基于随机共振原理的分段线性模型的理论分析与实验研究*

王林泽[1)] 赵文礼[2)†] 陈旋[1)]

1) (杭州电子科技大学计算机学院, 计算机应用技术研究所, 杭州 310018)

2) (杭州电子科技大学机械工程学院, 杭州 310018)

(2011 年 8 月 29 日收到; 2012 年 1 月 23 日收到修改稿)

提出了一种分段线性双稳态模型, 推导了模型的解析关系及其输出信噪比, 通过对该模型与连续双稳态模型的对比分析和仿真实验, 证明了该模型的优越性. 该模型具有参数之间相互独立、易于调节的特点. 在对模型分析与数值仿真的基础上, 通过电路对强噪声背景下的微弱周期信号检测进行了实验研究. 结果表明分段线性随机共振模型能够有效实现对微弱周期信号的检测, 并能显著增强输出信噪比.

关键词: 随机共振, 分段线性模型, 电路, 微弱信号检测

PACS: 05.40.−a, 05.45.−a, 02.50.−r

1 引 言

随机共振是在非线性系统、随机输入和信号三者存在下的一种协同现象. 当系统的非线性与输入的信号和噪声之间产生某种协同时, 输入噪声的增加, 会使输出的信噪比大幅度增加, 实现了噪声能量向有用信号能量的转移, 这一现象为利用随机共振理论从噪声背景中获取微弱信号提供了十分有用的手段. 但是以绝热近似理论为代表的各种近似理论研究表明 [1−6], 只有在小参数 (信号的频率、幅值、噪声的强度都远小于 1) 条件下, 利用随机共振理论检测微弱信号才有明显的优势. 然而在工程实际中, 如机械故障, 更常见的是一些中低频周期性信号, 甚至表现为周期性的冲击脉冲以及高次谐波信号等特殊微弱信号形式, 使得检测更为困难. 因此如何将随机共振原理应用于中低频信号的检测成为随机共振研究的热点, 理论与实验研究也已经取得了一定的成果 [7−13]. 本文提出了一种分段线性双稳态模型, 推导了模型的解析关系及其模型输出的信噪比, 证明了模型相对于连续双稳态系统的优越性. 通过数值仿真和硬件电路实验, 验证了方法的有效性.

2 分段线性模型理论分析

2.1 分段线性模型

分段线性模型势函数 $U(x)$ 如图 1 所示, 其表达式为

$$U(x)=\begin{cases}-\dfrac{c}{a-b}(x+a) & x<-b\\ \dfrac{c}{b}x & -b\leqslant x<0\\ -\dfrac{c}{b}x & 0\leqslant x<b\\ \dfrac{c}{a-b}(x-a) & b\leqslant x\end{cases}, \quad (1)$$

在静态条件下, 系统具有两个相同的势阱和一个势垒, 阱底位于 $x=\pm b$, 势垒高度为 $\Delta U=c$.

* 国家自然科学基金 (批准号: 50875070) 资助的课题.

† E-mail: zhaowlcn@yahoo.com.cn

© 2012 中国物理学会 Chinese Physical Society

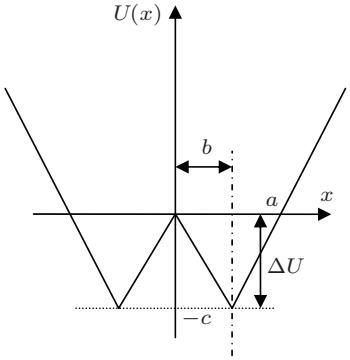

图 1 势函数 $U(x)$

2.2 分段线性系统求解

根据绝热近似理论[3], 分段线性双稳态系统的 Kramers 逃逸速率 R 可表述为

$$R^{-1}=\frac{1}{D}\int_{-\infty}^{A}\mathrm{e}^{-U(x)/D}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{A}\mathrm{e}^{U(x)/D}\mathrm{d}x, \quad (2)$$

式中 D 为噪声强度, $U(x)$ 为分段线性系统势函数. 对于 (1) 式所表示的分段线性双稳态系统, 可建立其概率方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_-(t)}{\mathrm{d}t}&=-R_-P_-(t)+R_+P_+(t),\\ \frac{\mathrm{d}P_+(t)}{\mathrm{d}t}&=-R_+P_+(t)+R_-P_-(t),\end{aligned} \quad (3)$$

可解得方程解为

$$\begin{aligned}P_-(t)&=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-(R_-+R_+)t}),\\ P_+(t)&=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-(R_-+R_+)t}).\end{aligned} \quad (4)$$

当达到稳态时, 应有 $R_-=R_+=R$, 此时方程变为

$$\begin{aligned}P_-(t)&=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2Rt}),\\ P_+(t)&=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2Rt}).\end{aligned} \quad (5)$$

则概率流为

$$\begin{aligned}p_-(t)&=\dot{P}_-(t)=-R\mathrm{e}^{-2Rt},\\ p_+(t)&=\dot{P}_+(t)=+R\mathrm{e}^{-2Rt}.\end{aligned} \quad (6)$$

对 (5) 式取 Fourier 变换可得到其频域概率流为

$$\begin{aligned}|p(\omega)|&=|p_-(\omega)|+|p_+(\omega)|\\ &=\frac{2R}{\sqrt{(2R)^2+\omega^2}},\\ \varphi(\omega)&=\arctan\left(\frac{\omega}{2R}\right).\end{aligned} \quad (7)$$

2.3 周期激励的响应与信噪比

假设噪声背景中含有周期性信号, 设 $H(t)=A_0\cos\Omega t$, 当 A_0 很小时, 其双稳态系统的响应可表述为 [14]

$$\langle x(t)\rangle=\bar{x}(D)\cos(\Omega t-\bar{\varphi}), \quad (8)$$

当 (7) 式中 $\omega=\Omega$ 时,

$$\begin{aligned}\bar{x}(D)&=\frac{A_0\langle x^2\rangle_0}{D}\frac{2R}{\sqrt{(2R)^2+\Omega^2}},\\ \bar{\varphi}(D)&=\arctan\left(\frac{\Omega}{2R}\right).\end{aligned} \quad (9)$$

可见响应的幅值依赖于噪声变化. 信号的功率谱可以由自相关函数的 Fourier 变换得到, 即

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle x(t)x(t+\tau)\rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau. \quad (10)$$

输出噪声未加周期信号时的功率谱可写为 [14]

$$S_N^0(\omega)=4R\langle x^2\rangle_0/(4R^2+\omega^2). \quad (11)$$

加入周期信号后的功率谱为

$$\begin{aligned}S(\omega)=&(\pi/2)\bar{x}^2(D)\left[\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)\right]\\ &+S_N(\omega),\end{aligned} \quad (12)$$

这里 $S_N(\omega)=S_N^0(\omega)+0(A_0^2)$, 则信噪比 SNR 为

$$\mathrm{SNR}=\frac{2\left[\int_0^{\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega\right]}{S_N(\Omega)}=\pi(A_0x_m/D)^2R. \quad (13)$$

对于分段线性双稳态系统可求得 $x_m=b$, 且由 (2) 式可求得

$$R=\frac{c^2}{(a-b)b}\mathrm{e}^{-\frac{c}{D}}. \quad (14)$$

代入 (13) 式, 得到信噪比

$$\mathrm{SNR}=\frac{\pi bA_0^2c^2\mathrm{e}^{-c/D}}{D^2(a-b)}. \quad (15)$$

将该系统信噪比与连续双稳态模型信噪比进行比较, 文献 [3] 给出连续双稳态模型信噪比为

$$\mathrm{SNR}=\frac{\sqrt{2}\mu^2A_0^2\mathrm{e}^{-\mu^2/4D}}{4D^2}, \quad (16)$$

其中, μ 为系统参数. 已知双稳系统的势垒高度为 $\Delta U=\mu^2/4$, 阱底位于 $x=\pm\sqrt{\mu}$, 令 μ=1, 选取分段线性系统的参数 $b=1$, $a=2$, $c=0.25$, 使分段线性系统的势垒高度和势阱坐标与双稳系统相同, 在输入信号和噪声完全相同的条件下, 计算两系统 SNR 随噪声强度 D 从 0 逐步增大到 2 的变化

情况. 结果如图 2 所示. 由图 2 可知, 随着噪声的增强, 两系统的 SNR 迅速增大达到峰值, 随后出现下降, 随着噪声的进一步增强而衰减趋于零. 但是, 分段线性系统的 SNR 在噪声强度 D 由小到大变化过程中始终大于双稳系统, 可见在相等的结构参数和相同的噪声条件下, 分段线性模型可以获得更高的输出信噪比.

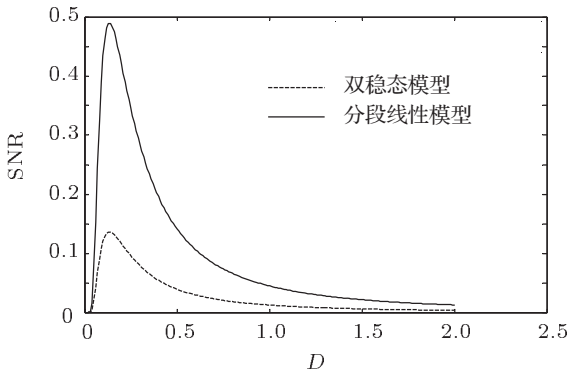

图 2 分段线性模型与连续双稳态模型 D 从 0 变化到 2 时输出信噪比比较

3 分段线性模型数值仿真

为了验证上述结果, 对两系统进行数值仿真. 设被测量的含噪声微弱周期性信号为 $S(t)$, 根据 (1) 式, 系统模型可写成如下形式:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} + S(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{a-b} + S(t) & x < -b \\ -\dfrac{c}{b} + S(t) & -b \leqslant x < 0 \\ \dfrac{c}{b} + S(t) & 0 \leqslant x < b \\ -\dfrac{c}{a-b} + S(t) & b \leqslant x \end{cases}, \quad (17)$$

式中 $S(t) = H(t) + \eta(t)$, 取 $H(t) = A_0\cos(2\pi f t)$, $\eta(t)$ 为零均值的高斯白噪声, 其自相关函数 $E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = 2D\delta(t-\tau)$, D 为噪声强度, τ 为延迟时间, f 为输入信号频率, A_0 为输入信号幅值. 对 (17) 式采用 4 阶 Runge-Kutta 方法仿真. 对比分段线性系统和连续双稳系统随机共振行为.

图 3 是输入信号频率 $f = 0.01$, 采样频率 $f_\mathrm{s} = 10$, $A_0 = 0.3$, $D = 10$, 双稳系统与分段线性系统时域输出对比. 从图 3 可以看出, 分段线性系统输出振幅明显高于双稳系统, 且噪声明显减弱. 仿真结果说明, 在相同条件下, 分段线性系统提取微弱信号的效果优于连续双稳系统.

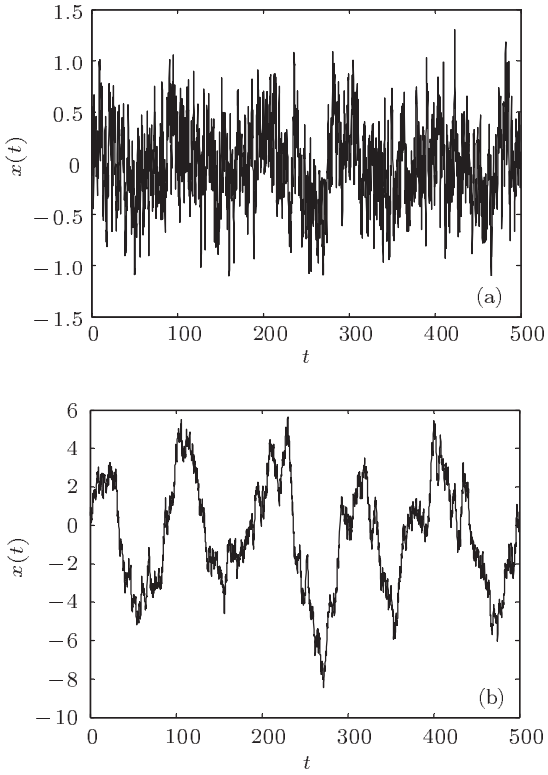

图 3 $f = 0.01$, 采样频率 $f_\mathrm{s} = 10$, $A_0 = 0.3$, $D = 10$ 时, 双稳系统与分段线性系统时域输出 (a) 双稳系统; (b) 分段线性系统

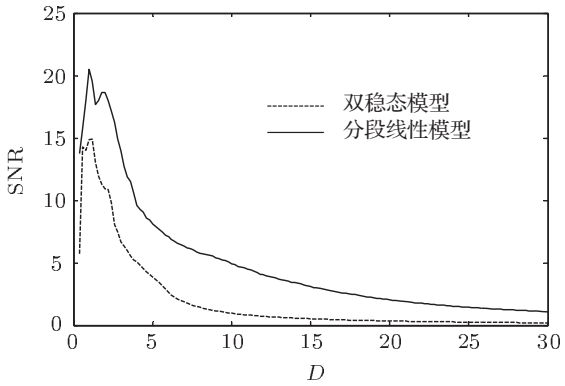

图 4 $A_0 = 0.4$, D 从 0.4 变化到 30, 两系统输出 SNR 随 D 的变化

为了进一步验证图 2 的理论信噪比曲线, 用数值方法计算, 对两系统的信噪比进行对比. 图 4 是在两系统结构参数与输入信号相同条件下, 噪声强度 D 从 0.4 变化到 30, 通过数值方法计算出的输出信噪比变化曲线. 观察图 4 可以发现, 输出信号信噪比随着噪声强度的变化都会有一个峰值, 系统的输出会随着噪声的缓慢加强, 在某个时刻得到一个

强的输出状态, 并随着噪声的过度加强, 系统输出变弱. 数值计算结果与图 2 理论结果在变化形态和趋势上一致, 且同样呈现出分段线性模型的输出信噪比高于连续双稳态模型的输出信噪比的特点.

4 分段线性随机共振模型的电路原理与微弱信号检测实验

4.1 电路原理

根据 (17) 式可以将系统表示成图 5 所示的反馈结构. 该反馈系统由比例放大、求和、积分以及选择等四个主要部分组成. 图 5 所示的反馈控制系统中的选择器可以通过比较器构成, 其他部分可以通过运算放大器、积分器、电阻、电容等元器件组成. 由此, 可以得到系统的硬件电路 [15].

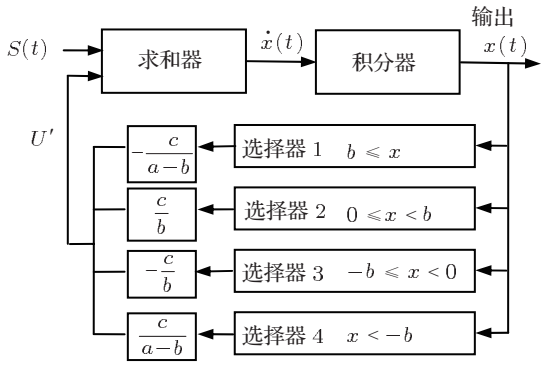

图 5 分段线性模型的系统框图

4.2 未加噪声的系统输出

调节电路使得 $a = 2$, $b = 1$, $c = 0.5$, 放大系数 $K = 10$. 不加入任何噪声, 向系统输入频率为 $f = 1$ Hz, 幅值 A_0 由 0.05 V 逐步增大到 0.15 V 的正弦信号, 观察系统输出波形. 当信号输入较小时, 系统只在两个势阱中的一个振荡, 不产生跃迁, 图 6(a) 为 $A_0 = 0.05$ V 时的表现, 此时系统的输出在一个势阱底部 1.00 V 附近; 随着信号输入的不断增加, 当 A_0 增大到 0.15 V 时, 输出信号发生了跃迁, 在两个势阱之间翻转, 输出明显放大, 如图 6(b) 所示.

4.3 不同强度噪声作用下的系统输出

在相同的系统参数条件下, 给系统输入频率 $f = 1$ Hz, 幅值 $A_0 = 0.15$ V 的正弦信号, 逐步增加噪声 $\eta(t)$ 的强度 D, 观察系统输出. 在一定的噪声强度范围内, 系统都可以有效提取出淹没在噪声中的信号, 随着噪声强度增加, 系统输出振幅不断加大, 并逐渐达到很好的输出信噪比. 但当噪声强度继续增大, 输出信噪比随之下降, 输出信号反而被噪声所掩盖. 图 7(a), (c) 分别给出了噪声强度为 0.15 和 0.85 V 时系统的输入时域图, 对应的输出分别如图 7(b) 和 (d) 所示.

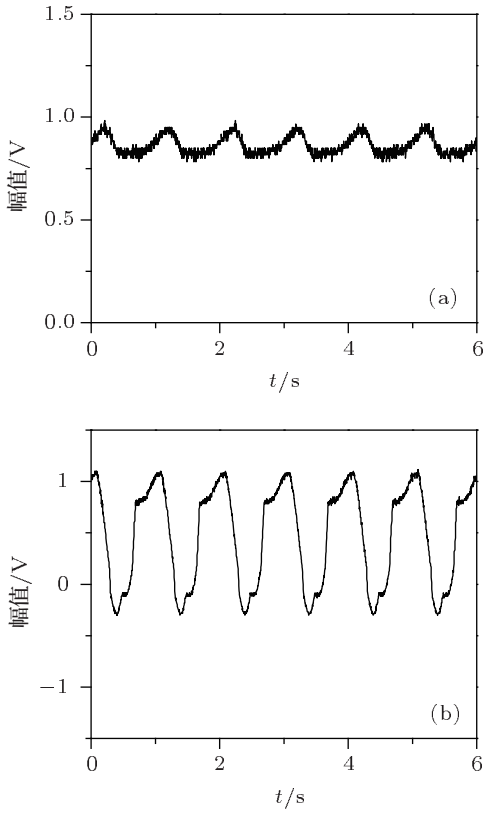

图 6 不同输入信号幅值时的输出曲线 (未加噪声) (a) $A_0 = 0.05$ V; (b) $A_0 = 0.15$ V

4.4 典型周期性微弱信号检测实验

考虑到在工程实际, 如转动机械故障中, 更常见的是一些中低频非正弦周期性信号, 进一步选取了几种典型的周期性微弱信号进行了检测实验.

输入周期方波信号数学表达式为

$$H(t) = \begin{cases} A_0 & 0 < t < T \\ -A_0 & T < t < 2T \end{cases}, \tag{18}$$

输入非对称三角波信号数学表达式为

$$H(t) = \begin{cases} A_0 t/T & 0 < t < T \\ A_0 t/T - 2A_0 & T < t < 2T \end{cases}. \tag{19}$$

(18), (19) 式中, T 代表信号周期, A_0 为信号幅值. 实验时两种信号的频率均为 1 Hz. 方波输入信号幅度为 0.15 V, 噪声强度为 0.2 V 时的实验结果如图 8(a) 和 (b) 所示. 图 8(a) 是电路时域输入信号, 图 8(b) 是电路时域输出信号. 同样, 非对称三角波信号实验结果分别如图 8(c) 和 (d) 所示. 图 8(c) 是输入信号幅值为 0.1 V, 非对称三角波混合噪声后的输入波形, 图 8(d) 是该信号经过系统后的输出波形.

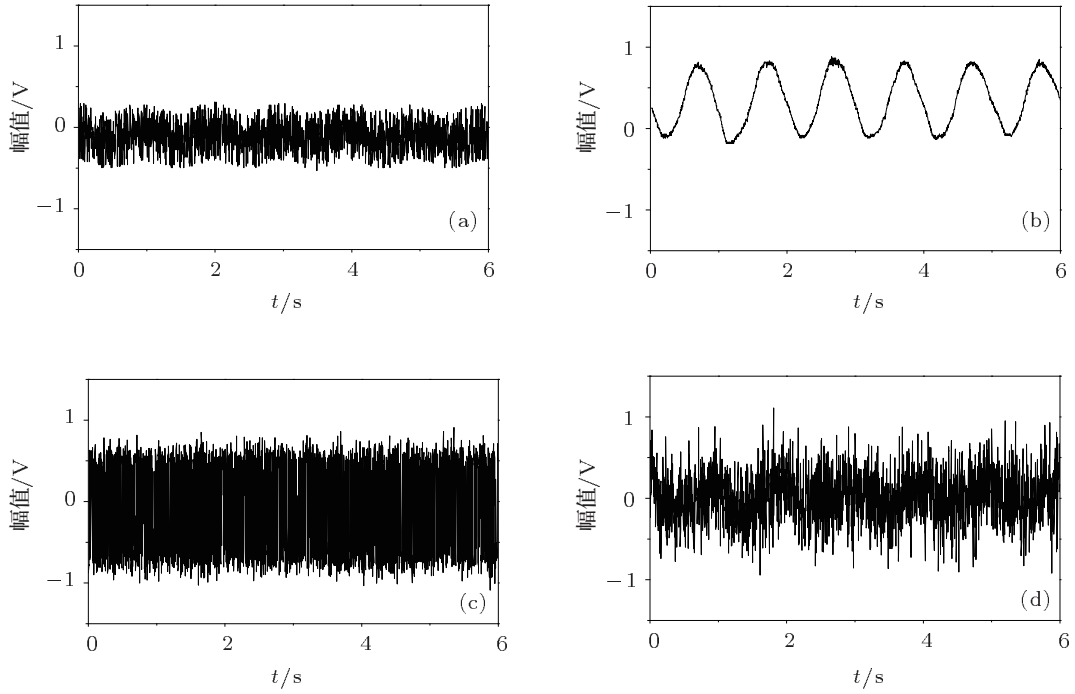

图 7 不同噪声强度时的输入输出曲线 (a) $D = 0.15$ 时的输入波形; (b) $D = 0.15$ 时的输出波形; (c)$D = 0.85$ 时的输入波形; (d)$D = 0.85$ 时的输出波形

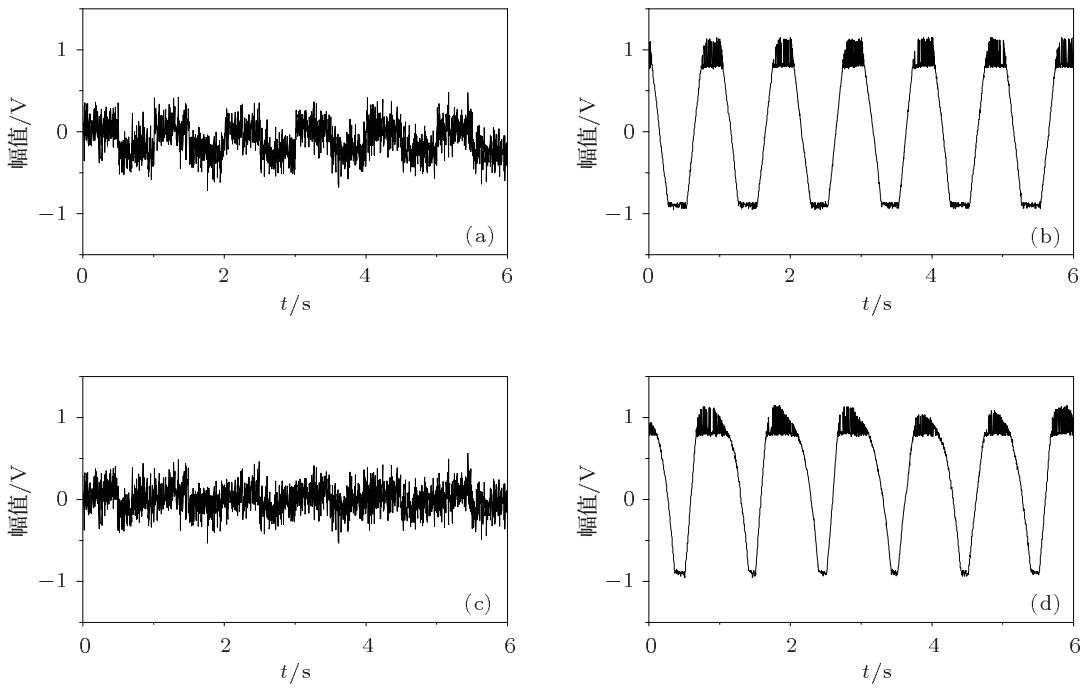

图 8 方波信号和非对称三角波的输入输出曲线, $D = 0.2$ V (a) $A_0 = 0.15$ V 的方波混合噪声后的输入波形; (b) 方波经过系统后的输出波形; (c) $A_0 = 0.1$ V, 非对称三角波混合噪声后的输入波形; (d) 三角波经过系统后的输出波形

观察图 8 不难发现, 输入信号混入噪声后, 波形难以辨认, 输入到分段线性模型的硬件电路后, 输出基本可以恢复至信号的原始周期与波形, 信号能量得到了增强, 噪声明显减弱. 这说明该分段线性随机共振模型的硬件电路可以对方波等其他周期信号进行提取和检测, 能够基本还原输入信号的周期, 并增强信号的输出. 但对谐波分量有一定的衰减, 使得信号输出有一定的失真, 需要通过调节参数加以改善.

5 结 论

对分段线性双稳态模型进行了数学建模、解析分析及模型输出信噪比的求解, 证明了模型相对于连续双稳态模型有更好的输出信噪比. 通过数值计算方法, 考察相同条件下该模型与连续双稳态模型在强噪声背景下提取微弱周期信号的效果以及信噪比, 进一步验证了上述结论. 在分析与仿真的基础上, 又通过电路进行了强噪声背景下提取微弱周期信号的实验研究, 验证了该模型的可行性. 研究结果表明, 在强噪声背景下, 该模型能够将淹没在噪声中的微弱周期信号提取出来. 实验研究为工程应用奠定了基础.

[1] Benzi R, Parisi G, Stuera A 1981 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **14** 453

[2] Leng Y G, Wang T Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2431 (in Chinese) [冷永刚, 王太勇 2003 物理学报 **52** 2431]

[3] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Science and Technology Education Press) p219 (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科学教育出版社) 第 219 页]

[4] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett.* A **97** 5

[5] Mantegna R N, Spagnolo B 1994 *Phys. Rev.* E **49** 1792

[6] Lanzara E, Mantegna R N, Spagnolo B, Zangara R 1997 *Amer. J. Phys.* **65** 341

[7] Ning L J, Xu W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2889 (in Chinese) [宁丽娟, 徐伟 2009 物理学报 **58** 2889]

[8] Yang D X, Hu Y Q 2003 *J. Circ. Sys.* **9** 135 (in Chinese) [杨定新, 胡莺庆 2003 电路与系统学报 **9** 135]

[9] Yang D X, Hu Y Q, Wen X S 2004 *J. Vibr. Eng.* **17** 475 (in Chinese) [杨定新, 胡莺庆, 温熙森 2004 振动工程学报 **17** 475]

[10] Zhao W L, Tian F, Shao L D 2007 *Chin. J. Scie. Ins.* **28** 1787 (in Chinese) [赵文礼, 田帆, 邵柳东 2007 仪器仪表学报 **28** 1787]

[11] Lin L, Yan Y, Mei D C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2240 (in Chinese) [林灵, 闫勇, 梅冬成 2010 物理学报 **59** 2240]

[12] Zhang X Y, Xu W, Zhou B C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 514 [张晓燕, 徐伟, 周丙常 2011 物理学报 **60** 514]

[13] Wan P, Zhan Y C, Li X C, Wang Y H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 502 (in Chinese) [万频, 詹宜臣, 李学聪, 王永华 2011 物理学报 **60** 502]

[14] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223

[15] Wang L Z, Chen X, Zhao W L 2010 *J. Circ. Sys.* **15** 32 [王林泽, 陈旋, 赵文礼 2010 电路与系统学报 **15** 32]

Theory and experiment research on a Piecewise-linear model based on stochastic resonance*

Wang Lin-Ze[1)] Zhao Wen-Li[2)†] Chen Xuan[1)]

1) (*Institute of Computer Application Technology, School of Computer Science and Technology, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou* 310018*, China*)

2) (*School of Mechanical Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou* 310018*, China*)

(Received 29 August 2011; revised manuscript received 23 January 2012)

Abstract

We propose a new piecewise-linear model. The principle of stochastic resonance in the new piecewise-linear model is introduced, and the formula of the signal-to-noise ratio (SNR) is deduced. It is proved that stochastic resonance characteristics can be utilized to realize the conversion of noise energy into periodic signal energy. The results clearly show the enhancement of the SNR of the output signal. The model characteristic that the weak periodic signal can be detected from noise background is investigated by the numerical simulation. The stochastic resonance system based on the model is built by using a circuit. The behaviors of stochastic resonance are studied when the circuit is driven by noise and period signal. The simulation and experimental results show that the model can effectively detect weak periodic signal, and enhance the SNR prominently.

Keywords: stochastic resonance, piecewise-linear model, circuit, detection of weak signal

PACS: 05.40.−a, 05.45.−a, 02.50.−r

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50875070).

† E-mail: zhaowlcn@yahoo.com.cn