

# 介质加载复合光栅结构的色散特性研究\*

曹苗苗<sup>1)2)</sup> 刘文鑫<sup>1)†</sup> 王勇<sup>1)</sup> 李科<sup>1)2)</sup>

1)(中国科学院电子学研究所, 中国科学院高功率微波源与技术重点实验室, 北京 100190)

2)(中国科学院大学, 北京 100049)

(2013年9月5日收到; 2013年10月23日收到修改稿)

提出了一种用于Smith-Purcell器件的介质加载金属光栅周期慢波结构. 通过采用本征函数法和单模近似法求解了介质加载金属光栅的“热”色散方程, 在同步点得到了注-波相互作用的一阶和二阶增长率, 分析了光栅槽宽和槽深对色散特性的影响, 并研究了电子注参数及其与光栅表面距离等主要参数对增长率特性的影响. 结果表明: 通过介质加载金属光栅有利于减弱色散, 随着介质相对介电常数、槽宽度以及深度的增大, 色散曲线变平缓且向低频区移动; 当电子注参数变化时, 一阶增长率曲线从整体上粗略地描述增长率变化趋势, 二阶曲线则更精细地描述增长率相应值的变化. 利用软件MAGIC对该结构的色散特性进行了二维模拟, 模拟结果与理论计算值符合良好.

**关键词:** 介质加载金属光栅, 本征函数法, 单模近似法, “热”色散方程

**PACS:** 41.60.Cr, 52.59.Rz, 07.57.Hm

**DOI:** 10.7498/aps.63.024101

## 1 引言

1953年, Smith和Purcell<sup>[1]</sup>发现, 当电子注贴近开放的周期性金属光栅表面飞过时, 将激励起电磁波(毫米波远红外波段)辐射, 这种现象称为Smith-Purcell (S-P)效应. 基于S-P效应建立的绕射辐射振荡器(orostrons)<sup>[2]</sup>和自由电子激光(S-P FEL)<sup>[3,4]</sup>在国外特别是俄罗斯、乌克兰、日本和欧美等国家开展了大量的理论和实验研究<sup>[5]</sup>, 并观察到了从3 mm到8.3 mm的辐射, 输出功率从几毫瓦到几十千瓦. 1998年, 美国Bakhtyari等<sup>[6]</sup>, Urata等<sup>[7]</sup>利用低能散度、低发射度的电子注驱动周期性光栅结构, 在实验中观测到了S-P效应的超辐射现象, 为S-P辐射的研究提供了新方向, 对发展新型的S-P FEL具有重要的意义. 这一辐射效应可能成为发展新型紧凑、可调、高功率太赫兹器件的有效途径<sup>[8]</sup>. 最近, 乌克兰和德国科学家利

用1.9 MeV和1.56 MeV电子注获得了在0.1 mm和0.22 mm波长上的S-P自发辐射<sup>[9]</sup>. 国内中国科学院高能物理研究所、上海光机所和电子科技大学等单位的研究人员也做出了富有成效的工作<sup>[10,11]</sup>, 中国科学院电子学研究所也在开展相关方向的研究. 以上研究中, 系统的电磁慢波结构多采用刻有周期槽的全金属平板光栅, 这种结构热耗散能力强、功率容量大, 但是色散较强.

为了减弱系统的色散, 本文在周期金属光栅的基础上提出一种介质加载金属光栅慢波结构. 介质加载在矩形波导中已有部分研究<sup>[12,13]</sup>, 但是在基于S-P效应的开放式金属光栅中加载介质还鲜有介绍. 本文首先利用本征模法和单模近似法得到了介质加载金属光栅周期结构的“热”色散方程, 并由此推导出注-波相互作用的一阶增长率和二阶增长率; 同时, 分析了结构参数和电子注参数变化时色散特性和增长率特性的变化, 并利用软件MAGIC对该结构的色散特性进行了模拟, 理论值与模拟值符合

\* 国家自然科学基金(批准号: 10905032, 11275004)、国家高技术研究发展计划(批准号: 2012AA8122007A)和中国科学院知识创新工程重要方向性项目(批准号: YYYJ-11235)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: [lwenxin@mail.ie.ac.cn](mailto:lwenxin@mail.ie.ac.cn)

良好, 验证了理论推导的正确性.

## 2 物理模型与色散方程的推导

介质加载复合光栅是在金属矩形光栅基础上提出的一种新型周期结构, 在金属矩形光栅槽中填充相对介电常数为  $\varepsilon$  的介质, 以此来研究当电子束贴近光栅上表面通过时复合光栅的辐射特性. 二维结构如图 1 所示, 图中光栅的周期长度为  $L$ , 槽宽度为  $d$ , 槽深度为  $h$ , 光栅在  $y$  方向均匀无变化, 可认为系统在  $y$  方向无限伸展, 忽略  $y$  方向的边缘效应, 场不再是  $y$  的函数, 即  $\partial/\partial y = 0$ . 电子束距离光栅表面距离为  $b$ , 电子注厚度为  $2a$ , 密度均匀分布. 以光栅上表面为坐标零点取直角坐标系, 此结构具有周期性, 因此取  $z$  为  $0-L$  作为一个周期进行研究. 沿  $x$  轴将研究区域分为 I ( $x > 2a + b$ ) 自由空间, II ( $b \leq x \leq b + 2a$ ) 电子束所在区域, III ( $0 \leq x < b$ ) 电子注与光栅之间区域, IV ( $-h \leq x < 0, 0 < z < d$ ) 介质填充区域 (图中网格部分) 与 V ( $-h \leq x < 0, d < z < L$ ) 金属栅五个部分, 研究各个区域内的场. 场对时间的依赖关系为  $\exp(-i\omega t)$ , 本栅状系统中只研究具有纵向场分量的横磁(TM)波. 为使问题简化, 假设如下<sup>[14]</sup>:

- 1) 引导磁场无穷大, 电子注只有纵向 ( $z$  向) 运动, 而无横向运动;
- 2) 小振幅假设, 即所有的交变分量都比相应的直流分量小许多.

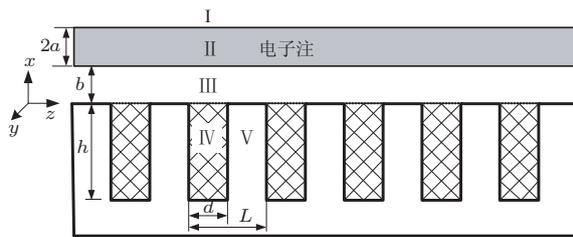


图 1 介质加载金属光栅物理模型

考虑连续电子束, 由电子的连续性方程、运动方程、相对论力学方程得:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad (1)$$

$$\gamma^3 m_0 n \left( \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \mathbf{v}_e \right) = -en_e \mathbf{E}, \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{J} = en_e \mathbf{v}_e$ ,  $n_e = n_0 + \delta n$ ,  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v}$ ;  $m_0, n_e, \mathbf{v}_e$  分别是电子的质量、电子数密度和电子

流动速度.  $n_0, v_0$  表示无扰动时的量,  $\delta n, \delta v$  表示扰动量,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v_0/c)^2}$  是相对论因子,  $c$  代表光速. 在线性理论中, 忽略二阶小量, 化简得:

$$\mathbf{J} = -i\omega\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\gamma^3(\omega - k_n v_0)^2} \mathbf{E}_z, \quad (3)$$

其中,  $\varepsilon_0$  是真空中介电常数;  $\omega_p^2 = e^2 n_0 / (m_0 \varepsilon_0)$  是等离子体频率;  $(\omega - k_n v_0)$  是第  $n$  次空间谐波的多普勒频移;  $k_n = k_0 + 2\pi n/L$ ,  $k_0 = \phi/L$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $k_n$  是第  $n$  次空间谐波在  $z$  方向上的传播常数,  $k_0$  是基波即零次空间谐波的传播常数,  $\phi$  为在一个周期内的基波相移.

由真空中的麦克斯韦方程得:

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu_0 \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} - i\omega\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\gamma^3(\omega - k_n v_0)^2} \mathbf{E}. \quad (5)$$

由 (5) 式, 电子束所在区可视为具有如下相对介电系数的等效介质层:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中  $\chi_2 = 1 - \omega_p^2 / [\gamma^3(\omega - k_n v_0)^2]$  是电子束等效相对介电常数. 由 Floquet's 定理, 相距整数个周期两点的电磁波分量只相差一个与距离相关的传播函数

$$\mathbf{H}(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_n(x) \exp[i(k_n z - \omega t)]. \quad (7)$$

联立 (1)–(7) 式, 化简得到电子束所在区域的齐次亥姆霍兹方程:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \chi_2 \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_n^2 \right) \right] H_{y,l}(x) = 0, \quad (8)$$

$$E_{x,l} = -\frac{i}{\omega\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} H_{y,l}(x), \quad (9)$$

$$E_{z,l} = \frac{i}{\omega\varepsilon_0 \chi_2} \frac{\partial}{\partial x} H_{y,l}(x). \quad (10)$$

### 2.1 本征函数法

按照如图所示的五个区域的划分, 分别由 (8)–(10) 式写出各区场方程.

I 区 ( $x > 2a + b$ ) 内场方程为

$$H_{y,1} = A_n \exp(i\kappa_n x), \quad (11)$$

$$E_{z,1} = -\frac{\kappa_n}{\omega\varepsilon_0} A_n \exp(i\kappa_n x), \quad (12)$$

其中,  $\kappa_n = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_n^2}$  是  $x$  方向的传播波常数; II 区 ( $b \leq x \leq b + 2a$ ) 是电子束所在区域, 区域中场可以写成

$$H_{y,2} = B_n [\exp(i\sqrt{\chi_2}\kappa_n x) + R_n \exp(-i\sqrt{\chi_2}\kappa_n x)], \quad (13)$$

$$E_{z,2} = -\frac{\kappa_n}{\omega\varepsilon_0\sqrt{\chi_2}} B_n [\exp(i\sqrt{\chi_2}\kappa_n x) - R_n \exp(-i\sqrt{\chi_2}\kappa_n x)]; \quad (14)$$

III 区 ( $0 \leq x < b$ ) 场表达式为

$$H_{y,3} = C_n [\exp(i\kappa_n x) + T_n \exp(-i\kappa_n x)], \quad (15)$$

$$E_{z,3} = -\frac{\kappa_n}{\omega\varepsilon_0} C_n [\exp(i\kappa_n x) - T_n \exp(-i\kappa_n x)], \quad (16)$$

其中,  $R_n, T_n$  为在边界面  $x = b + 2a$  和  $x = b$  的反射系数,  $A_n, B_n$  和  $C_n$  是场幅值系数;

IV 区在光栅槽区内, 整个区域被相对介电常数为  $\varepsilon$  的介质填充, 其中的场可以通过傅里叶展开表示为无限驻波之和的形式:

V 区为金属光栅, 其中的电场为零, 由边界条件  $E_z|_{x=-h} = 0, E_x|_{z=0,d} = 0$  得场方程为

$$H_{y,4} = \sum_{m=0}^{\infty} D_m \cosh[V_m(x+h)] \times \cosh\left(\frac{m\pi}{d}z\right), \quad (17)$$

$$E_{z,4} = \begin{cases} \frac{iV_m}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} D_m \sinh[V_m(x+h)] \cos\left(\frac{m\pi}{d}z\right) & 0 \leq z \leq d, \\ 0 & d \leq z \leq L \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $V_m = \sqrt{(m\pi/d)^2 - (\omega/c)^2\varepsilon}$  为  $x$  方向的传播常数,  $D_m$  是场幅值系数.

考虑到横向电磁场量的连续性条件, 经过复杂的数学运算, 可以求出反射系数  $R_n, T_n$ :

$$R_n = \frac{1 - \sqrt{\chi_2}}{1 + \sqrt{\chi_2}} \exp[i2\sqrt{\chi_2}\kappa_n(b+2a)], \quad (19)$$

$$T_n = \frac{(1 - \chi_2) \exp(i2\kappa_n b) [\exp(i4\kappa_n \sqrt{\chi_2} a) - 1]}{(1 + \sqrt{\chi_2})^2 - (1 - \sqrt{\chi_2})^2 \exp(i4\kappa_n \sqrt{\chi_2} a)}. \quad (20)$$

在 (17) 两边同乘以  $\cos(p\pi z/d)$  并对  $z$  从 0 到  $d$  积分,  $p$  为整数, 化简得:

$$D_p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F_{np}, \quad (21)$$

其中,

$$\delta_{p0} = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}, \quad (22)$$

$$F_{np} = \frac{(1 + T_n)}{\cosh(V_p h) \frac{1 + \delta_{p0}}{2}} \times \frac{-ik_n d [1 - (-1)^p \exp(ik_n d)]}{k_n^2 d^2 - p^2 \pi^2}. \quad (23)$$

在 (18) 两边同乘以  $\exp(-ik_i z)$  并对  $z$  从 0 到  $L$  积分,  $k_i = k_0 + 2\pi i/L$ ,  $i$  为整数, 得:

$$C_i = \sum_{m=0}^{\infty} D_m Q_{mi}, \quad (24)$$

其中,

$$Q_{mi} = \frac{V_m \sinh(V_m h)}{\varepsilon \kappa_i (1 - T_i) L} \times \frac{k_i d^2 [1 - (-1)^m \exp(-ik_i d)]}{k_i^2 d^2 - m^2 \pi^2}. \quad (25)$$

由 (21) 和 (24) 式得:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \delta_{ni} - \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm} Q_{mi} \right) C_n = 0, \quad (26)$$

其中,

$$F_{nm} Q_{mi} = -ik_n k_i d^3 \frac{V_m \tanh(V_m h) (1 + T_n)}{\varepsilon \kappa_i L \frac{1 + \delta_{m0}}{2} (1 - T_i)} \times \frac{[1 - (-1)^m \exp(ik_n d)]}{k_n^2 d^2 - m^2 \pi^2} \times \frac{[1 - (-1)^m \exp(-ik_i d)]}{k_i^2 d^2 - m^2 \pi^2}. \quad (27)$$

(26) 式用矩阵形式可表示为

$$(\mathbf{I} - \mathbf{FQ})\mathbf{C} = 0, \quad (28)$$

其中  $\mathbf{C} = (\dots, c_{-n}, \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)^T$ , 若  $\mathbf{C}$  要有非零解, 则 (28) 式系数矩阵行列式的值必须为零, 即

$$\det\{\mathbf{I} - \mathbf{FQ}\} = 0. \quad (29)$$

考虑  $m = 0$ , 无电子注时, 上式化简为

$$1 + i \frac{V_0 \tanh(V_0 h) d}{\varepsilon \kappa_i L} \operatorname{sinc}\left(\frac{k_n d}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_i d}{2}\right) \times \exp\left(i \frac{k_n - k_i}{2} d\right) = 0, \quad (30)$$

(29) 式即为当电子注平行介质加载复合光栅结构飞过时的色散方程. 对于没有介质加载的情况, 即  $\varepsilon = 1$  时, (29) 式自动退化为金属光栅的情况, 结果与文献 [15] 一致.

## 2.2 单模近似法

由于介质加载复合结构的几何周期小于真空中TEM基模的波长,且电磁场量对 $z$ 的依赖可以忽略,那么对光栅槽内场型的处理可采用单模近似法<sup>[16-18]</sup>(single-mode approximation method, S-MAM),即仅考虑槽内场区的最低模式.在此情况下,槽中的场是均匀的,槽中只存在TEM的驻波.这种方法能够较好地分析慢波结构的特性,同时还能大大降低理论推导的复杂度,即场区IV内的场型可以近似地由(17)和(18)式最低模式表示:

$$H_{y,4} = D_0 \cosh[V_0(x+h)], \quad (31)$$

$$E_{z,4} = \begin{cases} \frac{iV_0}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} D_0 \sinh[V_0(x+h)] & 0 \leq z \leq d \\ 0 & d \leq z \leq L \end{cases}. \quad (32)$$

边界条件 $x=0$ 处:

$$C_n(1+T_n)\exp(ik_n z) = D_0 \cosh(V_0 h), \quad (33)$$

$$-\frac{\kappa_n}{\omega\varepsilon_0} C_n(1-T_n)\exp(ik_n z) = \begin{cases} \frac{iV_0}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} D_0 \sinh(V_0 h) & 0 \leq z \leq d \\ 0 & d \leq z \leq L \end{cases}. \quad (34)$$

经过复杂的数学计算得单模近似的“热”色散方程为

$$P(\omega, k_n, \chi_n) = \frac{V_0 \sinh(V_0 h) d}{\varepsilon L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1+T_n)}{\kappa_n(1-T_n)} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_n d}{2}\right) - i \cosh(V_0 h) = 0; \quad (35)$$

当电子注密度趋于零,即 $T_n \rightarrow 0$ 时,上式化简为

$$\frac{V_0 \sinh(V_0 h) d}{\varepsilon L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa_n} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_n d}{2}\right) - i \cosh(V_0 h) = 0. \quad (36)$$

## 3 一阶线性增长率与二阶增长率的求解

### 3.1 一阶线性增长率

当工作频率一定时,求解超越方程(35)即可获得系统的复传播常数.然而,超越方程的求解过程非常繁琐,其解析解也较难确定.因此,使用泰勒级

数将色散方程(35)在 $\chi_2 = 1$ 和同步点 $(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}})$ 处展开,取到一阶线性项:

$$P(\omega, k_n, \chi_2) = P(\omega, k_n, \chi_2)|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)} + (k_n - k_{\text{res}}) \frac{\partial P(\omega, k_n, \chi_2=1)}{\partial k_n} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}})} + (\chi_2 - 1) \frac{\partial P(\omega, k_n, \chi_2)}{\partial \chi_2} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)}. \quad (37)$$

在同步点附近,注-波互作用产生一个不稳定性增长,利用注-波同步条件,令 $\omega_{\text{res}} = v_0 k_{\text{res}}$ ,则 $\chi_2$ 化简为

$$\chi_2 + \frac{\omega_p^2}{v_0^2 \gamma^2 (k_{\text{res}} - k_n)^2} - 1 = 0, \quad (38)$$

代入(37)式,令 $(k_n - k_{\text{res}}) = \delta k$ ,化简得:

$$\delta k^3 \frac{\partial P(\omega, k_n, \chi_2=1)}{\partial k_n} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}})} - \frac{\omega_p^2}{v_0^2 \gamma^2} \frac{\partial P(\omega, k_n, \chi_2)}{\partial \chi_2} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)} = 0. \quad (39)$$

方程(39)中的两个偏微分可表示为(40)和(41)两式,即

$$\frac{\partial P(\omega, k_n, \chi_2)}{\partial \chi_2} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)} = \frac{V_0 \sinh(V_0 h) d}{\varepsilon L} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-\exp(2i\kappa_n b) [\exp(4i\kappa_n a) - 1]}{2\kappa_n} D_1, \quad (40)$$

$$\frac{\partial P(\omega, k_n, \chi_2=1)}{\partial k_n} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}})} = \frac{V_0 \sinh(V_0 h) d}{\varepsilon L} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_n}{\kappa_n^3} D_1 + \frac{D_2}{\kappa_n} \right), \quad (41)$$

其中,  $D_1 = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_n d}{2}\right)$ ,

$$D_2 = 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{k_n d}{2}\right) \frac{k_n d \cos\left(\frac{k_n d}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{k_n d}{2}\right)}{d k_n^2}.$$

求解关于 $\delta k$ 的方程(39),找出有负虚部的根,此根的虚部可用来表征互作用系统的一阶增长率.

### 3.2 二阶增长率

在已有的求增长率的文献中, 都只研究取到泰勒级数展开后一阶线性项的情况, 显然, 这只是色

散方程 (35) 的近似解. 为了更准确地求解色散方程, 从而在同步点处得到较准确的  $k_n$ , 这里研究将色散方程 (35) 在  $\chi_2 = 1$  和同步点  $(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}})$  处泰勒展开后, 取到二阶导数项的情况.

$$\begin{aligned}
 P(\omega, k_n, \chi_2) = & P(\omega, k_n, \chi_2)|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)} + \delta k \frac{\partial P(\omega, k_n, \chi_2 = 1)}{\partial k_n} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}})} \\
 & + (\chi_2 - 1) \frac{\partial P(\omega, k_n, \chi_2)}{\partial \chi_2} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)} + \frac{1}{2} (\chi_2 - 1)^2 \frac{\partial^2 P(\omega, k_n, \chi_2)}{\partial \chi_2^2} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)} \\
 & + \frac{1}{2} \delta k^2 \frac{\partial^2 P(\omega, k_n, \chi_2 = 1)}{\partial k_n^2} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}})} + (\chi_2 - 1) \delta k \frac{\partial^2 P(\omega, k_n, \chi_2)}{\partial \chi_2 \partial k_n} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)}. \quad (42)
 \end{aligned}$$

在同步点附近, 注-波相互作用产生一个不稳定性增长, 利用注-波同步条件, 令  $\omega_{\text{res}} = v_0 k_{\text{res}}$ , 将 (38) 式代入 (42) 式化简得:

$$\begin{aligned}
 & \delta k^6 \frac{\partial G}{\partial k_n} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}})} + 2\delta k^5 G|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}})} - \frac{\omega_p^2}{v_0^2 \gamma^2} \delta k^3 \frac{\partial F}{\partial k_n} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)} - 2 \frac{\omega_p^2}{v_0^2 \gamma^2} \delta k^2 F|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)} \\
 & + \frac{\omega_p^4}{v_0^4 \gamma^4} \frac{\partial F}{\partial \chi_2} \Big|_{(\omega_{\text{res}}, k_{\text{res}}, \chi_2=1)} = 0, \quad (43)
 \end{aligned}$$

式中偏微分方程表示如下:

$$G = \frac{\partial P(\omega, k_n, \chi_2 = 1)}{\partial k_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\kappa_n D_2 + D_1 \frac{k_n}{\kappa_n}}{\kappa_n^2}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial G}{\partial k_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\kappa_n^2 D_3 + D_1 \frac{k_n^2}{\kappa_n^2} + D_1) - 2(\kappa_n D_2 + D_1 \frac{k_n}{\kappa_n})}{\kappa_n^3}, \quad (45)$$

$$F = \frac{\partial P(\omega, k_n, \chi_2)}{\partial \chi_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{D_1}{\kappa_n} \frac{\partial F_1}{\partial \chi_2}, \quad (46)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \chi_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{D_1}{\kappa_n} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi_2^2}, \quad (47)$$

$$\frac{\partial F}{\partial k_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{D_1}{\kappa_n} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi_2 \partial k_n} + G \frac{\partial F_1}{\partial \chi_2}, \quad (48)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 D_3 = & 2 \left( \frac{k_n d \cos\left(\frac{k_n d}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{k_n d}{2}\right)}{d k_n^2} \right)^2 \\
 & + 2 \text{sinc}\left(\frac{k_n d}{2}\right) \frac{8 \sin\left(\frac{k_n d}{2}\right) - d^2 k_n^2 \sin\left(\frac{k_n d}{2}\right) - 4 k_n d \cos\left(\frac{k_n d}{2}\right)}{2 k_n^3 d} \\
 \frac{\partial F_1}{\partial \chi_2} = & \frac{-\exp(i2\kappa_n b) [\exp(i4\kappa_n \sqrt{\chi_2} a) - 1]}{2} \\
 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi_2^2} = & \frac{2 \exp(i2\kappa_n b) [\exp(i4\kappa_n a) - 1] - 8 i \kappa_n a \exp(i2\kappa_n b) \exp(i4\kappa_n a) + \exp(i4\kappa_n b) [\exp(i4\kappa_n a) - 1]^2}{4} \\
 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi_2 \partial k_n} = & \frac{-k_n}{\kappa_n} \frac{i2b \exp(i2\kappa_n b) - i(2b + 4a) \exp[i(2b + 4a)\kappa_n]}{2}.
 \end{aligned}$$

(43)式是关于相位常数 $k_n$ 的一元六次方程,当给定频率 $f$ 时,可求得相互作用系统的 $z$ 方向复传播常数 $k_n$ ,得到六个复数根, $k_n$ 的负虚部即表征注-波相互作用系统的二阶增长率,由于泰勒级数展开取到了二次偏导项,所以由(43)式求出的二阶增长率比由(39)式求出的一阶增长率更能精确表示增长率特性.

## 4 数值计算与分析

### 4.1 色散曲线

将本征函数和单模近似两种方法求得的色散方程用MATLAB画出色散曲线并比较,为了验证以上理论推导的正确性,利用软件MAGIC对该结构进行二维模拟来比较判断.相关数值计算参数如表1所示.

图2为在表1参数情况下,当取不同的介电常数时,用MATLAB数值计算(31)式所得的介质加载金属光栅色散曲线.由图2可见,与纯金属光栅相比,介质加载金属光栅色散曲线较为平坦,且随着介质介电常数的增大,色散曲线逐渐变缓,中间段也逐渐变平坦,说明介质加载金属光栅结构可以有效减弱色散,这有利于介质加载金属光栅工作于单模状态.图3为在表1参数情况下,当取不同的介电常数时,用MATLAB数值计算本征函数法推导的色散曲线(31)式和单模近似法得到的色散曲线(36)式所得色散曲线的比较.由图3可见,与本征函数计算方法相比,单模近似方法不仅简单,而且计算得到的点几乎都在本征函数计算得到的曲线上,两种方法得到的结果非常符合,说明单模近似方法计算结果是有效的.这为以后计算光栅结构较复杂的色散曲线提供了快捷简便的方法.

表1 数值计算参数

参数	数值
光栅周期/mm	0.2
槽宽度/mm	0.1
槽深度/mm	0.1
电子束中心距光栅表面距离/mm	0.034
电子束电压/kV	40
电子束电流/A	0.48
引导磁场/T	2

图4为在表1参数情况下,当取不同的介电常数时,用MATLAB数值计算式(30)和用软件

MAGIC 二维仿真得到的色散曲线的比较.图4表明理论公式得到的色散曲线与MAGIC模拟得到的点基本在同一条曲线上,最大频率差不超过1%,即色散方程数值计算与模拟结果相比符合良好,从而证明之前对色散方程的推导是正确的.

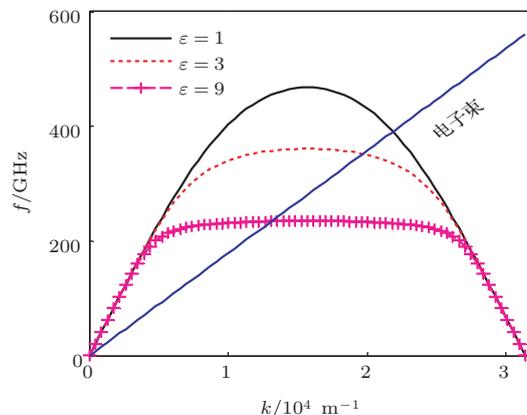


图2 不同介电常数下光栅色散曲线

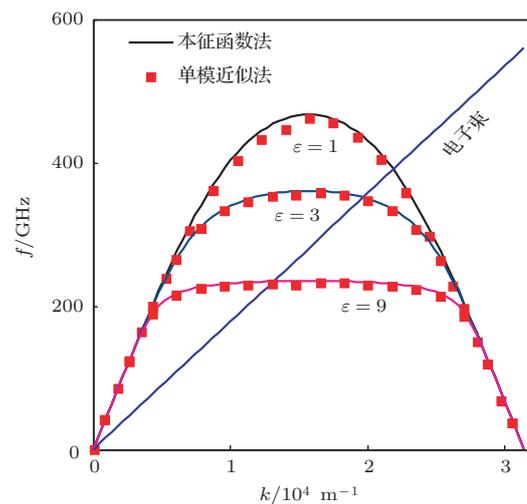


图3 光栅色散曲线两种方法比较

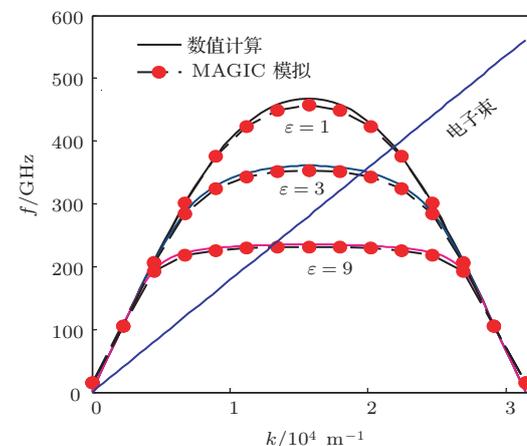


图4 色散曲线数值计算与MAGIC模拟比较

为了进一步研究光栅结构参数对色散特性的影响, 我们研究了不同槽宽度和深度下色散特性的变化, 见图 5 (介质相对介电常数取 3).

图 5 为在表 1 参数情况下, 当取介电常数为 3 不变, 改变光栅槽宽度  $d$  和深度  $h$  时, 用 MATLAB

数值计算 (31) 式得到的介质加载金属光栅色散曲线. 从图 5 可以看到, 其他参数不变的情况下, 槽的间距变大, 色散曲线变平缓且向低频移动; 光栅槽的深度加深, 色散曲线变缓, 平坦度提高且向低频移动.

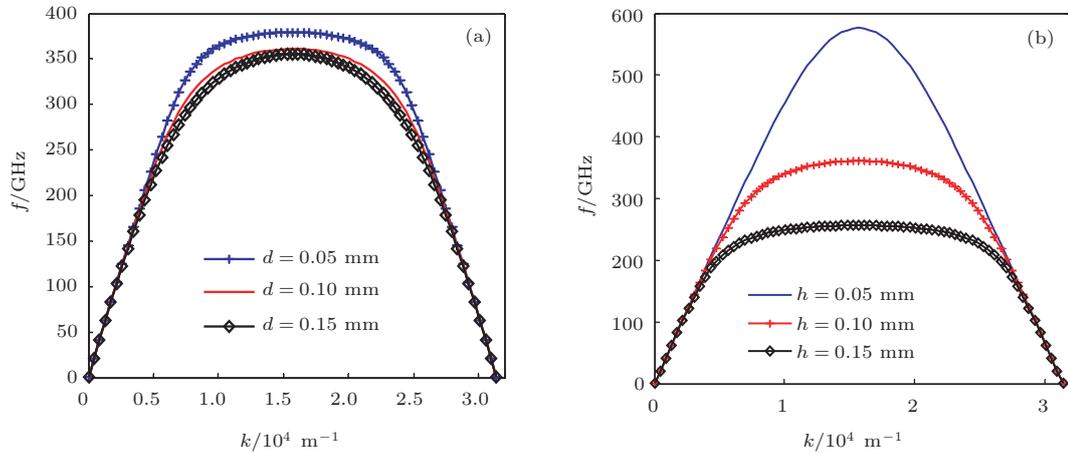


图 5 光栅色散曲线随结构参数的变化 (a) 随  $d$  的变化; (b) 随  $h$  的变化

#### 4.2 一阶与二阶增长率数值计算与比较分析

当介质相对介电常数  $\epsilon = 3$  时, 由图 2 得到注-波相互作用点为  $(k_{\text{res}}, \omega_{\text{res}}) = (1.96 \times 10^4, 700 \pi \times 10^9)$ . 电子束电压、电流和位置参数的变化将对介质加载金属光栅的注-波相互作用产生重要的影响. 将一阶增长率 (39) 式和二阶增长率 (43) 式中的无限求和做截取, 用 MATLAB 数值计算两个方程, 即可给出增长率图. 图 6 分别给出了不同电子束电压、电流、注-栅分隔距离和电子束厚度对一阶和二阶增长率的影响. 一阶增长率曲线从整体上粗略反映了增长率的变化趋势, 二阶增长率则可以比较精确地反映增长率值的变化, 因此有必要比较不同参数对一阶和二阶增长率影响的差别.

图 6 为在表 1 参数情况下, 当介电常数取 3 保持不变, 改变电子束电压、电子束电流、电子束厚度以及注-栅分隔距离时, 用 MATLAB 数值计算 (39) 和 (43) 式得到的注-波相互作用一阶增长率和二阶增长率. 图 6 (a) 表明无论是一阶还是二阶增长率, 在注-波相互作用频率点下, 都存在某一最佳电子束电压, 此时, 注-波相互作用增长率达到最大值; 一阶曲线只能反映增长率变化的大致趋势, 而二阶曲线则可以比较精确地反映增长率具体值的变化; 比

较两条曲线可知, 相同电压下, 一阶和二阶增长率的值有所差别, 分析时考虑二阶增长率更加准确. 图 6 (b) 表明一阶和二阶增长率都随着电子束电流的增大而增大, 因为随着电流的增大, 参与注-波相互作用的电子的数目增加, 使得注-波相互作用增强了; 但在实际情况下, 电流过大将会导致空间电荷效应更加明显, 从而影响电子注的传输质量. 比较两条曲线可知, 二阶增长率随电流的变化比一阶增长率敏感, 且在相同电流下, 一阶增长率小于二阶增长率, 因此只考虑由一阶展开项得到的一阶增长率显然存在误差. 图 6 (c) 说明电子束厚度增大时, 增长率增大, 但是这种增大不是无限制的, 当电子束厚度达到某一数值时, 增长率曲线不再上升而达到饱和. 这是因为表面波主要集中在矩形光栅的表面, 电子束越接近光栅表面, 电子束与表面波的相互作用程度就越强烈, 因而增长率越高. 但是, 由于轴向电场  $E_z$  在  $x$  方向呈指数衰减, 随着电子束厚度的继续增大, 增加电子所处的轴向电场  $E_z$  已经趋于 0, 不再发生注-波相互作用, 同时, 电子束厚度的增加要求电子束的质量更高, 有更小的速度零散, 以免有过多的电子被光栅吸收. 同时, 由于二阶增长率曲线在一阶增长率曲线下方, 说明相同电子束厚度下, 一阶展开算出的值比二阶展开略微偏大,

但二者差别非常小. 图 6(d) 显示, 增长率随注-栅分隔距离的增大而减小, 这是因为轴向电场  $E_z$  是表面波, 在栅表面时场强最强, 表面波幅值最大, 远离栅表面后, 场强呈指数衰减, 所以随着注-栅分隔距离的增大, 注-波互作用减弱, 增长率减小. 同时

可以看出, 两条曲线符合良好, 说明相同注-栅分隔距离下两种增长率差别很小. 综上所述, 当电子束电压、电流变化时, 二阶增长率比一阶增长率可以更准确地描述增长率的变化情况; 当电子束厚度、离栅距离变化时, 两种增长率变化曲线差别很小.

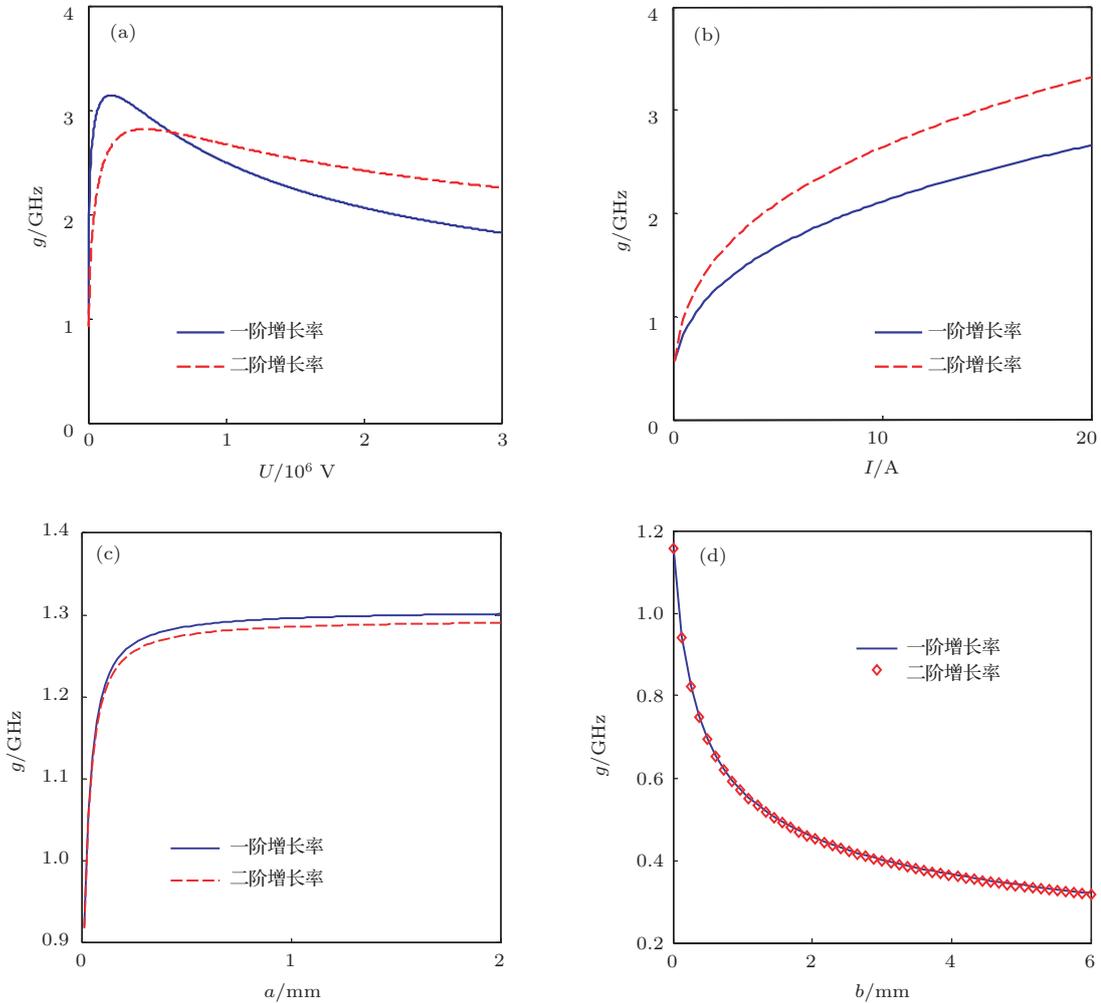


图 6 不同电子注参数和结构参数对空间增长率的影响 (a) 电子束电压影响 ( $f = 350$  GHz,  $J = 2 \times 10^4$  A/cm<sup>2</sup>,  $a = 0.012$  mm,  $b = 0.034$  mm); (b) 电子束电流影响 ( $f = 350$  GHz,  $U = 40$  kV,  $a = 0.012$  mm,  $b = 0.034$  mm); (c) 电子束厚度影响 ( $f = 350$  GHz,  $U = 40$  kV,  $I = 0.48$  A,  $b = 0.034$  m); (d) 注-栅分隔距离影响 ( $f = 350$  GHz,  $U = 40$  kV,  $I = 0.48$  A,  $a = 0.012$  mm)

## 5 结 论

本文用本征函数法和单模近似两种方法算出了介质加载复合结构光栅的“热”色散方程以及该结构的注-波相互作用一阶和二阶增长率, 理论计算结果与 MAGIC 模拟结果比较符合. 利用数值计算研究了结构参数和电子注参数对系统色散特性以及注-波相互作用增长率特性的影响. 结果表明: 与纯金属光栅相比, 介质加载金属光栅的色散曲线较

为平坦, 说明此结构可以有效地减弱光栅的色散, 这有利于光栅工作于单模状态且随着介质相对介电常数、槽宽度以及深度的增大, 色散曲线变缓且向低频移动, 中间段也变平坦. 进一步数值计算表明, 当电子束电压、电流变化时, 二阶增长率比一阶增长率可以更准确地描述增长率的变化情况; 当电子束厚度、离栅距离变化时, 两种增长率变化曲线差别很小. 本文的研究结果对发展新型慢波结构,

探究太赫兹相干辐射的注-波相互作用特性有一定的参考价值.

### 参考文献

- [1] Smith S J, Purcell E M 1953 *Phys. Rev.* **92** 4
- [2] Marshall E M, Phillips P M, Walsh J E 1988 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **16** 2
- [3] Saviz S, Rezaei Z, Aghamir F M 2012 *Chin. Phys. B* **21** 9
- [4] Wang M H, Ren Z M, Meng X Z 2011 *Chin. Phys. B* **20** 5
- [5] Bratman V L, Dumesh B S 2002 *Int. J. Infrar. Millim. Waves* **23** 11
- [6] Bakhtyari A, Walsh J E, Brownell J H 2002 *Phys. Rev. E* **65** 6
- [7] Urata J, Goldstein M, Kimmitt M F, Naumov A, Platt C, Walsh J E 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3
- [8] Wu J Q 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 11
- [9] Doucas G 2003 *Int. J. Infrar. Millim. Waves* **24** 6
- [10] Chen J W, Fu S F, Zhang D K 1984 *Acta Opt. Sin.* **4** 7 (in Chinese) [陈建文, 傅淑芬, 张大可 1984 光学学报 **4** 7]
- [11] Xiong P F, Wang Y T 1996 *High Power Laser and Particle Beams* **8** 1 (in Chinese) [熊平凡, 王友棠 1996 强激光与粒子束 **8** 1]
- [12] Lu Z G, Wei Y Y, Gong Y B 2006 *J. Infrar. Millim. Waves* **25** 5 (in Chinese) [路志刚, 魏彦玉, 宫玉彬 2006 红外与毫米波学报 **25** 5]
- [13] Wang W X, Gong Y B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 12 (in Chinese) [王文祥, 宫玉彬, 魏彦玉 2007 物理学报 **56** 12]
- [14] Zhang K Q, Li D J 2001 *Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) p382 (in Chinese) [张克潜, 李德杰 2001 微波与光电子学中的电磁理论 (北京: 电子工业出版社) 第382页]
- [15] Liu W X, Yang Z Q 2008 *J. Infrar. Millim. Waves* **27** 2 (in Chinese) [刘文鑫, 杨梓强 2008 红外与毫米波学报 **27** 2]
- [16] McVey B D 1994 *Microwave Theory and Techniques IEEE Trans. on* **42** 6
- [17] Joe J, Louis L J, Share J E, Booske J H 1997 *Phys. Plasmas* **4** 12
- [18] Joe J, Share J E, Booske J H 1994 *Phys. Plasmas* **1** 1

# Dispersion characteristics of dielectric loaded metal grating\*

Cao Miao-Miao<sup>1)2)</sup> Liu Wen-Xin<sup>1)†</sup> Wang Yong<sup>1)</sup> Li Ke<sup>1)2)</sup>

1) (Key Laboratory of High Power Microwave Sources and Technologies, Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

2) (University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

( Received 5 September 2013; revised manuscript received 23 October 2013 )

## Abstract

A novel type of slow-wave structure for Smith-Purcell device called dielectric loaded metal grating, is proposed in this article. The “hot” dispersion align of the structure is obtained by using the eigen-function method and single-mode approximation. The first- and second-order growth rate of beam-wave interaction are obtained at the synchronization point. The effects of grating groove width and depth on dispersion characteristic are analyzed, and the influences of electron beam parameters and distance between electron beam and grating surface on growth rate characteristic are also studied. The results show that dielectric-loaded metal grating can effectively weaken the structure dispersion, and that with the increases of relative dielectric permittivity, groove width and depth, the dispersion curve becomes flatter and moves toward low frequency. When the electron beam voltage or current changes, the first-order growth rate curve can only roughly describe the change trend, while the second-order growth rate can accurately show the change values. The simulation of the structure is performed by using two-dimensional particle-in-cell code MAGIC, and the simulation results accord well with the theoretical results.

**Keywords:** dielectric loaded metal grating, eigen-function method, single-mode approximation, “hot” dispersion align

**PACS:** 41.60.Cr, 52.59.Rz, 07.57.Hm

**DOI:** [10.7498/aps.63.024101](https://doi.org/10.7498/aps.63.024101)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10905032, 11275004), the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2012AA8122007A), and the Main Direction Program of Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. YYYJ-11235).

† Corresponding author. E-mail: [lwenxin@mail.ie.ac.cn](mailto:lwenxin@mail.ie.ac.cn)