几种辅助方程与非线性发展方程的无穷序列精确解 *

套格图桑†

(内蒙古师范大学数学科学学院,呼和浩特 010022)

(2010 年 6 月 21 日收到;2010 年 8 月 9 日收到修改稿)

本文为了获得非线性发展方程新的无穷序列精确解,给出了几种辅助方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式,并构造了一些非线性发展方程新的无穷序列精确解,其中包括无穷序列 Jacobi 椭圆函数解、无穷序列双曲函数解和无穷序列三角函数解. 该方法在构造非线性发展方程无穷序列精确解方面具有普遍意义.

关键词: 辅助方程法, 解的非线性叠加公式, 无穷序列解, 非线性发展方程

PACS: 02.30.IK, 02.30.Jr

1. 引 言

1834 年 8 月,英国科学家、工程师,26 岁的约翰·司各特·罗素(J. S. Russell)在连接爱丁堡和格拉斯哥的运河河道的勘探过程中发现了孤立波. 1895 年,荷兰的两位年青科学家柯脱维格(D. J. Korteweg)和德佛累斯(G. deVires)建立了单向运动浅水波的数学模型 KdV 方程,从而理论上肯定了孤立波的存在性. 1965 年,Kruskal 和 Zabusky 通过数学模拟法,深入研究等离子体中孤立波碰撞的非线性相互作用过程,得出孤立波在碰撞后保持其波形和波速不变的结论[1],从而证实了孤立波的稳定性. 1967 年和 1974 年,Gardner,Greene,Kruskal 和 Miura 在求解著名的 KdV 方程时首次发明了一种解析方法,即反散射变换法[2,3]. 这是孤立子理论发展历史上的又一个里程碑. 这种一系列线性步骤求解非线性问题解的技巧后来在美国的数学家莱克斯(Lax)、阿柏罗维茨(Ablowitz)、前苏联的数学家萨哈罗夫、沙巴特等人推广应用在非线性薛定谔方程和 sine-Gordon 方程等一系列的非线性发展方程求解问题上,从而反散射变换法发展成为非常有活力的一种崭新的求解方法[4]. 构造非线性发展方程的精确解,是孤立子理论中非常重要的研究课题之一. 1995 年,王明亮提出齐次平衡法[5],并获得了非线性发展方程许多新精确解. 1996 年 Parkes 和 Duffy 提出双曲正切函数展开法[6],并构造了非线性发展方程的孤立波解. 2000 年,Fan 在双曲正切函数展开法和齐次平衡法为基础,把 $u(\xi)=\sum_{i=1}^{n}a_i\tanh^i(\xi)$ 中的 $\tanh(\xi)$ 替换成 Riccati 方程的解,提出推广的双曲正切函数展开法[7],获得了非线性发展方程的许多新精确解[8—23]. 在该方法的影响下构造非线性发展方程精确解领域出现了各种辅助方程法,而且获得了许多新成果[8—71](只列出部分参考文献). 文献[24—32]用辅助方程(10),构造了(2+1)维色散长波方程(1),(2)和 modified Benjamin-Bona-Mahoney(mBBM)方程(3)等非线性发展方程的新精确解,即

$$u_{ty}+v_{xx}+\frac{1}{2}(u^2)_{xy}=0, \tag{1}$$

$$v_t+(uv+u+u_{xy})_x=0, \tag{2}$$

$$u_t+c_0u_x+\alpha u^2u_x+\beta u_{xxt}=0. \tag{3}$$

文献[33—42]用投影 Riccati 方程获得了 mKdV 方程(4)和 Benjamin Ono 方程(5)等各种非线性发展方程的精确解,即

$$u_t+\alpha u^2u_x+\beta u_{xxx}=0, \tag{4}$$

$$u_{tt}+\beta(u^2)_{xx}+\gamma u_{xxxx}=0. \tag{5}$$

文献[43—58]用第一种椭圆辅助方程和第二种椭圆辅助方程来构造了 Boussinesq 方程(6)等非线性

* 国家自然科学基金资助(批准号:10461006),内蒙古自治区高等学校科学研究基金(批准号:NJZZ07031),内蒙古自治区自然科学基金(批准号:2010MS0111)和内蒙古师范大学自然科学研究计划(批准号:QN005023)资助的课题.

† E-mail: tgts@imnu.edu.cn

发展方程的各种精确解,即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+p\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u+q\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}-s\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \tag{6}$$

文献[59—61]用辅助方程(14)—(16)构造了广义 mKdV 方程(7)等非线性发展方程的精确解,即

$$u_t+\alpha u^{\gamma}u_x+\beta u_{xxx}=0, \tag{7}$$

文献[62—71]用三角函数型辅助方程和双曲函数型辅助方程获得了具5次强非线性项的波方程(8)等许多变系数(常系数)非线性发展方程和离散的非线性发展方程新的精确解,即

$$u_{tt}-ku_{xx}+pu+qu^3+su^5=0. \tag{8}$$

文献[6—71]体现了辅助方程法的如下三个特点. 因此,获得了非线性发展方程的有限多个新精确解. 1)获得了所用辅助方程的有限多个精确解. 2)体现了非线性发展方程形式解的选择性. 3)发挥了符号计算系统的优越性. 理论上说:非线性发展方程存在无穷多个解. 本文为了获得非线性发展方程的无穷序列精确解[72,73],给出了几种辅助方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式,获得了一些非线性发展方程新的无穷序列精确解,其中包括无穷序列 Jacobi 椭圆函数解、无穷序列双曲函数解和无穷序列三角函数解. 该方法在构造非线性发展方程无穷序列精确解方面具有普遍意义.

2. 几种辅助方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式

在许多文献利用辅助方程法,构造了非线性发展方程的有限多个新精确解,获得了令人瞩目的成果. 下面列出部分辅助方程[7—71]:

$$\frac{dz(\xi)}{d\xi}=z'(\xi)=R+z^2(\xi), \tag{9}$$

$$\left(\frac{dz(\xi)}{d\xi}\right)^2=(z'(\xi))^2=a+bz(\xi)+cz^2(\xi)+dz^3(\xi)+ez^4(\xi), \tag{10}$$

$$\begin{aligned}f'(\xi)&=-qf(\xi)g(\xi),\\ g'(\xi)&=q[1-g^2(\xi)-rf(\xi)],\\ g^2(\xi)&=1-2rf(\xi)+(r^2\pm1)f^2(\xi),\end{aligned} \tag{11}$$

$$\left(\frac{dz(\xi)}{d\xi}\right)^2=(z'(\xi))^2=a+bz^2(\xi)+cz^4(\xi), \tag{12}$$

$$\left(\frac{dz(\xi)}{d\xi}\right)^2=(z'(\xi))^2=az(\xi)+bz^2(\xi)+cz^3(\xi), \tag{13}$$

$$\left(\frac{dz(\xi)}{d\xi}\right)^2=(z'(\xi))^2=az^2(\xi)+bz^3(\xi)+cz^4(\xi), \tag{14}$$

$$\left(\frac{dz(\xi)}{d\xi}\right)^2=(z'(\xi))^2=az^2(\xi)+bz(\xi)+c, \tag{15}$$

$$\left(\frac{dz(\xi)}{d\xi}\right)^2=(z'(\xi))^2=cz^6(\xi)+bz^4(\xi)+az^2(\xi). \tag{16}$$

2.1. 几种辅助方程的 Bäcklund 变换

诸多文献利用各种辅助方程法,获得了非线性发展方程的有限多个新精确解. 本文给出了几种常用辅助方程的自 Bäcklund 变换和拟 Bäcklund 变换以及解的非线性叠加公式. 这种工作对于构造非线性发展方程无穷序列精确解提供有效途径.

2.1.1. 辅助方程(10)的 Bäcklund 变换

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是辅助方程(10)的解,则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程(10)的解:

$$z_n(\xi)=\frac{2{A_0}^2}{-A_0B_0+{B_0}^2z_{n-1}(\xi)},\quad(n=1,2,\cdots), \tag{17}$$

$$z_n(\xi)=\frac{{A_0}^2}{A_0p_0-B_0p_0z_{n-1}(\xi)},\quad(n=1,2,\cdots), \tag{18}$$

$$z_n(\xi)=\frac{dC_0[dC_0+2r_0z'_{n-1}(\xi)]}{2{r_0}^2[b+dz^2_{n-1}(\xi)]},\quad(n=1,2,\cdots), \tag{19}$$

$$z_n(\xi)=\frac{(-c+\sqrt{c^2-2bd})[b+d{z_{n-1}}^2(\xi)]}{2d[b\pm\sqrt{-c+\sqrt{c^2-2bd}}z'_{n-1}(\xi)]},\quad(n=1,2,\cdots). \tag{20}$$

$$z_n(\xi)=\frac{(c+\sqrt{c^2-2bd})[b+dz_{n-1}^2(\xi)]}{2d[\mp b+\sqrt{-(c+\sqrt{c^2-2bd})z'_{n-1}(\xi)}]},\quad (n=1,2,\cdots),\tag{21}$$

其中 $A_0,B_0,C_0,p_0,r_0,b,c,d$ 是不全为零的任意常数.

2.1.2. 第二种椭圆辅助方程的 Bäcklund 变换

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第二种椭圆方程 (13) 的解,则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (13) 的解:

$$z_n(\xi)=\mp\frac{2a+(b\pm\sqrt{b^2-4ac})z_{n-1}(\xi)}{\pm b+\sqrt{b^2-4ac}\pm 2cz_{n-1}(\xi)},\quad (n=1,2,\cdots),\tag{22}$$

$$z_n(\xi)=\frac{a[-b+\sqrt{b^2-4ac}-2cz_{n-1}(\xi)]}{c[2a+(b-\sqrt{b^2-4ac})z_{n-1}(\xi)]},\quad (n=1,2,\cdots)\tag{23}$$

$$z_n(\xi)=\frac{-ab^2\pm a\sqrt{b^2(b^2-4ac)}-4abcz_{n-1}(\xi)+[-b^2c\mp c\sqrt{b^2(b^2-4ac)}]z_{n-1}{}^2(\xi)}{2abc+2b^2cz_{n-1}(\xi)+2bc^2z_{n-1}{}^2(\xi)},$$
$$(n=1,2,\cdots),\tag{24}$$

$$z_n(\xi)=\frac{a[-\sqrt{3A_1}\mp 9z'_{n-1}(\xi)]}{\sqrt{3A_1}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_1}cz_{n-1}(\xi)\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})z'_{n-1}(\xi)},$$
$$(n=1,2,\cdots),\tag{25}$$

$$z_n(\xi)=\frac{a[-\sqrt{3B_1}\pm 9z'_{n-1}(\xi)]}{\sqrt{3B_1}(b+\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3B_1}cz_{n-1}(\xi)\pm 3(-b+\sqrt{b^2-3ac})z'_{n-1}(\xi)},$$
$$(n=1,2,\cdots),\tag{26}$$

$$z_n(\xi)=\frac{\sqrt{3A_1}(-b+\sqrt{b^2-3ac})-2\sqrt{3A_1}cz_{n-1}(\xi)\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})z'_{n-1}(\xi)}{c[\sqrt{3A_1}\mp 9z'_{n-1}(\xi)]},$$
$$(n=1,2,\cdots),\tag{27}$$

$$z_n(\xi)=\frac{-\sqrt{3B_1}(b+\sqrt{b^2-3ac})-2\sqrt{3B_1}cz_{n-1}(\xi)\pm 3(-b+\sqrt{b^2-3ac})z'_{n-1}(\xi)}{c[\sqrt{3B_1}\pm 9z'_{n-1}(\xi)]},$$
$$(n=1,2,\cdots),\tag{28}$$

其中

$$A_1=\sqrt{1/c^2[2b^3-9abc+2(b^2-3ac)^{3/2}]},$$
$$B_1=\sqrt{1/c^2[2b^3-9abc-2(b^2-3ac)^{3/2}]},$$

a,b,c 是第二种椭圆方程来确定的任意常数.

2.1.3. Riccati 方程 (9) 的部分解

文献 [7—23] 利用 Riccati 方程 (9) 的下列五个解 (29)—(33), 构造了多种非线性发展方程新的精确解. 本文给出部分解 (34)—(39):

$$z_0(\xi)=-\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi),\quad (R<0),\tag{29}$$

$$z_0(\xi)=-\sqrt{-R}\coth(\sqrt{-R}\xi),\quad (R<0),\tag{30}$$

$$z_0(\xi)=\sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi),\quad (R>0),\tag{31}$$

$$z_0(\xi)=-\sqrt{R}\cot(\sqrt{R}\xi),\quad (R>0),\tag{32}$$

$$z_0(\xi)=-\frac{1}{\xi},\quad (R=0).\tag{33}$$

$$z_1(\xi)=\frac{B_3R+A_3\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)}{-A_3+B_3\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)},\quad (R<0),\tag{34}$$

$$z_1(\xi) = \frac{-(r\sqrt{R}+CR)\cos(\sqrt{R}\xi)+(r-C\sqrt{R})\sqrt{R}\sin(\sqrt{R}\xi)}{(r-C\sqrt{R})\cos(\sqrt{R}\xi)+(r+C\sqrt{R})\sin(\sqrt{R}\xi)}, \quad (R>0), \tag{35}$$

$$z_1(\xi) = \frac{-3B_4R+4A_4\sqrt{R}-5B_4R\sin(2\sqrt{R}\xi)-5A_4\sqrt{R}\cos(2\sqrt{R}\xi)}{3A_4+4B_4\sqrt{R}+5A_4\sin(2\sqrt{R}\xi)-5B_4\sqrt{R}\cos(2\sqrt{R}\xi)}, \quad (R>0), \tag{36}$$

$$z_1(\xi) = \frac{-B_5R+A_5\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}\xi)+\tan(2\sqrt{R}\xi)]}{A_5+B_5\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}\xi)+\tan(2\sqrt{R}\xi)]}, \quad (R>0), \tag{37}$$

$$z_1(\xi) = \frac{\sqrt{R}[\cos(\sqrt{R}\xi)+\sin(\sqrt{R}\xi)]}{\cos(\sqrt{R}\xi)-\sin(\sqrt{R}\xi)}, \quad (R>0), \tag{38}$$

$$z_1(\xi) = \frac{\sqrt{R}[-2A_6B_6\sqrt{R}+(A_6{}^2-B_6{}^2R)[\sec(2\sqrt{R}\xi)+\tan(2\sqrt{R}\xi)]]}{A_6{}^2-B_6{}^2R+2A_6B_6\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}\xi)+\tan(2\sqrt{R}\xi)]}, \quad (R>0), \tag{39}$$

其中 $r, A_i, B_i (i=3,4,5,6), C$ 是不全为零的任意常数.

2.1.4. Riccati 方程 (9) 的 Bäcklund 变换

1)若 $z(\xi)$ 是 Riccati 方程 (9) 的解,则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (9) 的解:

$$\bar{z}(\xi) = \frac{p_2+q_2z(\xi)+m_2z^2(\xi)+r_2z'(\xi)+n_2z^3(\xi)+l_2[z'(\xi)]^2}{A_2+B_2z(\xi)+D_2z^2(\xi)+C_2z'(\xi)+F_2z^3(\xi)+K_2[z'(\xi)]^2}. \tag{40}$$

2)若 $z(\xi)$ 是 Riccati 方程 (9) 的解,则下列 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (9) 的解:

$$\bar{z}(\xi) = \frac{-BR+Az(\xi)}{A+Bz(\xi)}. \tag{41}$$

Riccati 方程 (9) 的任意解与 Bäcklund 变换 (40),(41) 相结合,并迭代运用后得到 Riccati 方程 (9) 的无穷序列新精确解.下面列出三种公式(其余情况这里不讨论):

$$\begin{aligned} z_n(\xi) &= \frac{p_2+q_2z_{n-1}(\xi)+m_2z_{n-1}^2(\xi)+r_2z'_{n-1}(\xi)+n_2z_{n-1}^3(\xi)+l_2[z'_{n-1}(\xi)]^2}{A_2+B_2z_{n-1}(\xi)+D_2z_{n-1}^2(\xi)+C_2z'_{n-1}(\xi)+F_2z_{n-1}^3(\xi)+K_2[z'_{n-1}(\xi)]^2}, \\ z_0(\xi) &= -\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi), \quad (R<0, n=1,2,\cdots). \end{aligned} \tag{42}$$

迭代一次获得下列解:

$$z_1(\xi) = \frac{p_2+Z_1(\xi)\operatorname{sech}^2(\sqrt{-R}\xi)-q_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)+Z_2(\xi)\tanh^2(\sqrt{-R}\xi)}{A_2+Z_3(\xi)\operatorname{sech}^2(\sqrt{-R}\xi)-B_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)+Z_4(\xi)\tanh^2(\sqrt{-R}\xi)}, \tag{43}$$

这里

$$Z_1(\xi) = r_2R+l_2R^2\operatorname{sech}^2(\sqrt{-R}\xi), Z_2(\xi) = -m_2R+n_2\sqrt{-R}R\tanh(\sqrt{-R}\xi),$$

$$Z_3(\xi) = C_2R+K_2R^2\operatorname{sech}^2(\sqrt{-R}\xi), Z_4(\xi) = -D_2R+F_2\sqrt{-R}R\tanh(\sqrt{-R}\xi).$$

$$\begin{aligned} z_n(\xi) &= \frac{p_2+q_2z_{n-1}(\xi)+m_2z_{n-1}^2(\xi)+r_2z'_{n-1}(\xi)+n_2z_{n-1}^3(\xi)+l_2[z'_{n-1}(\xi)]^2}{A_2+B_2z_{n-1}(\xi)+D_2z_{n-1}^2(\xi)+C_2z'_{n-1}(\xi)+F_2z_{n-1}^3(\xi)+K_2[z'_{n-1}(\xi)]^2}, \\ z_0(\xi) &= \sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi), (R>0, n=1,2,\cdots). \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} z_n(\xi) &= \frac{-BR+Az_{n-1}(\xi)}{A+Bz_{n-1}(\xi)}, \\ z_0(\xi) &= \frac{\sqrt{R}[-2A_6B_6\sqrt{R}+(A_6{}^2-B_6{}^2R)[\sec(2\sqrt{R}\xi)+\tan(2\sqrt{R}\xi)]]}{A_6{}^2-B_6{}^2R+2A_6B_6\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}\xi)+\tan(2\sqrt{R}\xi)]}, \quad (R>0, n=1,2,\cdots). \end{aligned} \tag{45}$$

这里 $A, B, B_2, C_2, F_2, K_2, m_2, l_2, r_2, A_6, B_6$ 是不全为零的任意常数,这些任意常数与其余常数之间满足下列约束条件:

$$q_2 = \frac{B_2l_2{}^2-(l_2{}^2+K_2{}^2R)[m_2+r_2+(F_2+l_2)R]}{K_2l_2},$$

$$A_2 = \frac{B_2 l_2 - l_2^2 R - l_2(m_2 + r_2 + F_2 R) - K_2 R(C_2 + K_2 R)}{K_2},$$

$$n_2 = \frac{1}{K_2}(F_2 l_2 - l_2^2 - K_2^2 R), p_2 = R(-B_2 + m_2 + F_2 R),$$

$$D_2 = -C_2 + \frac{1}{K_2}(F_2 l_2 - l_2^2) + \frac{1}{l_2}(m_2 + r_2 + F_2 R)K_2 - K_2 R.$$

2.2. Riccati 方程解的非线性叠加公式

1)若 $z_1(\xi), z_2(\xi)$ 是 Riccati 方程 (9) 的解,则下列 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (9) 的解:

$$\bar{z}(\xi) = \frac{\mathrm{i}R[\mathrm{i}m_3\sqrt{R} + (m_3 + \mathrm{i}D_3\sqrt{R} + C_3 R)z_2(\xi) + (-C_3 R + D_3 z_2(\xi))z_1(\xi)]}{-\sqrt{R^3}(D_3 + C_3 z_2(\xi)) + (m_3\sqrt{R} + \mathrm{i}D_3 R + C_3\sqrt{R^3} - \mathrm{i}m_3 z_2(\xi))z_1(\xi)}, \quad (m_3 D_3 < 0), \tag{46}$$

$$\bar{z}(\xi) = \frac{m_3 + D_3 z_2(\xi) + \frac{1}{\sqrt{R}}[-\mathrm{i}C_3 R z_1(\xi) + \mathrm{i}(m_3 + C_3 R + D_3 z_1(\xi))z_2(\xi)]}{D_3 + C_3 z_2(\xi) - \frac{1}{\sqrt{R^3}}(m_3\sqrt{R} - \mathrm{i}D_3 R + C_3\sqrt{R^3} + \mathrm{i}m_3 z_2(\xi))z_1(\xi)}, \quad (m_3 D_3 < 0), \tag{47}$$

Riccati 方程 (9) 的已知解与解的非线性叠加公式 (46),(47) 相组合,并迭代运用后得到 Riccati 方程 (9) 的无穷序列新精确解. 下面列出解的一种非线性叠加公式:

$$z_n(\xi) = \frac{\mathrm{i}R[\mathrm{i}m_3\sqrt{R} + (m_3 + \mathrm{i}D_3\sqrt{R} + C_3 R)z_{n-1}(\xi) + (-C_3 R + D_3 z_{n-1}(\xi))z_{n-2}(\xi)]}{-\sqrt{R^3}(D_3 + C_3 z_{n-1}(\xi)) + (m_3\sqrt{R} + \mathrm{i}D_3 R + C_3\sqrt{R^3} - \mathrm{i}m_3 z_{n-1}(\xi))z_{n-2}(\xi)}, (m_3 D_3 < 0),$$

$$z_1(\xi) = -\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi), z_2(\xi) = \frac{B_3 R + A_3\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)}{-A_3 + B_3\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)}, \quad (n = 3, 4, \cdots). \tag{48}$$

2)若 $z_1(\xi), z_2(\xi), z_3(\xi)$ 是 Riccati 方程 (9) 的三个解,则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (9) 的解:

$$\bar{z}(\xi) = \frac{R[-r_3 z_1(\xi) + (p_3 + r_3)z_2(\xi) - p_3 z_3(\xi)]}{-r_3 z_2(\xi)z_3(\xi) + z_1(\xi)[-p_3 z_2(\xi) + (p_3 + r_3)z_3(\xi)]}, \tag{49}$$

$$\bar{z}(\xi) = \frac{r_4 z_2(\xi)z_3(\xi) - z_1(\xi)[q_4 z_2(\xi) + (-q_4 + r_4)z_3(\xi)]}{-r_4 z_1(\xi) + (-q_4 + r_4)z_2(\xi) + q_4 z_3(\xi)}, \tag{50}$$

$$\bar{z}(\xi) = -\frac{R[-Nz_3(\xi) + [-L + mz_3(\xi)]z_2(\xi) + [L + N + nz_2(\xi) - (m+n)z_3(\xi)]z_1(\xi)]}{nRz_3(\xi) + [mR + Nz_2(\xi) + Lz_3(\xi)]z_1(\xi) - [(m+n)R + (L+N)z_3(\xi)]z_2(\xi)}. \tag{51}$$

这里 $p_3, q_4, r_3, r_4, m, n, M, N, L$ 是不全为零的任意常数, R 是 Riccati 方程 (9) 来确定的任意常数.

Riccati 方程 (9) 的不同的三个解与解的非线性叠加公式 (49)—(51) 相结合,获得 Riccati 方程 (9) 的无穷序列新精确解. 这里列出解的两种非线性叠加公式,即

$$z_n(\xi) = \frac{R[-r_3 z_{n-3}(\xi) + (p_3 + r_3)z_{n-2}(\xi) - p_3 z_{n-1}(\xi)]}{-r_3 z_{n-2}(\xi)z_{n-1}(\xi) + z_{n-3}(\xi)[-p_3 z_{n-2}(\xi) + (p_3 + r_3)z_{n-1}(\xi)]}, \quad (n = 4, 5, \cdots),$$

$$z_1(\xi) = -\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi), z_2(\xi) = \frac{BR + A\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)}{-A + B\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)},$$

$$z_3(\xi) = \frac{p_2 + Z_1(\xi)\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}\xi) - q_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi) + Z_2(\xi)\tanh^2(\sqrt{-R}\xi)}{A_2 + Z_3(\xi)\mathrm{sech}^2(\sqrt{-R}\xi) - B_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi) + Z_4(\xi)\tanh^2(\sqrt{-R}\xi)}. \tag{52}$$

$$z_n(\xi) = \frac{R[-r_3 z_{n-3}(\xi) + (p_3 + r_3)z_{n-2}(\xi) - p_3 z_{n-1}(\xi)]}{-r_3 z_{n-2}(\xi)z_{n-1}(\xi) + z_{n-3}(\xi)[-p_3 z_{n-2}(\xi) + (p_3 + r_3)z_{n-1}(\xi)]}, \quad (n = 4, 5, \cdots),$$

$$z_1(\xi) = \frac{-BR + A\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}\xi) + \tan(2\sqrt{R}\xi)]}{A + B\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}\xi) + \tan(2\sqrt{R}\xi)]}, z_2(\xi) = \frac{\sqrt{R}[\cos(\sqrt{R}\xi) + \sin(\sqrt{R}\xi)]}{\cos(\sqrt{R}\xi) - \sin(\sqrt{R}\xi)},$$

$$z_3(\xi) = \sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi). \tag{53}$$

这里

$$Z_1(\xi) = r_2 R + l_2 R^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{-R}\xi),$$

$$Z_2(\xi) = -m_2 R + n_2 \sqrt{-R} R \tanh(\sqrt{-R}\xi),$$

$$Z_3(\xi) = C_2 R + K_2 R^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{-R}\xi),$$

$$Z_4(\xi) = -D_2 R + F_2 \sqrt{-R} R \tanh(\sqrt{-R}\xi).$$

我们迭代运用 Riccati 方程 (9) 和辅助方程 (10), (12), (13) 的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式,可以获得无穷序列 Jacobi 椭圆函数解、无穷序列双曲函数解、无穷序列三角函数解.

2.3. 几种辅助方程之间的 Bäcklund 变换

1)方程 (14) 通过变换 (54), 转化为 Riccati 方程 (55):

$$z(\xi) = \frac{\rho^2(\xi) - a}{b - 2\sqrt{c}\rho(\xi)},$$

$$\rho(\xi) = 2\psi(\xi), \tag{54}$$

$$\psi'(\xi) = \psi^2(\xi) - \frac{1}{4}a. \tag{55}$$

2)方程 (15) 通过变换 (56), 转化为 Riccati 方程(57):

$$z(\xi) = \frac{2\sqrt{c}\rho(\xi) - b}{a - \rho^2(\xi)}, \rho(\xi) = -2\psi(\xi), \tag{56}$$

$$\psi'(\xi) = \psi^2(\xi) - \frac{1}{4}a. \tag{57}$$

3)方程 (16) 通过变换 (58), 转化为 Riccati 方程(59):

$$z^2(\xi) = \frac{\psi^2(\xi) - a}{b - 2\sqrt{c}\psi(\xi)}, \tag{58}$$

$$\psi'(\xi) = \psi^2(\xi) - a. \tag{59}$$

根据以上获得的 Riccati 方程 (9) 的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式, 可以获得辅助方程 (14)—(16) 相应的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式(这里不列出).

4)第一种椭圆辅助方程 (12) 通过变换 (60), 转化为第二种椭圆辅助方程 (61):

$$z^2(\xi) = \rho(\xi), \tag{60}$$

$$[\rho'(\xi)]^2 = 4a\rho(\xi) + 4b\rho^2(\xi) + 4c\rho^3(\xi). \tag{61}$$

2.4. 第一种椭圆辅助方程的 Bäcklund 变换

1)若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (12) 的解,则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (12) 的解:

$$z_n(\xi) = \frac{\mathrm{i}b[P + Qz_{n-1}^2(\xi)]}{b\sqrt{PQ} \mp \mathrm{i}b\sqrt{\frac{(-2Pc + bQ)^2}{b^2}}z_{n-1}(\xi) + 2c\sqrt{PQ}z_{n-1}^2(\xi)},$$
$$(PQ < 0, b^2 - 4ac = 0, n = 1,2,\cdots). \tag{62}$$

$$z_n(\xi) = \frac{\mathrm{i}b[P + Qz_{n-1}^2(\xi)]}{b\sqrt{PQ} \mp \mathrm{i}b\sqrt{\frac{(-2Pc + bQ)^2}{b^2}}z_{n-1}(\xi) - 2c\sqrt{PQ}z_{n-1}^2(\xi)},$$
$$(PQ < 0, b^2 - 4ac = 0, n = 1,2,\cdots). \tag{63}$$

这里 P, Q 是满足 $PQ < 0$ 的任意常数, a, b, c 是第一种椭圆方程来确定的任意常数.

2)根据第二种椭圆辅助方程 (13) 的 Bäcklund 变换 (22)—(28) 和关系式(60), (61), 可以获得第一种椭圆辅助方程 (12) 的 Bäcklund 变换. 下面列出两种 Bäcklund 变换(其余情况这里不列出).

若 $\rho_{n-1}(\xi)$ 是第二种椭圆辅助方程 (61) 的解,则下列 $z_n(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (12) 的解:

$$z_n{}^2(\xi) = \rho_n(\xi), \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$\rho_n(\xi) = \frac{-ab^2 \pm a\sqrt{b^2(b^2 - 4ac)} - 4abc\rho_{n-1}(\xi) + [-b^2 c \mp c\sqrt{b^2(b^2 - 4ac)}]\rho_{n-1}^2(\xi)}{2abc + 2b^2 c\rho_{n-1}(\xi) + 2bc^2\rho_{n-1}{}^2(\xi)}. \tag{64}$$

$$z_n{}^2(\xi) = \rho_n(\xi), \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$\rho_n(\xi) = \frac{a[-\sqrt{3A_1} \mp 9\rho'_{n-1}(\xi)]}{\sqrt{3A_1}(b - \sqrt{b^2 - 3ac}) + 2\sqrt{3A_1}c\rho_{n-1}(\xi) \pm 3(b + \sqrt{b^2 - 3ac})\rho'_{n-1}(\xi)}. \tag{65}$$

其中 $A_1 = 2\sqrt{1/c^2[2b^3 - 9abc + 2(b^2 - 3ac)^{3/2}]}$.

3. 一些非线性发展方程的无穷序列精确解

下面用(2+1)维色散长波方程(1),(2),mBBM 方程(3),mKdV 方程(4),Benjamin Ono 方程(5),Boussinesq 方程(6)和具5次强非线性项的波方程(8)为应用实例,构造无穷序列精确解.

例1 (2+1)维色散长波方程(1),(2)的无穷序列精确解.

文献[24,59,74,75]用不同的方法,获得了(2+1)维色散长波方程的多种有限多个精确解,下面构造无穷序列精确解.

将 $u(x,y,t) = u(\xi), v(x,y,t) = v(\xi), \xi = \lambda x + \mu y + \omega t$ 代入方程(1),(2)得到下列常微分方程:

$$\mu\omega u''(\xi) + \lambda^2 v''(\xi) + \frac{1}{2}\lambda\mu[u^2(\xi)]'' = 0, \tag{66}$$

$$\omega v'(\xi) + \lambda[u(\xi)v(\xi) + u(\xi) + \lambda\mu u''(\xi)]' = 0. \tag{67}$$

方程(66)对 ξ 积分两次,方程(67)对 ξ 积分一次得到下列方程:

$$v(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}[c_1 - \mu\omega u(\xi) - \frac{1}{2}\lambda\mu u^2(\xi)], \tag{68}$$

$$\omega v(\xi) + \lambda[u(\xi)v(\xi) + u(\xi) + \lambda\mu u''(\xi)] = c_2. \tag{69}$$

将(68)式代入(69)式后得到下列方程:

$$[u'(\xi)]^2 = -\frac{c_3}{\lambda^2\mu} + \frac{c_2\lambda^2 - \omega c_1}{\lambda^4\mu}u(\xi) + \frac{\omega^2\mu - c_1\lambda - \lambda^2}{2\lambda^3\mu}u^2(\xi) + \frac{\omega}{2\lambda^3}u^3(\xi) + \frac{1}{8\lambda^2}u^4(\xi). \tag{70}$$

其中 c_1, c_2, c_3 是积分常数.

根据辅助方程(10)的 Bäcklund 变换(17)—(21)和(2+1)维色散长波方程(1),(2)的已知解(可以利用文献[24,59,73,74]给出的解),获得下列无穷序列精确解:

$$\begin{aligned} u_n(\xi) &= \frac{2A_0{}^2}{-A_0B_0 + B_0{}^2 u_{n-1}(\xi)}, \quad (n = 1,2,\cdots), \\ v_n(\xi) &= \frac{1}{\lambda^2}[c_1 - \mu\omega u_n(\xi) - \frac{1}{2}\lambda\mu\, u_n{}^2(\xi)]. \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} u_n(\xi) &= \frac{A_0{}^2}{A_0 p_0 - B_0 p_0 u_{n-1}(\xi)}, \quad (n = 1,2,\cdots), \\ v_n(\xi) &= \frac{1}{\lambda^2}[c_1 - \mu\omega u_n(\xi) - \frac{1}{2}\lambda\mu\, u_n{}^2(\xi)]. \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} u_n(\xi) &= \frac{dC_0[dC_0 + 2r_0 u'_{n-1}(\xi)]}{2r_0{}^2[b + du^2_{n-1}(\xi)]}, \quad (n = 1,2,\cdots), \\ v_n(\xi) &= \frac{1}{\lambda^2}[c_1 - \mu\omega u_n(\xi) - \frac{1}{2}\lambda\mu\, u_n{}^2(\xi)], \\ b &= \frac{c_2\lambda^2 - \omega c_1}{\lambda^4\mu}, d = \frac{\omega}{2\lambda^3}. \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} u_n(\xi) &= \frac{(-c + \sqrt{c^2 - 2bd})[b + du^2_{n-1}(\xi)]}{2d[b \pm \sqrt{-c + \sqrt{c^2 - 2bd}}\, u'_{n-1}(\xi)]}, \quad (n = 1,2,\cdots), \\ v_n(\xi) &= \frac{1}{\lambda^2}[c_1 - \mu\omega u_n(\xi) - \frac{1}{2}\lambda\mu\, u_n{}^2(\xi)], \\ b &= \frac{c_2\lambda^2 - \omega c_1}{\lambda^4\mu}, c = \frac{\omega^2\mu - c_1\lambda - \lambda^2}{2\lambda^3\mu}, d = \frac{\omega}{2\lambda^3}. \end{aligned} \tag{74}$$

$$u_n(\xi)=\frac{(c+\sqrt{c^2-2bd})[b+du_{n-1}^2(\xi)]}{2d[\mp b+\sqrt{-(c+\sqrt{c^2-2bd})}u'_{n-1}(\xi)]},\quad(n=1,2,\cdots),$$
$$v_n(\xi)=\frac{1}{\lambda^2}[c_1-\mu\omega u_n(\xi)-\frac{1}{2}\lambda\mu\, u_n{}^2(\xi)],$$
$$b=\frac{c_2\lambda^2-\omega c_1}{\lambda^4\mu},c=\frac{\omega^2\mu-c_1\lambda-\lambda^2}{2\lambda^3\mu},d=\frac{\omega}{2\lambda^3}.\tag{75}$$

如果积分常数 c_1,c_2,c_3 都取为零,则得到下列方程:

$$[u'(\xi)]^2=\frac{\omega^2\mu-\lambda^2}{2\lambda^3\mu}u^2(\xi)+\frac{\omega}{2\lambda^3}u^3(\xi)+\frac{1}{8\lambda^2}u^4(\xi).\tag{76}$$

根据辅助方程 (14) 和关系式 (54),(55), 获得(2+1)维色散长波方程 (1),(2) 的如下两种无穷序列精确解.其中包括无穷序列双曲函数解和无穷序列三角函数解:

$$u_n(\xi)=\frac{\rho_n{}^2(\xi)-a}{b-2\sqrt{c}\rho_n(\xi)},\rho_n(\xi)=2\psi_n(\xi),(n=1,2,\cdots),$$
$$v_n(\xi)=\frac{1}{\lambda^2}[c_1-\mu\omega u_n(\xi)-\frac{1}{2}\lambda\mu\, u_n{}^2(\xi)],$$
$$\psi_n(\xi)=\frac{p_2+q_2\psi_{n-1}(\xi)+m_2\psi_{n-1}^2(\xi)+r_2\psi'_{n-1}(\xi)+n_2\psi_{n-1}^3(\xi)+l_2[\psi'_{n-1}(\xi)]^2}{A_2+B_2\psi_{n-1}(\xi)+D_2\psi_{n-1}^2(\xi)+C_2\psi'_{n-1}(\xi)+F_2\psi_{n-1}^3(\xi)+K_2[\psi'_{n-1}(\xi)]^2},$$
$$\psi_0(\xi)=-\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi),a=\frac{\omega^2\mu-\lambda^2}{2\lambda^3\mu},b=\frac{\omega}{2\lambda^3},c=\frac{1}{8\lambda^2},R=-\frac{1}{4}a(a>0).\tag{77}$$

$$u_n(\xi)=\frac{\rho_n{}^2(\xi)-a}{b-2\sqrt{c}\rho_n(\xi)},\rho_n(\xi)=2\psi_n(\xi),(n=1,2,\cdots),$$
$$v_n(\xi)=\frac{1}{\lambda^2}[c_1-\mu\omega u_n(\xi)-\frac{1}{2}\lambda\mu\, u_n{}^2(\xi)],$$
$$\psi_n(\xi)=\frac{p_2+q_2\psi_{n-1}(\xi)+m_2\psi_{n-1}^2(\xi)+r_2\psi'_{n-1}(\xi)+n_2\psi_{n-1}^3(\xi)+l_2[\psi'_{n-1}(\xi)]^2}{A_2+B_2\psi_{n-1}(\xi)+D_2\psi_{n-1}^2(\xi)+C_2\psi'_{n-1}(\xi)+F_2\psi_{n-1}^3(\xi)+K_2[\psi'_{n-1}(\xi)]^2},$$
$$\psi_0(\xi)=\sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi),a=\frac{\omega^2\mu-\lambda^2}{2\lambda^3\mu},b=\frac{\omega}{2\lambda^3},c=\frac{1}{8\lambda^2},R=-\frac{1}{4}a(a<0).\tag{78}$$

其中 $B_2,C_2,F_2,K_2,m_2,l_2,r_2$ 是不全为零的任意常数,这些任意常数与其余常数之间满足下列约束条件:

$$q_2=\frac{B_2l_2{}^2-(l_2{}^2+K_2{}^2R)[m_2+r_2+(F_2+l_2)R]}{K_2l_2},$$
$$A_2=\frac{B_2l_2-l_2{}^2R-l_2(m_2+r_2+F_2R)-K_2R(C_2+K_2R)}{K_2},$$
$$n_2=\frac{1}{K_2}(F_2l_2-l_2{}^2-K_2{}^2R),$$
$$p_2=R(-B_2+m_2+F_2R),$$
$$D_2=-C_2+\frac{1}{K_2}(F_2l_2-l_2{}^2)+\frac{1}{l_2}(m_2+r_2+F_2R)K_2-K_2R.$$

例 2 mBBM 方程 (3) 的无穷序列精确解.

将 $u(x,t)=u(\xi),\xi=\lambda x+\omega t$ 代入方程 (3), 首先对 ξ 积分一次(积分常数取为零),然后用 $u'(\xi)$ 来乘方程两边即可得到下列常微分方程:

$$(\omega+c_0\lambda)u(\xi)u'(\xi)+\frac{1}{3}\alpha\lambda u^3(\xi)u'(\xi)+\lambda^2\omega\beta u''(\xi)u'(\xi)=0.\tag{79}$$

方程 (79), 对 $u(\xi)$ 积分一次后得到下列常微分方程:

$$[u'(\xi)]^2 = -\frac{2c_1}{\lambda^2\omega\beta} - \frac{\omega + c_0\lambda}{\lambda^2\omega\beta}u^2(\xi) - \frac{\alpha}{6\lambda\omega\beta}u^4(\xi). \tag{80}$$

其中 c_1 是积分常数.

当 $-\frac{2c_1}{\lambda^2\omega\beta} = 1$, $-\frac{\omega + c_0\lambda}{\lambda^2\omega\beta} = -1 - k^2$, $-\frac{\alpha}{6\lambda\omega\beta} = k^2$, 即 $c_1 = \mp\frac{\sqrt{\alpha^3}}{12k^2\sqrt{\beta(\alpha + k^2\alpha + 6k^2c_0)}}$, $\omega = \pm\frac{\sqrt{\alpha(\alpha + k^2\alpha + 6k^2c_0)}}{6k^2\sqrt{\beta}}$, $\lambda = \mp\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta(\alpha + k^2\alpha + 6k^2c_0)}}$ 时, 利用第一种、第二种椭圆方程之间的下列 Bäcklund 变换, 获得 mBBM 方程 (3) 的无穷序列 Jacobi 椭圆函数精确解:

$$\begin{aligned}
&u_n^2(\xi) = \rho_n(\xi), \rho_0(\xi) = \mathrm{sn}^2(\xi,k), (n = 1,2,\cdots)\\
&\rho_n(\xi) = \frac{-ab^2 \pm a\sqrt{b^2(b^2-4ac)} - 4abc\rho_{n-1}(\xi) + [-b^2c \mp c\sqrt{b^2(b^2-4ac)}]\rho_{n-1}^2(\xi)}{2abc + 2b^2c\rho_{n-1}(\xi) + 2bc^2\rho_{n-1}^2(\xi)},\\
&a = 1, b = -(1+k^2), c = k^2.
\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}
&u_n^2(\xi) = \rho_n(\xi), \rho_0(\xi) = \mathrm{sn}^2(\xi,k), (n = 1,2,\cdots)\\
&\rho_n(\xi) = \frac{a[-\sqrt{3A_1} \mp 9\rho'_{n-1}(\xi)]}{\sqrt{3A_1}(b - \sqrt{b^2-3ac}) + 2\sqrt{3A_1}c\rho_{n-1}(\xi) \pm 3(b + \sqrt{b^2-3ac})\rho'_{n-1}(\xi)},\\
&a = 1, b = -(1+k^2), c = k^2.
\end{aligned} \tag{82}$$

其中 $A_1 = 2\sqrt{\frac{1}{c^2}[2b^3 - 9abc + 2(b^2-3ac)^{3/2}]}$. 用同样方法, 获得 mKdV 方程 (3) 的无穷序列精确解.

例 3　Benjamin Ono 方程 (5) 的无穷序列精确解.

将 $u(x,t) = u(\xi), \xi = \lambda x + \omega t$ 代入方程 (5) 并对 ξ 积分两次, 然后用 $u'(\xi)$ 来乘方程两边即可得到下列常微分方程:

$$c_1u'(\xi) + \omega^2u(\xi)u'(\xi) + \beta\lambda^2u^2(\xi)u'(\xi) + \lambda^4\gamma u''(\xi)u'(\xi) = 0. \tag{83}$$

方程 (83), 对 $u(\xi)$ 积分一次后得到下列常微分方程(积分常数取为零):

$$[u'(\xi)]^2 = -\frac{2c_1}{\lambda^4\gamma}u(\xi) - \frac{\omega^2}{\lambda^4\gamma}u^2(\xi) - \frac{2\beta}{3\lambda^2\gamma}u^3(\xi). \tag{84}$$

其中 c_1 是积分常数.

利用解的下列 Bäcklund 变换(只列出一种 Bäcklund 变换), 获得 Benjamin Ono 方程 (5) 的无穷序列 Jacobi 椭圆函数精确解:

$$\begin{aligned}
&u_n(\xi) = \frac{a[-\sqrt{3A_1} \mp 9u'_{n-1}(\xi)]}{\sqrt{3A_1}(b - \sqrt{b^2-3ac}) + 2\sqrt{3A_1}cu_{n-1}(\xi) \pm 3(b + \sqrt{b^2-3ac})u'_{n-1}(\xi)}, \quad (n = 1,2,\cdots)\\
&A_1 = \sqrt{\frac{1}{c^2}[2b^3 - 9abc + 2(b^2-3ac)^{3/2}]},\\
&u_0(\xi) = \mathrm{cn}^2(\xi,k), a = 4(1-k^2), b = 4(2k^2-1), c = -4k^2.
\end{aligned} \tag{85}$$

这里 c_1, λ, ω 由下列表达式来确定:

$$c_1 = \frac{(-1+k^2)\beta^2}{18k^4\gamma}, \omega = -\frac{\sqrt{(-2k^2+1)\beta^2}}{3k^2\sqrt{\gamma}}, \lambda = \mp\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{6\gamma}k}. \tag{86}$$

$$c_1 = \frac{(-1+k^2)\beta^2}{18k^4\gamma}, \omega = \frac{\sqrt{(-2k^2+1)\beta^2}}{3k^2\sqrt{\gamma}}, \lambda = \mp\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{6\gamma}k}. \tag{87}$$

例 4　具 5 次强非线性项的波方程 (8) 的无穷序列精确解. 将 $u(x,t) = u(\xi), \xi = \lambda x + \omega t$ 代入方程 (8) 后用 $u'(\xi)$ 来乘方程两边即可得到下列常微分方程:

$$pu(\xi)u'(\xi) + qu^3(\xi)u'(\xi) + su^5(\xi)u'(\xi) + (\omega^2 - \lambda^2 k)u''(\xi)u'(\xi) = 0. \tag{88}$$

方程 (88), 对 $u(\xi)$ 积分一次(积分常数取为零)后得到下列常微分方程:

$$[u'(\xi)]^2 = \frac{p}{-\omega^2 + k\lambda^2}u^2(\xi) + \frac{q}{2(-\omega^2 + k\lambda^2)}u^4(\xi) + \frac{s}{3(-\omega^2 + k\lambda^2)}u^6(\xi). \tag{89}$$

利用解的下列非线性叠加公式,获得具 5 次强非线性项的波方程 (8) 的无穷序列双曲函数精确解和无穷序列三角函数精确解,即

$$\begin{aligned}
&u_n^2(\xi) = \frac{\psi_n^2(\xi) - a}{b - 2\sqrt{c}\psi_n(\xi)},\\
&\psi_n(\xi) = \frac{R[-r_3\psi_{n-3}(\xi) + (p_3 + r_3)\psi_{n-2}(\xi) - p_3\psi_{n-1}(\xi)]}{-r_3\psi_{n-2}(\xi)\psi_{n-1}(\xi) + \psi_{n-3}(\xi)[-p_3\psi_{n-2}(\xi) + (p_3 + r_3)\psi_{n-1}(\xi)]}, \quad (n = 4,5,\cdots),\\
&\psi_1(\xi) = -\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi), \psi_2(\xi) = \frac{B_3R + A_3\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)}{-A_3 + B_3\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)},\\
&\psi_3(\xi) = \frac{p_2 + Z_1(\xi)\operatorname{sech}^2(\sqrt{-R}\xi) - q_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi) + Z_2(\xi)\tanh^2(\sqrt{-R}\xi)}{A_2 + Z_3(\xi)\operatorname{sech}^2(\sqrt{-R}\xi) - B_2\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi) + Z_4(\xi)\tanh^2(\sqrt{-R}\xi)},\\
&\qquad R = -a < 0, a = \frac{p}{-\omega^2 + k\lambda^2}, b = \frac{q}{2(-\omega^2 + k\lambda^2)}, c = \frac{s}{3(-\omega^2 + k\lambda^2)}.
\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
&u_n^2(\xi) = \frac{\psi_n^2(\xi) - a}{b - 2\sqrt{c}\psi_n(\xi)},\\
&\psi_n(\xi) = \frac{R[-r_3\psi_{n-3}(\xi) + (p_3 + r_3)\psi_{n-2}(\xi) - p_3\psi_{n-1}(\xi)]}{-r_3\psi_{n-2}(\xi)\psi_{n-1}(\xi) + \psi_{n-3}(\xi)[-p_3\psi_{n-2}(\xi) + (p_3 + r_3)\psi_{n-1}(\xi)]}, \quad (n = 4,5,\cdots),\\
&\psi_1(\xi) = \sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi), \psi_2(\xi) = \frac{\sqrt{R}[\cos(\sqrt{R}\xi) + \sin(\sqrt{R}\xi)]}{\cos(\sqrt{R}\xi) - \sin(\sqrt{R}\xi)},\\
&\psi_3(\xi) = \frac{-B_5R + A_5\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}\xi) + \tan(2\sqrt{R}\xi)]}{A_5 + B_5\sqrt{R}[\sec(2\sqrt{R}\xi) + \tan(2\sqrt{R}\xi)]},\\
&\qquad R = -a > 0, a = \frac{p}{-\omega^2 + k\lambda^2}, b = \frac{q}{2(-\omega^2 + k\lambda^2)}, c = \frac{s}{3(-\omega^2 + k\lambda^2)}.
\end{aligned} \tag{91}$$

这里 $p_3, r_3, B_2, C_2, A_3, B_3, A_5, B_5, F_2, K_2, m_2, l_2, r_2$ 是不全为零的任意常数,这些任意常数与其余常数之间满足下列约束条件:

$$\begin{aligned}
&q_2 = \frac{B_2l_2^2 - (l_2^2 + K_2^2R)[m_2 + r_2 + (F_2 + l_2)R]}{K_2l_2},\\
&A_2 = \frac{B_2l_2 - l_2^2R - l_2(m_2 + r_2 + F_2R) - K_2R(C_2 + K_2R)}{K_2},\\
&n_2 = \frac{1}{K_2}(F_2l_2 - l_2^2 - K_2^2R), p_2 = R(-B_2 + m_2 + F_2R),\\
&D_2 = -C_2 + \frac{1}{K_2}(F_2l_2 - l_2^2) + \frac{1}{l_2}(m_2 + r_2 + F_2R)K_2 - K_2R;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Z_1(\xi) = r_2R + l_2R^2\operatorname{sech}^2(\sqrt{-R}\xi),\\
&Z_2(\xi) = -m_2R + n_2\sqrt{-R}R\tanh(\sqrt{-R}\xi),\\
&Z_3(\xi) = C_2R + K_2R^2\operatorname{sech}^2(\sqrt{-R}\xi), Z_4(\xi) = -D_2R + F_2\sqrt{-R}R\tanh(\sqrt{-R}\xi).
\end{aligned}$$

4. 结 论

辅助方程法的主要思想有下面三个部分来构成. 第一部分,选择一个具有新解的辅助方程. 第二部分,选择非线性发展方程合适的形式解. 第三部分,利用计算机代数系统的优越性. 文献[7—71]利用几种辅助方程法,构造了非线性发展方程的有限多个新精确解. 其中包括 Jacobi 椭圆函数解、双曲函数解、三角函数解和有理解. 这些成果没有获得非线性发展方程无穷序列精确解的主要原因是没有发挥辅助方程法的第一部分思想,而且选择的非线性发展方程的形式解都比较复杂,计算量比较大. 本文为了获得非线性发展方程的无穷序列精确解. 首先,分别给出了第二种椭圆方程和 Riccati 方程的自 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式. 然后,分别给出几种辅助方程之间的拟 Bäcklund 变换. 最后,把几种辅助方程与相应的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式,直接应用到构造非线性发展方程精确解领域,获得了(2+1)维色散长波方程(1),(2),mBBM 方程(3),mKdV 方程(4),Benjamin Ono 方程(5),Boussinesq 方程(6)和具 5 次强非线性项的波方程(8)的无穷序列新精确解,其中包括无穷序列 Jacobi 椭圆函数解、无穷序列双曲函数解和无穷序列三角函数解. 该方法在构造非线性发展方程无穷序列精确解方面具有普遍意义.

[1] Zabusky N, Kruskal M D 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 240

[2] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095

[3] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1974 *Comn. Pure. Appi. Math.* **27** 97

[4] Miura R M 1976 *SIAM. Rev.* **18** 412

[5] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[6] Parkes E J, Duffy B R 1996 *Comput. Phys. Commun.* **98** 288

[7] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

[8] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 940

[9] Chen Y, Yan Z Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 1

[10] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 137

[11] Li D S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 143

[12] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 984

[13] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1377

[14] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **42** 497

[15] Xie F D, Chen J, Lü Z S 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 585

[16] Xie F D, Yuan Z T 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 39

[17] Zhen X D, Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 647

[18] Lü Z S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 405

[19] Xie F D, Gao X S 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 353

[20] Chen Y, Li B 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 1

[21] Ma S H, Fang J P, Zhu H P 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 4319 (in Chinese) [马松华、方建平、朱海平 2007 物理学报 **56** 4319]

[22] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese) [马松华、吴小红、方建平、郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]

[23] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 1569 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]

[24] Zeng X, Zhang H Q 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 504 (in Chinese) [曾 昕、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 504]

[25] Zhi H Y, Wang Q, Zhang H Q 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 1002 (in Chinese) [智红燕、王 琪、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 1002]

[26] Pan J T, Gong L X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 399

[27] Jiao X Y, Wang J H, Zhang H Q 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **44** 407

[28] Liu Y P, Li Z B 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 317

[29] Xu G Q, Li Z B 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 39

[30] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 6214 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 6214]

[31] Gao L, Xu W, Tang Y N, Shen J W 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 1860 (in Chinese) [高 亮、徐 伟、唐亚宁、申建伟 2007 物理学报 **56** 1860]

[32] Li Z L 2009 *Chin. Phys.* B **18** 4074

[33] Lu D C, Hong B J, Tian L X 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 5617 (in Chinese) [卢殿臣、烘宝剑、田立新 2006 物理学报 **55** 5617]

[34] Huang D J, Zhang H Q 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 2434 (in Chinese) [黄定江、张鸿庆 2004 物理学报 **53** 2434]

[35] Zhang S Q, Li Z B 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 2197 (in Chinese) [张善卿、李志斌 2002 物理学报 **51** 2197]

[36] Zhao X Q, Tang D B, Wang L M, Zhang Y M 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 1827 (in Chinese) [赵熙强、唐登斌、王利民、张耀明 2002 物理学报 **51** 2197]

[37] Wang Z, Li D S, Lu H F, Zhang H Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 2158

[38] Li D S, Zhang H Q 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 1565 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2006 物理学报 **55** 1565]

[39] Yong X L, Zhang H Q 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 2514 (in Chinese) [雍雪林、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 2514]

[40] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1377

[41] Lu B, Zhang H Q 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3974

[42] Wang Z, Zhang H Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2210

[43] Zhang J L, Ren D F, Wang M L, Wang Y M, Fang Z D 2003 *Chin. Phys.* **12** 825

[44] Zhang L, Zhang L F, Li C Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 403

[45] Zhao X Q, Zhi H Y, Zhang H Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2202

[46] Li J B 2007 *Scie. Chin. Ser. Math.* A **50** 153

[47] Li H M 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 395

[48] Li H M 2005 *Chin. Phys.* **14** 251

[49] Li H M 2002 *Chin. Phys.* **11** 1111

[50] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Chin. Phys.* **15** 2809

[51] Liu C S 2005 *Chin. Phys.* **14** 1710

[52] Zhu J M, Zheng C L, Ma Z Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 2008

[53] Fu Z T, Liu S D, Liu S K 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 531

[54] Fu Z T, Liu S K, Liu S D 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **42** 343

[55] Wu H Y, Zhang L, Tan Y K, Zhou X T 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 3312 (in Chinese) [吴海燕、张亮、谭言科、周小滔 2008 物理学报 **57** 3312]

[56] Liu C S, Du X H 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 1039 (in Chinese) [刘成仕、杜兴华 2005 物理学报 **54** 1039]

[57] Pan J T, Gong L X 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 5585 (in Chinese) [潘军廷、龚伦训 2007 物理学报 **56** 5585]

[58] Taogetusang, Sirendaoerji 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 1295 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2008 物理学报 **57** 1295]

[59] Sirendaoerji, Sun J 2003 *Phys. Lett.* A **309** 387

[60] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 3246 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 3246]

[61] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Chin. Phys.* **15** 1143

[62] Taogetusang, Sirendaoerji 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 627 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2007 物理学报 **56** 627]

[63] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 13 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 13]

[64] Mao J J, Yang J R 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 4999 (in Chinese) [毛杰健、杨建荣 2005 物理学报 **54** 4999]

[65] Fu Z T, Liu S K, Liu S D 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 27

[66] Yu J, Ke Y Q, Zhang W J 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 493

[67] Sirendaoerji, Sun J 2002 *Phys. Lett.* A **298** 133

[68] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 2373 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2006 物理学报 **52** 2373]

[69] Fu Z T, Liu S K, Liu S D 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 343 (in Chinese) [付遵涛、刘式适、刘式达 2004 物理学报 **53** 343]

[70] Zhao C H, Sheng Z M 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 1629 (in Chinese) [赵长海、盛正卯 2004 物理学报 **53** 1629]

[71] He F, Guo Q B, Liu L 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 4326 (in Chinese) [贺　锋、郭启波、刘　辽 2007 物理学报 **56** 4326]

[72] Taogetusang, Sirendaoerji, Wang Q P 2009 *Acta Sci. J. Nat. Univ. NeiMongol* **38** 387 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉、王庆鹏 2009 内蒙古师范大学学报 **38** 387]

[73] Taogetusang, Sirendaoerji 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 4413 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2010 物理学报 **59** 4413]

[74] Narenmandula 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 1671 (in Chinese) [那仁满都拉 2002 物理学报 **51** 1671]

[75] Narenmandula, Wang K X 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 1565 (in Chinese) [那仁满都拉、王克协 2003 物理学报 **52** 1565]

Several auxiliary equations and infinite sequence exact solutions to nonlinear evolution equations*

Taogetusang†

(*The College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot* 010022, *China*)

(Received 21 June 2010; revised manuscript received 9 August 2010)

Abstract

To seek infinite sequence exact solutions of nonlinear evolution equations, the Bäcklund transformation of the solutions to some auxiliary equations and the formula of nonlinear superimposition of solutions are presented for constructing infinite sequence exact solutions to nonlinear evolution equations, which include infinite sequence Jacobi elliptic function solutions, infinite sequence hyperbolic function solutions and infinite sequence trigonomical function solutions. The method is of significance to the search into infinite sequence exact solutions of other nonlinear evolution equations.

Keywords: auxiliary equation method, formula of nonlinear superposition of solution, infinite sequence solution, nonlinear evolution equation

PACS: 02.30.IK, 02.30.Jr

* Project supported by the Natural Natural Science Foundation of China (Grant No. 10461006), the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZZ07031), the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. 2010MS0111) and the Natural Science Research Program of Inner Mongolia Normal University, China (Grant No. QN005023).

† E-mail: tgts@imnu.edu.cn