

基于主成分变换的图像稀疏度估计方法*

马原¹⁾²⁾ 吕群波^{1)†} 刘扬阳¹⁾ 钱路路¹⁾ 裴琳琳¹⁾²⁾

1) (中国科学院光电研究院, 计算光学成像技术实验室, 北京 100094)

2) (中国科学院大学, 北京 100049)

(2013年5月29日收到; 2013年7月30日收到修改稿)

压缩感知理论基于信号的稀疏性和可压缩性, 突破传统 Nyquist 采样频率的限制, 以较低的数据量对信号进行采样和高概率重构. 在压缩感知理论中, 信号的稀疏度确定了稀疏采样的最低数据量, 是验证采样方法及重构方法优劣的重要参数. 在实际研究过程中, 图像稀疏度通常未知, 这就可能导致过采样或欠采样的情况, 从而无法验证采样方法及重构方法的优劣. 因此, 快速而客观地估计图像的稀疏度对于压缩感知理论研究来说意义重大. 本文分析了基于小波变换的图像稀疏化表示方法, 通过遍历采样和重构得到基于小波变换方法的图像稀疏度, 但过程复杂, 而且结果的准确性依赖于小波基和变换尺度的选择. 本文通过压缩感知理论对主成分变换进行阐述, 在基于主成分变换系数近似为正态函数的假设下, 建立了图像稀疏度与系数函数方差间的线性关系, 并通过多组图像数据进行仿真验证, 结果表明线性关系的正确性. 通过分析和仿真可以看出, 基于主成分变换的稀疏度估计方法比小波变换简单、快速、客观, 对压缩感知理论研究有重要的应用价值.

关键词: 压缩感知, 稀疏度, 小波变换, 主成分变换

PACS: 42.30.Va, 42.30.Wb, 02.30.Zz

DOI: 10.7498/aps.62.204202

1 引言

压缩感知理论 (compressive sensing, CS) 由 Donoho 等^[1]于 2006 年提出, 其理论出发点是信号的稀疏性和可压缩性. 通常情况下, 自然界中的绝大多数信号是可压缩的, 即按照 Nyquist 采样定理对信号进行数字采样时, 采样数据中往往存在信息冗余, 而根据压缩感知理论可知, 当信号是可压缩时, 选择一个合适的正交空间对信号进行变换, 若变换后的系数中绝大多数为零, 则该信号为稀疏信号. 在此情况下, 信号的采样可以突破 Nyquist 采样定理的限制, 以远低于 Nyquist 采样数据量对信号进行采样 (采样过程也称为观测过程), 并可以将原始信号高概率重构出来. 压缩感知理论一经提出就引起广泛关注, 并被美国科技评论评为 2007 年度十大科技进展, 目前已经在光学成像、微波成像、信号处理等领域得到广泛应用^[2-5].

根据压缩感知理论可知, 对于长度为 N 的数字

信号 f , 在某一正交基 Ψ 下是稀疏的, 通过特定的观测矩阵 Φ 对该信号进行观测, 可获得长度为 M 的观测信号 y , 其中 $M \ll N$, 上述信号观测过程如图 1 所示, 可通过下式进行表述:

$$y = \Phi f = \Phi \Psi \alpha. \quad (1)$$

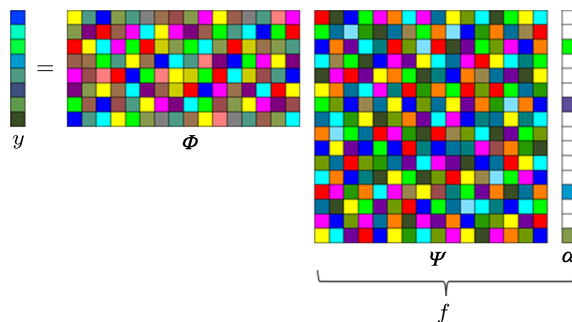


图 1 信号压缩感知示意图

文献 [6,7] 证明, 当矩阵 $\Phi\Psi$ 满足有限等距条件 (restricted isometry property, RIP) 时, 通过 y 可以

* 国家杰出青年科学基金 (批准号: 61225024) 和国家高技术研究发展计划 (批准号: 2012AA7012022) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lvqunbo@aoe.ac.cn

将原始信号高概率地重构出来, 此时, 观测量 M 与原始信号数据量 N , 信号稀疏度 K 间满足如下关系:

$$M \approx C \cdot \mu^2 \cdot K \log N \ll N, \quad (2)$$

其中, μ 为正交基 Ψ 和观测矩阵 Φ 的相关度, C 为常数.

很明显, 当 $\Phi\Psi$ 满足 RIP 条件时, 重构数据质量主要由相关度 μ 和稀疏度 K 决定. 目前, 大多数文献通常都在分析如何选取 $\Phi\Psi$ 以满足 RIP 条件, 同时保证 μ 尽量小^[6-8], 但鲜有文献分析信号的稀疏度如何测量, 也没有文献给出一个快速有效的稀疏度估计方法, 但信号稀疏度估计在压缩感知理论分析和方法研究中具有着决定性作用, 这主要体现在以下两个方面.

首先, 在信号采样方面, 压缩感知理论需要寻找最优的观测矩阵. 通常情况下, 观测矩阵需要满足 RIP 条件, 但并没有分析表明满足 RIP 条件的矩阵就能够具有普适性, 而只是从重构概率的角度进行论证, 并采用实际数据进行验证, 若重构结果比较理想, 则说明选择的矩阵合理. 但是这在很大程度上又依赖于压缩感知观测采样的数据量, 在采样数据量足够大的情况下, 即使矩阵不是最优的, 通常都可以得到比较理想的重构结果. 但若稀疏度已知, 则可以将信号稀疏度、观测矩阵和采样数据量间的定性约束变为定量约束, 为不同应用中观测矩阵的优化选择提供有效的评判依据, 这就从观测矩阵的优化选择角度对信号稀疏度估计提出了要求.

其次, 信号的重构也是压缩感知过程的研究重点. 事实上, 重构信号的精度能否满足应用需求, 在很大程度上取决于压缩感知采样数据量是否满足 (2) 式所述的条件. 当采样过量, 即使重构算法不是最优的, 仍然可以得到较好地重构结果, 当采样不足, 即使重构算法是最优的, 重构结果仍然无法满足应用需求. 因此, 在进行重构算法验证时, 若信号稀疏度可以预知, 则满足 (2) 式所述的最少采样数据量可以预知, 在此条件下寻找重构精度更高的算法, 其现实应用价值更大, 这又从信号重构的角度对信号稀疏度估计提出了要求.

本文主要针对压缩感知理论中的信号稀疏度 K 估计方法进行研究, 采用正向投影变换原理与主成分变换 (principal component analysis, PCA) 方法相结合, 提出一种基于 PCA 的图像稀疏度客观估计方法, 并与基于小波变换 (wavelet transform, WT)

的稀疏度估计方法类比. 进而依据 Donoho 提出的 $M \approx 4K$ ^[9] 图像稀疏度与数据观测量的实验性结论, 利用多组数据进行仿真验证, 证明了估计方法的有效性.

2 压缩感知稀疏理论简介

压缩感知的核心是实现信号的稀疏化, 然后以远低于传统 Nyquist 采样对稀疏化的信号进行采样. 考虑一个长度为 N 的一维离散时间信号 $f \in \mathbb{R}^N$ (高维信号可以向量化为低维信号处理), 可以找到一组正交向量 $\{\psi_i\}_{i=1}^N$, 将信号表示为这组正交向量的线性组合, 也即

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_i, \quad (3)$$

式中, α_i 为正交系数, 令 $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^N$, 则 (3) 式可以简化为

$$f = \Psi \alpha, \quad (4)$$

式中, α 是由 α_i 构成的系数向量.

显然, f 和 α 是对同一信号的不同表述, 而压缩感知信号稀疏化的关键就是通过变换处理将原始信号投影到能量更加集中的空间上^[9].

通常, 在自然界中很难遇到严格稀疏的信号, 多数情况下, 信号经正交变换后的非零系数分布并不会仅集中到某几个点上, 而是分布于整个向量区间. 但当正交向量选择恰当时, 变换后的系数向量会产生能量集中现象, 如信号变换后的频域系数会遵循一种指数衰减规律^[9], 对于 (4) 式, 如果将系数 α_i 按照递减顺序排列的话, 那么各系数应该满足

$$|\alpha(i)| < Ci^{-1/p}, \quad (5)$$

式中 $p \leq 1, C < +\infty$.

当信号的变换系数 α 中只有小部分较大的系数, 其他大部分系数相对较小, 则该信号称为“可压缩信号”. 信号的可压缩性普遍存在于自然界中, 通常情况下, 保留较大的系数既可以对信号进行压缩, 同时又使得信号基本保留, 不造成太大的损失^[10].

压缩感知理论的核心是信号的稀疏性, 信号越稀疏, 越能体现出压缩感知的优势. 而在压缩感知理论分析和方法研究时, 通常是假定信号的稀疏度已知, 但在实际的仿真验证过程中, 信号的稀疏度往往是不可知的, 这常常导致理论上的最优方法无法得到全面客观的实验验证. 因此, 如何快速准确地预估信号的稀疏度, 是解决上述问题的关键.

3 图像稀疏度估计方法

对于如何估计图像的稀疏度,国内外学者提出了几种方法,如根据图像的复杂度以及边缘特性对稀疏度进行表征^[9],基于WT图像稀疏化表示^[7],范数比刻画^[11,12]等.其中,由于小波在信号分析方面的良好特性,在图像稀疏化方面可以得到较好的结果^[13],如Duarte等^[14]利用小波变换基对图像进行压缩感知理论分析,比较准确地给出了一种图像稀疏化的表示方法.但受图像多样化和复杂化的影响,通常需要人为选择最优尺度变换,影响结果的准确度.此外,基于WT的稀疏度估计需要对图像进行多次成像观测和重构,过程复杂.因此,本文从正交投影变换角度出发,提出一种基于PCA的稀疏度客观预估方法,其优点是不受主观因素影响,而且不需要进行成像观测和重构,方法简单、有效.

3.1 基于小波变换的图像稀疏度估计方法

为了更好地描述小波特性,我们采用一维数据进行分析.根据小波理论,对于一维信号 f ,它的小波表示形式为

$$f = v_0 v + \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{2^i-1} w_{i,j} \phi_{i,j}, \quad (6)$$

式中, v_0 为缩放系数, $w_{i,j}$ 为小波系数.(6)式可以

表示为相应的矩阵形式:

$$f = \Psi \alpha_{\text{wavelet}}, \quad (7)$$

式中, Ψ 是由小波基函数构成的正交基矩阵, α_{wavelet} 为系数向量,由缩放系数及小波系数构成,也即是 $\alpha_{\text{wavelets}} = [v_0, w_{0,0}, w_{1,0}, w_{1,1}, w_{2,0}, \dots]^T$,因此,WT可以看作是压缩感知观测矩阵中原始信号在正交基下的投影过程.如果选用小波基 $\psi(x)$,则可以得到每一小波基下的分解系数为

$$w_{j,k} = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle, \quad (8)$$

$w_{j,k}$ 即稀疏系数 α_{wavelet} ^[15].

图2为文献[3]中对数据进行WT处理的效果图,图2(a),(b),(c)分别为同一幅图像在各种同性小波基(isotropic)、各项同性小波基(anisotropic)、双曲小波基(hyperbolic)下的稀疏表示,图中绿色点代表0值,红色和蓝色点分别代表大的正值和负值.可以直观地看出,小波分析可以很好地使图像稀疏化,将大部分能量进行集中,同时可以看出,选用不同的小波基,信号的稀疏化程度也不同.

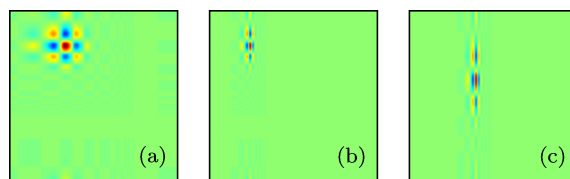


图2 图像在不同的小波基下的稀疏化表示 (a) 各种同性小波基; (b) 各项同性小波基; (c) 双曲小波基



图3 实验用图像 (a) Lena; (b) Yellowstone; (c) Man; (d) Hill; (e) Cameraman; (f) Boat; (g) Barbara; (h) House

WT的优势主要体现在对图像进行稀疏化表示,但却不能通过一次WT得到具体的稀疏度值.因此,要利用WT估计稀疏度,首先需要图像进

行成像观测和重构,并根据不同观测数据量下的重构精度估计图像稀疏度.我们对信号处理中常用的图像进行分析,如图3所示,首先对图像进行小

波稀疏化处理, 对稀疏化后的图像进行随机观测采样, 利用正交匹配追踪 (orthogonal matching pursuit, OMP) 算法^[16] 对成像结果进行原始图像的重构,

对不同观测数据量下的重构结果进行峰值信噪比 (peak signal to noise ratio, PSNR) 分析, 得到的观测数据量与 PSNR 曲线如图 4 所示.

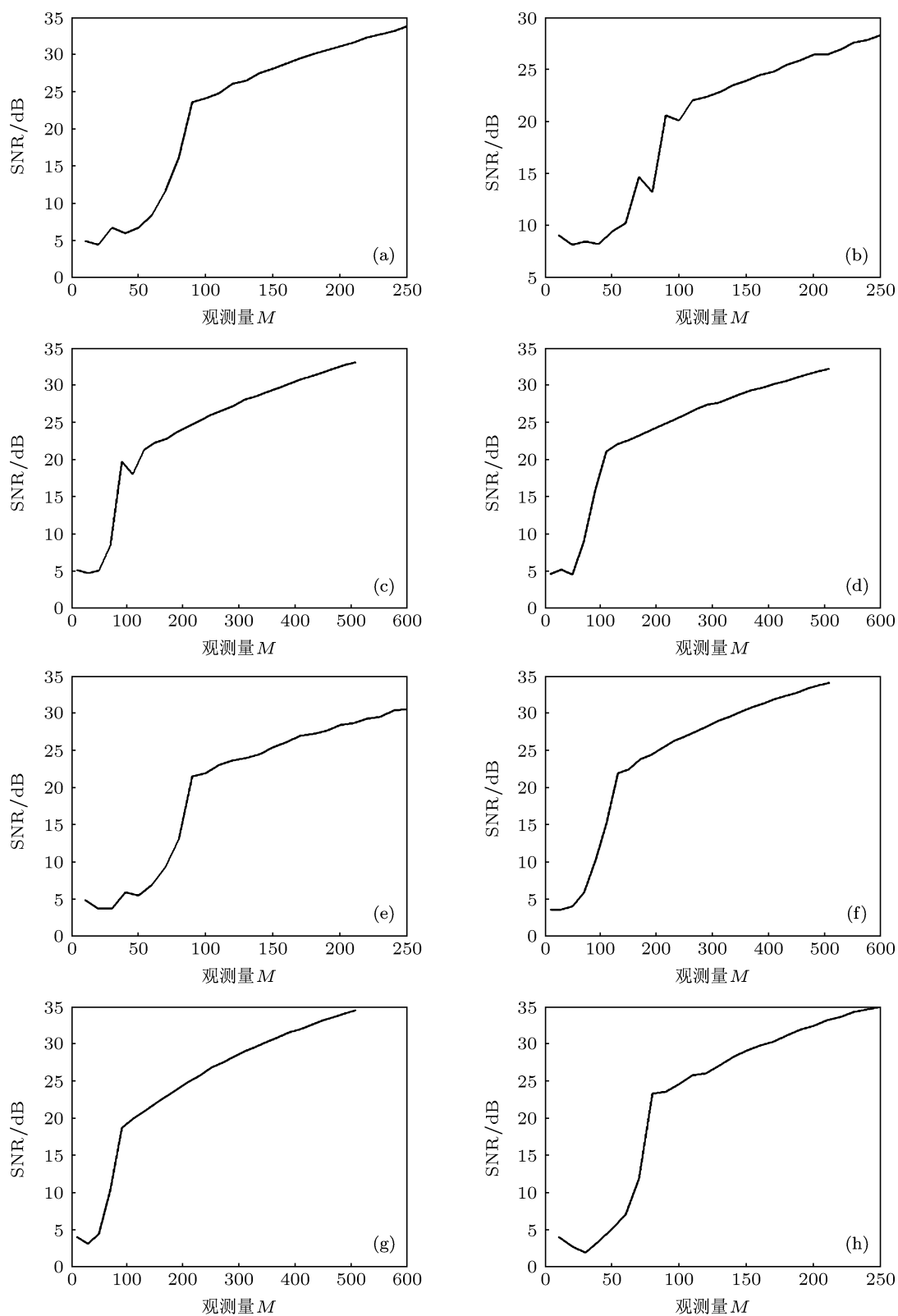


图 4 图像经稀疏采样后重构所得的观测量与信噪比关系及观测量下限阈值 (a) Lena; (b) Yellowstone; (c) Man; (d) Hill; (e) Cameraman; (f) Boat; (g) Barbara; (h) House

由重构图像信噪比变化曲线可以看出,随着观测数据量的增加,所有测试数据的峰值信噪比首先呈现指数增长,在达到某一阈值后,峰值信噪比的增加趋缓,并与观测次数成线性关系,曲线中的阈值点可以看作是大概率重构所需要的观测数据量下限,如表 1 所示.

表 1 基于 WT 方法的观测数据量阈值

图像	Lena	Yellowstone	Man	Hill
阈值	90	80	115	110
图像	Cameraman	Boat	Barbara	House
阈值	85	120	125	95

根据表 1 可以看出,不同的图像,对应的观测阈值也是不同的.根据 $M \approx 4K$ 关系,通过上述结果可以估计图像稀疏度.但是该方法需要遍历压缩感知成像观测采样数据量的递增过程和图像重构过程,失去了通过预估稀疏度值对观测量进行预先判断的实际意义.可见,小波变化方法在图像稀疏度估计方面有一定的局限性,需要寻找一种有效的估计方法,可以不必经过多次遍历压缩感知成像过程,直接估计图像的稀疏度.

3.2 基于主成分变换的图像稀疏度估计方法

与 WT 相比,PCA 算法要简单且易于理解.PCA 通过对数据协方差矩阵进行特征分解,得出数据的主成分与它们的权值,常用于数据降维处理,并保持数据中对方差贡献最大的特征.

首先,我们从信号的可压缩角度对 PCA 进行分析.PCA 的基本原理是通过一个正交化变换,把数据变换到一个新的坐标系统中,使得这一数据的任何投影的第一方差在第一坐标上,第二方差在第二坐标上,依次类推^[17].考虑图像的线性变换,可以表示为如下形式:

$$Y = TX, \quad (9)$$

式中, X 为原始数据, Y 为变换后的数据, T 为变换矩阵.当变换矩阵 T 是正交矩阵,且由原始数据协方差矩阵的特征向量组成,则上述变换称为 PCA,且变换后 Y 中所包含的每一个行矢量分别代表一个主成分^[17].与压缩感知中的正交变换类似,若 Y

中大部分主成分对原始数据的贡献很小,则原始数据 X 是可压缩的.

其次,从压缩感知信号观测角度对 PCA 进行分析.假定原始数据 X 的矩阵形式为

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

对于矩阵数据 X ,其奇异值分解为

$$X = W \Sigma V^T, \quad (11)$$

其中,矩阵 W 是 XX^T 的本征矢量矩阵, Σ 是 $m \times n$ 的非负矩形对角矩阵, V 是 $X^T X$ 的本征矢量矩阵.若利用 W^T 对 X 进行观测,观测值为 G ,则有

$$G = W^T X = W^T W \Sigma V^T = \Sigma V^T, \quad (12)$$

式中, G^T 的第一列由第一主成分组成,第二列由第二主成分组成,依此类推^[18].

通过上述分析可以看出,PCA 与 WT 过程类似,都是对原始信号进行正交投影变换,但 PCA 与压缩感知理论更接近,只需要对信号进行一次变换即可,观测值 G 的能量分布可由其协方差矩阵的对角元素表示,且对角矩阵中保留大的系数以保证足够的信息量,所以,可以认为 PCA 是图像稀疏化表示的一种特例.我们对一幅随机图像分别进行 WT 和 PCA 过程,得到的变换系数如图 5 和图 6 所示.

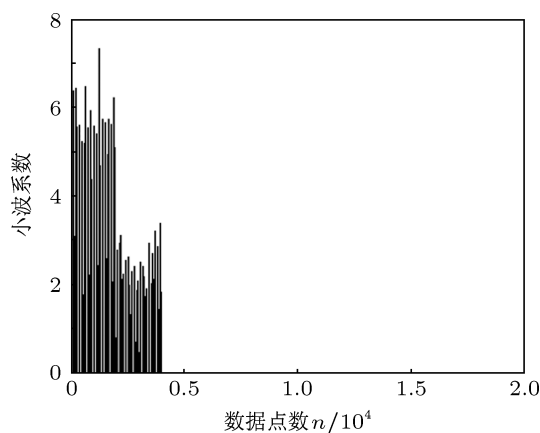


图 5 底层 WT 系数分布

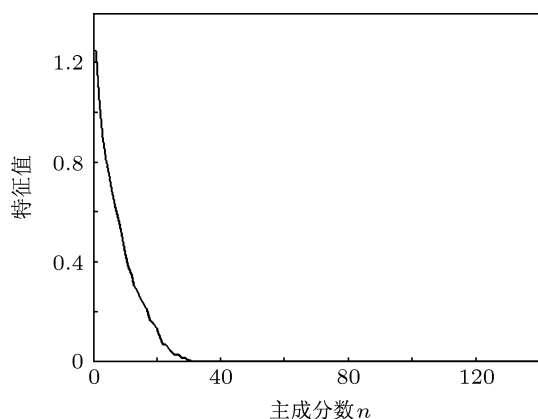


图6 PCA 变换系数分布

从图 5 和图 6 可以看出 WT 所得系数是一种随机的稀疏化分布, 而 PCA 变换后所得的系数则是按照系数大小进行排列, 是一种有规律的稀疏化分布. PCA 可以看作是图像稀疏方式的一种, 因此, 可以采用类似小波变换稀疏度估计方法, 通过 PCA 变换方法估计图像的稀疏度, 采用的图像如图 3 所示, 得到的保留系数点与 PSNR 关系曲线如图 7 所示.

可以看出, 基于 PCA 方法得到的重构图像信噪比变化曲线与基于 WT 方法得到的重构图像信噪比变化曲线很相似, 都存在一个变化阈值, 阈值之前的 PSNR 呈现指数增长, 阈值之后 PSNR 增长趋缓, 且呈线性变化. 因此, 图 7 中的阈值点仍然可以看作是大概率重构图像所需要的 PCA 系数点下限值, 如表 2 所示. 为了便于对比, 表 2 中重新给出基于 WT 方法的观测数据量阈值.

表 2 基于 PCA 变换系数点阈值与基于 WT 观测数据量阈值

图像	Lena	Yellowstone	Man	Hill
PCA	22	20	30	23
CS	90	80	115	110
图像	Cameraman	Boat	Barbara	House
PCA	24	20	30	25
CS	85	120	125	95

通过表 2 可以看出, 基于 WT 方法的观测数据量阈值点与基于 PCA 变换方法的系数点阈值点有差异, 对于同一幅图像来说, 两者之间近似为 4 倍关系. 事实上, 基于 WT 的稀疏度估计方法严格遵循压缩感知成像过程, 压缩感知观测过程是一种随机采样过程, 被观测值是原始图像或稀疏化后的图像, 而 PCA 方法观测的是图像稀疏化后的系数值, 其阈值点是一个大概率重构图像所需能量的近似

完备集合, 或者可以看作是系数中的非零值集合, 也即是稀疏度 K , 因此, 与 WT 方法的观测数据量间满足 4 倍关系.

显然, 采用上述方法可以估计图像的稀疏度, 而且不受正交基选择的影响, 与 WT 方法相比, 其结果更加客观. 但是上述方法仍然需要经历多次重构, 过程同样复杂. 本文从 PCA 变换后的数据特性入手, 寻找一种更直接的稀疏度估计方法, 无需图像重构过程, 即可估计图像的稀疏度. 为此, 我们首先做如下的假设.

假设1 对于任意给定的自然场景图像, 其 PCA 后的系数为 $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n-1$, 则该系数曲线可近似看作正态分布函数, 其均值 μ 为 0, 方差 σ 可以通过下式得到:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \cdot \alpha_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i}} \quad (13)$$

假设2 对于正态分布函数确定的变换系数 $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n-1$, 其系数保留值与 PSNR 关系曲线中的阈值 (也即是稀疏度 K) 与方差 σ 有关, 类似于压缩感知的高概率重构条件, 稀疏度 K 与方差 σ 间存在如下的线性关系:

$$K = a\sigma + b, \quad (14)$$

式中, a 和 b 为常数, 可以通过数据拟合的方式得到. 可以看出, 当上述假设成立时, 只需要对图像数据进行一次 PCA 得到变换后的系数, 即可通过 (13) 和 (14) 式直接估计图像的稀疏度, 比遍历重构方法更简单.

4 数据仿真分析

为了验证假设方法的正确性, 我们采用多组数据进行计算机仿真分析. 首先, 利用数字图像处理中常用的 8 幅图像进行正向拟合, 得到 (14) 式中的常数 a 和 b . 其次, 重新选取 4 幅不同的图像对 (15) 式进行验证.

4.1 数据拟合仿真

数据拟合仿真是假设成立的前提下, 通过数据拟合的方式, 得到稀疏度 K 与方差 σ 间的线性关系. 仿真采用的图像数据为数字图像处理中常用图像, 首先, 对其进行 PCA, 得到其 PCA 后的系数, 如图 8 所示.

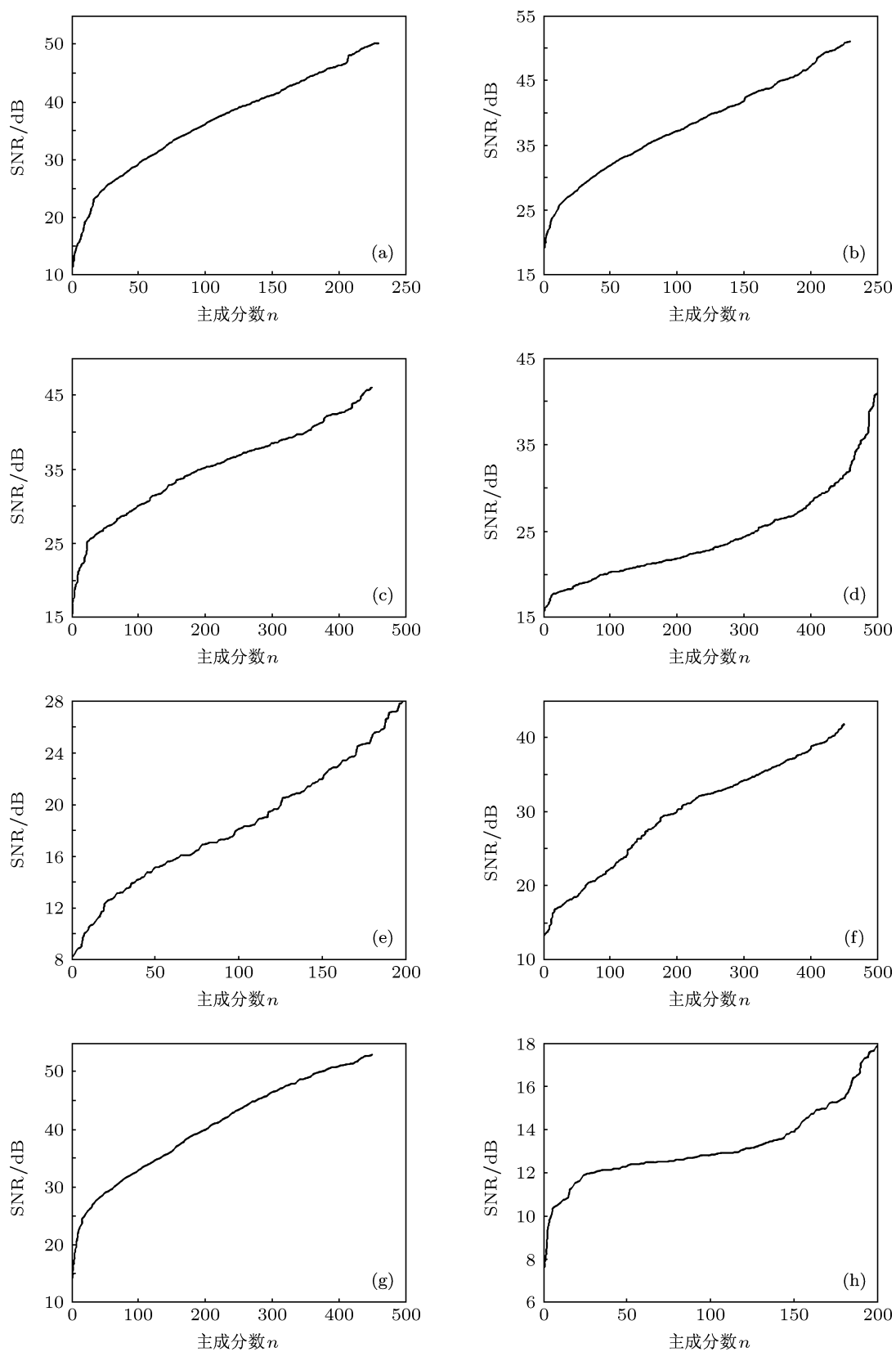


图7 图像 PCA 变换所得向量系数由小到大丢弃后重构数与信噪比的关系 (a) Lena; (b) Yellowstone; (c) Man; (d) Hill; (e) Cameraman; (f) Boat; (g) Barbara; (h) House

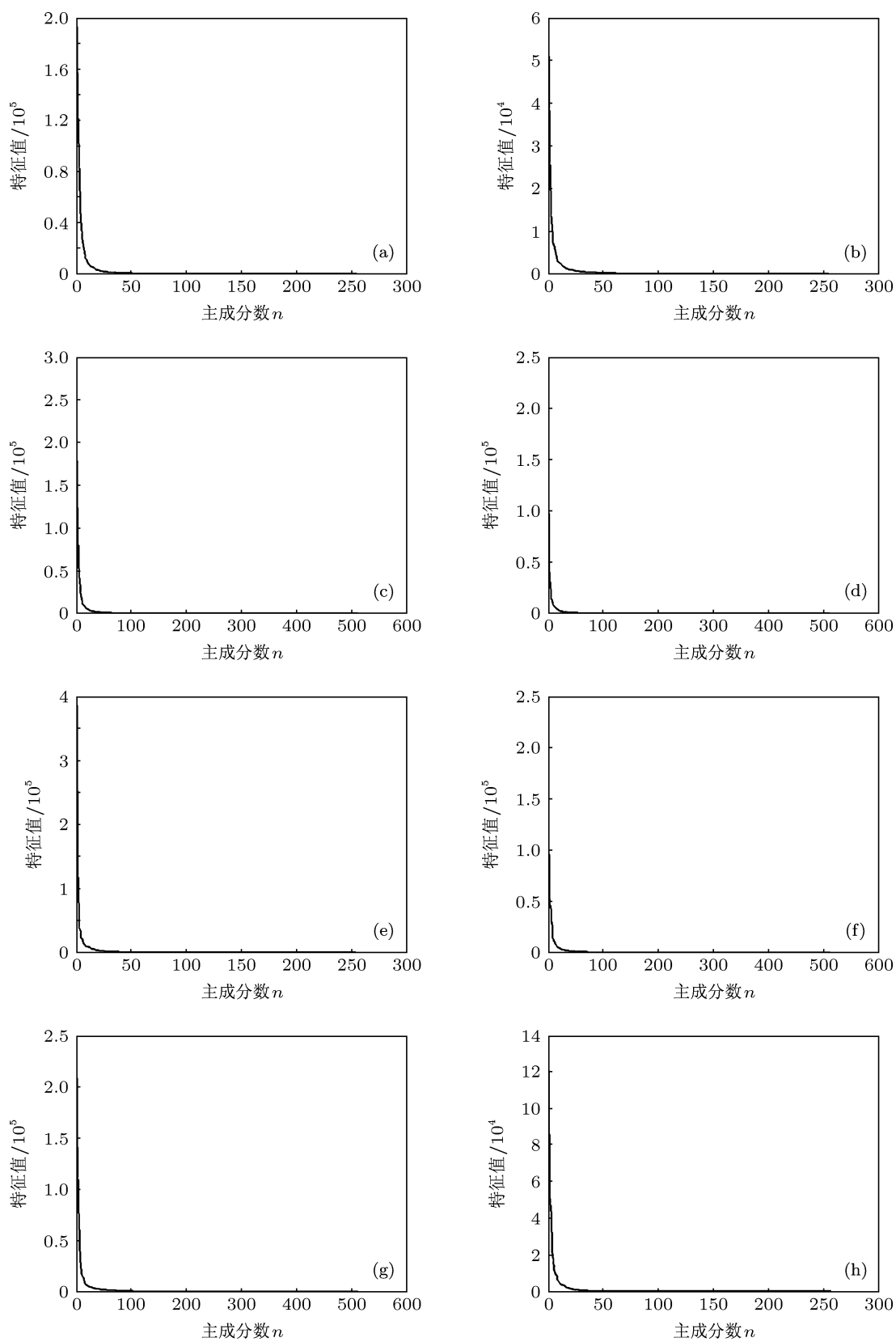


图 8 8 幅实验常用图像 PCA 所得系数向量 (a) Lena; (b) Yellowstone; (c) Man; (d) Hill; (e) Cameraman; (f) Boat; (g) Barbara; (h) House

利用 (13) 式可以计算变换系数曲线的正态分布方差值 σ , 并利用遍历重构方法计算图像数据对应的稀疏度值 K , 得到结果如表 3 所示.

表 3 图像方差值与对应的稀疏度计算值

图像	Lena	Yellowstone	Man	Hill
σ	15.1160	21.4694	28.2940	29.9830
K	22.5	20	26.25	27.5
图像	Cameraman	Boat	Barbara	House
σ	14.8135	31.8059	30.4828	11.4258
K	22.5	27.5	32.5	21.25

根据表 2 的结果及文献 [2] 中结论可以得到稀疏度 K 与方差 σ 间的离散分布如图 9 所示. 我们采用最小二乘法进行拟合, 拟合时直接采用 Matlab7.x 中的 polyfit 函数, 该函数采用最小二乘法曲线拟合方法, 所得到的函数值在基点处的值与原来点的坐标偏差最小. 通过拟合得到 (15) 式的线性关系为

$$K = 0.4066\sigma + 15.6792. \quad (15)$$

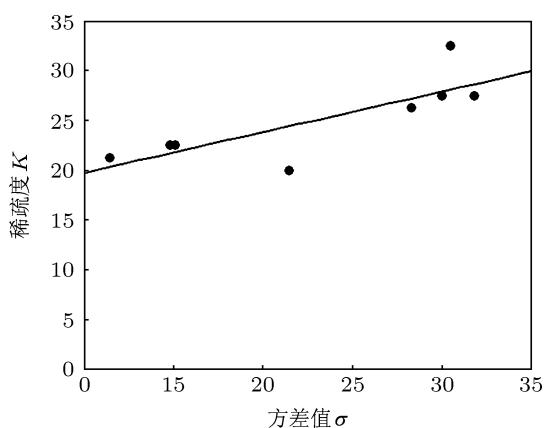


图 9 图像方差 σ 与稀疏度离散点及线性拟合曲线

4.2 稀疏度估计方法验证

得到 (15) 式的线性关系后, 重新选择 4 幅不同的图像对该线性关系进行验证, 如图 10 所示. 所选 4 幅图像中包含了数字图像处理中常用图像, 也包含了真实遥感图像. 具体验证过程如下:

第一步, 对 4 幅图像进行 PCA, 得到对应的系数曲线, 按照 (13) 式计算其对应的方差值 σ ;

第二步, 利用计算所得的 σ 以及 (15) 式计算图像的稀疏度 K_{PCA} ;

第三步, 按照压缩感知观测与重构过程, 计算图像的稀疏度 K_{CS} ;

第四步, 计算 K_{PCA} 与 K_{CS} 间的相对偏差, 以此评价结果的准确性.

按照上述步骤, 对 4 幅图像进行了相关的计算, 计算结果如表 4 所示. 由计算结果可看出, 4 幅图像稀疏度的理论计算值与实际测量值间符合较好, 最大相对偏差不超过 5%.

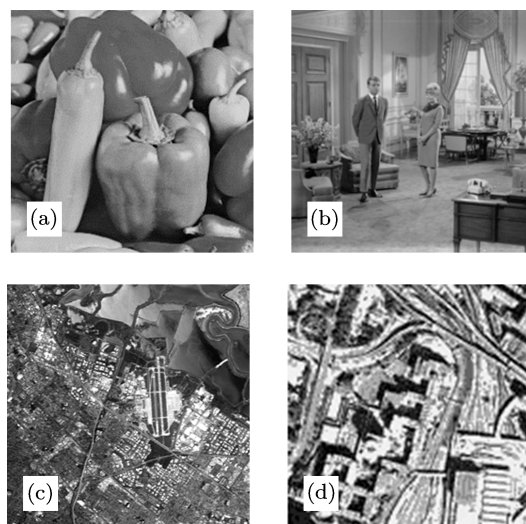


图 10 4 幅测试图像 (a) Peppers; (b) Couple; (c) Aerospace; (d) Aerial

表 4 4 幅图像稀疏度理论值与实际值对比

图像	Peppers	Couple	Aerospace	Aerial
σ	14.2668	28.5497	28.5558	20.4252
K_{PCA}	21.4801	27.2875	27.2900	23.9841
K_{CS}	22.5	25	27.5	24.25
相对偏差	4.53%	3.66%	0.76%	1.10%

通过上述仿真分析可以看出, 本文所提出的假设对于所讨论的图像数据是成立的, 对于 4 幅验证图像, 其稀疏度计算结果与实测值也很接近. 由于本文无法遍历自然界的所有图像, 因此, 无法验证方法的绝对普适性. 但是, 对于自然界的大部分图像数据来说, 其 PCA 后的系数总是按照从大到小的顺序排列. 从 PCA 系数的正态分布角度分析, 系数反映的是原始数据的分布概率, 该分布与 σ 有关, 其中, 约有 68.3% 的原始数据分布在 $[-\sigma, +\sigma]$ 范围内, 约有 95.5% 的数据分布在 $[-2\sigma, +2\sigma]$ 范围内, 约有 99.7% 的数据分布在 $[-3\sigma, +3\sigma]$ 范围内. 因此, 随着保留系数的不断增加, 该范围内所对应的原始信息量增加, 能够准确重构原始数据的概率不断增加; 而根据压缩感知理论, 能够准确重构原始数据的概率与观测数据量有关, 随着观测数据量的增加, 能够准确重构原始数据的概率随之增加;

而观测数据量的增加,意味着保留的原始信息量增加.因此,从高概率重构角度来说,压缩感知的观测数据所代表的原始信息量与 PCA 保留系数所代表的原始信息量是一致的.

5 总结

图像稀疏度是压缩感知理论的基础,在理论研究中应用广泛,但是鲜有文献给出图像稀疏度的估计方法.本文在压缩感知理论框架下,对 WT 理论及 PCA 理论进行描述,由此提出 PCA 是图像稀疏化表示的一个特例.在此基础上,提出基于 PCA 的稀疏度估计方法,通过计算机仿真对该方法进行验

证,验证结果中,本文所提方法的计算值与压缩感知实测值间最大相对偏差为 4.53%,最小相对偏差为 0.76%,平均相对偏差为 2.51%,表明本文所提方法的正确性.最后,从压缩感知高概率重构角度,对压缩感知的观测数据量和 PCA 系数方差进行统一.

与小波变换稀疏度估计方法相比,主成分变换方法表示具有速度快、复杂度低等优点,而且评价结果更客观,避免了 WT 方法中不同基函数选择对稀疏度估计结果的影响.但是,由于无法遍历自然界中的所有图像,本文所提方法的绝对普适性无法通过仿真验证.此外,受运算量和时间的约束,在仿真过程中,对于图像的观测数据量不是连续递增,这有可能降低验证结果的精度.

-
- [1] Donoho D 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 1289
- [2] Zhao X F, Huang S X, Xiang J, Shi W L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 099201
- [3] Liu Y Y, Lü Q B, Zeng X R, Huang M, Xiang L B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 060203 (in Chinese) [刘扬阳, 吕群波, 曾晓茹, 黄旻, 相里斌 2013 物理学报 **62** 060203]
- [4] Jin X L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 692 (in Chinese) [季小玲 2010 物理学报 **59** 692]
- [5] Wei H Y, Wu Z S, Peng H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6666 (in Chinese) [韦宏艳, 吴振森, 彭辉 2008 物理学报 **57** 6666]
- [6] Candès E J, Romberg J, Tao T 2006 *IEEE Trans. Signal Process.* **52** 489
- [7] Duarte M F, Baraniuk R G 2012 *IEEE Trans. Image Proc.* **21** 494
- [8] Jin L X, Zhang R F 2013 *Chin. Phys. B* **22** 064203
- [9] Tsaig Y, Donoho D L 2006 *Signal Process.* **86** 549
- [10] Duarte M F 2008 *IEEE Signal Proc. Mag.* **25** 83
- [11] Zhang H M, Wang L Y, Yan B, Li L, Xi X Q, Liu L Z 2013 *Chin. Phys. B* **22** 078701
- [12] He L, Carin L 2009 *IEEE Trans. Signal Process.* **57** 3488
- [13] Xue B, Chen X D, Zhang Y, Liu B 2011 *Signal Process.* **9** 1085
- [14] Duarte M F, Wakin M, Baraniuk R G 2008 *Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Process. (ICASSP)* Las Vegas USA March 30 – April 4, 2008 p5137
- [15] Hu L Y, Fan H Y 2011 *Chin. Phys. B* **19** 074205
- [16] Tropp J A, Gilbert A C 2007 *IEEE Trans. Inform. Theory* **53** 4655
- [17] Ronald A D 1998 *Acta Numerica* **7** 51
- [18] Kim E, Paul G 1987 *Principal Component Analysis* (Amsterdam: Elsevier Science Publishers) pp37–52

Image sparsity evaluation based on principle component analysis*

Ma Yuan¹⁾²⁾ Lü Qun-Bo^{1)†} Liu Yang-Yang¹⁾ Qian Lu-Lu¹⁾ Pei Lin-Lin¹⁾²⁾

1) (Key Laboratory of Computational Optics Imaging Technology, Academy of Opto-electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100094, China)

2) (University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

(Received 29 May 2013; revised manuscript received 30 July 2013)

Abstract

In compressive sensing, signal sparsity is an important parameter which influences the number of data sampling in reconstruction process and the quantity of the reconstructed result. But in practice, undersampled and oversampled phenomenon will occur because of the unknown sparsity, which may lose the advantages of compressive sensing. So how to determine the image sparsity quickly and accurately is significant in the compressive sensing process. In this paper, we calculate the image sparsity based on the data acquired during compressive sensing reconstruction projection which sparses the origin image in wavelets domain, but we find that its procession is complex, and the final results are seriously influenced by wavelet basis function and the transform scales. We then introduce the principle component analysis (PCA) theory combined with compressive sensing, and establish a linear relationship between image sparsity and coefficient function variance based on the assumption that PCA is of approximately normal distribution. Multiple sets of experiment data verify the correctness of the linear relationship mentioned above. Through previous analysis and simulation, the sparsity estimation based on PCA has an important practical value for compressive sensing study.

Keywords: compressive sensing, sparsity, wavelet transform, principle component analysis

PACS: 42.30.Va, 42.30.Wb, 02.30.Zz

DOI: 10.7498/aps.62.204202

* Project supported by the National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China (Grant No. 61225024) and the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2011AA7012022).

† Corresponding author. E-mail: lvqunbo@aoe.ac.cn