

表面粗糙度的分形特征及其对微通道 内层流流动的影响^{*}

张程宾 陈永平[†] 施明恒 付盼盼 吴嘉峰

(东南大学能源与环境学院, 南京 210096)

(2009 年 1 月 21 日收到 2009 年 2 月 8 日收到修改稿)

基于分形几何学,研究了表面粗糙度的分形特征.采用 Weierstrass-Mandelbrot 函数对多尺度自仿射的表面粗糙度进行了描述,建立了微通道内层流流动的三维模型并对表面粗糙度的影响进行了数值模拟,分析了雷诺数、相对粗糙度和分形维数对流动阻力特性的影响.研究结果表明,与常规尺度通道不同,粗糙微通道的 Poiseuille 数不再是常数,而是随雷诺数近似线性增加,相对粗糙度越大,流动产生的回流和分离所导致的流动压降越明显.在相同的相对粗糙度下,粗糙表面的分形维数越大,表面轮廓变化就越频繁,这也将导致流动阻力的明显增加.并且根据文献中的实验数据验证了本文模型的准确性.

关键词:粗糙度,层流阻力系数,微通道,分形

PACC: 4710, 4715, 4752

1. 前 言

在经典流体力学中,通常不需要考虑通道表面粗糙度对于层流流动的影响.然而,随着 MEMS 器件的迅速发展,通道尺寸越来越小,表面相对粗糙度急剧增加,粗糙度对微通道层流流动是否有影响的问题日益受到人们的重视^[1].

近年来,尽管在微尺度流动和传热研究领域已经开展了大量的工作^[2-6],但是所得到的微尺度对传热传质影响的结论还很不一致,实验数据之间存在着很大的差异.虽然这些差异在一定程度上可能是由于测量误差所造成的,但是通道表面状况,特别是通道粗糙度的不同则更有可能是导致此类偏差产生的主要原因^[1].对于小通道($200 \mu\text{m} \leq d_h \leq 3 \text{mm}$)和微通道($10 \mu\text{m} \leq d_h \leq 200 \mu\text{m}$)^[7],其表面粗糙度高度与水力直径的比值(相对粗糙度)远大于常规尺度通道.因此可以预测,微尺度下,粗糙表面的形状和相对粗糙度大小将会对流动特性产生重要的影响.

Pfund 等^[8]实验测量了深度在 128—521 μm 之间的矩形微通道中层流阻力系数,得到的测量数据与经典理论值存在很大差别. Hu 等^[9]对带有矩形棱

状粗糙度的微通道内层流流动进行了三维数值模拟,研究了粗糙度高度、大小、间距以及通道高度对速度分布和压降的影响. Croce 和 Agaro^[10]采用一系列随机产生的波峰在理想光滑表面上模拟构建了粗糙表面,数值研究了粗糙度对传热和流动压降的影响. Kleinstreuer 和 Koo^[11]通过多孔介质模型模拟了粗糙边界,研究了低雷诺数下微通道内流体的层流流动. Bahrami 等^[12]假定粗糙度曲线服从高斯分布,建立了微通道内充分发展层流流动的理论分析模型. Taylor 等^[13]则对现有的表面粗糙度和结构纹理对流体流动影响的研究进行了综述讨论,展望了能用以研究粗糙度影响的主要方法.上述这些研究均显示了微尺度下表面粗糙度对流动特性具有重要的影响,但是都未能深入揭示其影响的机制和内在规律.

为了研究粗糙度对微通道中流动的影响规律,首先要有一种能精确描述粗糙表面轮廓的几何方法^[13,14].表面粗糙凹凸分布是一个特殊的非稳态随机过程,且随着仪器测量精度的不同或者取样尺度的不同,测量得到的粗糙度都将发生变化^[15].尽管在现有的粗糙度对层流流动的影响研究中已建立了随机波峰^[10]、多孔介质模拟^[11]、高斯分布^[12]等描述

^{*} 国家自然科学基金(批准号:50806012)、江苏省自然科学基金(批准号:BK2008309)和航空科学基金(批准号:2008ZH69001)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: ypchen@seu.edu.cn

表面粗糙度的模型,但是这些模型都是建立在统计平均的基础上,无法准确反映多尺度、自仿射粗糙表面真正的几何特征。

受分形几何成功应用于研究固体表面间摩擦过程的启发^[16-18],本文将分形几何引入到微通道流动的研究之中,探讨了粗糙表面的分形特征,研究了粗糙度对微通道中层流流动的影响。

2. 粗糙表面的分形特征

分形几何学是由 Mandelbrot^[19]所创建,通过分

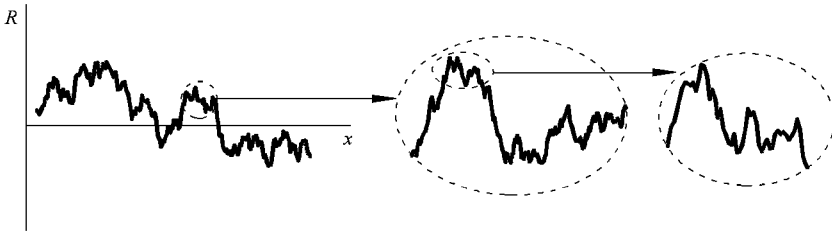


图 1 表面粗糙度轮廓曲线

$$R(\gamma) = G^{(D-1)} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n \gamma)}{\gamma^{(2-D)n}} \quad (1 < D < 2, \gamma > 1), \quad (1)$$

式中, G 是常数, D 是自仿射分形维数, G 和 D 皆独立于仪器精度和测量尺度. 对于粗糙表面, $\gamma = 1.5$ ^[18], 参数 n_1 则用来描述 W-M 函数下限截止频率, 其值可由关系 $\gamma^{n_1} = 1/L_s$ 所给出, L_s 则是测量样本长度.

Weierstrass-Mandelbrot 函数 $R(\gamma)$ 是一个多尺度函数, 其功率谱密度为

$$s(\omega) = \frac{G^{(D-1)}}{2 \ln \gamma} \frac{1}{\omega^{(5-2D)}}, \quad (2)$$

结构函数 $St(\tau)$ 为

$$\begin{aligned} St(\tau) &= (R(\gamma + \tau) - R(\gamma))^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \chi e^{i\omega\tau} - 1 d\omega \\ &= \psi G^{(D-1)} \tau^{(4-2D)}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中, ψ 为常数

$$\psi = \frac{\Gamma(2D-3) \sin((2D-3)\pi/2)}{2 \ln \gamma (2-D)}. \quad (4)$$

均方根粗糙度则为

$$\begin{aligned} \sigma &= R^2 \quad 0.5 = \left[\int_{\omega_1}^{\omega_h} s(\omega) d\omega \right]^{0.5} \\ &= \left[\frac{G^{(D-1)}}{2 \ln \gamma} \frac{1}{4-2D} \left(\frac{1}{\omega_1^{(4-2D)}} - \frac{1}{\omega_h^{(4-2D)}} \right) \right]^{0.5} \end{aligned} \quad (5)$$

形维数来对复杂多变的非规则结构进行描述. 传统欧氏几何则主要用于描述规则结构, 比如点、线、面和立方体, 其维数分别为整数 0, 1, 2, 3. 而分形几何学认为复杂的非规则结构^[20-23], 如海岸线、分形树、多孔介质和粗糙表面的几何维数并不一定是整数.

已有的研究表明, 表面粗糙度轮廓表现出具有多尺度、自仿射的特性^[16-18], 如图 1 所示, 曲线经局部放大后, 其几何特征与曲线整体非常相似.

对于具有多尺度、自仿射特性的粗糙表面, 从纳米尺度到毫米尺度的表面粗糙度的轮廓 $R(\gamma)$ 可由 Weierstrass-Mandelbrot (W-M) 函数进行表征^[18],

式中, τ 为尺度, 下限截止频率 ω_1 与样本长度 L_s 相关, $\omega_1 = 1/L_s$, 上限截止频率 ω_h 则由测量仪器精度 L_r 决定, $\omega_h = 1/L_r$.

粗糙表面是否具有分形特性既可通过功率谱密度判断其是否满足方程 (2) 来确定, 也可计算它的结构函数来看它是否满足方程 (3)^[24]. 一般情况下, 粗糙表面都具有多尺度、自仿射的特性, 因此表面粗糙度轮廓曲线是可由 W-M 函数表征的分形曲线.

对于给定的一个真实表面形貌, 确定了其自仿射分形维数 D 后, G 可通过将仪器测量得到的均方根粗糙度 σ 代入方程 (5) 而获得. 此时, 基于方程 (1) 即可对粗糙表面进行更为准确的描述.

为了更进一步理解自仿射分形粗糙度的特性, 图 2 给出了利用 W-M 函数构建的具有不同分形维数但粗糙度统计高度相同的表面轮廓曲线. 由图 2 可见, 尽管粗糙度统计高度相同, 但是随着分形维数的变化, 粗糙度曲线明显不同. 分形维数 D 越大, 曲线的不规则度就越突出, 变化也越频繁. 因此, 分形维数 D 可以直观地表示出表面轮廓的不规则性. 同时, 也表明了 D 和 σ 是一对各自独立的参数.

本文对 Pfund 等^[8]实验中所用微通道的表面粗糙特性进行了计算, 其通道表面轮廓如图 3 所示.

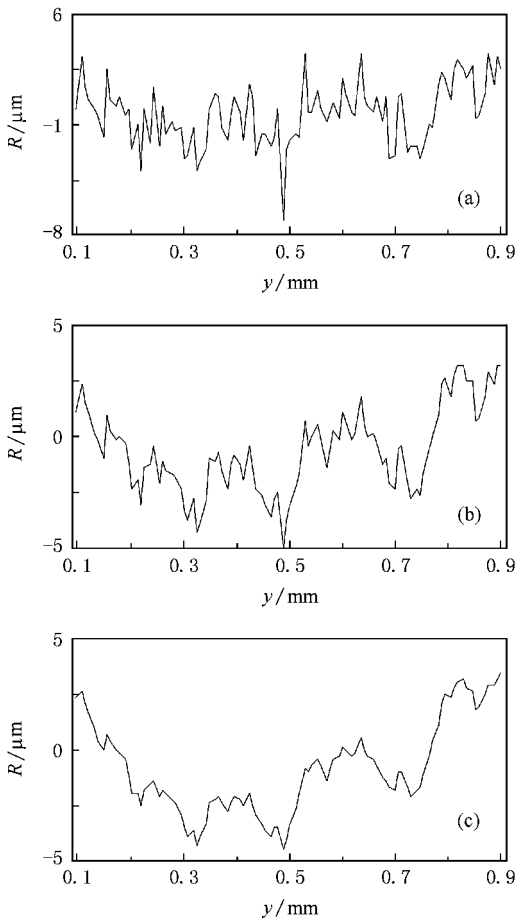


图2 W-M函数构建的表面轮廓曲线 $\sigma = 2 \mu\text{m}$. (a) $D = 1.8$, (b) $D = 1.5$ (c) $D = 1.2$

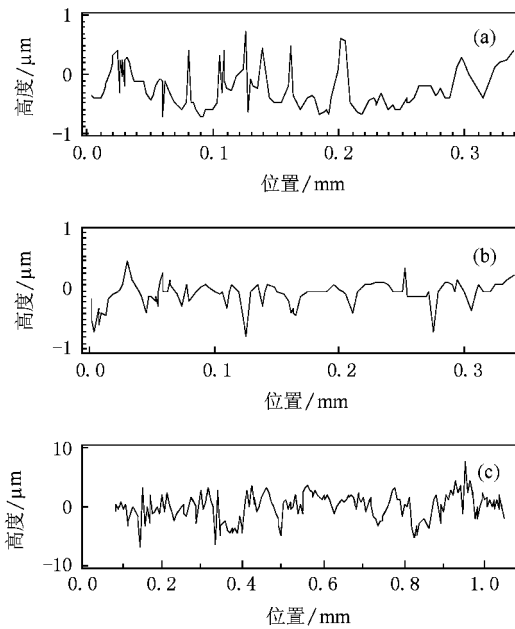


图3 通道顶板和底板的表面粗糙度高度轮廓图^[8] (a)顶板, (b)较光滑底板, (c)粗糙底板

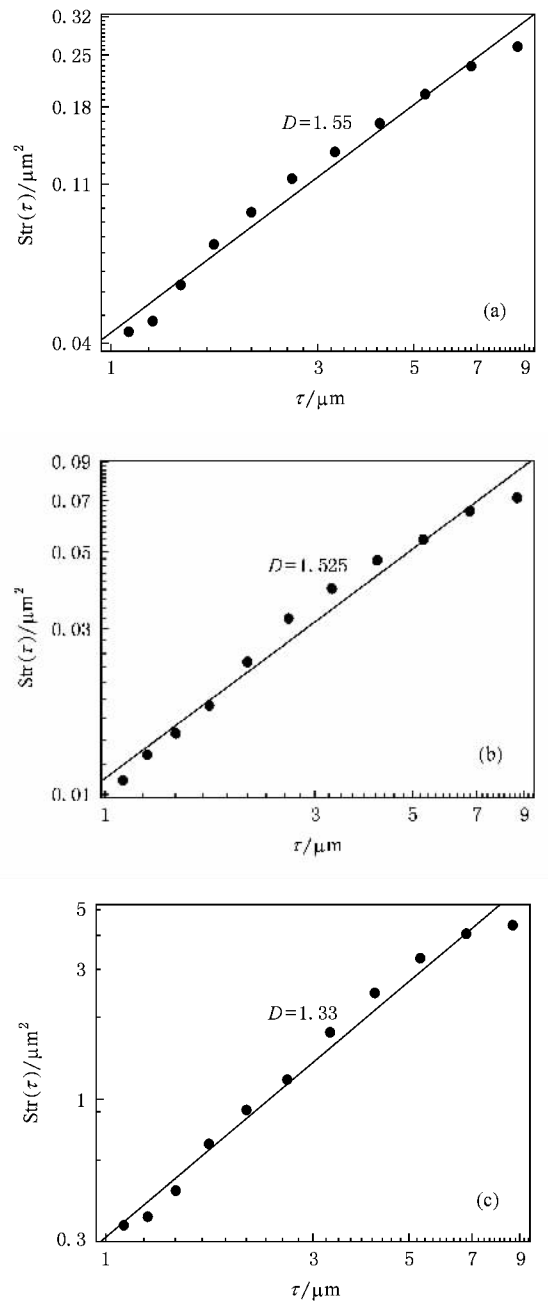


图4 结构函数 $\text{Str}(\tau)$ 随尺度 τ 的变化 (a) 顶板, (b) 较光滑底板, (c) 粗糙底板

图4 基于结构函数方法对粗糙度自仿射分形维数进行了计算 给出了各通道表面的分形维数. 由对数图可见 结构函数与尺度的对数值很好地满足了线性关系 表明表面粗糙度结构函数与尺度之间符合幂律. 也就是说, 方程(3)得到了很好的满足, 这就验证了通道表面粗糙度具有分形特征, 可通过方程(1)进行描述.

3. 微通道中的层流流动

3.1. 数学模型

为分析粗糙度对微尺度层流流动的影响,本文以矩形窄缝微通道为例,对其间的层流流动特性进行了研究.如图 5 所示,流体在宽 W 、深 H 和长为 L 的矩

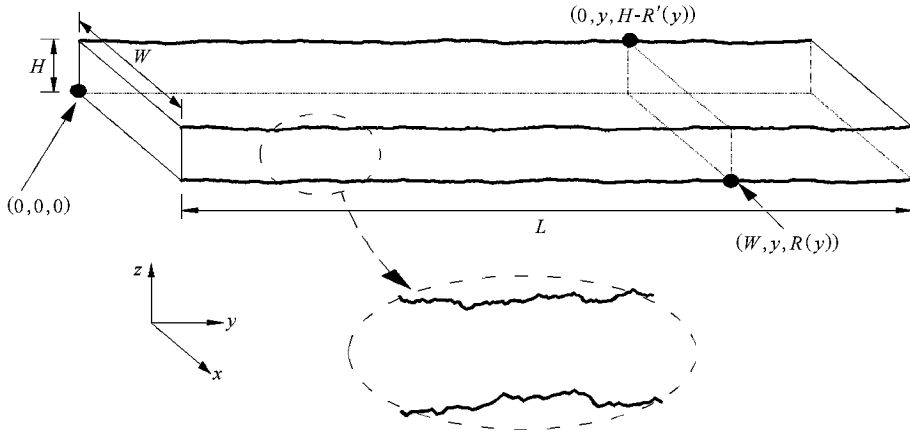


图 5 矩形粗糙微通道示意图

研究表明,Navier-Stokes 方程对于微通道中的层流流动仍然有效^[5,6].因此,由 W-M 函数所描述的粗糙微通道中层流流动的动量方程和连续方程仍可表示为

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \cdot \mathbf{V}, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (7)$$

式中, P 为流体压力, ρ 为流体密度, μ 为流体粘度, \mathbf{V} 为速度矢量.

通道入口处流体的速度边界条件为

$$y = 0 : u = 0, v = v_{in}, w = 0, \quad (8)$$

式中, v_{in} 为流体入口速度, u, v, w 分别为 x, y, z 方向的速度分量.考虑到流道足够长,出口处已达到流动充分发展,所以出口边界条件为

$$y = L : \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

根据无滑移条件,通道表面上的速度满足

$$\mathbf{V} = 0 \begin{cases} z = H - R'(y), \\ z = R(y), \\ x = 0, \\ x = W. \end{cases} \quad (10)$$

通常,层流流动的阻力特性可用 Poiseuille 数 Po 进行表述,该参数等于阻力系数 f 与雷诺数 Re 的乘积

形微通道内发生层流流动.为简化计算,假定通道上下表面为粗糙面,且只考虑粗糙度沿 y 方向的变化,侧面则为光滑面.粗糙表面轮廓曲线由函数 $R(y)$ ((1)式)进行构建.表面实际粗糙情况可通过函数 $R(y)$ 中不同的参数 D 和 G 进行控制,这将使建立的流动模型具有通用性.

在建立流体层流流动模型时,作如下假设:1)稳态层流;2)常物性;3)忽略重力影响.

$$Po = f \cdot Re = \frac{1}{L - L_e} \int_{L_e}^L f(y) R(y) dy, \quad (11)$$

式中, L_e 为入口段长度,由 Schmidt 和 Zeldin^[25]提出的入口段长度计算公式 $L_e/d_h = 0.08 Re + 0.7$ 来确定,其中 d_h 为水力直径.

在本文中,相对粗糙度 ϵ 定义为均方根粗糙度 σ 与水力直径 d_h 的比值,即 $\epsilon = \sigma/d_h$.

3.2. 数值计算

应用六面体网格对图 5 所示的微通道进行网格划分.为考虑流体流动的入口效应和边界层效应,在沿通道流动方向和通道截面上采用非均匀网格,即在入口段和边界层进行局部网格加密,并采用不同的网格尺寸进行了网格独立性检测,确保所得的数值解都是网格独立的解.

采用控制容积有限差分法和 SIMPLE 算法^[26]对微分控制方程(6)(7)进行数值求解.当相邻两个迭代步之间的流体速度残差小于 10^{-6} ,且进出口流体质量守恒时,认为迭代计算收敛.

3.3. 模型验证

本文对 Pfund 等^[8]所开展的微通道中的流动实

验进行了对比数值模拟.表 1 列出了微通道内的流动参数,对 P_o 数计算值与实验值^[8]进行了比较.如

表 1 所示, P_o 数计算值与实验值符合较好.这表明本文所建立的模型是准确可靠的.

表 1 微通道表面粗糙度参数和流动参数

通道截面尺寸 ¹⁾	D (顶板) ²⁾	D (底板) ²⁾	α (顶板) ³⁾ μm	α (底板) ³⁾ μm	P_o		
					数值解 ⁴⁾	经典解 ¹⁾	实验值 ¹⁾
通道 #1 ($H = 521 \mu\text{m}, W = 1 \text{ cm}$)	1.55	1.525	0.44	0.20	24.1	22.4	24.2 ± 1.3
通道 #2 ($H = 263 \mu\text{m}, W = 1 \text{ cm}$)	1.55	1.525	0.44	0.20	24.9	23.2	26.1 ± 2.3
通道 #3 ($H = 257 \mu\text{m}, W = 1 \text{ cm}$)	1.55	1.330	0.44	2.16	27.0	23.2	29.0 ± 2.4

注: 1) 源于文献[8]数据; 2) 由图 4 计算而得数据; 3) 由图 3 计算而得数据; 4) 数值计算解, 其对应 Re 取实验中层流段 Re 的中间值, 即通道 #1, #2 和 #3 的 Re 分别取 1300, 1000 和 1100.

4. 表面粗糙度对层流流动的影响

在粗糙微通道内层流流动, 由于受到表面粗糙度的影响, 流向发生了变化, 这将影响流体流动的沿程压降. 图 6 给出了水在光滑微通道和粗糙微通道 ($\epsilon = 1\%$, $D = 1.8$) 中的沿程压降比较. 由图 6 可知, 粗糙通道的沿程总压降大于光滑通道的沿程总压降. 在入口段之后, 光滑通道的沿程压降线性增加, 但粗糙通道的沿程压降则呈波动式增加.

雷诺数的变化, 粗糙微通道的 Poiseuille 数不再是常数, 而与雷诺数呈近似线性增加的关系, 且其值要大于经典值. 此现象表明, 在粗糙微通道内, 随着雷诺数的增加, 粗糙度所导致的漩涡越来越剧烈. 换言之, 在低雷诺数下粗糙度引起的漩涡影响要远小于高雷诺数下粗糙度引起的漩涡影响. 因此, 低雷诺数下的 Poiseuille 数仅略高于经典值, 但随着雷诺数的增加, 则越来越偏离于经典值.

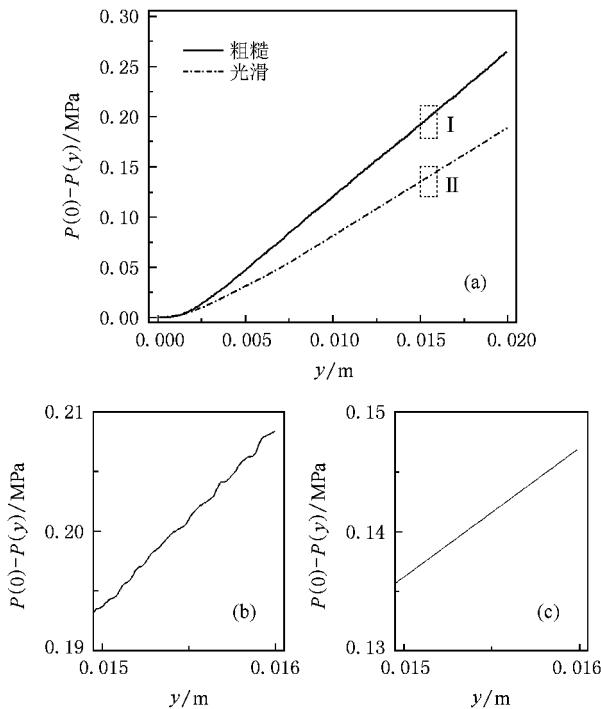


图 6 光滑通道和粗糙通道中的沿程压降比较 $W = 1 \text{ mm}, H = 100 \mu\text{m}, L = 0.02 \text{ m}, Re = 1500$. (a) 总图 (b) 粗糙通道中沿程压降 I 段局部放大图 (c) 光滑通道中沿程压降 II 段局部放大图

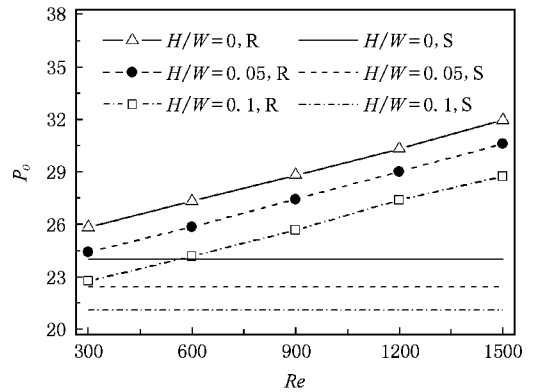


图 7 Re 对 P_o 的影响 R 代表粗糙管, $D = 1.8, \epsilon = 1\%$; S 代表光滑

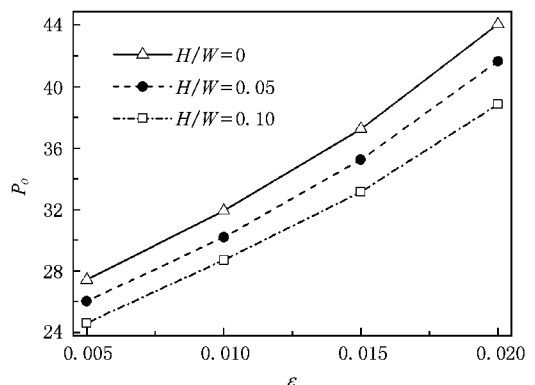


图 8 相对粗糙度 ϵ 对 P_o 的影响 $D = 1.8, Re = 1500$

图 7 给出了不同宽深比的矩形微通道中, Poiseuille 数随雷诺数的变化. 不同于传统通道, 随着

图 8 则揭示了相对粗糙度 ε 对 P_o 数的影响. 如图 8 所示, 在相同的分形维数下, Poiseuille 数几乎与 ε 呈线性增加的关系. 流体流过粗糙表面所产生的回流和分离现象导致了流体局部流动阻力的产生. 随着相对粗糙度的增大, 通道壁面附近流体的回流和分离对流动压降的影响愈加明显.

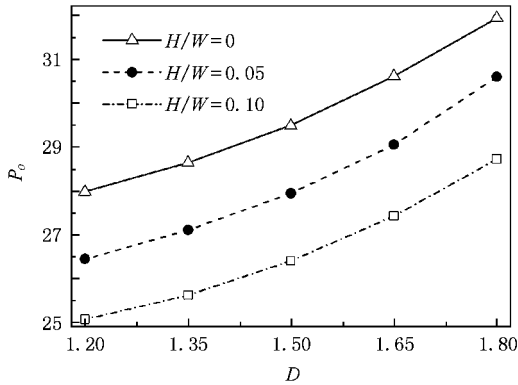


图 9 分形维数 D 对 P_o 的影响 $\varepsilon = 1\%$, $Re = 1500$

此外, 如图 9 所示, 即使在相同相对粗糙度的情况下, P_o 数也与粗糙度分布的不规则性密切相关. 分形维数越大, 表面轮廓分布就越不规则, 流体受到通道边界的扰动则愈频繁, 这也将导致压降的明显增加.

因此, 我们可以推断, 粗糙微通道内充分发展层流流动的 P_o 数不再保持常量, 而是关于雷诺数、相对粗糙度和自仿射分形维数的函数.

5. 结 论

本文基于分形几何学, 采用 Weierstrass-Mandelbrot 函数对多尺度自仿射的表面粗糙度进行了表征, 建立了微通道层流流动的三维模型并进行了数值模拟. 研究了雷诺数、相对粗糙度和自仿射分形维数对层流阻力特性的影响. 另外, 模型的准确性还与文献 [8] 中的实验数据进行了对比验证. 研究发现:

1) 粗糙表面可用分形几何进行描述, 自仿射分形维数直接反映了表面轮廓的不规则度. 对于两个具有相同统计粗糙度的轮廓, 可能存在不同的分形维数.

2) 与传统大管不同, 粗糙微通道的 P_o 数不再与雷诺数无关, 而是与雷诺数呈近似线性增加的关系, 且其值要大于经典值. 粗糙度产生的漩涡对流动的影响随雷诺数的增加越来越突出.

3) 随着相对粗糙度的增加, 流体流过粗糙表面产生的回流和分离对流动压降的影响也愈加明显.

4) 自仿射分形维数越大, 表面轮廓的不规则度则愈烈, 这也将导致压降的明显增加.

- [1] Kandlikar S G 2008 *Nanosc. Microsc. Thermophys. Eng.* **12** 61
- [2] Li Z X, Du D X, Guo Z Y 2003 *Nanosc. Microsc. Thermophys. Eng.* **7** 25
- [3] Li Z, Tao W Q, He Y L 2006 *Int. J. Therm. Sci.* **45** 1140
- [4] Ren M X, Li B S, Yang C, Fu H Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5063 (in Chinese) [任明星、李邦盛、杨 闯、傅恒志 2008 物理学报 **57** 5063]
- [5] Qu W L, Mala G M, Li D Q 2000 *Int. J. Heat Mass Tran.* **43** 3925
- [6] Wang G D, Hao L, Cheng P 2009 *Int. J. Heat Mass Tran.* **52** 1070
- [7] Kandlikar S G, Grande W J 2003 *Heat Tran. Eng.* **24** 3
- [8] Pfund D, Rector D, Shekariz A 2000 *AIChE J.* **46** 1496
- [9] Hu Y D, Werner C, Li D Q 2003 *J. Fluid. Eng.* **125** 871
- [10] Croce G, Agaro P D 2004 *Superlattice. Microst.* **35** 601
- [11] Kleinstreuer C, Koo J 2004 *J. Fluid. Eng.* **126** 1
- [12] Bahrami M, Yovanovich M M, Culham J R 2006 *J. Fluid. Eng.* **128** 632
- [13] Taylor J B, Carrano A L, Kandlikar S G 2006 *Int. J. Therm. Sci.* **45** 962
- [14] Kandlikar S G, Schmitt D, Carrano A L, Taylor J B 2005 *Phys. Fluids* **17** 1
- [15] Sayles R S, Thomas T R 1978 *Nature* **271** 431
- [16] Majumdar A, Bhushan B 1991 *J. Tribol.* **113** 1
- [17] Majumdar A, Bhushan B 1990 *J. Tribol.* **112** 205
- [18] Majumdar A, Tien C L 1990 *Wear* **136** 313
- [19] Mandelbrot B B 1983 *The Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)
- [20] Li T, Shang P J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4393 (in Chinese) [李彤、商朋见 2007 物理学报 **56** 4393]
- [21] Qiao L F, Zhang Y M, Xie Q Y, Fang J, Wang J J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6736 (in Chinese) [乔利锋、张永明、谢启源、方俊、王进军 2007 物理学报 **56** 6736]
- [22] Chen Y P, Cheng P 2002 *Int. J. Heat Mass Tran.* **45** 2643
- [23] Yu B M 2008 *Appl. Mech. Rev.* **61** 050801
- [24] Majumdar A, Tien C L 1991 *J. Heat Transfer* **113** 516
- [25] Schmidt F W, Zeldin B 1969 *AIChE J.* **15** 612
- [26] Patankar S V 1980 *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* (Washington DC: Hemisphere)

Fractal characteristics of surface roughness and its effect on laminar flow in microchannels^{*}

Zhang Cheng-Bin Chen Yong-Ping[†] Shi Ming-Heng Fu Pan-Pan Wu Jia-Feng

(*School of Energy and Environment, Southeast University, Nanjing 210096, China*)

(Received 21 January 2009 ; revised manuscript received 8 February 2009)

Abstract

The fractal characteristics of the surface roughness are investigated by using fractal geometry. A three-dimensional model of laminar flow in microchannels with surface roughness characterized by fractal geometry is developed and analyzed numerically. The Weierstrass-Mandelbrot function is introduced to characterize the multiscale self-affine roughness. The effects of Reynolds number Re , relative roughness, and fractal dimension on Poiseuille number are investigated and discussed. The results show that, different from the conventional channels, Poiseuille number in rough microchannels is no longer constant for different Re , but increases approximately linearly with Re , and is larger than the classical value. The flow over roughness features with high relative roughness induces recirculation and flow separation, which plays an important role in flow pressure drop. More specifically, roughness with larger fractal dimension, which yields more frequent variation in the surface profile, also results in a significant increase in pressure loss, even though at the same relative roughness. In addition, the accuracy of Poiseuille number calculated by the present model is verified by the experimental data available in the literature.

Keywords : roughness, friction factor of laminar flow, microchannel, fractal

PACC : 4710 4715 4752

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50806012), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2008309), and the Aeronautical Science Foundation, China (Grant No. 2008ZH69001).

[†] Corresponding author. E-mail : ypchen@seu.edu.cn