第58卷 第11期 2009年11月
1000-3290/2009/58(11)/7473-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.58,No.11,November,2009


# 量子等离子体中波的色散关系以及朗道阻尼*

季沛勇† 鲁 楠 祝 俊

(上海大学物理系,上海 200444)

(2009年1月10日收到;2009年3月16日收到修改稿)

利用动理学理论研究量子等离子体中波的色散关系和电子朗道阻尼.从电子的量子流体动力学方程和动理学描述下的光子运动方程出发,研究量子效应对光子朗道阻尼的修正.研究发现量子效应只对纵波模式,即电子等离子体波的色散关系有修正,对横向电磁波的色散关系没有影响.量子效应减小了朗道阻尼,起着朗道增长的作用.

关键词:量子等离子体,朗道阻尼,电子等离子体波,色散关系

PACC:0365,5225D,9420R

## 1.引 言

传统的等离子体物理主要是在高温低密度条件下的研究,在这种情况下经典物理足以描述等离子体的行为,量子效应被忽略掉了.但是随着技术的发展,粒子的量子效应在等离子体物理的某些特殊领域得到重视,而且在超小的电子装备和微观结构系统[1]、致密的天体等离子体[2—5]和激光等离子体[6]中量子效应都必须被考虑.作为物理学新的领域,近年来量子等离子体已经引起了大家的广泛关注和极大兴趣.针对量子等离子体的集体效应人们在量子等离子体回声波[7]、量子漂移波[8]、量子等离子体德拜屏蔽的修正[9]等很多方面做出了大量的研究并得到了非常有意义的结果.另外,Manfredi用不同的方法了解了无碰撞等离子体中的量子效应[10],Shukla和Ali得到了非均匀冷量子等离子体中电磁波漂移模式的色散关系[11].

朗道阻尼是等离子体中由于波和粒子之间共振导致的波阻尼,是一种无碰撞阻尼.最初是在1946年朗道提出的[12].起初人们一度认为物理上没有这种机理,这只是纯粹的数学结果.后来Dawson从波和粒子的能量交换的角度推导出朗道阻尼,1964年Malmberg和Wharton又在实验上证实了这个现象[13].因此,朗道阻尼已成为等离子体物理中众所周知的现象.1997年,Bingham等人提出光子朗道阻尼[14],他们发现光子的行为类似于粒子,同样可以阻尼电子等离子体波.与此同时,朗道阻尼的逆问题,例如电子加速[15]、光子加速[16—19]等一系列问题也被广泛关注和研究.

2007年,Ren等人从流体动力学出发得到了均匀的冷量子等离子体中波的色散关系[20].众所周知,流体动力学近似不能有效地处理粒子热运动对波动过程产生的影响.当波的相速度接近粒子热速度时,流体动力学理论完全失效.因此,我们将利用物理上更为精确的动理学理论来研究量子等离子体中波的色散关系以及电子等离子体波朗道阻尼问题,并在Bingham等人的研究基础上,探讨量子效应对光子朗道阻尼的修正.本文的第二部分,从动理学理论出发,推导量子等离子体中波的色散关系以及电子等离子体波朗道阻尼率;第三部分,从电子的量子流体动力学方程和动理学描述下光子的运动方程出发,研究量子效应对光子朗道阻尼的修正;第四部分对结果进行分析和讨论.

## 2.量子等离子体中波的色散关系

等离子体是由带电粒子所组成的气体,在经典等离子体中存在着三种力:热压强梯度、静电力和磁力.所以,等离子体中除了热压强引起的声波外还会产生各种模式的静电波、电磁波以及它们的混合波.研究等离子体中波的色散关系对于研究等离子体特

* 上海市自然科学基金(批准号:09ZR1410900),上海市重点学科建设项目(批准号:S30105),上海市科委项目(批准号:07dz22020),上海大学研究生创新基金资助的课题.

† E-mail:pyji@staff.shu.edu.cn

性有重要的意义.在量子等离子体中,当带电粒子的德布罗意波长与粒子间间距相当时,量子效应在等离子体动力学中有着十分重要的作用.作为物理学新的领域,量子等离子体引起了人们广泛的兴趣和关注.在这一部分,我们将研究量子等离子体中波的色散关系,首先从麦克斯韦方程组

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\
&\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

得到等离子体的色散方程

$$
\mathrm{Det}\left|\frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(\frac{k_ik_j}{k^2}-\delta_{ij}\right)+K_{ij}\right|=0. \tag{2}
$$

将介电张量 $K_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)$ 沿波传播的方向进行投影分解,即

$$
K_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)=K^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\omega)\frac{k_ik_j}{k^2}+K^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},\omega)\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right), \tag{3}
$$

其中 $K^{\mathrm{L}}$ 和 $K^{\mathrm{T}}$ 分别是介电张量的横向分量和纵向分量.将(3)式代入(2)式,可分别得纵波和横波的色散关系

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}[K^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\omega)]=0,\\
&\frac{k^2c^2}{\omega^2}=\mathrm{Re}[K^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},\omega)],
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(4)式是等离子体中波色散关系的一般形式.Ren 等人根据量子流体动力学近似研究了量子等离子体中波的色散关系,但是流体动力学近似不能有效地处理粒子热运动对波动过程产生的影响.当波的相速度接近粒子热速度时,这种理论完全失效.所以为了更好地描述量子等离子体中波的色散关系,我们采用较之流体动力学更为精确的动理学理论.

无碰撞等离子体中粒子的行为由分布函数 $f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$决定,分布函数满足动理学方程

$$
\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{F}}{m_\alpha}\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{v}}=0. \tag{5}
$$

对于经典等离子体,(5)式中的 $\boldsymbol{F}$ 为电磁力 $\boldsymbol{F}=q_\alpha(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$.在量子等离子体中除了电磁力外,我们还应该考虑量子力,通常引入 Bohm 量子势来描述[21,22].那么无碰撞量子等离子体中粒子分布函数满足的动理学方程为

$$
\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}}+\left[\frac{q_\alpha}{m_\alpha}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\frac{\hbar^2}{2m_\alpha^2}\times\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{n_\alpha}}\nabla^2\sqrt{n_\alpha}\right)\right]\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{v}}=0. \tag{6}
$$

其中$\frac{\hbar^2}{2m_\alpha^2}\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\nabla^2\sqrt{n}\right)$是 Bohm 量子势,体现了量子效应的贡献.在小扰动情况下,分布函数 $f_\alpha$,波场 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$ 和电子数密度 $n$ 可以表示成为平衡值加上扰动项,即

$$
\begin{aligned}
&f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=f_\alpha^{(0)}(\boldsymbol{v})+f_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t),\\
&\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t),\\
&\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r},t),\\
&n(\boldsymbol{r},t)=n_0+\tilde{n}(\boldsymbol{r},t).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

对于高频电磁波和电子等离子体波,离子难以响应,它们构成均匀的正电荷背景.在不考虑外加电磁场和外加电流、电荷密度时,我们可以得到量子等离子体中电子的线性 Vlasov 方程

$$
\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial\boldsymbol{r}}+\left[-\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_1)+\frac{\hbar^2}{4m_{\mathrm{e}}^2n_0}\nabla\nabla^2\tilde{n}\right]\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\boldsymbol{v}}=0. \tag{8}
$$

以及扰动量 $E_1$,$B_1$ 所满足的线性化麦克斯韦方程组

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\boldsymbol{E}_1=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t},\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}_1=0,\\
&\nabla\times\boldsymbol{B}_1=\mu_0\boldsymbol{j}^{\mathrm{ind}}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}_1}{\partial t},\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1=-\frac{e}{\varepsilon_0}\int f^{(1)}\mathrm{d}\boldsymbol{v},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

(8)式做傅里叶变换,可得

$$
f^{(1)}(\boldsymbol{k},\omega,\boldsymbol{v})=\frac{\boldsymbol{i}}{\omega(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}\times\left\{\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}[(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{E}_1+(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{k}]+\frac{\hbar^2k^2\varepsilon_0\omega}{4m_{\mathrm{e}}^2n_0e}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_1)\boldsymbol{k}\right\}\cdot\frac{\partial f^{(0)}(\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{v}}, \tag{10}
$$

写成分量的形式

$$
f^{(1)}(\boldsymbol{k},\omega,\boldsymbol{v})=\frac{\boldsymbol{i}}{\omega(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}\times\left\{\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}[(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})\delta_{sj}+k_sv_j]+\frac{\hbar^2k^2\varepsilon_0\omega}{4m_{\mathrm{e}}^2n_0e}k_sk_j\right\}\times E_{\mathrm{j}}\frac{\partial f^{(0)}(\boldsymbol{v})}{\partial v_s}. \tag{11}
$$

这里假定电子为麦克斯韦分布

$$f(v) = \frac{n}{(2\pi)^{3/2} V_T^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2V_T^2}\right), \tag{12}$$

那么介电张量为

$$K_{ij}(\boldsymbol{k},\omega) = \delta_{ij} - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2 V_T^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \frac{\omega}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}} \times \left[v_i v_j + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2\omega_p^2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})v_i k_j\right] \times \frac{\exp(-v^2/2V_T^2)}{(2\pi)^{3/2} V_T^3}. \tag{13}$$

介电张量的纵向和横向分量为

$$\begin{aligned} K^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{k},\omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2(1+\Delta)}{\omega^2 V_T^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \frac{\omega}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}} \times \left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{k}\right)^2 \frac{\exp(-v^2/2V_T^2)}{(2\pi)^{3/2} V_T^3} \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2(1+\Delta)}{k^2 V_T^2}\left[1 - \phi(\omega/\sqrt{2}kV_T) + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\omega}{kV_T}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2V_T^2}\right)\right], \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} K^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},\omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 V_T^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \frac{\omega}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\frac{1}{2} \times \left[v^2 - \left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{k}\right)\right]\frac{\exp(-v^2/2V_T^2)}{(2\pi)^{3/2} V_T^3} \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left[\phi(\omega/\sqrt{2}kV_T) - \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \times \frac{\omega}{kV_T}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2V_T^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$\phi(z) = 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \cdots \quad (z^2 \gg 1). \tag{16}$$

将介电张量的横向和纵向分量代入色散关系的一般形式(4)，我们可以得到量子等离子体中电磁波的色散关系为

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2. \tag{17}$$

电子等离子体波的色散关系为

$$\omega^2 = \omega_p^2(1+\Delta) + 3k^2V_T^2, \tag{18}$$

其中 $\Delta = \hbar^2k^4/4m_e^2\omega_p^2$ 为量子修正项. 由此可见，量子效应只对纵波模式，即电子等离子体波的色散关系有修正，对横向电磁波的色散关系没有影响.

由于我们采用了物理上更为精确的动理学理论，粒子热运动对波动过程产生的影响也同时被考虑，我们得到长波段($k^2 \ll k_D^2$)电子等离子体波的朗道阻尼率

$$\left(\frac{\gamma}{\omega_p}\right) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{k_D^3}{k^3}\exp\left(-\frac{3}{2}-\frac{k_D^2}{2k^2}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\Delta \times \frac{k_D^3}{2k^3}\left(\frac{1}{2}+\frac{k_D^2}{k^2}\right)\exp\left(-\frac{3}{2}-\frac{k_D^2}{2k^2}\right), \tag{19}$$

其中 $k_D$ 为德拜波数，方程右边第一项就是经典的朗道阻尼率，第二项是量子效应对朗道阻尼率的修正.

## 3. 光子朗道阻尼

1997 年 Bingham 等人研究了光子朗道阻尼，得到由热辐射引起的电子等离子体波的非线性色散关系，并且发现光子的行为类似于粒子，同样可以阻尼电子等离子体波. 这一部分我们将在 Bingham 等人的研究基础上探讨量子效应对光子朗道阻尼的修正.

由量子流体动力学方程[23]

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla|v_{\mathrm{EM}}|^2 = -\frac{\nabla P_e}{m_e n_0} + \frac{e}{m_e}\nabla\phi + \frac{\hbar^2}{2m_e^2}\nabla\left(\frac{\nabla^2 n^{1/2}}{n^{1/2}}\right), \tag{20}$$

连续性方程

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + n_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0, \tag{21}$$

和 Poisson 方程

$$\nabla^2\phi = \frac{e\tilde{n}}{\varepsilon_0}, \tag{22}$$

得到电子数密度扰动所满足的方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{n} + \omega_{p0}^2\tilde{n} - 3V_T^2\nabla^2\tilde{n} + \frac{\hbar^2}{4m_e^2}\nabla^2\nabla^2\tilde{n} = \frac{1}{2}n_0\nabla^2|v_{\mathrm{EM}}|^2, \tag{23}$$

方程左边第四项是量子效应的贡献，方程右边是有质动力的贡献. 有质动力的动量表述为

$$\frac{1}{2}\nabla^2|v_{\mathrm{EM}}|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{m_e}\right)^2\nabla^2\int\frac{|E_k|^2}{\omega_k^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}. \tag{24}$$

光子数密度为

$$N_k = \frac{\varepsilon_0}{4}\left(\frac{\partial D}{\partial\omega}\right)_{\omega_k}|E_k|^2, \tag{25}$$

其中 $D(k,\omega) = 0$ 是光子的色散关系. 将(25)，(24)式代入(23)式得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{n} + \omega_{p0}^2\tilde{n} - 3V_T^2\nabla^2\tilde{n} + \frac{\hbar^2}{4m_e^2}\nabla^2\nabla^2\tilde{n} = 2\frac{\omega_{p0}^2}{m_e}\nabla^2\int\frac{\tilde{N}_k}{\omega_k^2(\partial D/\partial\omega)_{\omega_k}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}. \tag{26}$$

光子的运动方程

$$\frac{\partial \widetilde{N}_k}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \widetilde{N}_k}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial N_{k_0}}{\partial \boldsymbol{k}} = 0, \tag{27}$$

其中 $N_{k0}$ 是光子数密度,$\widetilde{N}_k$ 是光子数密度扰动.(27)式中的 $\boldsymbol{F} = \nabla \omega_k^{\mathrm{Q}}$ 取决于量子等离子体中电子等离子体波频率的空间梯度,利用第二部分得到的色散关系(18)式,$\boldsymbol{F}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\omega_{\mathrm{p}0}^2}{2\omega_k^{\mathrm{Q}}}\frac{\nabla \tilde{n}}{n_0} = -\frac{\omega_{\mathrm{p}0}^2}{2\omega_k\sqrt{1+\delta(k)}}\frac{\nabla \tilde{n}}{n_0}$$

$$\simeq -\frac{\omega_{\mathrm{p}0}^2}{2\omega_k}\frac{\nabla \tilde{n}}{n_0}\left[1-\frac{\delta(k)}{2}\right], \tag{28}$$

其中 $\omega_k = \sqrt{\omega_{\mathrm{p}}^2 + 3k^2V_{\mathrm{T}}^2}$ 是经典电子等离子体波的色散关系,$\delta(k) = \hbar^2 k^4/4m_{\mathrm{e}}^2\omega_k^2$ 是量子修正项.对(26)和(27)式进行傅里叶变换得

$$\left(\omega_{\mathrm{p}0}^2 + 3k^2V_{\mathrm{T}}^2 + \frac{\hbar^2k^4}{4m_{\mathrm{e}}^2} - \omega^2\right)\tilde{n}$$

$$= -2k^2\frac{\omega_{\mathrm{p}0}^2}{m_{\mathrm{e}}}\int \frac{\widetilde{N}_{k'}}{\omega_{k'}^2(\partial D/\partial\omega)_{\omega_{k'}}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}, \tag{29}$$

$$-\mathrm{i}\omega\widetilde{N}_{k'} + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}')\widetilde{N}_{k'}$$

$$= \mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{p}0}^2}{2\omega_k}\frac{\tilde{n}}{n_0}\left[1-\frac{\delta(k)}{2}\right]\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial N_{k'_0}}{\partial \boldsymbol{k}'}, \tag{30}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 分别表示电子等离子体波和电磁波的波矢量.由(30)式可得

$$\widetilde{N}_{k'} = -\frac{\tilde{n}}{2n_0}\frac{\omega_{\mathrm{p}0}^2}{\omega_k}\left[1-\frac{\delta(k)}{2}\right]\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\partial N_{k'_0}/\partial\boldsymbol{k}')}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}')}, \tag{31}$$

其中 $\omega$ 是复数,将(31)式代入(29)式得

$$\left(\omega_{\mathrm{p}0}^2 + 3k^2V_{\mathrm{T}}^2 + \frac{\hbar^2k^4}{4m_{\mathrm{e}}^2} - \omega^2\right)\tilde{n}$$

$$= \frac{k^2\omega_{\mathrm{p}0}^4}{\omega_{\mathrm{k}}m_{\mathrm{e}}}\frac{\tilde{n}}{n_0}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\times \int \frac{1}{\omega_{k'}^2(\partial D/\partial\omega)_{\omega'_k}}\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\partial N_{k'_0}/\partial\boldsymbol{k})}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}')}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}. \tag{32}$$

接下来采用 Bingham 等人的处理方法,可以得到电子等离子体波的色散关系

$$\omega_{\mathrm{r}}^2 = \omega_{\mathrm{p}0}^2 + 3k^2V_{\mathrm{T}}^2 + \frac{\hbar^2k^4}{4m_{\mathrm{e}}^2} + \frac{k^2\omega_{\mathrm{p}0}^3}{2m_{\mathrm{e}}n_0}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\times P\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'_{\perp}}{(2\pi)^3}(\omega_{k'}^{-1})_{\mathrm{p}0}\int\frac{\partial N_{k'_0}/\partial p}{u-\omega/k}\mathrm{d}p \tag{33}$$

和光子朗道阻尼系数

$$\gamma = \pi\frac{k^2\omega_{\mathrm{p}0}^2}{4m_{\mathrm{e}}n_0}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\partial G_{\mathrm{p}}}{\partial p}\right)_{\mathrm{p}0}, \tag{34}$$

其中

$$G(p) = \int\frac{1}{(\omega_{k'})_{\mathrm{p}0}}\frac{N_{k'_0}}{(\partial u/\partial p)_{\mathrm{p}0}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'_{\perp}}{(2\pi)^3}. \tag{35}$$

由此可见,在不考虑波和粒子相互作用对波动过程产生的影响时,由流体动力学方程出发得到的色散关系(33)(略去光子作用项)与从动理学方程出发得到的色散关系(18)是一致的.量子效应减小了光子朗道阻尼系数,起着朗道增长的作用.

## 4. 讨论和结论

在文章第二部分和第三部分,我们分别从动理学和流体动力学出发,得到了量子等离子体中电子等离子体波的色散关系

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{p}}^2(1+\Delta) + 3k^2V_{\mathrm{T}}^2 = \tilde{\omega}_{\mathrm{p}}^2 + 3k^2V_{\mathrm{T}}^2, \tag{36}$$

其中 $\tilde{\omega}_{\mathrm{p}}^2$ 是有效等离子体频率.引入有效电荷 $e_{\mathrm{eff}} = \sqrt{1+\Delta}e$ 和有效电子数密度 $n_{\mathrm{eff}} = (1+\Delta)n_{\mathrm{e}}$,有效等离子体频率可以表示成为

$$\tilde{\omega}_p^2 = (1+\Delta)\omega_{\mathrm{p}}^2 = \frac{e_{\mathrm{eff}}^2 n_0}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}} = \frac{e^2 n_{\mathrm{eff}}}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}, \tag{37}$$

量子效应激发了有效电荷和有效电子数密度,德拜长度随之减小,使得德拜屏蔽效应更加明显.所以量子效应在这里是一种屏蔽效应.

传统的理论认为只有当电子的热 de Broglie 波长与等离子体的空间尺度相当时,量子效应才能显现,即

$$\lambda_{\mathrm{B}} \sim \lambda_{\mathrm{p}}. \tag{38}$$

那么,电子的数密度和温度必须满足

$$\frac{n_0}{T} \sim \frac{\pi m_{\mathrm{e}}^2c^2k_{\mathrm{B}}}{\hbar^2\mathrm{e}^2} \sim 1.27\times10^{24}(\mathrm{cm}^{-3}/\mathrm{K}). \tag{39}$$

在一般实验室条件下,电子数密度可以达到 $n_0 \sim 10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$,那么温度必须满足 $T < 10^{-5}\,\mathrm{K}$,也就说只有在低温高密度等离子体条件下量子效应才会变得明显.

本文我们选取实验室条件下的等离子体参数:电子数密度 $n_0 \sim 10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$,温度 $T = 300\mathrm{K}$ 来估算量子效应的贡献.图 1 给出了量子效应对电子等离子体波频率和光子朗道阻尼的修正曲线,当等离子体波的波数 $k \sim 5\times10^6\,\mathrm{cm}^{-1}$ 时,量子效应对电子等离子体波频率的修正可以达到 $\Delta \sim 10^{-2}$ 量级,量子效应对光子朗道阻尼的修正为 $\delta \sim 10^{-4}$.图 2 给出了经典的和修正后的电子朗道阻尼曲线,图 3 给出了量子效应对电子朗道阻尼率的修正曲线,当等离子

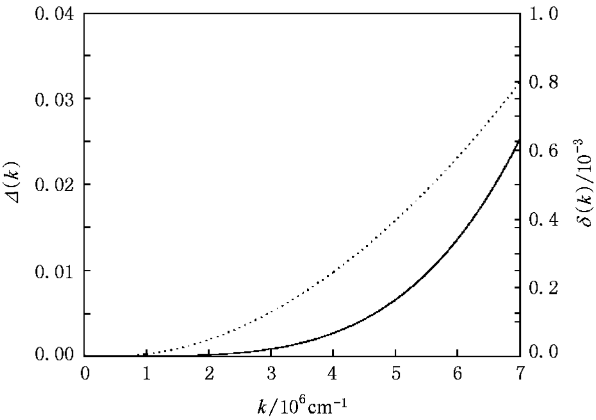


图 1　实线表示量子效应对电子等离子体波频率的修正 $\Delta(k)$，虚线表示量子效应对光子朗道阻尼的修正 $\delta(k)$. 等离子参数为：电子数密度 $n_0 \sim 10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$，温度 $T = 300\mathrm{K}$

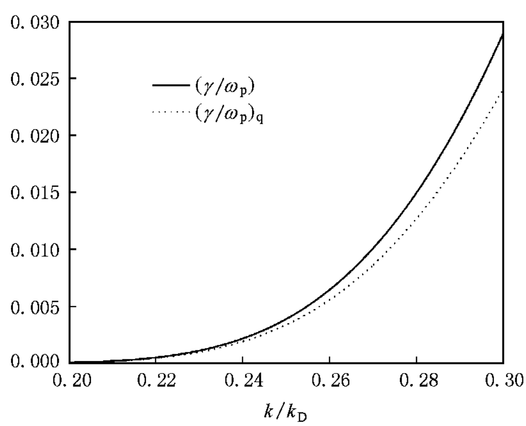


图 2　实线表示经典的电子朗道阻尼曲线，虚线表示考虑量子效应后电子朗道阻尼曲线

体波的波数取值为 $k \sim 0.28k_\mathrm{D}$ 时，经典的朗道阻尼率为 $\gamma/\omega_\mathrm{p} \sim 10^{-2}$，量子效应对经典朗道阻尼率的修正可以达到 $(\gamma/\omega_\mathrm{p})_q \sim 10^{-3}$. 由此可见在我们选取的等离子体条件下，量子效应已经变得十分明显，不能被简单忽略.

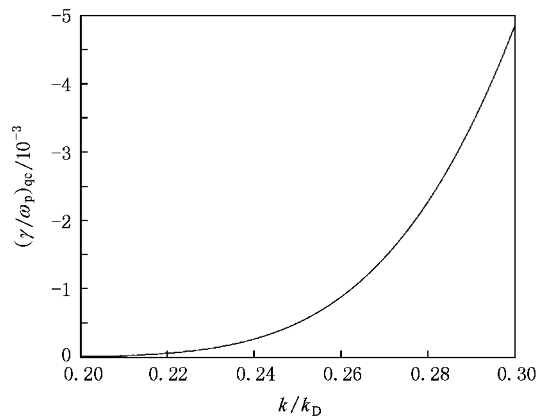


图 3　量子效应对电子朗道阻尼的修正 $(\gamma/\omega_\mathrm{p})_\mathrm{q}$ 随 $k/k_\mathrm{D}$ 的变化曲线

本文从动力学理论出发，通过引入 Bohm 量子势研究量子等离子体中波的色散关系和电子朗道阻尼问题. 从量子流体动力学方程和动力论描述下的光子的运动方程出发，研究电子等离子体波的光子朗道阻尼问题. 分别得到了量子效应对电子等离子波色散关系、电子朗道阻尼以及光子朗道阻尼的修正. 作为物理学新的领域，量子等离子体已经引起了大家的广泛关注和极大兴趣. 我们相信随着实验技术和理论的进一步发展，在不久的将来量子效应能被进一步证实和观测.


[1] Markowich P A, Ringhofer C, Schmeiser C 1990 *Semiconductor Equations* (Springer, Vienna) p 83

[2] Jung Y D 2001 *Phys. Plasmas* **8** 3842

[3] Opher M, Silva L O, Dauger D E, Decyk V K, Dawson J M 2001 *Phys. Plasmas* **8** 2454

[4] Bingham R, Mendonca J T, Shukla P K 2004 *Plasma Phys. Controlled Fusion* **46** 1

[5] Marklund M, Shukla P K 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 455

[6] Kremp D, Bornath T, Bonitz M, Schlanges M 1999 *Phys. Rev.* E **60** 4725

[7] Hass F, Garcia L G, Goedert J, Manfredi G 2003 *Phys. Plasmas.* **10** 3858

[8] Shokri B, Rukhadze A A 1999 *Phys. Plasmas.* **6** 3450

[9] Shokri B, Khorashady S M 2003 *Pramana, J. Phys.* **61** 1

[10] Manfredi G 2005 *Fields Inst. Commun.* **46** 263

[11] Shukla P K, Ali S 2006 *Phys. Plasmas.* **13** 082101

[12] Landau L D 1946 *J. Phys.* **10** 25

[13] Malmberg J H, Wharton G B 1964 *Phys. Rev. Lett.* **13** 184

[14] Bingham R, Mendonca J T, Dawson J M 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 247

[15] Huang S H, Wu F M 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 7680 (in Chinese) [黄仕华、吴锋民 2008 物理学报 **57** 7680]

[16] Bao J S, Ji P Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 314

[17] Ji P Y, Lai G J 2000 *Acta. Phys. Sin.* **49** 2399 (in Chinese) [季沛勇、赖国俊 2000 物理学报 **49** 2399]

[18] Gu Z Y, Ji P Y 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 1022 (in Chinese) [顾震宇、季沛勇 2002 物理学报 **51** 1022]

[19] Ji P Y 2001 *Phys. Rev.* E **64** 036501
[20] Ren H J, Wu Z W, Chu P K 2007 *Phys. Plasmas* **14** 062102
[21] Bohm D 1952 *Phys. Rev.* **85** 166
[22] Hass H 2005 *Phys. Plasmas* **12** 062117
[23] Shukla P K, Stukla L 2006 *Phys. Plasmas* **13** 044505

# Dispersion relation and Landau damping of linear waves in quantum plasma*

Ji Pei-Yong† Lu Nan Zhu Jun
(*Department of Physics, Shanghai University, Shanghai* 200444, *China*)
(Received 10 January 2009; revised manuscript received 16 March 2009)

Abstract

The dispersion relation and Landau damping of electron plasma waves in the quantum plasma are derived by kinetic theory. Starting from the quantum hydrodynamic equation of electron and photon kinetic equation, photon Landau damping is discussed. Research indicates that quantum effects enlarge the frequency of electron plasma waves and do not change the dispersion of electromagnetic waves. It is also found that electron and photon Landau damping rates are both reduced by quantum effects, so the exchange of energy between particles and waves is retarded.

**Keywords**: quantum plasmas, Landau damping, electron plasma waves, dispersion relation
**PACC**: 0365, 5225D, 9420R

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanghai, China (Grant No. 09ZR1410900), the Shanghai Leading Academic Discipline Project (Grant No. S30105), the Shanghai Research Foundation (Grant No. 07dz22020) and the Scientific Research Foundation of Graduate School of Shanghai University.
† E-mail: pyji@staff.shu.edu.cn