

# 随机扰动下时滞复杂动力网络的一致性\*

柯超 王志明 涂俐兰†

(冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室, 武汉科技大学, 武汉 430081)

(2012年6月2日收到; 2012年7月18日收到修改稿)

研究了随机扰动下一般时滞复杂动力网络的一致性问题, 此复杂动力网络不仅具有随机扰动而且时变时滞同时出现在耦合项和节点系统中, 所以这样的网络更具有一般性. 基于随机 Lyapunov 稳定性理论、线性反馈控制理论和线性矩阵不等式, 从理论上提出了此网络各个节点与孤立系统达到时滞无关和时滞相关一致性的充分条件. 最后的数值模拟验证了理论结果的正确性和有效性.

**关键词:** 随机扰动, 时滞复杂动力网络, 一致性, 线性反馈控制

**PACS:** 05.45.Xt

**DOI:** 10.7498/aps.62.010508

## 1 引言

随着人类社会大幅度迈入信息网络时代, 日常生活中随处都可以见到结构复杂的网络, 例如万维网、因特网、人际关系网、食物链网、新陈代谢网、电力网等. 尽管这些网络看上去各不相同, 但越来越多的研究表明它们有着令人吃惊的相似之处<sup>[1-3]</sup>, 而复杂网络就是用来刻画各种不同网络拓扑结构与动力学特性的一种有力工具, 因此复杂网络吸引了越来越多的来自不同领域的专家学者的关注, 且已广泛应用于不同的领域<sup>[4-8]</sup>.

研究复杂网络的终极目标之一是理解网络拓扑结构对物理过程的影响, 特别地, 研究在网络拓扑结构预知条件下的网络同步与控制行为就是其中一项重要的课题. 由于同步行为在实际系统中是一个非常普遍的现象, 所以如何控制复杂动力网络达到同步吸引了许多的关注与研究. 例如 Wang 和 Chen<sup>[9,10]</sup> 就两种特殊的复杂网络即小世界网络和无标度网络的同步问题进行了详细的研究, Pecora 和 Carrol<sup>[11]</sup> 研究了线性耦合网络的同步稳定问题.

事实上, 由于传播速度的物理限制和网络拥塞的存在, 复杂网络在传输和响应的过程中必然要考虑到时滞. 时滞可能会导致更复杂的网络行

为, 如振荡和不稳定性. 在大量的文献中, 时滞在耦合项中时常被考虑<sup>[12-16]</sup>, 在节点系统中也得到了关注<sup>[17-20]</sup>. 例如 Liu 和 Chen<sup>[12]</sup> 考虑了耦合时滞复杂网络的指数同步, Zhao 和 Lu<sup>[19]</sup> 研究了时滞存在于节点系统中的复杂网络的牵制控制, 然而考虑同时出现在耦合项和节点系统中的文献却比较少<sup>[20]</sup>. 在本文中, 考虑时滞同时存在于耦合项和节点系统中的复杂动力网络的一致性问题, 并且假定两个时滞不仅不相等, 而且是时变的. 本文研究时滞无关和时滞相关的同步问题, 因为有些网络在某种条件下的同步并不依赖于时滞, 这样的网络在任何的时滞下都能够达到同步, 即为时滞无关. 而有的网络的同步行为则对时滞的变化极其敏感, 所以需要知道网络在什么条件下, 时滞为多少才能达到同步, 此为时滞相关.

在现实世界中, 各种网络不是孤立地生存在社会中, 当然就存在着扰动, 比如由于随机波动所带来的信号传输就是一个有噪声的过程, 所以在分析复杂网络的动力学行为时, 必然要考虑到随机扰动. 随机扰动的存在会使得系统出现不稳定且难以控制等现象<sup>[20-22]</sup>, 所以在随机扰动下复杂动力网络的一致性控制中必须考虑如何减少扰动的影响.

本文研究随机扰动下一般时滞复杂动力网络的一致性问题, 提出此网络各个节点与孤立系统达

\* 国家自然科学基金(批准号: 60904060)和冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室开放基金(批准号: C201010)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: tulilan2002@163.com

到时滞无关和时滞相关一致性的充分条件. 由于就本文考虑的复杂网络而言, 不仅考虑具有随机扰动而且时变时滞同时出现在耦合项和节点系统中, 所以研究更具有代表性.

本文结构如下: 第 2 节提出随机扰动下时滞复杂动力网络的模型以及必要的预备知识; 第 3 节具体研究随机扰动下时滞复杂动力网络的一致性问题, 从而提出此网络各个节点与孤立系统达到时滞无关和时滞相关一致性的充分条件; 第 4 节通过数值模拟验证提出的理论结果的正确性和有效性; 第 5 节总结.

## 2 模型和预备知识

考虑一个含有  $N$  个相同的线性耦合节点的随机扰动下的时滞复杂动力网络, 其状态方程可以描述为

$$\begin{aligned} dx_i(t) = & \left[ f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) \right. \\ & \left. + c \sum_{j=1}^N c_{ij} A x_j(t - \tau_2(t)) \right] dt \\ & + H(t, x_i(t) - s(t), x_i(t - \tau_1(t)) \\ & - s(t - \tau_1(t)), x_i(t - \tau_2(t)) \\ & - s(t - \tau_2(t))) dW(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N, x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in \mathbf{R}^n$  是第  $i$  个节点的状态向量,  $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是非线性函数,  $\tau_1(t)$  和  $\tau_2(t)$  分别是时变的节点时滞和耦合时滞,  $c$  是网络的耦合强度,  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{N \times N}$  是外部耦合矩阵. 在本文中, 要求  $\mathbf{C}$  满足条件:

$$c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是内部耦合矩阵,  $H$  是线性或非线性函数,  $W(t)$  是一维标准 Wiener 随机过程,  $s(t)$  是孤立节点系统的状态, 它满足

$$\dot{s}(t) = f(s(t), s(t - \tau_1(t))). \quad (2)$$

**注 1** 我们的目标是孤立节点系统状态  $s(t)$ , 其中  $s(t)$  可以是一个平衡点、周期轨、拟周期轨, 或者混沌轨道.

这里, 向量  $\mathbf{x}(t)$  的范数  $\|\cdot\|$  定义为

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t)}.$$

在给出主要结果之前, 先介绍几个假设和引理.

**假设 1(A1)** 假设函数  $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau_1(t)))$  满足 Lipschitz 条件, 即对于任意的  $x_1(t), x_2(t) \in \mathbf{R}^n$ , 存在适当维数的实常数矩阵  $\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1$ , 使得

$$\begin{aligned} & \|f(x_1(t), x_1(t - \tau_1(t))) - f(x_2(t), x_2(t - \tau_1(t)))\| \\ & \leq \|\mathbf{L}_0(x_1(t) - x_2(t))\| \\ & \quad + \|\mathbf{L}_1(x_1(t - \tau_1(t)) - x_2(t - \tau_1(t)))\|. \end{aligned}$$

**假设 2(A2)** 假定对于任意的  $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^n$ , 使得下式成立:

$$\begin{aligned} & H(t, \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t), \mathbf{x}(t - \tau_1(t)) \\ & - \mathbf{y}(t - \tau_1(t)), \mathbf{x}(t - \tau_2(t)) - \mathbf{y}(t - \tau_2(t))) \\ & \leq \|\mathbf{L}_2(\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t))\| \\ & \quad + \|\mathbf{L}_3(\mathbf{x}(t - \tau_1(t)) - \mathbf{y}(t - \tau_1(t)))\| \\ & \quad + \|\mathbf{L}_4(\mathbf{x}(t - \tau_2(t)) - \mathbf{y}(t - \tau_2(t)))\|, \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3, \mathbf{L}_4$  是适当维数的实常数矩阵.

**假设 3(A3)**  $\tau_i(t) (i = 1, 2)$  是可微的函数, 满足

$$0 \leq \dot{\tau}_1(t) \leq \varepsilon < 1, \quad 0 \leq \dot{\tau}_2(t) \leq \delta < 1,$$

显然, 如果时滞  $\tau_i(t)$  是恒定的, 这个假设肯定能保证.

**引理 1<sup>[23]</sup>** 对于任意的向量  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ , 存在一个正定的矩阵  $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 使得下面的矩阵不等式成立:

$$2\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y}.$$

在本文中, 我们考虑的是一个含有  $N$  个相同节点的时滞复杂动力网络在随机扰动下的一致性问題, 但是我们必须意识到随机扰动和时滞的存在会使得复杂网络出现不稳定, 所以我们将为节点设置控制器, 通过控制使得网络各个节点与孤立系统达到一致性, 则受控网络的状态方程可以描述为

$$\begin{aligned} dx_i(t) = & \left[ f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) \right. \\ & \left. + c \sum_{j=1}^N c_{ij} A x_j(t - \tau_2(t)) + U_i \right] dt \\ & + H(t, x_i(t) - s(t), x_i(t - \tau_1(t)) \\ & - s(t - \tau_1(t)), x_i(t - \tau_2(t)) \\ & - s(t - \tau_2(t))) dW(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $U_i \in \mathbf{R}^n$  是待设计的控制器.

### 3 主要结果

在本节,我们将提出复杂动力网络 (1) 在线性反馈控制下的一致性准则. 正如我们所知道的, 在该复杂网络中耦合项和节点系统中均存在时滞, 所以我们不得不考虑他们的作用与影响. 故我们将提出两种不同的一致性充分条件: 一种是时滞相关的, 另一种是时滞无关的.

首先, 通过线性反馈的作用, 受控网络 (3) 可以描述为:

$$\begin{aligned} dx_i(t) = & \left[ f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) + c \sum_{j=1}^N c_{ij} A x_j(t - \tau_2(t)) \right. \\ & - d_i(x_i(t) - s(t)) - k_i(x_i(t - \tau_1(t)) \\ & \left. - s(t - \tau_1(t))) \right] dt + H(t, x_i(t) \\ & - s(t), x_i(t - \tau_1(t)) - s(t - \tau_1(t)), x_i(t - \tau_2(t)) \\ & - s(t - \tau_2(t))) dW(t), \\ & i=1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

定义误差向量为

$$e_i(t) = x_i(t) - s(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

从而受控网络 (4) 在线性反馈控制下的误差系统可以描述为

$$\begin{aligned} de_i(t) = & \left[ f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) - f(s(t), s(t - \tau_1(t))) \right. \\ & \left. + c \sum_{j=1}^N c_{ij} A e_j(t - \tau_2(t)) \right. \\ & \left. - d_i e_i(t) - k_i e_i(t - \tau_1(t)) \right] dt \\ & + H(t, e_i(t), e_i(t - \tau_1(t)), e_i(t - \tau_2(t))) dW(t), \\ & i=1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

所以, 复杂动力网络 (1) 的一致性就转化为误差系统 (6) 在零点达到均方渐近稳定的问题.

我们先来考虑复杂网络 (1) 达到一致性的时滞无关的充分条件, 若该条件能够成立, 对于复杂网络的研究具有重要的意义, 可以不用考虑时滞的存在及大小对网络动力学行为的影响.

**定理 1** 假设 (A1) 和 (A2) 成立, 若存在正定的对称矩阵  $P \in R^{n \times n}$  和矩阵  $Q \in R^{n \times n}$ , 正数  $d_i, k_i$  使得:

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 2\lambda L_0^T L_0 + P - 2d_i P + 3\lambda L_2^T L_2 & -k_i P & 0 \\ -k_i P & 2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3 & 0 \\ 0 & 0 & c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4 \end{pmatrix} < 0,$$

则误差系统 (6) 在零点是均方渐近稳定的.

**证明** 构造 Lyapunov 函数如下:

$$V = \sum_{i=1}^N e_i^T(t) P e_i(t),$$

对  $V$  求微分, 并利用伊藤公式, 有

$$\begin{aligned} dV = & \sum_{i=1}^N de_i^T(t) \cdot P e_i(t) + \sum_{i=1}^N e_i^T(t) P \cdot de_i(t) = \sum_{i=1}^N \left\{ [f^T(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) - f^T(s(t), s(t - \tau_1(t)))] P e_i(t) \right. \\ & \left. + e_i^T(t) P [f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) - f(s(t), s(t - \tau_1(t)))] \right\} dt \\ & + \left[ c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} e_j^T(t - \tau_2(t)) A^T P e_i(t) + c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} e_i^T(t) P A e_j(t - \tau_2(t)) \right] dt \\ & - \left[ 2 \sum_{i=1}^N d_i e_i^T(t) P e_i(t) + \sum_{i=1}^N k_i e_i^T(t - \tau_1(t)) P e_i(t) + \sum_{i=1}^N k_i e_i^T(t) P e_i(t - \tau_1(t)) \right] dt \\ & + \sum_{i=1}^N \left[ H^T(t, e_i(t), e_i(t - \tau_1(t)), e_i(t - \tau_2(t))) P H(t, e_i(t), e_i(t - \tau_1(t)), e_i(t - \tau_2(t))) dt \right. \\ & \left. + 2e_i^T(t) P H(t, e_i(t), e_i(t - \tau_1(t)), e_i(t - \tau_2(t))) dW(t) \right]. \end{aligned}$$

为了更好地说明证明过程,下面将从三部分分别考虑,并且在整个证明中始终假设  $\lambda$  为  $\mathbf{P}$  的最大特征值.

i) 根据 (A1), 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left\{ [f^T(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) - f^T(s(t), s(t - \tau_1(t)))] \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t) + \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} [f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) \right. \\ & \quad \left. - f(s(t), s(t - \tau_1(t)))] \right\} \leq \sum_{i=1}^N \left[ f^T(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) - f^T(s(t), s(t - \tau_1(t))) \right] \mathbf{P} [f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) \\ & \quad - f(s(t), s(t - \tau_1(t)))] + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t) \leq \sum_{i=1}^N \lambda \left[ f^T(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) - f^T(s(t), s(t - \tau_1(t))) \right] \\ & \quad \times \left[ f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) - f(s(t), s(t - \tau_1(t))) \right] + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t) \\ & = \sum_{i=1}^N \lambda \cdot \|f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) - f(s(t), s(t - \tau_1(t)))\|^2 + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t) \\ & \leq \sum_{i=1}^N \lambda (\|\mathbf{L}_0 \mathbf{e}_i(t)\| + \|\mathbf{L}_1 \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t))\|)^2 + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t) \\ & = \sum_{i=1}^N \lambda (\|\mathbf{L}_0 \mathbf{e}_i(t)\|^2 + \|\mathbf{L}_1 \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t))\|^2 + 2\|\mathbf{L}_0 \mathbf{e}_i(t)\| \cdot \|\mathbf{L}_1 \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t))\|) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t) \\ & \leq \sum_{i=1}^N \lambda \left( \|\mathbf{L}_0 \mathbf{e}_i(t)\|^2 + \|\mathbf{L}_1 \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t))\|^2 + 2 \cdot \frac{\|\mathbf{L}_0 \mathbf{e}_i(t)\|^2 + \|\mathbf{L}_1 \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t))\|^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t) \\ & = 2\lambda \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{L}_0^T \mathbf{L}_0 \mathbf{e}_i(t) + 2\lambda \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t - \tau_1(t)) \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1 \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t)) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t). \end{aligned}$$

ii) 由引理 1, 我们有

$$\begin{aligned} & c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{e}_j^T(t - \tau_2(t)) \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t) + c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{e}_j(t - \tau_2(t)) \\ & \leq c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} (\mathbf{e}_j^T(t - \tau_2(t)) \mathbf{Q} \mathbf{e}_j(t - \tau_2(t)) + \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t)) \\ & = c \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N c_{ji} \mathbf{e}_i^T(t - \tau_2(t)) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t)) \right) + c \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t) \right) \\ & = \sum_{i=1}^N \left( c \sum_{j=1}^N c_{ji} \right) \mathbf{e}_i^T(t - \tau_2(t)) \mathbf{Q} \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t)). \end{aligned}$$

iii) 根据 (A2), 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N H^T(t, \mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t)), \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t))) \mathbf{P} \mathbf{H}(t, \mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t)), \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t))) \\ & \leq \sum_{i=1}^N \lambda H^T(t, \mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t)), \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t))) \cdot H(t, \mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t)), \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t))) \\ & = \sum_{i=1}^N \lambda \cdot \left\| H(t, \mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t)), \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t))) \right\|^2 \leq \sum_{i=1}^N \lambda \cdot (\|\mathbf{L}_2 \mathbf{e}_i(t)\| + \|\mathbf{L}_3 \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t))\| + \|\mathbf{L}_4 \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t))\|)^2 \\ & = \sum_{i=1}^N \lambda (\|\mathbf{L}_2 \mathbf{e}_i(t)\|^2 + \|\mathbf{L}_3 \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t))\|^2 + \|\mathbf{L}_4 \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t))\|^2 \\ & \quad + 2\|\mathbf{L}_2 \mathbf{e}_i(t)\| \cdot \|\mathbf{L}_3 \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t))\| + 2\|\mathbf{L}_2 \mathbf{e}_i(t)\| \cdot \|\mathbf{L}_4 \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t))\| + 2\|\mathbf{L}_3 \mathbf{e}_i(t - \tau_1(t))\| \cdot \|\mathbf{L}_4 \mathbf{e}_i(t - \tau_2(t))\|) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^N 3\lambda(e_i^T(t)L_2^T L_2 e_i(t) + e_i^T(t - \tau_1(t))L_3^T L_3 e_i(t - \tau_1(t)) + e_i^T(t - \tau_2(t))L_4^T L_4 e_i(t - \tau_2(t))),$$

所以, 有

$$\begin{aligned} dV \leq & \sum_{i=1}^N [e_i^T(t)(2\lambda L_0^T L_0 + P - 2d_i P + 3\lambda L_2^T L_2)e_i(t) + e_i^T(t - \tau_1(t))(2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3)e_i(t - \tau_1(t)) \\ & + e_i^T(t - \tau_2(t))\left(c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4\right)e_i(t - \tau_2(t)) - e_i^T(t)k_i P e_i(t - \tau_1(t)) - e_i^T(t - \tau_1(t))k_i P e_i(t)] dt \\ & + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) P H(t, e_i(t), e_i(t - \tau_1(t)), e_i(t - \tau_2(t))) dW(t). \end{aligned}$$

令

$$dV \leq \sum_{i=1}^N LV(t, e(t))_i dt + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) P H(t, e_i(t), e_i(t - \tau_1(t)), e_i(t - \tau_2(t))) dW(t),$$

其中

$$\begin{aligned} LV(t, e(t))_i = & e_i^T(t)(2\lambda L_0^T L_0 + P - 2d_i P + 3\lambda L_2^T L_2)e_i(t) - e_i^T(t)k_i P e_i(t - \tau_1(t)) - e_i^T(t - \tau_1(t))k_i P e_i(t) \\ & + e_i^T(t - \tau_1(t))(2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3)e_i(t - \tau_1(t)) + e_i^T(t - \tau_2(t))\left(c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4\right)e_i(t - \tau_2(t)). \end{aligned}$$

令

$$E_1 = (e_i^T(t), e_i^T(t - \tau_1(t)), e_i^T(t - \tau_2(t)))^T \in \mathbf{R}^{3n},$$

所以

$$LV(t, e(t))_i = E_1^T \Theta_1 E_1,$$

其中

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 2\lambda L_0^T L_0 + P - 2d_i P + 3\lambda L_2^T L_2 & -k_i P & 0 \\ -k_i P & 2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3 & 0 \\ 0 & 0 & c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

当不等式

$$\Theta_1 < 0 \quad (8)$$

成立时, 我们有

$$LV(t, e(t))_i < 0.$$

根据随机 Lyapunov 稳定性理论, 误差系统 (6) 在零点达到均方渐近稳定, 从而复杂动力网络 (1) 在线性反馈控制下达到均方渐近一致.

由于条件 (8) 不是线性矩阵不等式, 它是很难验证的条件, 所以我们需要给出它的另外一种表达形式.

设  $d_i P = X$ ,  $k_i P = Y$ , 则  $d_i = P^{-1} X$ ,  $k_i = P^{-1} Y$  ( $X, Y$  都是适当维数的矩阵), 不等式 (8) 可以改写为

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 2\lambda L_0^T L_0 + P - 2X + 3\lambda L_2^T L_2 & -Y & 0 \\ -Y & 2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3 & 0 \\ 0 & 0 & c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4 \end{pmatrix} < 0, \quad (9)$$

不等式 (9) 是一个线性矩阵不等式, 而且很容易由 Matlab 中的 LMI 工具箱来计算.

**注 2** 根据定理 1, 如果复杂动力网络 (1) 有固定的结构和耦合强度, 那么矩阵  $\Theta_1$  就只与  $d_i, k_i$  及  $P, Q$  相关, 所以能很容易确定控制网络 (1) 达到一致性的反馈增益  $d_i, k_i$ .

定理 1 提供了网络 (1) 达到一致性的时滞无关的充分条件, 但实际中的时滞网络的一致性往往与时滞相关, 所以为了说明问题, 下面定理 2 提出了时滞相关的一致性充分条件.

**定理 2** 假设 (A1), (A2) 和 (A3) 成立, 若存在正定的对称矩阵  $P \in R^{n \times n}$  和矩阵  $Q \in R^{n \times n}$ , 常数  $d_i, k_i > 0$  使得

$$\begin{pmatrix} 2\lambda L_0^T L_0 + P - 2d_i P + 3\lambda L_2^T L_2 + \frac{2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3}{1-\varepsilon} + \frac{c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4}{1-\delta} & -k_i P \\ -k_i P & 0 \end{pmatrix} < 0,$$

则复杂动力网络 (1) 与孤立系统是均方渐近一致的.

**证明** 构造 Lyapunov 函数如下:

$$\begin{aligned} V = & \sum_{i=1}^N e_i^T(t) P e_i(t) + \frac{1}{1-\varepsilon} \int_{t-\tau_1(t)}^t \sum_{i=1}^N e_i^T(\theta) (2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3) e_i(\theta) d\theta \\ & + \frac{1}{1-\delta} \int_{t-\tau_2(t)}^t \sum_{i=1}^N e_i^T(\theta) \left( c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4 \right) e_i(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

对  $V$  求微分, 类似于定理 1, 有

$$\begin{aligned} dV \leq & \sum_{i=1}^N LV(t, e(t))_1 dt + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) PH(t, e_i(t), e_i(t-\tau_1(t)), e_i(t-\tau_2(t))) dW(t) \\ & + \left[ \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) (2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3) e_i(t) - \frac{1-\dot{\tau}_1(t)}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_1(t)) (2\lambda L_1^T L_1 \right. \\ & + 3\lambda L_3^T L_3) e_i(t-\tau_1(t)) + \frac{1}{1-\delta} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \left( c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4 \right) e_i(t) \\ & \left. - \frac{1-\dot{\tau}_2(t)}{1-\delta} \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau_2(t)) \left( c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4 \right) e_i(t-\tau_2(t)) \right] dt. \end{aligned}$$

根据引理 1, 关于  $LV(t, e(t))_1$  有

$$\begin{aligned} LV(t, e(t))_1 = & e_i^T(t) (2\lambda L_0^T L_0 + P - 2d_i P + 3\lambda L_2^T L_2) e_i(t) - e_i^T(t) k_i P e_i(t-\tau_1(t)) - e_i^T(t-\tau_1(t)) k_i P e_i(t) \\ & + e_i^T(t-\tau_1(t)) (2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3) e_i(t-\tau_1(t)) \\ & + e_i^T(t-\tau_2(t)) \left( c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4 \right) e_i(t-\tau_2(t)). \end{aligned}$$

另外由于 (A3), 有  $1 \leq \frac{1-\dot{\tau}_1(t)}{1-\varepsilon}, 1 \leq \frac{1-\dot{\tau}_2(t)}{1-\delta}$ , 从而

$$\begin{aligned} dV \leq & \sum_{i=1}^N \left[ e_i^T(t) \left( 2\lambda L_0^T L_0 + P - 2d_i P + 3\lambda L_2^T L_2 + \frac{2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3}{1-\varepsilon} + \frac{c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4}{1-\delta} \right) e_i(t) \right. \\ & \left. - e_i^T(t) k_i P e_i(t-\tau_1(t)) - e_i^T(t-\tau_1(t)) k_i P e_i(t) \right] dt \\ & + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) PH(t, e_i(t), e_i(t-\tau_1(t)), e_i(t-\tau_2(t))) dW(t). \end{aligned}$$

令

$$dV \leq \sum_{i=1}^N LV(t, e(t))_2 dt + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) PH(t, e_i(t), e_i(t-\tau_1(t)), e_i(t-\tau_2(t))) dW(t),$$

其中

$$LV(t, e(t))_2 = -e_i^T(t)k_i P e_i(t - \tau_1(t)) - e_i^T(t - \tau_1(t))k_i P e_i(t) + e_i^T(t) \left( 2\lambda L_0^T L_0 + P - 2d_i P + 3\lambda L_2^T L_2 + \frac{2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3}{1 - \varepsilon} + \frac{c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4}{1 - \delta} \right) e_i(t).$$

令  $E_2 = (e_i^T(t), e_i^T(t - \tau_1(t)))^T \in \mathbf{R}^{2n}$ , 所以  $LV(t, e(t))_2 = E_2^T \Theta_2 E_2$ , 其中

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda L_0^T L_0 + P - 2d_i P + 3\lambda L_2^T L_2 + \frac{2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3}{1 - \varepsilon} + \frac{c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4}{1 - \delta} & -k_i P \\ -k_i P & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

当不等式

$$\Theta_2 < 0, \quad (11)$$

根据随机李雅普诺夫稳定性理论, 误差系统 (6) 达到均方渐近稳定, 从而复杂动力网络 (1) 在线性反馈控制下是均方渐近一致的.

设  $d_i P = X, k_i P = Y$ , 则  $d_i = P^{-1} X, k_i = P^{-1} Y$ , 条件 (11) 可以改写为线性矩阵不等式为

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda L_0^T L_0 + P - 2X + 3\lambda L_2^T L_2 + \frac{2\lambda L_1^T L_1 + 3\lambda L_3^T L_3}{1 - \varepsilon} + \frac{c \sum_{j=1}^N c_{ji} Q + 3\lambda L_4^T L_4}{1 - \delta} & -Y \\ -Y & 0 \end{pmatrix} < 0, \quad (12)$$

则不等式 (12) 可以很容易的由 Matlab 中的 LMI 工具箱来计算.

### 4 数值模拟

为了说明上节中所提出的理论结果的有效性, 本节将主要用数值模拟来验证定理 2. 在本节, 考虑一个含有 100 个节点的随机扰动下的时滞复杂动力网络, 网络中的节点系统是 Lorenz 系统, 而且网络为无尺度网络, 其平均路径长度为 2.69653, 平均聚类系数为 0.0625798, 平均度为 5.8,  $A$  是单位矩阵,  $c = 0.1$ . 则节点系统可表示为

$$\dot{s}(t) = f(s(t)) = \begin{pmatrix} -10s_1(t) + 10s_2(t) \\ 28s_1(t) - s_2(t) - s_1(t)s_3(t) \\ -8/3s_3(t) + s_1(t)s_2(t) \end{pmatrix},$$

其中  $s(t) = (s_1(t), s_2(t), s_3(t))^T$ .

为简单起见, 可令

$$H \left( t, x_i(t) - s(t), x_i(t - \tau_1(t)) - s(t - \tau_1(t)), x_i(t - \tau_2(t)) - s(t - \tau_2(t)) \right) = (0.1(x_{i1}(t) - s_1(t)), 0.2(x_{i2}(t - \tau_1(t)))$$

$$\begin{aligned} & -s_2(t - \tau_1(t))), 0.3(x_{i3}(t - \tau_2(t)) \\ & -s_3(t - \tau_2(t))) \end{pmatrix}^T$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 60 \\ 60 & 60 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix},$$

特别地, 令  $Q$  为单位矩阵.

下面考虑两种情况: (1) 设  $\tau_1(t) = 0.04, \tau_2(t) = 0.08$ . 图 1 是此时的随机扰动下时滞复杂动力网络 (1) 的误差轨迹图.

从图 1 中, 可知在无控制的情况下, 随机扰动下时滞复杂动力网络的误差轨迹图变化很大, 即该复杂动力网络并不能达到一致性. 故接下来我们考

虑存在控制的情况下的复杂动力网络是否能达到一致性的情况. 根据定理 2, 利用 Matlab 中的 LMI 工具, 可以确定出正定矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 2.4269 \times 10^3 & 1.1697 \times 10^3 & 1.1704 \times 10^3 \\ 1.1697 \times 10^3 & 999.0777 & 256.3277 \\ 1.1704 \times 10^3 & 256.3277 & 999.5360 \end{pmatrix}$$

以及正数  $d_i = 2, k_i = 3$ , 使得满足定理 2 中的条件. 同时, 利用 Matlab, 可以发现在这种控制器下, 复杂网络 (1) 的误差轨迹很快趋于 0, 如图 2 所示.

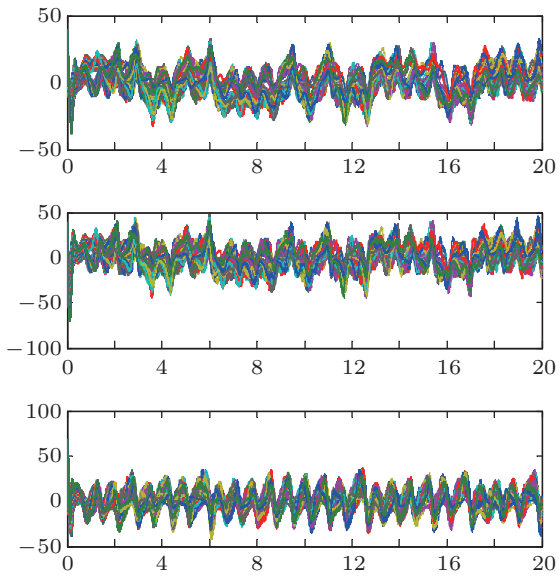


图 1 复杂动力网络的误差轨迹图 ( $U_i = 0, \tau_1(t) = 0.04, \tau_2(t) = 0.08$ )

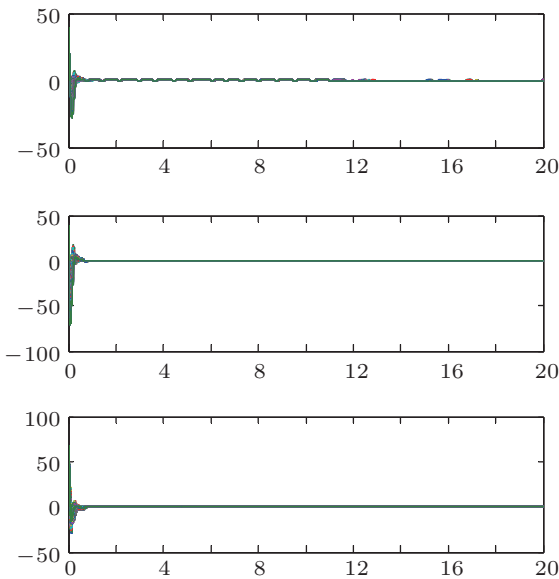


图 2 复杂动力网络的一致性误差轨迹图 ( $U_i \neq 0, \tau_1(t) = 0.04, \tau_2(t) = 0.08$ )

(2) 设  $\tau_1(t) = 0.16, \tau_2(t) = 0.2$ . 图 3 是此时的时滞复杂动力网络的误差轨迹图. 从图 3 中, 依然可知在无控制的情况下, 随机扰动下时滞复杂动力网络的误差轨迹图变化很大. 同样根据定理 2, 在上述相同控制器的作用下, 复杂动力网络的一致性误差轨迹图如图 4 所示, 此时网络中的各个节点并没有达到一致.

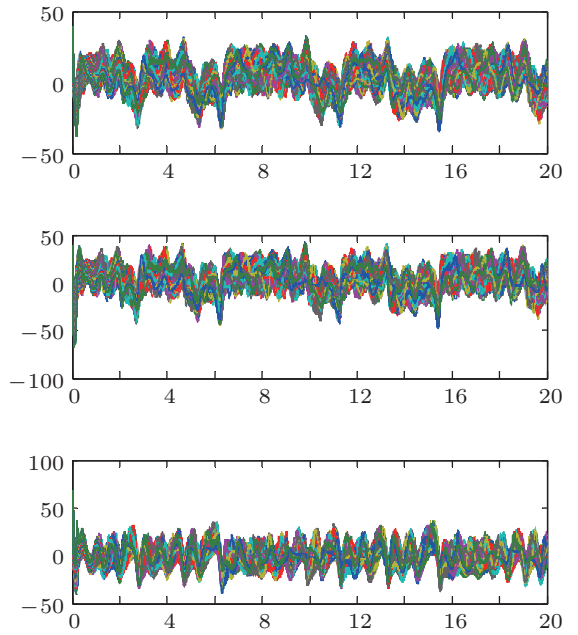


图 3 复杂动力网络的误差轨迹图 ( $U_i = 0, \tau_1(t) = 0.16, \tau_2(t) = 0.2$ )

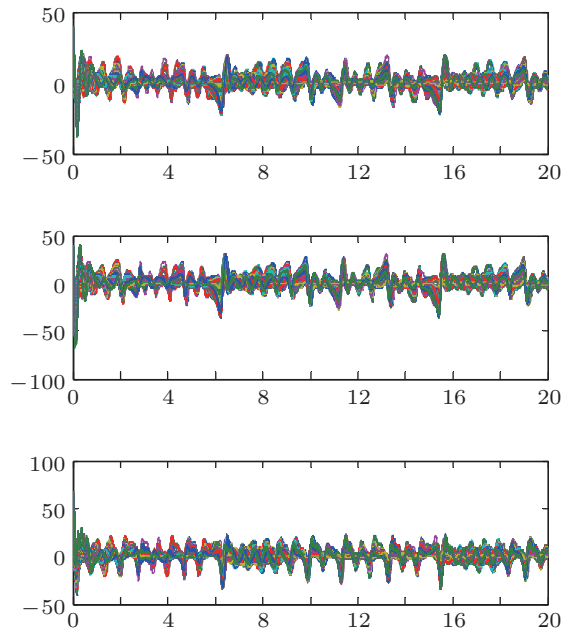


图 4 复杂动力网络的一致性误差轨迹图 ( $U_i \neq 0, \tau_1(t) = 0.16, \tau_2(t) = 0.2$ )



所以,通过数值模拟(1)可知,在一定的时滞大小下,利用定理2,设置适当的控制器,可以使得网络在随机扰动和时滞同时存在的情况下达到完全一致.进一步地,若改变时滞,在其他参数相同的情况下,数值模拟(2)说明了所提出的定理2是与时滞相关的,这也证明了本文提出的理论结果的正确性和有效性.

## 5 结论

本文主要研究了随机扰动下一般时滞复杂动

力网络的一致性问题,提出了此网络各个节点与孤立系统达到时滞无关和时滞相关一致性的充分条件.由于就本文考虑的复杂网络而言,不仅考虑具有随机扰动而且时变时滞同时出现在耦合项和节点系统中,所以研究更具有代表性.利用随机李雅普诺夫稳定性理论、线性反馈控制理论和线性矩阵不等式,通过设置控制器,本文从理论上提出了网络达到一致性的充分条件.最后,通过一个具体的例子,说明了所提出的策略的正确性和有效性.

- 
- [1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **391** 440
  - [2] Barabasi A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
  - [3] Strogatz S H 2001 *Nature* **410** 268
  - [4] Satorras R P, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **14** 3200
  - [5] Ebel H, Mielsch L I, Bornholdt 2002 *Phys. Rev. E* **66** 035103
  - [6] Zhang J, Small M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 238
  - [7] Zhou J, Chen T, Xiang L 2005 *Circuits Syst. Signal Proc.* **24** 599
  - [8] Bennett M V L, Zukin R S 2004 *Neuron* **41** 495
  - [9] Wang X F, Chen G 2002 *Internat. J. Bifur. Chaos* **12** 187
  - [10] Wang X F, Chen G 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **49** 54
  - [11] Pecora L M, Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109
  - [12] Liu X W, Chen T P 2007 *Physica A* **381** 82
  - [13] Pan H, Nian X H 2010 *Acta Automat. Sin.* **36**
  - [14] Zhang J, Liu B 2010 *Applied Mechanics and Materials* **128-129** 946
  - [15] Wang Z D, Wang Y 2010 *IEEE Trans. Neural Networks* **21** 11
  - [16] Park P, Ko J W, Jeong C 2011 *Automatica* **47** 235
  - [17] Li C, Xu H, Liao X, Yu J 2004 *Physica A* **335** 359
  - [18] Wang W, Slotine J J E 2006 *IEEE Trans. Autom. Control* **51** 712
  - [19] Zhao J C, Lu J A, Zhang Q J 2009 *IEEE Trans. Circuits Syst. II Exp. Briefs* **56**
  - [20] Wang Y, Wang Z D 2008 *Phys. Lett. A* **372** 6066
  - [21] Yu W W, Chen G 2011 *Asian Journal of Control*. **13** 1
  - [22] Tu L L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 030504
  - [23] Lu J, Cao J 2007 *Physica A* **382** 672

# Consistency of a complex delayed dynamical network with stochastic disturbance\*

Ke Chao Wang Zhi-Ming Tu Li-Lan<sup>†</sup>

(Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

(Received 2 June 2012; revised manuscript received 18 July 2012)

## Abstract

This paper focuses on the consistency problem of a complex delayed dynamical network with stochastic disturbance. The complex network under consideration includes not only stochastic disturbance but also the varying time-delay which appear in the coupling term and the node system simultaneously. Therefore, such a network is more general. Based on the stochastic Lyapunov stability theory, linear feedback control and linear matrix inequality, some new asymptotic consistency sufficient conditions are established which guarantee the consistency for the nodes of this network and an isolated system in the delay-independent and delay-dependent levels. Finally illustrative simulation is provided to verify the correctness and effectiveness of the proposed scheme.

**Keywords:** stochastic disturbance, complex delayed dynamical network, consistency, linear feedback control

**PACS:** 05.45.Xt

**DOI:** 10.7498/aps.62.010508

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60904060) and the Open Foundation of Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process, China (Grant No. C201010).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: tulilan2002@163.com