(Received 25 September 2008; revised manuscript received 25 November 2008)

Abstract

In this paper, we have studied the nonlinear waves using the Greenberg-Hasting Cellular Automaton model. The dependence of the propagation speed of plane wave on the neighbor radius and the excitation threshold is analyzed with the no-flux boundary condition by computer simulation, and then the excitation condition is obtained. The orbit of the tip of spiral wave is affected by the number of refractory states and the excitation threshold, and then the mechanism is analyzed.

Keywords: cellular automata, excitable media, nolinear waves

PACC: 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundaion of China (Grant Nos. 10562001, 10765002).

† E-mail: rulinshenhua@126.com