

# 基于有向网络的 Email 病毒传播模型 及其震荡吸引子研究\*

邓奇湘<sup>1)</sup> 贾贞<sup>1)2)†</sup> 谢梦舒<sup>1)</sup> 陈彦飞<sup>1)</sup>

1) (桂林理工大学理学院, 桂林 541004)

2) (广西空间信息与测绘重点实验室, 桂林 541004)

(2012 年 4 月 15 日收到; 2012 年 8 月 2 日收到修改稿)

基于有向 Email 网络和 Email 病毒传播特点, 运用平均场方法建立 Email 病毒传播的时滞微分方程模型, 研究 Email 病毒在有向网络中的震荡传播行为. 理论上给出了震荡解的全局吸引子存在的充要条件, 数值实验验证了吸引子的存在性和控制. 研究表明, 子图之间的传播概率决定吸引子的存在性, 而有效传播率影响吸引子的振幅, 因此这两个参数对于有效预测和控制 Email 病毒在网络上的传播规模具有重要意义.

**关键词:** 复杂网络, Email 病毒, 传播, 全局吸引子

**PACS:** 02.30.Hg, 02.60.cb

**DOI:** 10.7498/aps.62.020203

## 1 引言

Email 病毒与生物病毒在自复制和传播行为上是相似的, 因此运用平均场方法研究生物传染病传播行为的重要方法被广泛运用于研究 Email 病毒的传播行为. Newman 和 Watts 在 1999 年提出 NW 小世界网络模型的同时, 描述流行病在一个  $d$  维 NW 小世界网络上的传播过程<sup>[1]</sup>. Zhou 等人用平均场方法构建了 Email 病毒传播模型, 认为 Email 网络的拓扑结构对 Email 病毒的传播行为具有重要的影响<sup>[2]</sup>. 文献 [3] 总结了基于不同网络拓扑结构的 Email 病毒传播研究的许多重要进展. 目前, 对于 Email 病毒传播模型的研究与仿真绝大多数都是建立在无向网络之上, 如文献 [4] 研究的是 Email 病毒在小世界网络、随机图和无标度网络等无向网络上的传播模型及仿真. 然而, 正如文献 [5] 所指出, Email 病毒的传播可能引起网络结构的变化, 使一些具有无标度特性的网络失去无标度特性. 因此,

对于无向 Email 网络而言, 很多已有模型及其仿真存在明显的缺陷. 此外, 许多实际的传播过程都存在时延现象, 因此, 用时滞微分方程建立数学模型更符合 Email 病毒的传播规律<sup>[6-8]</sup>, 文献 [9] 运用 Moukarzel 的思想方法, 通过构建三个线性时滞微分方程研究了 SIS 模型在  $d$  维 NW 小世界网络上的传播过程<sup>[10,11]</sup>, 但文献 [9] 的时滞微分方程限制为线性关系, 显然不足以反映复杂网络上传播行为的复杂性和非线性特点. 本文针对上述不足, 结合实际的 Email 病毒传播特点, 构建了 Email 病毒在有向网络上传播的非线性时滞微分方程模型. 通过理论分析和具体实例的数值仿真, 验证了模型的动力系统存在全局震荡吸引子的充要条件, 并进一步探讨了全局吸引子与有效传播率  $\lambda$  及子图间的传播概率  $\mu$  之间的关系, 研究结果表明这两个参数共同制约吸引子的存在和波动幅度, 对于有效预测和控制 Email 病毒的传播规模具有重要意义.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61164020, 61004101)、广西自然科学基金 (批准号: 2011GXNSFA018147) 和广西空间信息与测绘重点实验室 (批准号: 1103108-24) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jijzzz0@163.com

## 2 Email 网络拓扑结构描述

Newman 与 Ebel 等人分析了电子邮件网络的实际拓扑结构, 最早建立有向电子邮件网络拓扑结构 [12], 但他们没有考虑网络连通性的影响, 由于 Email 病毒传播的显著特点是带病毒邮件通过被感染用户的 Email 地址簿来传播病毒, 因此, Email 病毒的传播具有明显的方向性. 本文在文献 [12] 的有向电子邮件网络拓扑结构基础上, 考虑网络的连通性, 建立如下有向 Email 网络: 记 Email 网络为一有向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中  $V$  是 Email 网络的节点集, 代表网络中 Email 用户集合;  $E$  为有向边集, 若节点  $v_j$  的 Email 地址出现在节点  $v_i$  的 Email 地址簿中, 则存在一条从节点  $v_i$  到节点  $v_j$  的有向边, 反之亦然. 图  $G$  的结构, 如图 1 所示.

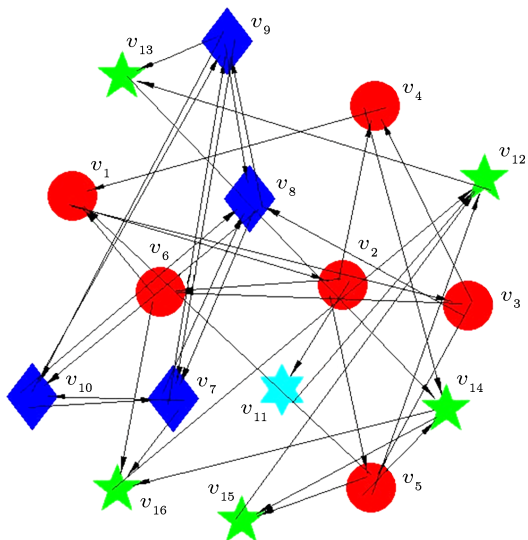


图 1 有向 Email 网络图  $G$  拓扑结构

记有向图  $G = \langle V, E \rangle$  的邻接矩阵为  $\mathfrak{R}_0(G) = (a_{ij})$ , 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{节点 } v_i \text{ 至 } v_j \text{ 存在有向边 } (i \neq j), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

以如图 1 所示的网络为例, 圆形节点  $v_4$  至  $v_1$  有连边, 圆形节点  $v_4$  与五角形节点  $v_{12}$  无边相连, 则  $v_{4,1} = 1, v_{4,12} = 0$ .

若节点  $v_{i+1}$  的 Email 地址出现在  $v_i$  的地址簿中 ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ), 同时节点  $v_1$  的 Email 地址出现在节点  $v_k$  的地址簿中; 则节点  $v_1$  上存在一条从节点  $v_1$  出发经过节点  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 再回到节点  $v_1$  的有向回路记为  $C_k: v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$ , 其

长度为  $k$ . 如图 1 所示, 三个圆形节点  $v_1, v_3, v_4$  与相应的有向边构成有向回路  $C_3: v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1$ . 显然, 有向回路  $C_k$  上所有的节点都是相互可达的. 由图论知识可知, 有向回路  $C_k$  必定是有向图  $G = \langle V, E \rangle$  里面某一强连通分支的一部分.

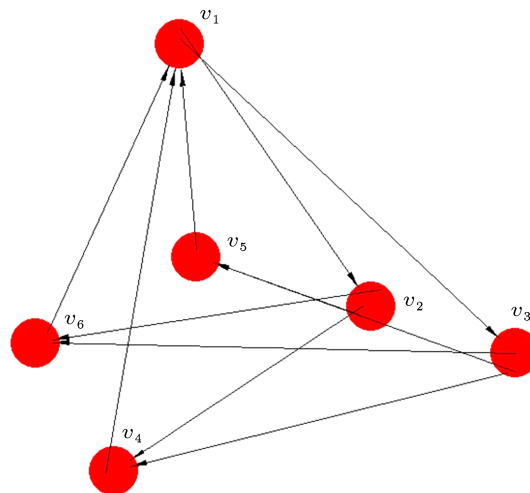


图 2 强连通分支子图  $G_1$  的拓扑结构

如图 2 所示, 上述有向回路  $C_3$  是图 1 中由所有圆形节点构成的强连通分支 (图 2) 的一条有向回路.

**定义 1** 若有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中存在有向回路的强连通分支, 称此强连通分支为多节点强连通分支; 不存在有向回路经过的节点  $v$  称为单节点强连通分支; 单节点强连通分支与多节点强连通分支统称为有向分支子图.

在图 1 所示的网络中, 六角形节点  $v_{11}$  是单节点强连通分支; 其他相同形状的节点构成的子图 (圆形、四角形、五角形) 分别构成 3 个多节点强连通分支.

由定义 1 可知, 有向图  $G = \langle V, E \rangle$  可以完全分解成若干个有向分支子图  $G_k = \langle V_k, E_k \rangle$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) 并且任意的两个有向分支子图  $G_i$  与  $G_j$  ( $i \neq j$ ) 之间一定不存在回路. 如图 1 所示, 有向图  $G$  可以完全分解成圆形节点构成的有向分支子图  $G_1$ , 四角形节点构成的有向分支子图  $G_2$ , 六角形节点构成的有向分支子图  $G_3$ , 五角形节点构成的有向分支子图  $G_4$ . 由于多节点强连通分支  $G_k = \langle V_k, E_k \rangle$  是强连通的, 其内部任意一个节点  $v_i$  必存在有向回路经过, 因此每个节点  $v_i$  都存在最小长度为  $L_i$  的最短有向回路, 并且必有整数  $L_i \geq 2$ , 而单节点强连通分支中仅有一个节点  $v_j$ , 显然不存

在有向回路, 故规定其最短有向回路的长度  $L_j = 0$ . 有向分支子图  $G_i$  中感染 Email 病毒的节点向自身所在的有向分支子图内部传播病毒的同时, 也顺着连接分支子图之间的有向边向  $G_i$  的外部扩散.

显然, 两个有向分支子图  $G_i$  与  $G_j$  ( $i \neq j$ ) 之间有向边的数目会影响 Email 病毒在这两个有向分支子图之间的传播效率. 正如文献 [13] 所指出的, 计算机病毒在网络上的传播行为与网络中节点的空间距离无关, 而与网络中节点的连通性有关. 因此, 当 Email 病毒在多节点强连通分支上传播时, 其内部的节点有可能被二次感染, 从而导致毒传播出现震荡, 进而引发整个 Email 网络上的病毒传播出现震荡行为.

考虑把有向分支子图  $G_k = \langle V_k, E_k \rangle$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) 中的节点集  $V_k$  收缩成一个新节点, 记为  $V_{k\text{comm}}$ . 以有向分支子图  $G_i$  (内部节点) 为起点到有向分支子图  $G_j$  (内部节点) 为终点的有向边总数目记为  $\chi_{ij}$  就得到一个新图  $H_0 = \langle V_{k\text{comm}}, E_{k\text{comm}} \rangle$ , 如图 3 所示. 其邻接矩阵  $\mathfrak{S}(H_0) = (h_{ij})$  的元素定义为

$$h_{ij} = \begin{cases} \chi_{ij}, & \text{节点 } V_{i\text{comm}} \text{ 至 } V_{j\text{comm}} \text{ 的有向边总数 } (i \neq j), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

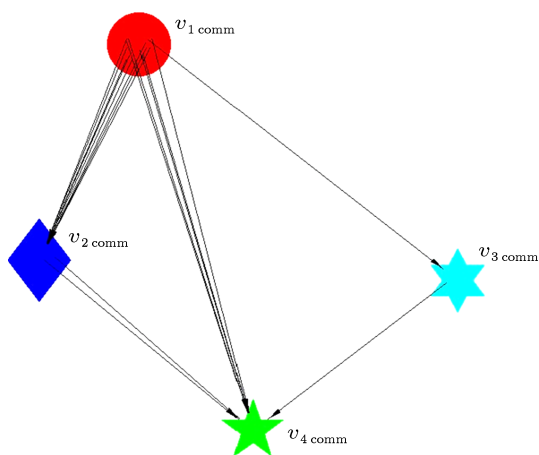


图 3 Email 网络  $G$  的收缩图  $H_0$

图 3 所示的图  $H_0$  称为 Email 网络  $G$  (图 1 所示) 的收缩图. 收缩图  $H_0$  所对应的邻接矩阵为

$$\mathfrak{S}(H_0) = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 Email 网络的收缩图  $H_0$  不存在有向回路, 因此, 一定存在置换矩阵  $P$ , 使得  $Q(q_{ij}) = P \times \mathfrak{S}(H_0) \times P^T$  是一个对角线上的元素全为零的上三角矩阵, 且由矩阵  $Q(q_{ij})$  的每一行进行归一化得到矩阵  $\bar{Q}(\bar{q}_{ij})$  为

$$\bar{q}_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{\sum_{j=1}^n q_{ij}}, & \sum_{j=1}^n q_{ij} > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

归一化矩阵  $\bar{Q}(\bar{q}_{ij})$  的元素表示 Email 病毒在各有向分支子图之间传播路径的权重.

在现实的 Email 网络中, 由于每个用户地址簿中的地址总数是有限的, 而且绝大部分是用户朋友的地址. 因此, 可以对 Email 网络的拓扑结构做如下合理的模型假设.

**假设 1** 用户节点与朋友节点所组成的局域 Email 网络可完全分解成若干个节点总数目是  $|V_k|$  的有向分支子图  $G_k = \langle V_k, E_k \rangle$ , 子图  $G_k$  的邻接矩阵记为  $\mathfrak{R}_k(G_k)$ .

**假设 2** 每个有向分支子图  $G_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) 内部存在最短有向回路, 长度记为  $L_{Gk}$ , 若子图  $G_k$  只有一个节点, 则  $L_{Gk} = 0$ .

若  $V_k > 1$ , 由于有向分支子图  $G_k$  是强连通的, 因此矩阵  $\mathfrak{R}_k(G_k)$  是不可约矩阵, 且矩阵  $\sum_{m=1}^{|V_k|} (\mathfrak{R}_k)^m$  是正矩阵, 由 Perron-Frobenius 定理 [14] 可知, 矩阵  $\mathfrak{R}_k$  置换相似于标准型矩阵  $B_k$  即  $B_k = P \times \mathfrak{R}_k \times P^T$ , 标准型矩阵  $B_k$  形式如下:

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{(LGk-1)LGk} \\ B_{LGk1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中, 矩阵  $P$  为置换矩阵, 矩阵  $B_k$  的主对角线上都是零方阵, 且矩阵  $\sum_{m=1}^{|V_k|} (B_k)^m$  是正矩阵.

综上所述, 有向网络中的 Email 病毒在两类路径上传播: 一类是有向分支子图内部的有向路径; 另一类是两个有向分支子图之间的有向路径.

综上分析, 有向 Email 网络图  $G = \langle V, E \rangle$  的邻接矩阵  $\mathfrak{R}_0(G) = (a_{ij})$  的构造算法如下:

**步骤 1** 运用数学软件生成标准型矩阵  $B_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) 及元素为 0 与 1 的矩阵  $b_{ij}$  这里, 每个标

准型矩阵  $B_k$  各对应一个有向分支子图, 每个矩阵  $b_{ij}$  各对应两个有向分支子图之间有向边的连接数目.

**步骤 2** 将矩阵  $B_k(k=1, 2, 3, \dots)$  和矩阵  $b_{ij}$  排列成如下矩阵:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & B_2 & b_{23} & \cdots & b_{2k} \\ 0 & 0 & B_3 & \cdots & b_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_k \end{bmatrix}.$$

**步骤 3** 运用数学软件随机产生置换矩阵  $P$  并进行相似运算:  $\mathfrak{R}_0(G) = P \times \tilde{B} \times P^T$ , 于是得到有向 Email 网络图  $G = \langle V, E \rangle$  的邻接矩阵  $\mathfrak{R}_0(G)$ .

### 3 Email 病毒传播模型的构建

Email 病毒是以电子邮件为载体进行传播的网络病毒, 例如蠕虫病毒等等. 其特点是, 病毒有自我复制的能力, 并主动选择用户邮箱的地址簿中的地址发送邮件, 用户邮箱收到带病毒的邮件附件在被打开的情况下就激活病毒, 用户邮箱收到带病毒的邮件时刻到病毒被激活时刻称为潜伏期. 本文考虑了 Email 病毒在暴发初期的传播特点, 基于生物传染病学中 SIS 模型, 建立 Email 病毒的传播模型, 假设每个用户节点只处于两种基本状态之一: 易感状态 S (Susceptible) 或感染状态 I (Infected). 节点状态转移关系为  $S \rightarrow I \rightarrow S$ .

记在  $t$  时刻有向分支子图  $G_k = \langle V_k, E_k \rangle$  中感染状态的节点总数为  $I_k(t)$ , 易感状态的节点总数为  $S_k(t)$ , 单位时间  $\Delta t$  内每个节点的感染率为  $\alpha$  康复率为  $\gamma$ , 故有效传播率  $\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}$ . 由于有向分支子图  $G_k$  中每个感染状态的节点  $v_i$  都有最小长度为  $L_{Gk}$  的最短有向回路, 因此, 由平均场理论<sup>[15]</sup> (mean-field theory) 得单位时间  $\Delta t$  内感染状态节点增加数目为

$$\alpha \cdot L_{Gk} \left(1 - \frac{I_k(t)}{|V_k|}\right) \cdot |V_k| \cdot P_k(t) \cdot \Delta t, \quad (1)$$

其中  $P_k(t)$  表示在时刻  $t$  任意一条给定的最短有向回路  $L_{Gk}$  经过一个感染状态节点的概率.

现实中, 由于新的病毒总是针对用户计算机软件系统的漏洞而设计的, 故在病毒爆发初期不考虑用户计算机的预防和免疫功能, 但可能有部分用户

通过各种维护措施使计算机恢复正常状态. 因此, Email 病毒可能存在潜伏现象, 而且可能会被再次感染. 参照文献 [9] 建立时滞微分方程模型的方法, 由于每一个长度为  $L_{Gk}$  的最短有向回路上必有  $L_{Gk}$  个节点, 在时间  $\Delta t$  内由过去潜伏的感染状态节点所传播而增加的感染状态节点数目为

$$\sum_{i=1}^{L_{Gk}} \alpha \cdot L_{Gk} \cdot \left(1 - \frac{I_k(t-i\delta)}{|V_k|}\right) \times |V_k| \cdot P_k(t-i\delta) \cdot \Delta t, \quad (2)$$

其中  $i\delta > 0$  表示潜伏时间.  $P_k(t-i\delta) = 0$  时表示无潜伏现象.

其次, 在单位时间  $\Delta t$  内有向分支子图  $G_k$  感染状态节点减少数目为

$$\gamma \cdot I_k(t) \cdot \Delta t. \quad (3)$$

根据以上分析, Email 病毒在有向分支子图  $G_k = \langle V_k, E_k \rangle$  中的传播满足

$$I_k(t + \Delta t) - I_k(t) = (1) + (2) - (3). \quad (4)$$

令

$$\alpha_{ki} \triangleq L_{Gk} \cdot P_k(t-i\delta), \quad (i=1, 2, 3 \cdots L_{Gk}), \quad (5)$$

由于概率  $0 \leq P_k(t-i\delta) < 1$ , 且有向分支子图  $G_k = \langle V_k, E_k \rangle$  中节点总数  $|V_k|$  有界, 因此, 函数  $\alpha_{ki}(t)$  是时间  $t$  的周期函数. 用  $\rho_k(t)$  表示有向分支子图  $G_k$  中感染状态节点的密度, 则有

$$\rho_k(t) = \frac{I_k(t)}{|V_k|}. \quad (6)$$

将 (5) 式和 (6) 式代入方程式 (4) 得到

$$\frac{d\rho_k(t)}{dt} = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{L_{Gk}} [\alpha_{ki}(1 - \rho_k(t-i\delta))] - \gamma\rho_k(t) + o(\Delta t), \quad (7)$$

其中,  $o(\Delta t)$  表示高价无穷小量. 由于幂级数:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-\rho_k(t))^n = \frac{1}{1 + \rho_k(t)}$  因此,

$$1 - \rho_k(t) = \frac{1}{1 + \rho_k(t)} + o(\rho_k(t)). \quad (8)$$

将 (8) 式代入 (7) 式得到

$$\frac{d(\rho_k(t))}{dt} = -\gamma\rho_k(t) + \alpha \sum_{i=0}^{L_{Gk}} \frac{\alpha_{ki}(t)}{1 + \rho_k(t-i\delta)} + \alpha \sum_{i=0}^{L_{Gk}} \alpha_{ki}(t) \cdot o(\rho_k(t-i\delta)) + o(\Delta t). \quad (9)$$

忽略 (9) 式中的高价小量, 即得到 Email 病毒在有向分支子图  $G_k = \langle V_k, E_k \rangle$  中传播的时滞微分方程模型

$$\frac{d(\rho_k(t))}{dt} = -\gamma\rho_k(t) + \alpha \sum_{i=0}^{L_{Gk}} \frac{\alpha_{ki}(t)}{1 + \rho_k(t - i\delta)}. \quad (10)$$

若 Email 网络中各有向分支子图间无有向边相连, 则由 (10) 式可以得到 Email 病毒在网络中传播的动力学方程

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho_1(t)}{dt} \\ \frac{\rho_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{\rho_k(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{\rho_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma\rho_1(t) + \alpha \sum_{i=0}^{L_{G1}} \frac{\alpha_{1i}(t)}{1 + \rho_1(t - i\delta)} \\ -\gamma\rho_1(t) + \alpha \sum_{i=0}^{L_{G2}} \frac{\alpha_{2i}(t)}{1 + \rho_2(t - i\delta)} \\ \vdots \\ -\gamma\rho_k(t) + \alpha \sum_{i=0}^{L_{Gk}} \frac{\alpha_{ki}(t)}{1 + \rho_k(t - i\delta)} \\ \vdots \\ -\gamma\rho_m(t) + \alpha \sum_{i=0}^{L_{Gm}} \frac{\alpha_{mi}(t)}{1 + \rho_m(t - i\delta)} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

记向量函数

$$\rho(t) \triangleq (\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_m(t))^T,$$

$$F(t, \rho(t)) = \begin{bmatrix} -\gamma\rho_1(t) + \alpha \sum_{i=0}^{L_{G1}} \frac{\alpha_{1i}(t)}{1 + \rho_1(t - i\delta)} \\ -\gamma\rho_1(t) + \alpha \sum_{i=0}^{L_{G2}} \frac{\alpha_{2i}(t)}{1 + \rho_2(t - i\delta)} \\ \vdots \\ -\gamma\rho_k(t) + \alpha \sum_{i=0}^{L_{Gk}} \frac{\alpha_{ki}(t)}{1 + \rho_k(t - i\delta)} \\ \vdots \\ -\gamma\rho_m(t) + \alpha \sum_{i=0}^{L_{Gm}} \frac{\alpha_{mi}(t)}{1 + \rho_m(t - i\delta)} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

于是, (11) 式可写成微分方程:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = F(t, \rho(t)). \quad (13)$$

Email 病毒在网络中的传播路径还有另一类, 即在子图之间传播. 设 Email 病毒在任意两个有向分支子图之间传播的概率为  $0 \leq \mu < 1$ , 则 Email 病毒在有向分支子图  $G_k = \langle V_k, E_k \rangle$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) 内部传播的概率为  $0 < 1 - \mu \leq 1$ , 考虑病毒的两类传播路径, 结合 (13) 式, 可得病毒在整个 Email 网络  $G$  中传播的非线性时滞微分方程的模型为

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = (1 - \mu) \cdot Q_0 \times F(t, \rho(t)) + \mu \cdot \bar{Q} \times F(t, \rho(t))$$

即

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = [(1 - \mu) \cdot Q_0 + \mu \cdot \bar{Q}] \times F(t, \rho(t)), \quad (14)$$

其中,  $Q_0$  表示单位矩阵. 由于矩阵  $\bar{Q}$  是对角线元素全为零的上三角形矩阵, 因此矩阵  $(1 - \mu) \cdot Q_0 + \mu \cdot \bar{Q}$  是对角线元素全为  $1 - \mu$  的上三角形矩阵. 由于

$$\rho_k(t) \cdot |V_k| = I_k(t) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, m),$$

$$\eta \triangleq \left( \frac{|V_1|}{\sum_{i=1}^m |V_i|}, \frac{|V_2|}{\sum_{i=1}^m |V_i|}, \frac{|V_3|}{\sum_{i=1}^m |V_i|}, \dots, \frac{|V_m|}{\sum_{i=1}^m |V_i|} \right)^T,$$

因此, 整个有向 Email 网络  $G$  中感染状态节点的密度为

$$\rho_\eta(t) = \frac{\sum_{k=1}^m \rho_k(t) \cdot |V_k|}{\sum_{k=1}^m |V_k|},$$

即有

$$\rho_\eta(t) = \eta^T \times \rho(t). \quad (15)$$

#### 4 模型分析及其仿真实验

本节将以图 1 所示的 Email 网络为例, 具体分析模型 (14) 和 (15) 的病毒传播的动力学性质, 通过数值仿真验证吸引子存在的充要条件, 并进一步探讨不同传播参数对病毒传播规模的影响.

在图 1 的 Email 网络中, 有 4 个有向分支子图  $G_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), 其感染节点密度分别为  $\rho_k(t)$ , (14) 式中的矩阵

$$(1 - \mu) \cdot Q_0 + \mu \cdot \bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 - \mu & \frac{4\mu}{7} & \frac{\mu}{14} & \frac{5\mu}{14} \\ 0 & 1 - \mu & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 - \mu & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \mu \end{bmatrix},$$

由于有效传播率  $\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}$ , 不失一般性, 令  $\gamma = 1$ , 且取

$$\begin{aligned}
 & F_0(t, \rho(t)) \\
 = & \left[ -\rho_1(t) + \frac{\lambda}{1+\rho_1(t)} + \frac{\lambda(0.5+0.5\sin(t))}{1+\rho_1(t-1)} \right. \\
 & + \frac{\lambda(0.5+0.5\cos(t))}{1+\rho_1(t-2)} + \frac{\lambda(0.5+0.5\sin(0.5t))}{1+\rho_1(t-3)}, \\
 & -\rho_2(t) + \frac{\lambda}{1+\rho_2(t)} + \frac{\lambda(0.5+0.5\sin(t))}{1+\rho_2(t-1)} \\
 & + \frac{\lambda(0.5+0.5\cos(t))}{1+\rho_2(t-2)}, -\rho_3(t) + \frac{\lambda(0.5+0.5\sin(t))}{1+\rho_3(t-1)}, \\
 & -\rho_4(t) + \frac{\lambda}{1+\rho_4(t)} + \frac{\lambda(0.5+0.5\sin(t))}{1+\rho_4(t-1)} \\
 & + \frac{\lambda(0.5+0.5\cos(t))}{1+\rho_4(t-2)} + \frac{\lambda(0.5+0.5\sin(2t))}{1+\rho_4(t-3)} \\
 & \left. + \frac{\lambda(0.5+0.5\cos(2t))}{1+\rho_4(t-4)} \right]^T.
 \end{aligned}$$

由 (14) 式得

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{d\rho_1(t)}{dt}, \frac{d\rho_2(t)}{dt}, \frac{d\rho_3(t)}{dt}, \frac{d\rho_4(t)}{dt} \right)^T \\
 = & [(1-\mu) \cdot Q_0 + \mu \cdot \bar{Q}] \times F_0(t, \rho(t)). \quad (16)
 \end{aligned}$$

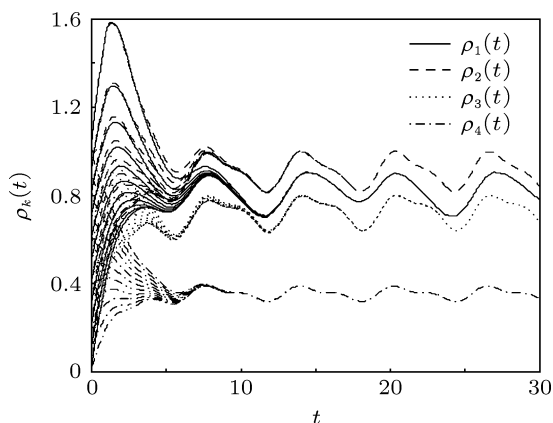


图 4 有向分支子图  $G_k$  的密度  $\rho_k(t)$  随时间  $t$  演化图 ( $\mu = 0.650, \lambda = 0.1592$ )

图 4 是当概率  $\mu = 0.650$ , 有效传播率  $\lambda = 0.1592$  时, 取不同初始值所对应的密度  $\rho_k(t)$  随时间变化曲线. 由图 4 可见, 都收敛到各自密度函数  $\rho_k(t)$  唯一的震荡正解. 可以证明, 在一定条件下, 对于任意的初始值都存在唯一震荡正解  $\tilde{\rho}_k(t)$  满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\rho_k(t) - \tilde{\rho}_k(t)\| = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

即唯一震荡正解  $\tilde{\rho}_k(t)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) 是全局震荡

吸引子.

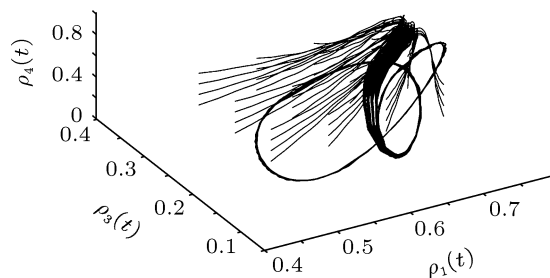


图 5  $\rho_k(t)$  的吸引子在三维空间的相图

图 5 为图 4 中的三个分量  $\rho_1(t), \rho_3(t)$  与  $\rho_4(t)$  在空间中的相图. 由图可见, 方程 (16) 的解存在一个全局震荡吸引子.

由于图 1 中的 4 个有向分支子图节点数分别为  $|V_1| = 6, |V_2| = 4, |V_3| = 1, |V_4| = 5$ , 故由模型 (15) 可得, 有向 Email 网络  $G$  中感染状态节点的密度为

$$\begin{aligned}
 \rho_\eta(t) = & \frac{6}{16}\rho_1(t) + \frac{4}{16}\rho_2(t) \\
 & + \frac{1}{16}\rho_3(t) + \frac{5}{16}\rho_4(t).
 \end{aligned}$$

由于在不同初始条件下, 各个分支子图中  $\rho_k(t)$  收敛到吸引子  $\tilde{\rho}_k(t)$  因此, 这时整个有向 Email 网络  $G$  中也存在全局震荡吸引子

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_\eta(t) = & \frac{6}{16}\tilde{\rho}_1(t) + \frac{4}{16}\tilde{\rho}_2(t) \\
 & + \frac{1}{16}\tilde{\rho}_3(t) + \frac{5}{16}\tilde{\rho}_4(t). \quad (17)
 \end{aligned}$$

由图 6(a) 可见, 图 1 中的有向 Email 网络  $G$  存在一个全局吸引子.

进一步分析全局吸引子与传播参数  $\mu$  和  $\lambda$  的关系. 先给出下面引理.

**引理 1** 任意取两个不同初值下的震荡解  $\rho_{\eta i}(t)$  与  $\rho_{\eta j}(t)$  ( $i \neq j$ ) 对于充分大的正数  $T_0$ , 令  $d_{ij} = \max_{t \in [T_0, \infty)} |\rho_{\eta i}(t) - \rho_{\eta j}(t)|$ ,  $d\rho_\eta = \max_{i \neq j} \{d_{ij}\}$ , 则对于常数  $\mu$  与  $\lambda$  有向 Email 网络中存在唯一的震荡全局吸引子的充要条件是

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} d\rho_\eta = 0. \quad (18)$$

在图 1 的实例中, 对模型 (18) 中的  $d\rho_\eta$  进行数值计算, 结果如图 7 所示.

由图 (7) 可见, 存在某个临界值  $\mu_0 = \frac{2}{3}$ , 当  $\mu < \mu_0$  时,  $d\rho_\eta = 0$ , 即吸引子存在; 当参数  $\mu > \mu_0$  时,  $d\rho_\eta$  随  $\mu$  单调递增, 这时全局震荡吸引子不存在. 通过理论推导, 我们可以找出临界值  $\mu_0$ , 对于

(17) 式可得如下定理.

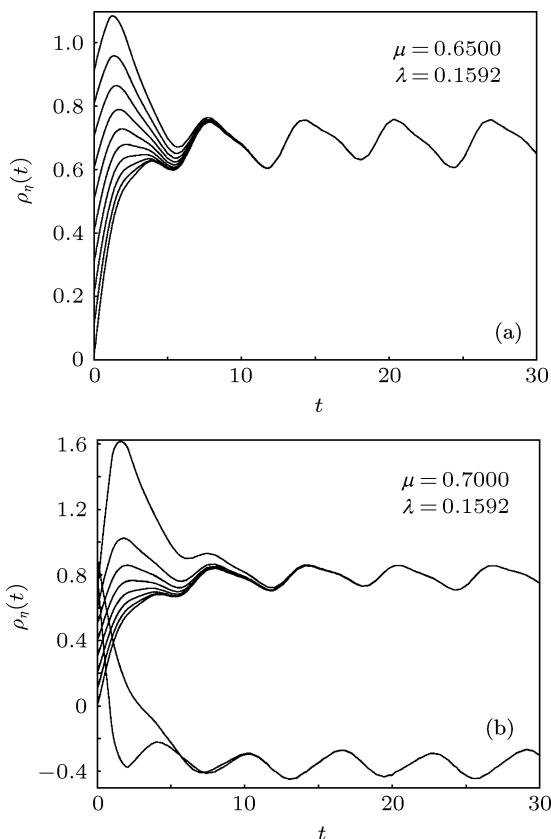


图6 网络 G 中感染状态节点的密度  $\rho_k(t)$  在不同初值条件下随时间  $t$  演化图

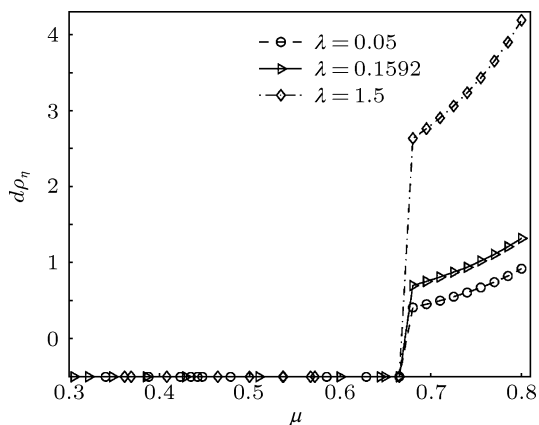


图7 网络 G 中  $d\rho_\eta$  随概率  $\mu$  演化图

**定理 1** 对于任意  $\lambda > 0$  必存在临界值  $\mu_0$ , 在有向 Email 网络  $G$  中, 当  $0 < \mu < \mu_0$  时, (17) 式存在唯一的全局震荡吸引子; 当  $\mu_0 < \mu < 1$  时, (17) 式不存在全局震荡吸引子.

图 6(a)  $\mu$  取值 0.650 小于临界值  $\mu_0$ , 这时不同初值的解都收敛到全局震荡吸引子上; 图 6(b)  $\mu$  取值 0.70 大于临界值  $\mu_0$ , 这时不同初值的解的曲线分成两部分, 表明不存在全局震荡吸引子.

由于  $0 < \mu < \mu_0$  时每个有向分支子图必存在全局震荡吸引子  $\tilde{\rho}_k(t)$ , 因此, 当正数  $T_0$  充分大时, 全局震荡吸引子  $\tilde{\rho}_k(t)$  的振幅定义为

$$A(\rho_k) = \frac{1}{2} \left( \max_{t \in [T_0, \infty)} \{\tilde{\rho}_k(t)\} - \min_{t \in [T_0, \infty)} \{\tilde{\rho}_k(t)\} \right).$$

显然, 振幅  $A(\rho_k(t))$  大小表示全局震荡吸引子波动性的大小, 它反映了网络中感染节点密度的规模大小.

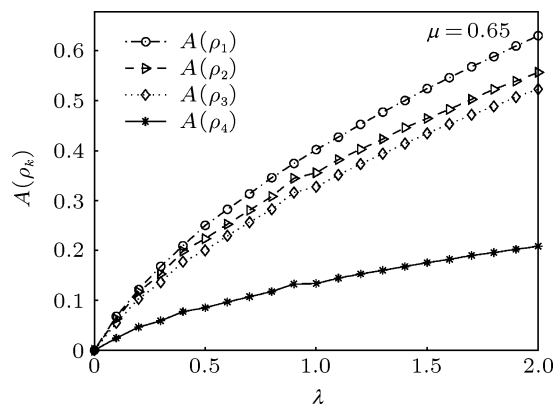


图8 子图  $G_k$  中吸引子的振幅  $A(\rho_k(t))$  随有效传播率  $\lambda$  演化图

图 8 的结果显示, 当参数  $\mu$  取小于临界值的某个固定值时 (如  $\mu = 0.650$ ), 振幅  $A(\rho_k(t))$  随  $\lambda$  单调递增, 表明病毒传播的规模与传播率  $\lambda$  成正相关关系.

通过理论分析并结合 (17) 式的线性运算, 整个有向 Email 网络的全局震荡吸引子的振幅  $A(\rho_\eta(t))$  有如下定理:

**定理 2** 对于任意的  $\mu \in [0, \mu_0)$ , 有效传播率  $\lambda$  数值大小影响全局震荡吸引子振幅  $A(\rho_\eta(t))$  的大小,  $\lambda$  越大振幅越大.

**注 1** 定理 1 和定理 2 的严格理论推导见附录 A1.

**注 2** 由定理 1 和定理 2 可知, 参数  $\mu$  和  $\lambda$  共同制约全局吸引子的存在性和波动幅度, 运用序列迭代法定量的有效预测和定量的控制病毒在网络上的传播规模见附录 A1.

**注 3** 本文建立的 Email 病毒传播模型只适于新病毒传播期间, 还没有开发出专门针对性预防的杀毒软件的情形. 出现专门的针对性杀毒软件后, 本模型不再适用.

## 5 结论

现实中的 Email 病毒传播不可避免的存在时

延, 因此, 本文运用非线性时滞微分方程构建了基于有向 Email 网络的病毒传播动力学模型. 通过理论分析和对模型的数值仿真验证了病毒在整个有向 Email 网络中传播的震荡行为. 一方面, 定理 1 及数值计算表明, 模型参数  $\mu$  (两个子图之间的传播概率) 的取值决定了全局震荡吸引子的存在性, 它表明全局震荡吸引子是有向 Email 网络拓扑固有的传播行为特征; 另一方面, 定理 2 和数值实验表明, 有效传播率  $\lambda$  取值大小影响全局震荡吸引子振幅的大小, 即  $\lambda$  决的取值影响病毒规模变化的波动程度. 因此, 参数  $\mu$  和  $\lambda$  共同制约全局吸引子的存在性和波动幅度, 对于有效预测和控制病毒在网络上的传播规模具有重要意义.

### 附录 A1

**引理 2**<sup>[15-17]</sup> 1) 若锥  $\ell$  是正规的, 算子  $\rho: \ell \rightarrow \ell$  是全连续算子.

2) 若  $\rho_0(t) \in \ell$ ,  $\|\rho(\rho_0)(t)\| > \|\rho_0(t)\|$ , 则  $\exists \varepsilon_0 > 0$ ,  $\|\rho^2(\rho_0)(t)\| \geq \varepsilon_0 \|\rho(\rho_0)(t)\|$ .

3) 若  $\forall \rho(t) \in \ell$ ,  $\|\rho_0(t)\| < \|\rho(t)\| \leq \|\rho(\rho_0)(t)\|$ ,  $0 < \beta < 1$ , 则存在  $\eta(\rho(t), \beta) > 0$ , 满足  $\|\rho(\beta\rho)(t)\| \leq [\beta(1 + \eta(\rho(t), \beta))]^{-1} \|\rho(\rho)(t)\|$ .

那么, 算子  $\rho: \ell \rightarrow \ell$  有唯一的正不动点  $\bar{\rho}(t)$ , 并且以任何  $\rho_1(t)$  为初值, 作迭代序列  $\rho_k(t) = \rho(\rho_{k-1})(t)$ , 都有  $\|\rho_k(t) - \bar{\rho}(t)\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ .

#### 定理 1 证明

设  $L = \max\{L_{G1}, L_{G2}, \dots, L_{Gm}\}$ , 则 (14) 式的向量形式为

$$\dot{\rho}(t) = -\gamma \cdot R(\mu) \cdot \rho(t) + \alpha \cdot \sum_{k=0}^L W_k(t, \mu) g(\rho(t - k\delta)), \quad (A1)$$

其中向量函数

$$g(\rho(t - k\delta)) = \left( \frac{1}{1 + \rho_1(t - k\delta)}, \frac{1}{1 + \rho_2(t - k\delta)}, \dots, \frac{1}{1 + \rho_m(t - k\delta)} \right)^T,$$

矩阵函数  $W_k(t, \mu)$ , ( $k = 0, 1, \dots, L$ ) 是以  $\omega$  为周期的非负矩阵.

令连续向量函数集合

$$\ell = \{\rho(t + \omega) = \rho(t), \|\rho(t)\| = \max_{1 \leq k \leq m} \left\{ \max_{s \in [t, t + \omega]} |\rho_k(s)| \right\}, \rho_k(s) \geq 0,$$

则  $\ell$  是 Banach 空间的正规锥. 由于有效传播率  $\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}$ , 不失一般性, 令  $\gamma = 1$ , 构造算子  $\rho$  为

$$\rho(\rho)(t) = \int_t^{t+\omega} H(t, s) \lambda \sum_{k=0}^L W_k(s, \mu) \times g(\rho(s - k\delta)) ds, \quad (A2)$$

其中矩阵

$$H(t, s) = (e^{\omega R(\mu)} - I)^{-1} \cdot e^{R(\mu)(s-t)},$$

$$\|H(t, s)\| = H_0.$$

显然有  $\rho(\rho)(t + \omega) = \rho(\rho)(t)$ , 即  $\rho: \ell \rightarrow \ell$ . 因为

$$\frac{d\rho(\rho)(t)}{dt} = -R(\mu) \cdot \rho(\rho)(t) + \lambda \sum_{k=0}^L W_k(t, \mu) g(\rho(t - k\delta)),$$

所以

$$\left\| \frac{d\rho(\rho)(t)}{dt} \right\| \leq \|R(\mu) \cdot \rho(\rho)(t)\| + \lambda \sum_{k=0}^L \|W_k(t, \mu) g(\rho(t - k\delta))\|. \quad (A3)$$

因为

$$\|R(\mu)\| \leq 1, \|W_k(t, \mu)\| = M_k(\mu),$$

$$\|g(\rho(t - k\delta))\| \leq 1, \quad (A4)$$

所以

$$\|\rho(\rho)(t)\| \leq \omega \|H(t, s)\| \times \left\| \lambda \sum_{k=0}^L W_k(s, \mu) g(\rho(s - k\delta)) \right\| \leq \omega H_0 \lambda \sum_{k=0}^L M_k(\mu). \quad (A5)$$

由 (A3), (A4) 与 (A5) 式得到  $\left\| \frac{d\rho(\rho)(t)}{dt} \right\|$  和  $\|\rho(\rho)(t)\|$  都有界, 因此, 根据 Arzela-Ascoli 定理得到算子  $\rho: \ell \rightarrow \ell$  是全连续算子.

由算子的定义可知,  $\exists \rho_0(t) \in \ell$ ,  $\|\rho(\rho_0)(t)\| > \|\rho_0(t)\|$ , 由 (A5) 式得

$$\|g(\rho(\rho_0)(s))\| \geq \left[ 1 + \omega H_0 \lambda \sum_{k=0}^L M_k(\mu) \right]^{-1},$$

$$\|g(\rho(\rho_0)(s - k\delta))\| \geq \left[ 1 + \omega H_0 \lambda \sum_{k=0}^L M_k(\mu) \right]^{-1},$$

( $k = 0, 1, \dots, L$ ),

所以

$$\|\rho^2(\rho_0)(t)\| = \left\| \int_t^{t+\omega} H(t, s) \lambda \sum_{k=0}^L W_k(s, \mu) \right\|$$



$$\begin{aligned} & \times g(\wp(\rho_0)(s-k\delta))ds|| \\ \geq & (1+\omega H_0\lambda \\ & \times \sum_{k=0}^L M_k)^{-1} || \int_t^{t+\omega} H(t,s)\lambda \sum_{k=0}^L W_k(s,\mu) \\ & \times g(\rho_0(s-k\delta))ds|| \\ = & (1+\omega H_0\lambda \sum_{k=0}^L M_k(\mu))^{-1} ||\wp(\rho_0)(t)||. \end{aligned}$$

因此, 存在  $\varepsilon_0 = \left(1 + \omega H_0 \lambda \sum_{k=0}^L M_k(\mu)\right)^{-1} > 0$  满足不等式

$$||\wp(\rho_0)(t)|| \geq \varepsilon_0 ||\wp(\rho_0)(t)||. \quad (A6)$$

若  $\forall \rho(t) \in \ell, ||\rho_0(t)|| < ||\rho(t)|| \leq ||\wp(\rho_0)(t)||$ , 则当  $0 < \beta < 1$  时有

$$\begin{aligned} \wp(\beta\rho)(t) &= \int_t^{t+\omega} H(t,s)\lambda \sum_{k=0}^L W_k(s,\mu) \\ & \times g(\beta\rho(s-k\delta))ds \\ &= \frac{1}{\beta} \int_t^{t+\omega} H(t,s)\lambda \sum_{k=0}^L W_k(s,\mu)\Lambda_k \\ & \times g(\rho(s-k\delta))ds, \end{aligned} \quad (A7)$$

其中, 矩阵

$$\Lambda_k = \text{diag} \left\{ 1 + \frac{1-\beta}{1+\rho_1(t-k\delta)}, 1 + \frac{1-\beta}{1+\rho_2(t-k\delta)}, \dots, 1 + \frac{1-\beta}{1+\rho_m(t-k\delta)} \right\}.$$

由于  $0 < \Lambda_k \leq \beta < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} ||\wp(\beta\rho)(t)|| &= \left\| \frac{1}{\beta} \int_t^{t+\omega} H(t,s)\lambda \sum_{k=0}^L W_k(s,\mu) \right. \\ & \times \Lambda_k g(\rho(s-k\delta))ds \left. \right\| \\ &\leq \left\| \int_t^{t+\omega} H(t,s)\lambda \sum_{k=0}^L W_k(s,\mu) \right. \\ & \times g(\rho(s-k\delta))ds \left. \right\|, \end{aligned}$$

即

$$||\wp(\beta\rho)(t)|| \leq \left[ \beta \left( 1 + \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \right) \right]^{-1} ||\wp(\rho)(t)||. \quad (A8)$$

由引理 2 可得, 算子  $\wp: \ell \rightarrow \ell$  仅有唯一的正不动点  $\tilde{\rho}(t) \in \ell$ , 并且以任何  $\rho_1(t) \in \ell$  为初值作迭代  $\rho_{k+1}(t) = \wp(\rho_k)(t)$ ,  $k \in N^*$  都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} ||\rho_k(t) - \tilde{\rho}(t)|| = 0$ .

所以有  $\tilde{\rho}(t) = \wp(\tilde{\rho})(t)$ , 因此

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = \frac{d\wp(\tilde{\rho})(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} &= -R(\mu) \cdot \wp(\tilde{\rho})(t) \\ & \quad + \lambda \sum_{k=0}^L W_k(t,\mu)g(\rho(t-k\delta)) \\ &= -R(\mu) \cdot (\tilde{\rho})(t) \\ & \quad + \lambda \sum_{k=0}^L W_k(t,\mu)g(\rho(t-k\delta)). \end{aligned} \quad (A9)$$

由 (A9) 式得到不动点  $\tilde{\rho}(t)$  是唯一的周期震荡正解. 由于

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}(t) &= -R(\mu) \cdot \tilde{\rho}(t) \\ & \quad + \lambda \sum_{k=0}^L W_k(t,\mu)g(\tilde{\rho}(t-k\delta)), \\ \dot{\rho}(t) &= -R(\mu) \cdot \rho(t) \\ & \quad + \lambda \sum_{k=0}^L W_k(t,\mu)g(\rho(t-k\delta)). \end{aligned} \quad (A10)$$

令误差向量  $e(t) = \rho(t) - \tilde{\rho}(t)$ , 联合 (A10) 式得到

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= -R(\mu) \cdot e(t) + \lambda \sum_{k=0}^L W_k(t,\mu) \\ & \times [g(\tilde{\rho}(t-k\delta) + e(t)) - g(\tilde{\rho}(t-k\delta))]. \end{aligned} \quad (A11)$$

令

$$\Delta(e(t), t, \mu) = \sum_{k=0}^L W_k(t,\mu)[g(\tilde{\rho}(t-k\delta) + e(t)) - g(\tilde{\rho}(t-k\delta))],$$

即

$$\dot{e}(t) = -R(\mu) \cdot e(t) + \lambda \Delta(e(t), t, \mu). \quad (A12)$$

显然,  $\Delta(\mathbf{0}, t, \mu) = \mathbf{0}$ , 因此, 零向量是 (A12) 式的平衡点.

令  $\bar{M}(\mu) = \max\{M_0(\mu), M_1(\mu), \dots, M_L(\mu)\}$ , 当  $\bar{M}(\mu) \rightarrow 0$  时, 得到  $\Delta(e(t), t, \mu) \rightarrow \mathbf{0}$ . 即  $\bar{M}(\mu) \rightarrow 0$  时, 平衡点  $\mathbf{0}$  处的雅可比矩阵为  $-R(\mu)$ . 由微分方程稳定性判断定理可知, 存在临界值  $\mu_0$  当  $0 < \bar{M}(\mu) \leq \bar{M}(\mu_0)$  时平衡点  $\mathbf{0}$  是稳定点. 定理 1 证毕.

### 定理 2 证明

由于全局吸引子  $\tilde{\rho}(t)$  的极值处必有  $\dot{\tilde{\rho}}(t) = 0$ , 即

$$\begin{aligned} & -R(\mu) \cdot \tilde{\rho}(t) + \lambda \sum_{k=0}^L W_k(t,\mu) \\ & \times g(\tilde{\rho}(t-k\delta)) = 0. \end{aligned} \quad (A13)$$

由于矩阵  $R(\mu)$  是非奇异矩阵, 因此由 (A13) 式得到

$$\tilde{\rho}(t) = \lambda R^{-1}(\mu) \cdot \sum_{k=0}^L W_k(t,\mu)$$

$$\times g(\tilde{\rho}(t - k\delta)). \quad (\text{A14})$$

设全局吸引子  $\tilde{\rho}(t)$  在时刻  $t_1, t_2$  处分别有极小值与极大值, 则由 (A14) 式得到

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t_2) - \tilde{\rho}(t_1) &= \lambda R^{-1}(\mu) \sum_{k=0}^L [W_k(t_2, \mu)g(\tilde{\rho}(t_2 - k\delta)) \\ &\quad - W_k(t_1, \mu)g(\tilde{\rho}(t_1 - k\delta))]. \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

显然, 由 (A15) 式可知, 有效传播率  $\lambda$  数值增大,  $\tilde{\rho}(t_2) - \tilde{\rho}(t_1)$  也增大. 定理 2 证毕.

**定量的有效预防及定量的控制病毒的传播规模:**

由定理 1 可知, 当  $\mu \leq \mu_0$  时, 算子  $\wp: \ell \rightarrow \ell$  仅有唯一的吸引子  $\tilde{\rho}(t) \in \ell$ , 并且以任何  $\rho_1(t) \in \ell$  为初值作迭代  $\rho_{k+1}(t) = \wp(\rho_k)(t), k \in N^*$  都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\rho_k(t) - \tilde{\rho}(t)\| = 0$ , 即当  $k$

较大时有  $\|\wp^k(\rho_1(t)) - \tilde{\rho}(t)\| < \varepsilon$ , 因此, 感染状态节点密度的定量预测结果为

$$\tilde{\rho}(t) = \wp^k(\rho_1(t)). \quad (\text{A16})$$

对于  $\lambda > 0$ , 结合 (A15) 式与 (A16) 式得到振幅的定量值为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\wp^k(\rho_1)(t_2) - \frac{1}{2}\wp^k(\rho_1)(t_1) \\ &= \frac{1}{2}\lambda R^{-1}(\mu) \sum_{k=0}^L [W_k(t_2, \mu)g(\wp^k(\rho_1)(t_2 - k\delta)) \\ &\quad - W_k(t_1, \mu)g(\wp^k(\rho_1)(t_1 - k\delta))]. \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

由 (A17) 式可知, 振幅  $\frac{1}{2}\wp^k(\rho_1)(t_2) - \frac{1}{2}\wp^k(\rho_1)(t_1)$  与有效传播率  $\lambda$  成正比, 因此控制  $\lambda$  取值可以定量控制传播规模大小.

---

[1] Newman M, Watts D J 1999 *Phys. Rev. E* **60** 7332  
 [2] Zou C C, Towsley D, Gong W B 2007 *IEEE* **4** 105  
 [3] Pastor S R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. E* **63** 066117  
 [4] Watts D J, Strogatz S H 1988 *Nature* **393** (6684) 440  
 [5] Ustin B 2004 *Science* **304** (5670) 527  
 [6] Driver R D 1977 *Ordinary and Delay Differential Equations* (New York: Springer-Verlag) p28  
 [7] Feedman H I 1980 *Deterministic Mathematical Models in population Ecology* (New York: Marcel Dekker) p60  
 [8] Hale J k 2003 *Theory of functional Differential Equations* (New York: Springer-Verlag) p101  
 [9] Li X, Wang X F 2007 *Science* **38** (5) 401  
 [10] Xu D, Li X, Wang X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1313 (in Chinese) [徐丹, 李翔, 汪小帆 2007 物理学报 **56** 1313]  
 [11] Weng W G, Ni S J, Shen S F, Yuan H Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1938 (in Chinese) [翁文国, 倪顺江, 申世飞, 袁宏永 2007 物理学报 **56** 1938]  
 [12] Newman M E J, Forrest S, Balthrop J 2002 *Phys. Rev. E* **66** 035101  
 [13] Kari J 2005 *Theoretical Computer Science* **334** 3  
 [14] Lee D D, Seung H S 1999 *Nature* **401** 788  
 [15] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. E* **63** 066117  
 [16] Guo D J, Lakshmikantham V 1988 *Nonlinear Problems in Abstract Cones* (New York: Academic Press) p86  
 [17] Guo D 1986 *Nonlinear Anal. TMA.* **10** 1293

# Study of directed networks-based Email virus propagation model and its concussion attractor\*

Deng Qi-Xiang<sup>1)</sup> Jia Zhen<sup>1)2)†</sup> Xie Meng-Shu<sup>1)</sup> Chen Yan-Fei<sup>1)</sup>

1) (College of Science, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

2) (Guangxi Key Laboratory of Spatial Information and Geomatics, Guilin 541004, China)

(Received 15 April 2012; revised manuscript received 2 August 2012)

## Abstract

According to directed Email networks and the spread characteristics of Email virus, we study the behavior of the virus shock propagation in Email networks by using the mean field method to build delay differential equation model of viral spread. Then, the sufficient condition about the existence of shock solution's global attractor is given in theory. The existence and control of attractor are proved by numerical experiments. Our research indicates that spread probability between subgraphs determines the existence of attractor, and effective rate of spread determines the amplitude of attractor. Therefore these two parameters are significant in prediction of the scale of viral spread in networks.

**Keywords:** complex network, Email virus, spread, global attractor

**PACS:** 02.30.Hg, 02.60.cb

**DOI:** 10.7498/aps.62.020203

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61164020,61004101), the Natural Science Foundation of Guangxi (Grant No. 2011GXNSFA018147), and the Project of Guangxi Key Laboratory of Spatial Information and Geomatics (Grant No. 1103108-24).

† Corresponding author. E-mail: jjzzz0@163.com