物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 22 (2012) 220505

基于 PI$^\alpha$ 控制的分数阶超混沌 Chen 系统同步研究*

陈志旺[1)2)] 王敬[1)2)†] 庞双杰[3)]

1) (燕山大学工业计算机控制工程河北省重点实验室, 秦皇岛 066004)

2) (国家冷轧板带装备及工艺工程技术研究中心, 秦皇岛 066004)

3) (秦皇岛职业技术学院, 秦皇岛 066100)

(2012 年 4 月 27 日收到; 2012 年 6 月 6 日收到修改稿)

本文提出一种 PI$^\alpha$ 控制器设计方法, 实现了分数阶超混沌 Chen 系统的混沌同步. 首先针对分数阶超混沌 Chen 系统设计了 PI$^\alpha$ 控制器, 然后利用改进的双参数 Mittag-Leffler 函数估计定理和扩展的 Gronwall 引理证明了系统的稳定性, 并指出了使分数阶超混沌 Chen 系统同步的控制器参数需满足的条件. 仿真结果证实了所设计方法的有效性.

关键词: 分数阶超混沌 Chen 系统, 混沌同步, PI$^\alpha$ 控制

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq

1 引 言

混沌同步因在通信保密等领域的应用而引起了广泛关注, 人们提出了许多混沌系统的同步方法, 但相关同步方法大多针对整数阶混沌系统, 如文献 [1] 研究了不同超混沌系统的修正函数投影同步; 文献 [2] 研究了超混沌 Chen 系统与超混沌 Rössler 系统之间的异结构同步; 文献 [3] 研究了存在干扰情况下不同超混沌系统的同步. 而分数阶超混沌系统的同步控制更具有研究价值, 因为分数阶系统既具有普遍性, 又具有更大的密钥空间 [4]. 同时超混沌系统具有两个或两个以上的正 Lyapunov 指数, 相轨迹在更多方向上分离, 其混沌行为更为复杂, 更适合在混沌保密通信等领域的应用.

随着计算机及信号处理技术的发展, 分数阶 PID 控制器的应用研究成为一个新兴的领域, 其一般格式简记为 PI$^\lambda$D$^\mu$. 分数阶 PID 控制 [5] 由于引入了微分、积分阶次 λ 和 μ, 整个控制器多了两个可调参数, 因而它具有更大的调节灵活度, 可以得出更好的控制效果. 可以说, 分数阶 PID 控制是分数阶控制理论历史上的一个里程碑. 文献 [6, 7] 分别针对大延迟系统和 AVR 系统提出了分数阶 PI$^\lambda$D$^\mu$ 控制器, 文献 [8] 提出了基于最优近似法的 PI$^\lambda$D$^\mu$ 控制器的设计, 仿真结果显示, 相对整数阶 PID 控制, 分数阶 PID 控制使系统获得了更小的超调量和调节时间, 系统鲁棒性得到加强. 和传统的 PID 控制器类似, 分数阶 PID 控制器的比例、积分、微分部分也可以进行不同组合, 如组合成 PI$^\lambda$, PD$^\mu$ 控制器, 这两种控制器近年来也得到了广泛的研究. 文献 [9] 研究了 PI$^\lambda$ 控制器的参数稳定域和控制性能, 文献 [10] 针对给定的分数阶系统分别设计了整数阶 PD 控制器和分数阶 PD$^\mu$ 控制器, 由仿真结果得出分数阶 PD$^\mu$ 控制器能够取得比整数阶控制器更好地效果. 然而分数阶 PID 的参数整定方法即关于 5 个参数 K_P, K_I, K_D, λ, μ 确定方法的相关文献很少. 目前大多数论文仅在仿真中给出定性分析, 并且没有给出相关的理论证明, 分数阶 PID 的参数整定方法远没有整数阶参数整定方法成熟.

在同步控制器的设计过程中, 大多数论文 [11−14] 都是基于误差状态方程, 在设计控制器

* 河北省自然科学基金 (批准号: F2010001322) 资助的课题.

† E-mail: wj_wangjing93@yahoo.cn

时, 先将误差系统的非线性项消去, 基于分数阶线性系统稳定性理论通过误差系统的比例项调节控制系统的极点, 而本文将误差的比例和积分同时加入控制器中, 利用一种新的分数阶非线性系统稳定性理论实现了两个混沌系统的同步.

2 系统模型和问题描述

考虑分数阶超混沌系统, 设响应系统为

$$\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}. \tag{1}$$

驱动系统为

$$\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}), \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{D}^{\alpha}$ 表示微分算子, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ 为系统状态量, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为系统线性矩阵, $\boldsymbol{g}(\cdot) \in \boldsymbol{R}^n$ 为连续的非线性项, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^n$ 为控制输入, $0 < \alpha < 1$.

2005 年, Li[15] 等提出了一种新的超混沌系统 —— 超混沌 Chen 系统, 该系统的分数阶形式为

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\ D^{\alpha}x_2 &= dx_1 - x_1x_3 + cx_2, \\ D^{\alpha}x_3 &= x_1x_2 - bx_3, \\ D^{\alpha}x_4 &= x_2x_3 + rx_4, \end{aligned} \tag{3}$$

式中, x_1, x_2, x_3, x_4 为系统状态量, 当参数 $a = 35$, $b = 3$, $c = 12$, $d = 7$, $r = 0.5$, $0.95 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时, 系统处于超混沌状态, 其混沌吸引子如图 1 所示.

将 (3) 式作为驱动系统可化为如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}), \tag{4}$$

式中,

$$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = [0, -y_1y_3, y_1y_2, y_2y_3]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix}.$$

其响应系统为

$$\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}, \tag{5}$$

式中, $\boldsymbol{A}$ 的定义同 (4) 式, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = [0, -x_1x_3, x_1x_2, x_2x_3]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ 表示误差, 目标就是设计控制器使得从不同的初值 $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$ 出发的系统实现 $\lim\limits_{t\to\infty} \|\boldsymbol{e}\| = \lim\limits_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = 0$, 从而使响应系统和驱动系统达到同步.

3 控制器设计原理

根据误差的定义, 由方程 (5) 减去方程 (4) 可以得到误差系统的表达式为

$$\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{u}. \tag{6}$$

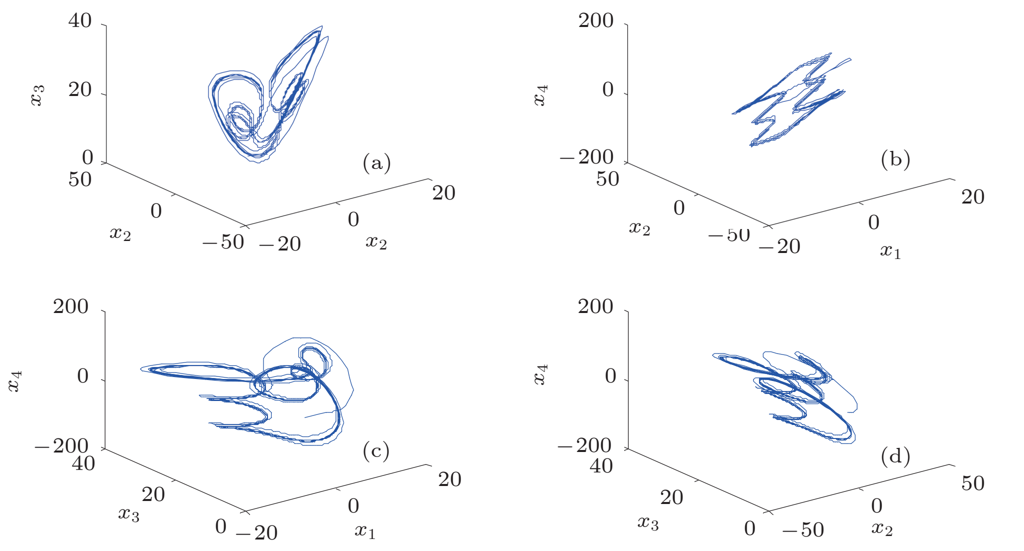

图 1 分数阶超混沌 Chen 系统的吸引子相图 (a) $x_1 - x_2 - x_3$ 平面相图; (b) $x_1 - x_2 - x_4$ 平面相图; (c) $x_1 - x_3 - x_4$ 平面相图; (d) $x_2 - x_3 - x_4$ 平面相图

根据被控对象的矩阵维数和分数阶 PID 控制器的一般形式即 $\mathrm{PI}^{\lambda}\mathrm{D}^{\mu}$ [5], 令参数 $\lambda=\alpha, \mu=0$, 即可构造如下 PI^{α} 控制器

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}({}_0\boldsymbol{D}_t^{-\alpha}\boldsymbol{e}), \tag{7}$$

式中, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}\in\boldsymbol{R}^{4\times4}$ 是误差反馈的比例增益向量, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}\in\boldsymbol{R}^{4\times4}$ 是分数阶积分增益, ${}_0\boldsymbol{D}_t^{-\alpha}$ 表示分数积分算子, 0 和 t 分别表示积分的上、下限.

将 (7) 式代入 (6) 式, 可以得到误差动态系统为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{e}=&\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}\\&+\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}({}_0\boldsymbol{D}_t^{-\alpha}\boldsymbol{e}).\end{aligned} \tag{8}$$

利用 Taylor 展开, 可以得到

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{e})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\\=&[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}+\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{e})]-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\\=&\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}+\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{e}).\end{aligned} \tag{9}$$

式中, $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})$ 表示 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ 的一阶导数, 它可用分数阶 Taylor 展开形式, 但整数阶 Taylor 展开式在实时性上优于分数阶 Taylor 展开式, 因此此处采用整数阶计算. $\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{e})=[0,-e_1e_3,e_1e_2,e_2e_3]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{e})$ 的 Taylor 展开高阶项. 将 (9) 式代入 (8) 式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{e}=&[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K_P}+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})]\boldsymbol{e}\\&+\boldsymbol{K_I}({}_0\boldsymbol{D}_t^{-\alpha}\boldsymbol{e})+\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{e}).\end{aligned} \tag{10}$$

令 $\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{e}$, 则 $\boldsymbol{q}={}_0\boldsymbol{D}_t^{-\alpha}\boldsymbol{e}$, 将 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 同时取为状态, 组成增广误差状态方程, $\boldsymbol{q}$ 是对误差 $\boldsymbol{e}$ 的性能提出更高的要求 (即控制系统的性能也会提高), 所设计的控制器使误差 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 同时收敛, 优于传统的单纯让 $\boldsymbol{e}$ 收敛, 因此误差动态系统可以重新构造成如下的增广误差状态方程:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{e}\\\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}) & \boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}\\\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\\boldsymbol{q}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{e})\\\boldsymbol{0}_2\end{bmatrix}, \tag{11}$$

式中, $\boldsymbol{I}$ 为 4×4 阶单位矩阵, $\boldsymbol{0}_1$ 为 4×4 阶零矩阵, $\boldsymbol{0}_2$ 为 4×1 阶零矩阵.

(11) 式状态方程可简写为

$$\boldsymbol{D}^{\alpha}\tilde{\boldsymbol{e}}=\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{e}}+\tilde{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{e}}), \tag{12}$$

式中, $\tilde{\boldsymbol{e}}=[\boldsymbol{e},\boldsymbol{q}]^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}) & \boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}\\\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}_1\end{bmatrix}$, $\tilde{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{e}})=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{e})\\\boldsymbol{0}_2\end{bmatrix}$.

4 稳定性分析

定义 1[16] 若 $0<\alpha<2$, $\beta>0$, 存在 $0.5\pi\alpha<\eta\leqslant\min\{\pi,\pi\alpha\}$ 使 $\eta\leqslant|\arg(z)|\leqslant\pi$ 成立, $|z|\geqslant1$, 则 $E_{\alpha,\beta}(z)$ 可表示为

$$E_{\alpha,\beta}(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta-\alpha k)}, \tag{13}$$

式中, $\arg(z)$ 表示 z 的幅角值, $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数. (13) 式是在定义 1 中约束条件下对 Mittag-Leffler 函数的等价变换, 在文献 [16] 定理 1.4 中 $E_{\alpha,\beta}(z)$ 被处理成有限项级数加高阶无穷小的形式, 而此处将它定义成无穷级数形式, 但二者的证明方法是类似的. 该表示形式可利用如下引理 1 对 Mittag-Leffler 函数进行估值.

引理 1[16] 如果 $0<\alpha<2$, $\beta>0$, C 是一个正数, 存在 $0.5\pi\alpha<\eta\leqslant\min\{\pi,\pi\alpha\}$ 使 $\eta\leqslant|\arg(z)|\leqslant\pi$ 成立, $|z|\geqslant1$, 则有下式成立:

$$|E_{\alpha,\beta}(z)|\leqslant\frac{C}{1+|z|}. \tag{14}$$

为了保证文章的紧凑性, 引理 1 的证明过程见附录 A1.

定理 1 如果 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, $0<\alpha<2$, $\beta>0$, $\|\boldsymbol{A}\|\geqslant1$, 存在 $0.5\pi\alpha<\eta\leqslant\min\{\pi,\pi\alpha\}$ 使 $\eta\leqslant|\arg(\lambda_i(\boldsymbol{A}))|\leqslant\pi$ $(i=1,2\cdots,n)$ 成立, C 是一个正数, 则有下式成立:

$$\|E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A})\|\leqslant\frac{C}{1+\|\boldsymbol{A}\|}, \tag{15}$$

式中, $\lambda_i(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\|\bullet\|$ 表示 l_2 范数, $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}$, $\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的谱半径, 表示为 $\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\right|$, 需要说明的是 $\lambda_i(\boldsymbol{A})$ 与 $\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ 不是平方关系. 为了保证文章的紧凑性, 定理 1 的证明过程见附录 A2. 由于定理 1 也可在特定条件下对 $E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A})$ 进行估计, 因此将它称为改进的双参数 Mittag-Leffler 函数估计定理.

引理 2 (扩展 Gronwall 引理)[17] 设 $k(0)=1$, $u(t), v(t), k(t)$ 为区间 $0<t<\infty$ 上的非负连续函数, 且满足不等式 $u(t)\leqslant k(t)+\int_0^t u(s)v(s)\mathrm{d}s$, 则

有

$$u(t) \leqslant k(t) \exp\left(\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s\right), \quad t \geqslant 0. \tag{16}$$

定理 2 考虑一个 n 维分数阶系统

$$\boldsymbol{D}^\alpha \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \tag{17}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是一个常数矩阵, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 为连续函数, 如果

1) $0.5\pi\alpha < |\arg(\lambda_i(\boldsymbol{A}))| \leqslant \pi$;

2) $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, 且 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\boldsymbol{0}} \|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\| / \|\boldsymbol{x}\| = 0$. 则系统 $\boldsymbol{D}^\alpha \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 是渐进稳定的. 定理 2 的条件中

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i^2}.$$

证明 对 (17) 式两边取 Laplace 变换, 可以得到

$$\boldsymbol{X}(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(0) + \frac{1}{s^\alpha - \boldsymbol{A}} L\left\{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))\right\}. \tag{18}$$

利用 Mittag-Leffler 函数的 Laplace 变换公式以及卷积积分公式对 (18) 式取 Laplace 反变换, 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) =& E_{\alpha,1}(\boldsymbol{A}t^\alpha)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \\ & \times E_{\alpha,\alpha}(\boldsymbol{A}(t-\tau)^\alpha)\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned}\tag{19}$$

(19) 式中 $E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A}t^\alpha)$ 取为定义 1 的形式, 由于定理 1 中 η 是任选的, 则使 $|\arg(\lambda_i(\boldsymbol{A}))|$ 大于 η 的下限, 即 $0.5\pi\alpha < \eta < |\arg(\lambda_i(\boldsymbol{A}))|$ 即可满足定理 1 中 $E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A})$ 的存在条件, 因此 $0.5\pi\alpha < |\arg(\lambda_i(\boldsymbol{A}))| \leqslant \pi$; 随着时间 t 的增大, $\|\boldsymbol{A}t^\alpha\| \geqslant 1$ 成立, 此处应用定理 1, 可知存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A}t^\alpha)\| \leqslant \frac{C}{1 + \|\boldsymbol{A}t^\alpha\|}, t > 0 \tag{20}$$

由于 $\boldsymbol{x}(t)$ 是连续函数, 则利用定理 2 的条件 2, 可知当 $\|\boldsymbol{x}\|$ 趋近于 0 但 $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ 时存在

$$\frac{\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))\|}{\|\boldsymbol{x}(t)\|} < \frac{1}{C}, \quad t > 0. \tag{21}$$

根据向量范数 $\|\boldsymbol{x}\|$ 和矩阵范数 $\|\boldsymbol{A}\|$ 相容的定义 [19] 可知, 本文定义的 $\|E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A}t^\alpha)\|$ 和 $\|\boldsymbol{x}(0)\|$ 是相容的, 因此 $\|E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A}t^\alpha)\boldsymbol{x}(0)\| \leqslant \|E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A}t^\alpha)\|\,\|\boldsymbol{x}(0)\|$, 所以可得以下不等式:

$$\begin{aligned}& \frac{\|\boldsymbol{x}(t)\|}{C\,\|\boldsymbol{x}(0)\|} \\ \leqslant & \frac{1}{1 + \|\boldsymbol{A}t^\alpha\|} + \frac{1}{C\,\|\boldsymbol{x}(0)\|} \\ & \times \int_0^t \frac{\|t-\tau\|^{\alpha-1} C}{1 + \|\boldsymbol{A}(t-\tau)^\alpha\|} \frac{\|\boldsymbol{x}(\tau)\|}{C}\,\mathrm{d}\tau \\ = & \frac{1}{1 + \|\boldsymbol{A}\|\,t^\alpha} + \frac{1}{C\,\|\boldsymbol{x}(0)\|} \\ & \times \int_0^t \frac{\|t-\tau\|^{\alpha-1} C}{1 + \|\boldsymbol{A}\|\,(t-\tau)^\alpha} \frac{\|\boldsymbol{x}(\tau)\|}{C}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}\tag{22}$$

令 $u = \dfrac{1}{C\,\|\boldsymbol{x}(0)\|}\,\|\boldsymbol{x}(t)\|$, $v = (t-\tau)^{\alpha-1}/(1 + \|\boldsymbol{A}\|\,(t-\tau)\alpha)$, $k = 1/(1 + \|\boldsymbol{A}\|\,t^\alpha)$, 利用引理 2, 对 (22) 式应用不等式, 可以得到

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant & \frac{C\,\|\boldsymbol{x}(0)\|}{1 + \|\boldsymbol{A}\|\,t^\alpha} \mathrm{e}^{\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\boldsymbol{A}\|(t-\tau)^\alpha}\,\mathrm{d}\tau} \\ = & \frac{C\,\|\boldsymbol{x}(0)\|}{1 + \|\boldsymbol{A}\|\,t^\alpha}\,\mathrm{e}^{\frac{\log(1 + \|\boldsymbol{A}\|t^\alpha)}{-\alpha\|\boldsymbol{A}\|}} \\ = & \frac{C\,\|\boldsymbol{x}(0)\|}{(1 + \|\boldsymbol{A}\|\,t^\alpha)^{\frac{\alpha\|\boldsymbol{A}\|+1}{\alpha\|\boldsymbol{A}\|}}}, \end{aligned}\tag{23}$$

因此,

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}. \tag{24}$$

则由 (24) 式表明系统 (17) 是渐进稳定的.

由 (12) 式可得

$$\begin{aligned}& \lim_{\|\tilde{\boldsymbol{e}}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\|\tilde{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{e}})\|}{\|\tilde{\boldsymbol{e}}\|} = \lim_{\|\tilde{\boldsymbol{e}}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\|\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{e})\|}{\|\tilde{\boldsymbol{e}}\|} \leqslant \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\|\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{e})\|}{\|\boldsymbol{e}\|} \\ = & \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\sqrt{(-e_1e_3)^2 + (e_1e_2)^2 + (e_2e_3)^2}}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2}}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}& \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\sqrt{(-e_1e_3)^2 + (e_1e_2)^2 + (e_2e_3)^2}}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2}} \\ \leqslant & \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\sqrt{(-e_1e_3)^2 + (e_1e_2)^2}}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2}} \\ & + \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\sqrt{(e_2e_3)^2}}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2}}. \end{aligned}$$

同时由于,

$$\begin{aligned}& \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\sqrt{(-e_1e_3)^2 + (e_1e_2)^2}}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2}} \\ \leqslant & \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\sqrt{(-e_1e_3)^2 + (e_1e_2)^2}}{\sqrt{e_1^2}} \\ = & \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \sqrt{e_2^2 + e_3^2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\sqrt{(e_2e_3)^2}}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2}} \\ \leqslant & \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \frac{\sqrt{(e_2e_3)^2}}{\sqrt{e_3^2}} \\ = & \lim_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}} \sqrt{e_2^2} = 0. \end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{e}\|\to\boldsymbol{0}}\dfrac{\|\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{e})\|}{\|\boldsymbol{e}\|}\leqslant 0$, 即 $\lim\limits_{\|\tilde{e}\|\to\boldsymbol{0}}\dfrac{\|\tilde{g}(\tilde{e})\|}{\|\tilde{e}\|}\leqslant 0$. (12) 式满足定理 2 的条件 2.

通过选择合适的 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}$ 可使得 (12) 式满足定理 2 的条件 1, 因此利用控制器 (7) 可使不同初值的混沌系统达到同步.

以下分析 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}$ 的选择条件.

引理 3[18] 如果 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, 任意给定 $1\leqslant k\leqslant n$, 将 $\boldsymbol{M}$ 进行如下分块:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_1\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1\in\boldsymbol{R}^{k\times k}$, $\boldsymbol{B}_1\in\boldsymbol{R}^{k\times(n-k)}$, $\boldsymbol{C}_1\in\boldsymbol{R}^{(n-k)\times k}$, $\boldsymbol{D}_1\in\boldsymbol{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, 则 $\boldsymbol{M}$ 的所有特征值位于如下的圆盘中:

$$\begin{aligned}d:\Bigg\{z:\left|z-\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{M}}{n}\right|\leqslant r\\ =\sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(l_k-\frac{1}{n}\left|\mathrm{tr}\boldsymbol{M}\right|^2\Big)}\Bigg\},\end{aligned}\qquad(25)$$

式中, $\mathrm{tr}\boldsymbol{M}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的迹, $l_k=\|\boldsymbol{A}_1\|_F^2+\|\boldsymbol{D}_1\|_F^2+2\|\boldsymbol{B}_1\|_F\|\boldsymbol{C}_1\|_F$.

由 (12) 式可知

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

式中, $\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})$, 应用引理 3, $n=8$, $\mathrm{tr}\tilde{\boldsymbol{A}}=\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}}=k_{P11}+k_{P22}+k_{P33}+k_{P44}$,

$$\begin{aligned}l_k=&\left\|\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}}\right\|_F^2+2\left\|\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}\right\|_F\left\|\boldsymbol{I}\right\|_F\\ =&\mathrm{tr}(\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}})+2\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}})}\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I})}\\ =&k_{\mathrm{p}11}^2+k_{\mathrm{p}22}^2+k_{\mathrm{p}33}^2+k_{\mathrm{p}44}^2\\ &+4\sqrt{k_{\mathrm{I}11}^2+k_{\mathrm{I}22}^2+k_{\mathrm{I}33}^2+k_{\mathrm{I}44}^2},\end{aligned}$$

式中, $k_{\mathrm{P}ii}$ 表示矩阵 $\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}}$ 的第 i 行第 i 列, $k_{\mathrm{I}ii}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}$ 的第 i 行第 i 列, $i=1,2,3,4$.

将以上公式代入 (25) 式可得

$$\begin{aligned}&\left|z-\frac{k_{\mathrm{p}11}^2+k_{\mathrm{p}22}^2+k_{\mathrm{p}33}^2+k_{\mathrm{p}44}^2}{8}\right|\\ \leqslant&\Bigg\{\frac{7}{8}\big[(k_{\mathrm{p}11}^2+k_{\mathrm{p}22}^2+k_{\mathrm{p}33}^2+k_{\mathrm{p}44}^2\\ &+4\sqrt{k_{\mathrm{I}11}^2+k_{\mathrm{I}22}^2+k_{\mathrm{I}33}^2+k_{\mathrm{I}44}^2}\\ &-\frac{1}{8}\left|k_{\mathrm{p}11}+k_{\mathrm{p}22}+k_{\mathrm{p}33}+k_{\mathrm{p}44}\right|^2)\big]\Bigg\}^{1/2}.\end{aligned}$$

由上式可以看出矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的特征值只与 $\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}$ 的对角线元素有关, 同时 $\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}$ 还应使矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 满足定理 2 的条件 1.

5 仿真研究

为了验证理论的正确性和所设计的控制器的有效性, 采用分数阶超混沌 Chen 系统微积分方程的 Grunwald-Letnicov 近似计算法进行数值仿真, 选取分数阶阶次 $\alpha=0.95$, 时间步长选为 $h=0.01$, 仿真时间选为 $T=10$ s, 系统参数 $a=35$, $b=3$, $c=12$, $d=7$, $r=0.5$, 选取状态初始值分别为 $\boldsymbol{x}(0)=[3\quad -4\quad 2\quad 2]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}(0)=[-3\quad 3\quad 5\quad -6]^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{e}(0)=[6\quad -7\quad -3\quad 8]^{\mathrm{T}}$. 根据定理 2 的分析, 参数矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}$ 的选取如下:

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix}k_{\mathrm{P}}+a & -a & 0 & -1\\ y_3-d & k_{\mathrm{P}}-c & y_1 & 0\\ -y_2 & -y_1 & k_{\mathrm{P}}+b & 0\\ 0 & -y_3 & -y_2 & k_{\mathrm{P}}-r\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}k_{\mathrm{I}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & k_{\mathrm{I}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & k_{\mathrm{I}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_{\mathrm{I}}\end{bmatrix}.$$

则由 $\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})$ 可知 $\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{P}}$ 的形式为

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix}k_{\mathrm{P}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & k_{\mathrm{P}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & k_{\mathrm{P}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_{\mathrm{P}}\end{bmatrix}.$$

当 $k_{\mathrm{P}}=-3$, $k_{\mathrm{I}}=1$ 时, 矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2,3,4}=-3.3028$, $\lambda_{5,6,7,8}=0.3028$, 其幅角值分别为 π 和 0, 第二个幅角值不满足定理 2 的条件, 此时误差系统不能渐进稳定, 其误差曲线如图 2 所示.

当 $k_{\mathrm{P}}=-3$, $k_{\mathrm{I}}=-1$ 时, 矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2,3,4}=-2.6180$, $\lambda_{5,6,7,8}=-0.3820$, 其幅角值都为 π, 满足定理 2 的条件, 此时误差曲线如图 3 所示.

当 $k_{\mathrm{P}}=-3$, $k_{\mathrm{I}}=-10$ 时, 矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2,3,4}=-34.9714$, $\lambda_{5,6,7,8}=-0.0286$, 其幅角

值都为 π, 满足定理 2 的条件, 此时误差曲线如图 4 所示.

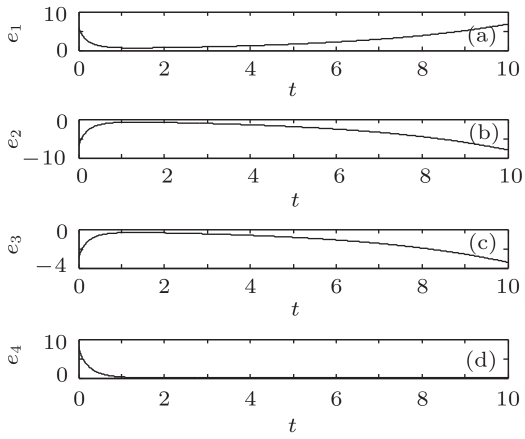

图 2　$k_\mathrm{P} = -3, k_\mathrm{I} = 1$ 时, 系统同步误差曲线图　(a) e_1 的误差曲线; (b) e_2 的误差曲线; (c) e_3 的误差曲线; (d) e_4 的误差曲线

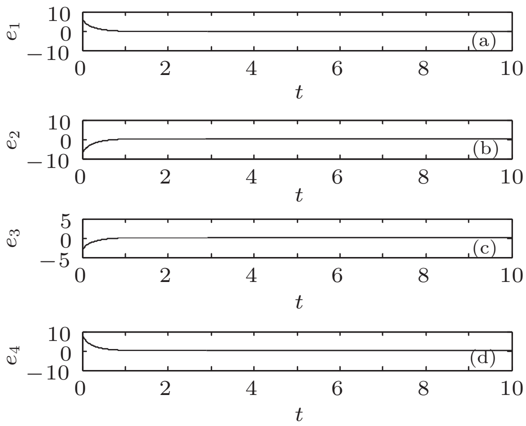

图 3　$k_\mathrm{P} = -3, k_\mathrm{I} = -1$ 时, 系统同步误差曲线图　(a) e_1 的误差曲线; (b) e_2 的误差曲线; (c) e_3 的误差曲线; (d) e_4 的误差曲线

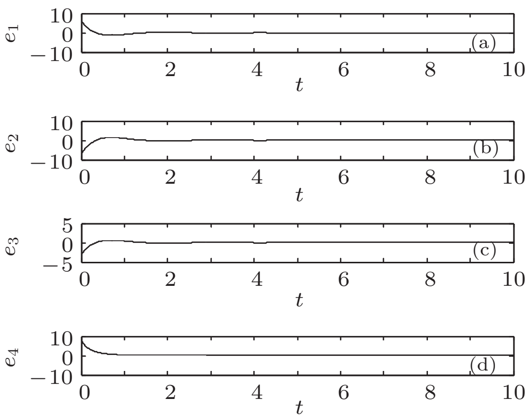

图 4　$k_\mathrm{P} = -3, k_\mathrm{I} = -10$ 时, 系统同步误差曲线图　(a) e_1 的误差曲线; (b) e_2 的误差曲线; (c) e_3 的误差曲线; (d) e_4 的误差曲线

当 $k_\mathrm{P} = -35$, $k_\mathrm{I} = -1$ 时, 矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2,3,4} = -1.5 + 2.7839\mathrm{i}$, $\lambda_{5,6,7,8} = -1.5 - 2.7839\mathrm{i}$, 其幅角值分别为 2.065 和 -2.065, 满足定理 2 的条件, 此时误差曲线如图 5 所示.

由图 3 和图 4 比较可知, 参数 k_P 越小, 系统趋于稳定的时间越长. 由图 3 和图 5 比较可知, 参数 k_I 越小, 系统的上升时间越短. 所做的大量仿真也证明了这个结论.

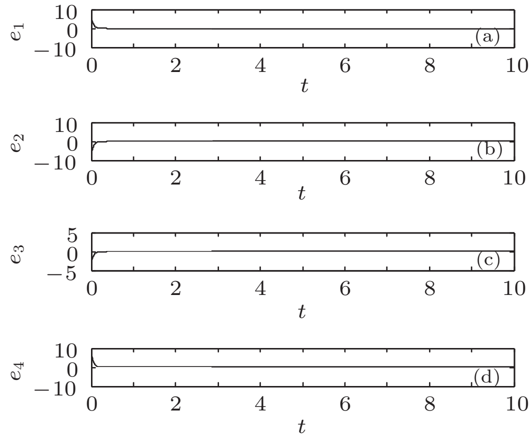

图 5　$k_\mathrm{P} = -35, k_\mathrm{I} = -1$ 时, 系统同步误差曲线图　(a) e_1 的误差曲线; (b) e_2 的误差曲线; (c) e_3 的误差曲线; (d) e_4 的误差曲线

6 结 论

本文基于分数阶系统稳定性理论, 设计 PI^{α} 控制器, 并分析了其参数选择方法, 实现了 Chen 混沌响应系统和驱动系统同步. 通过数值仿真, 验证了设计的控制器的有效性, 同时分析了比例参数和积分参数对控制性能的影响. 本文方法通用性强, 实用范围宽, 可以进一步推广到其他分数阶混沌系统, 为其混沌控制与同步提供新的途径.

附录 A1

证明　由 $E_{\alpha,\beta}(z)$ 的定义 1 可知 $E_{\alpha,\beta}(z)$ 在定义 1 下需满足如下 3 个条件:

1) $0 < \alpha < 2, \beta > 0$;

2) $|z| \geqslant 1$;

3) 存在 $0.5\pi\alpha < \eta \leqslant \min\{\pi, \pi\alpha\}$ 使 $\eta \leqslant |\arg(z)| \leqslant \pi$ 成立.

令 $\max\left(\dfrac{1}{\varGamma(\beta-\alpha k)}\right) = \dfrac{1}{\varGamma(\beta-\alpha)} \leqslant C$, 则可推出以下不等式:

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| = \left|-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{-k}}{\varGamma(\beta-\alpha k)}\right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \right| \leqslant C \left| - \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \right|. \tag{A1}$$

因为 $z \in G^{-}(\varepsilon, \mu)$, 所以 $\mathrm{Re}(z) < 0$, 那么 z^{-k} 求和就会出现交错级数相加, 具体形式为

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} &= -\left(-|z|^{-1} + |z|^{-2} - |z|^{-3} + \cdots\right) \\ &= -\left(\frac{-|z|^{-1}}{1+|z|^{-1}}\right) = \frac{1}{1+|z|}, \end{aligned}$$

上述级数收敛域为 $|z| \geqslant 1$, 则可得

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leqslant C \left| - \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \right| = \frac{C}{1+|z|}. \tag{A2}$$

至此, 引理 1 证明完毕. 引理 1 与文献 [16] 中定理 1.6 类似, 但二者收敛域不同.

附录 A2

证明 由 $E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A})$ 的定义, 即定义 1 可知有如下等式成立:

$$\|E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A})\| = \left\| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \right\|. \tag{A3}$$

在满足引理 1 的条件下, 对 (A3) 式应用引理 1 可以得到

$$\begin{aligned} \|E_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{A})\| &= \left\| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \right\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|-\boldsymbol{A}\|^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \leqslant \frac{C}{1+\|\boldsymbol{A}\|}. \end{aligned} \tag{A4}$$

至此, 定理 1 证明完毕.

[1] Wang J A, Liu H P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2265 (in Chinese) [王健安, 刘贺平 2010 物理学报 **59** 2265]

[2] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 (in Chinese) [蔡国梁, 黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]

[3] Yuan F G 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat* **17** 2602

[4] Li D, Deng L M, Du Y X, Yang Y Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 050502 (in Chinese) [李东, 邓良明, 杜永霞, 杨媛媛 2012 物理学报 **61** 050502]

[5] Podlubny I 1999 *IEEE Transactions on Automatic Control* **44** 208

[6] Batlle V F, Perez R R, Garcia F J, Rodriguez L S 2009 *Journal of Process Control* **19** 506

[7] Tang Y Q, Cui M Y, Hua C C, Li L X, Yang Y X 2012 *Expert Systems with Applications* **39** 6887

[8] Zhao H M, Nie B, Li W, Deng W 2012 *Journal of Convergence Information Technology* **7** 50

[9] Hammamci S E 2008 *Nonlinear Dynamic* **51** 329

[10] Xue D Y, Zhao C N 2007 *Control Theory and Appl.* **24** 771 (in Chinese) [薛定宇, 赵春娜 2007 控制理论与应用 **24** 771]

[11] Sun N, Zhang H G, Wang Z L 2010 *Journal of Zhejiang University* **44** 1288 (in Chinese) [孙宁, 张化光, 王智良 2010 浙江大学学报 **44** 1288]

[12] Sun N, Zhang H G, Wang Z L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050511 (in Chinese) [孙宁, 张化光, 王智良 2011 物理学报 **60** 050511]

[13] Zhang R X, Yang S P, Liu Y L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1549 (in Chinese) [张若洵, 杨世平, 刘永利 2010 物理学报 **59** 1549]

[14] Wang Z L, Zhang H G, Li Y F, Sun N 2010*IEEE Chinese Control and Decision Conference* Xuzhou, China, May 26–28, 2009 p3557

[15] Park J H 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **26** 959

[16] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego: Academic Press) p34

[17] Bellman R 1943 *Duke Math. J.* **10** 643

[18] Liang J W 2006 *Jouranl of China University of Petroleum***30** 154 (in Chinese) [梁景伟 2006 中国石油大学学报 **30** 154]

[19] Wang Y M 2005 *Matrix Analysis* (Beijing: China Machine Press) p82 (in Chinese) [王永茂 2005 矩阵分析 (北京: 机械工业出版社) 第 82 页]

Synchronization of fractional order hyperchaotic Chen system based on PI$^{\alpha}$ control*

Chen Zhi-Wang[1)2)] Wang Jing[1)2)†] Pang Shuang-Jie[3)]

1) (*Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004*, China*)

2) (*National Engineering Research Center for Equipment and Technology of Cold Strip Rolling, Qinhuangdao* 066004*, China*)

3) (*Qinhuangdao Institute of Technology, Qinhuangdao* 066100*, China*)

(Received 27 April 2012; revised manuscript received 6 June 2012)

Abstract

In this paper, a kind of PI$^{\alpha}$ controller is designed for the synchronization of fractional order hyperchaotic Chen system. The controller is designed according to the fractional order hyperchaotic Chen system. The stability of the system is proved by the improved double parameter Mittag-Leffler function estimate theorem and the extended Gronwall lemma. Furthermore, the condition of controller parameters is pointed out which makes the fractional order hyperchaotic Chen system synchronous. Numerical simulations are presented to verify the effectiveness of the method.

Keywords: fractional order hyperchaotic Chen system, chaotic synchronization, PI$^{\alpha}$ control

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq

∗ Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province, China(Grant No. F2010001323).

† E-mail: wj_wangjing93@yahoo.cn