

# 基于Lorenz系统的数值天气转折期预报理论探索\*

达朝究<sup>1)2)†</sup> 穆帅<sup>1)</sup> 马德山<sup>1)</sup> 于海鹏<sup>2)</sup> 侯威<sup>3)</sup> 龚志强<sup>3)</sup>

1)(西北民族大学数学与计算机科学学院, 兰州 730030)

2)(兰州大学大气科学学院, 兰州 730000)

3)(国家气候中心气候研究开放实验室, 北京 100081)

(2013年8月16日收到; 2013年10月8日收到修改稿)

以Lorenz系统为研究对象, 对数值天气转折期预报中的动力学特征进行了理论研究, 通过对Lorenz系统平衡点稳定性的讨论, 得到了区分准稳定区域和准不稳定区域的分界面, 由此标定出准稳定区域和准不稳定区域. 在准稳定区域, Lorenz曲线保持相对稳定, 能够在该平衡点周围周期运动; 在准不稳定区域, Lorenz曲线可能会从这个平衡点周围跃过分界面而进入另外一个平衡点周围, 即发生突变, 这是Lorenz系统的一个重要动力学特征; 对数值天气转折期预报与气候突变检测、预测给出一种新理论和新方法.

**关键词:** Lorenz系统, 准稳定区域, 准不稳定区域, 气候突变

**PACS:** 92.40.Cy, 92.60.Aa

**DOI:** 10.7498/aps.63.029201

## 1 引言

1904年, Bjerknes<sup>[1]</sup>用力学、数学和物理学的观点, 制订出天气预报问题的规划, 将天气预报问题转化为一个微分方程组的初值问题. 1922年, Richardson<sup>[2]</sup>首次进行了数值天气预报的尝试, 他详细论述了数值预报的原理和可行性, 使Bjerknes的理论成为现实. 由于计算条件的限制, 这种理论的实现距离真实的预报还十分遥远, 但是他无疑是数值天气预报的先驱. 当时, 人们期待许多计算人员能在一个天气工厂内, 像在一个交响乐队指挥下同步进行计算, 从而实现世界的天气预报. 在科学家的不倦探索下, 1950年, 距Richardson的尝试仅28年, Charney等<sup>[3]</sup>利用埃尼阿克(ENIAC)电子计算机实现了第一次数值天气预报, 这标志着数值天气预报从理论到现实, 预报成功的基础是电子计算机的飞速发展. 在此基础上, 各国科学家针对自

身条件做了大量的研究工作, 取得了丰硕的成果. 中国已故气象学家顾震潮先生在1958年指出: 把数值天气预报问题提成初值问题, 只使用一个时刻的资料是一个根本性的缺陷<sup>[4,5]</sup>. 1962年, 丑纪范<sup>[6]</sup>从函数空间的角度将微分方程定解问题变为等价的泛函极值问题, 而后推广了微分方程解的概念, 引进了“广义解”, 利用希尔伯特空间理论论证了“广义解”比原来意义下的“正规解”更接近方程所描述的物理现象的“实况”. 在顾震潮和丑纪范工作的基础上, 邱崇践等<sup>[7]</sup>、邵爱梅等<sup>[8]</sup>给出了一种新的资料同化方案; 文献<sup>[9—14]</sup>研究了海气耦合的相似韵律现象, 并建立了利用历史观测数据的相似-动力模式, 得到了很好的预报效果; 封国林等<sup>[15,16]</sup>给出了自忆预测模式的计算方案, 并将其应用到数值天气预报模式上, 得到了很好的结论. 文献<sup>[17—19]</sup>就数值天气预报中历史数据的使用也做了一定的研究工作. 虽然数值天气预报有了长足的发展, 但是转折性天气或气候的预测一直是

\* 国家科技支撑计划(批准号: 2009BAC51B04)、公益性行业(气象)科研专项(批准号: GYHY201206009, GYHY201106016)、全球变化研究国家重大科学研究计划(批准号: 2012CB955902)、国家自然科学基金(批准号: 40930952, 41175067, 61162021)和中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: zyz2012079)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jtdcj@163.com

科学界没有解决的问题, 现有的数值模式在转折期预报上的能力还是不足<sup>[20]</sup>, 这与大气系统的本质——混沌是关联的. 在数学上处理, 就是微分方程解的不稳定, 或者叫对初值的敏感. 最早发现这一事实的是Lorenz, 他在1963年分析对流运动中的非线性作用, 据大气运动的规律, 建立了一个简化的数学模型, 也就是著名的Lorenz方程组. Lorenz经过研究发现, 当这个方程组的参数取某些值时, 轨线运动会变得复杂和不确定, 导致轨线的行为无法预测, 理论上揭示了气候的突变<sup>[21]</sup>, 加之1979年Lorenz在华盛顿美国科学促进会上讲演中提出的“蝴蝶效应”, 使大气系统的混沌特征形象而具体.

大气系统的混沌特性可诱导大气系统的突变, 而大气环流的转折和突变相联系. 气候突变现象及其理论研究是近代气候学的一个新兴研究领域, 许多科学家力图揭示气候突变现象<sup>[22-33]</sup>. 气候突变又称气候变化的不连续性、气候的跳跃, 是普遍存在于气候系统中的一种重要现象, 是指气候从一种稳定态 (或稳定持续的变化趋势) 跳跃式地转变到另一种稳定态 (或稳定持续的变化趋势) 的过程, 它表现为气候在时空上从一个统计特征到另一种统计特征的急剧变化<sup>[22]</sup>.

近年来, 郑志海等<sup>[34-36]</sup>将混沌的概念引入全球数值天气预报模式, 揭示了初始时刻不可避免的误差增长规律, 并就其对季节、地区和初始场的依赖性做了一定的研究.

对气候突变的研究, 以往多采用统计方法, 本文用动力学方法, 以Lorenz方程组作为研究对象,

对气候突变进行研究, 就Lorenz系统的动力学特征给出定量描述; 对数值天气转折期预报以及气候突变做一定的理论探讨, 期望获得数值天气转折期预报和气候突变的新思路和新方法.

## 2 Lorenz方程轨线在不同平衡态间的跳跃

### 2.1 Lorenz方程组与线性近似方程

Lorenz方程组为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10(-x + y) \\ \frac{dy}{dt} = 28x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z \end{cases} \quad (1)$$

其线性近似方程按如下方法求解, 令

$$\begin{cases} P(x, y, z) \equiv 10(-x + y) = 0 \\ Q(x, y, z) \equiv 28x - y - xz = 0 \\ R(x, y, z) \equiv xy - \frac{8}{3}z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

得到Lorenz方程组的三个平衡点, 分别为

$$O(0, 0, 0), \quad (3a)$$

$$R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27), \quad (3b)$$

$$L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27). \quad (3c)$$

本文仅对右平衡点 $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ 和左平衡点 $L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ 做研究. 将动力系统(1)在平衡点 $(x_0, y_0, z_0)$ 做Taylor展开, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (x - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (y - y_0) + \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (z - z_0) + \dots \\ \frac{dy}{dt} = Q(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (x - x_0) + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (y - y_0) + \frac{\partial Q}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (z - z_0) + \dots \\ \frac{dz}{dt} = R(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (x - x_0) + \frac{\partial R}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (y - y_0) + \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (z - z_0) + \dots \end{cases} \quad (4)$$

只取线性部分, 同时注意到方程(2), 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -10(x - x_0) + 10(y - y_0) \\ \frac{dy}{dt} = (28 - z_0)(x - x_0) - (y - y_0) - x_0(z - z_0) \\ \frac{dz}{dt} = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - \frac{8}{3}(z - z_0) \end{cases} \quad (5)$$

动力系统(5)叫做动力系统(1)在平衡点 $(x_0, y_0, z_0)$ 处的线性近似方程<sup>[37]</sup>.

## 2.2 Lorenz 系统的稳定性分析

### 2.2.1 系统在右平衡点 $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ 的稳定性

动力系统 (1) 在平衡点  $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$  的线性近似方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -10(x - 6\sqrt{2}) + 10(y - 6\sqrt{2}) \\ \frac{dy}{dt} = (x - 6\sqrt{2}) - (y - 6\sqrt{2}) - 6\sqrt{2}(z - 27) \\ \frac{dz}{dt} = 6\sqrt{2}(x - 6\sqrt{2}) + 6\sqrt{2}(y - 6\sqrt{2}) - \frac{8}{3}(z - 27) \end{cases} \quad (6)$$

将动力系统 (6) 做平移变换:  $\xi = x - 6\sqrt{2}$ ,  $\eta = y - 6\sqrt{2}$ ,  $\zeta = z - 27$ , 得到

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -10\xi + 10\eta \\ \frac{d\eta}{dt} = \xi - \eta - 6\sqrt{2}\zeta \\ \frac{d\zeta}{dt} = 6\sqrt{2}\xi + 6\sqrt{2}\eta - \frac{8}{3}\zeta \end{cases}, \quad (7a)$$

用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (7b)$$

(7b) 式中的  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$  和  $\dot{\zeta}$  是导数运算, 矩阵  $\mathbf{A}_1$  为

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

求得矩阵  $\mathbf{A}_1$  的特征值分别为

$$\lambda_1 = \frac{1}{9} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{1}{9} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{41}{9}, \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & -\frac{1}{18} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} + \frac{1}{18} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{41}{9} \\ & + \left( \frac{\sqrt{3}}{18} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} + \frac{\sqrt{3}}{18} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} \right) i, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 = & -\frac{1}{18} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} + \frac{1}{18} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{41}{9} \\ & - \left( \frac{\sqrt{3}}{18} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} + \frac{\sqrt{3}}{18} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} \right) i \end{aligned} \quad (9c)$$

(9) 式中的  $i$  是虚数单位. 令

$$a = -\frac{1}{18} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} + \frac{1}{18} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{41}{9}, \quad (10a)$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{18} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} + \frac{\sqrt{3}}{18} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}}, \quad (10b)$$

则 (9b) 和 (9c) 式可写为

$$\lambda_2 = a + bi, \quad (11a)$$

$$\lambda_3 = a - bi. \tag{11b}$$

矩阵  $\mathbf{A}_1$  与特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  对应的特征向量  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$  分别为 (转置形式)

$$\alpha_{11}^T = \left( \lambda_1^2 + \frac{11}{3}\lambda_1 + \frac{224}{3}, \lambda_1 - \frac{208}{3}, 6\sqrt{2}(\lambda_1 + 2) \right), \tag{12a}$$

$$\alpha_{12}^T = \left( \lambda_2^2 + \frac{11}{3}\lambda_2 + \frac{224}{3}, \lambda_2 - \frac{208}{3}, 6\sqrt{2}(\lambda_2 + 2) \right), \tag{12b}$$

$$\alpha_{13}^T = \left( \lambda_3^2 + \frac{11}{3}\lambda_3 + \frac{224}{3}, \lambda_3 - \frac{208}{3}, 6\sqrt{2}(\lambda_3 + 2) \right). \tag{12c}$$

令

$$\mathbf{X} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), \tag{13}$$

则有

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

由 (9)—(11) 式可知, 一定存在矩阵  $\mathbf{P}_1$ , 使得 [38]

$$\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}. \tag{15}$$

令

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \tag{16}$$

则  $\mathbf{A}_1$  与  $\mathbf{B}_1$  相似. 由相似矩阵性质可知, 相似矩阵有相同的特征值, 即  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  也是矩阵  $\mathbf{B}_1$  的特征值. 就矩阵  $\mathbf{B}_1$  来说, 与其特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  对应的特征向量  $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}$  分别为 (转置形式)

$$\beta_{11}^T = (1, 0, 0), \tag{17a}$$

$$\beta_{12}^T = \left( 0, \frac{\lambda_2 - a}{b}, 1 \right), \tag{17b}$$

$$\beta_{13}^T = \left( 0, \frac{\lambda_3 - a}{b}, 1 \right). \tag{17c}$$

令

$$\mathbf{Y} = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}), \tag{18}$$

则

$$\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

结合 (14) 和 (19) 式, 易知

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{Y} \tag{20}$$

(20)式两边分别左乘 $\mathbf{Y}$ , 右乘 $\mathbf{Y}^{-1}$ , 可得

$$\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{Y}^{-1} = \mathbf{B}_1 \quad (21)$$

由(15), (16)和(21)式, 知

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{X}\mathbf{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \frac{11}{3}\lambda_1 + \frac{224}{3} & \lambda_2^2 + \frac{11}{3}\lambda_2 + \frac{224}{3} & \lambda_3^2 + \frac{11}{3}\lambda_3 + \frac{224}{3} \\ \lambda_1 - \frac{208}{3} & \lambda_2 - \frac{208}{3} & \lambda_3 - \frac{208}{3} \\ 6\sqrt{2}(\lambda_1 + 2) & 6\sqrt{2}(\lambda_2 + 2) & 6\sqrt{2}(\lambda_3 + 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 - a}{b} & \frac{\lambda_3 - a}{b} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (22a)$$

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 - a}{b} & \frac{\lambda_3 - a}{b} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \frac{11}{3}\lambda_1 + \frac{224}{3} & \lambda_2^2 + \frac{11}{3}\lambda_2 + \frac{224}{3} & \lambda_3^2 + \frac{11}{3}\lambda_3 + \frac{224}{3} \\ \lambda_1 - \frac{208}{3} & \lambda_2 - \frac{208}{3} & \lambda_3 - \frac{208}{3} \\ 6\sqrt{2}(\lambda_1 + 2) & 6\sqrt{2}(\lambda_2 + 2) & 6\sqrt{2}(\lambda_3 + 2) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (22b)$$

令

$$c_1 = \lambda_1^2 + \frac{11}{3}\lambda_1 + \frac{224}{3}, \quad (23a)$$

$$c_2 = \lambda_2^2 + \frac{11}{3}\lambda_2 + \frac{224}{3}, \quad (23b)$$

$$c_3 = \lambda_3^2 + \frac{11}{3}\lambda_3 + \frac{224}{3}, \quad (23c)$$

和

$$d_1 = \lambda_1 - \frac{208}{3}, \quad (24a)$$

$$d_2 = \lambda_2 - \frac{208}{3}, \quad (24b)$$

$$d_3 = \lambda_3 - \frac{208}{3}, \quad (24c)$$

以及

$$e_1 = 6\sqrt{2}(\lambda_1 + 2), \quad (25a)$$

$$e_2 = 6\sqrt{2}(\lambda_2 + 2), \quad (25b)$$

$$e_3 = 6\sqrt{2}(\lambda_3 + 2), \quad (25c)$$

则

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 - a}{b} & \frac{\lambda_3 - a}{b} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (26)$$

令

$$f = c_1(d_2e_3 - d_3e_2) - c_2(d_1e_3 - d_3e_1) + c_3(d_1e_2 - d_2e_1), \quad (27)$$

则

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 - a}{b} & \frac{\lambda_3 - a}{b} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d_2e_3 - d_3e_2}{f} & -\frac{c_2e_3 - c_3e_2}{f} & \frac{c_2d_3 - c_3d_2}{f} \\ -\frac{d_1e_3 - d_3e_1}{f} & \frac{c_1e_3 - c_3e_1}{f} & -\frac{c_1d_3 - c_3d_1}{f} \\ \frac{d_1e_2 - d_2e_1}{f} & -\frac{c_1e_2 - c_2e_1}{f} & \frac{c_1d_2 - c_2d_1}{f} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

分别令

$$h_1 = \frac{d_2e_3 - d_3e_2}{f}, \quad (29a)$$

$$h_2 = -\frac{c_2e_3 - c_3e_2}{f}, \quad (29b)$$

$$h_3 = \frac{c_2d_3 - c_3d_2}{f}, \quad (29c)$$

与

$$j_1 = -\frac{d_1e_3 - d_3e_1}{f}, \quad (30a)$$

$$j_2 = \frac{c_1e_3 - c_3e_1}{f}, \quad (30b)$$

$$j_3 = -\frac{c_1d_3 - c_3d_1}{f}, \quad (30c)$$

以及

$$k_1 = \frac{d_1e_2 - d_2e_1}{f}, \quad (31a)$$

$$k_2 = -\frac{c_1e_2 - c_2e_1}{f}, \quad (31b)$$

$$k_3 = \frac{c_1d_2 - c_2d_1}{f}, \quad (31c)$$

有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 - a}{b} & \frac{\lambda_3 - a}{b} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{h_1}{j_1 + k_1} & \frac{h_2}{j_2 + k_2} & \frac{h_3}{j_3 + k_3} \\ \frac{(\lambda_2 - a)j_1 + (\lambda_3 - a)k_1}{b} & \frac{(\lambda_2 - a)j_2 + (\lambda_3 - a)k_2}{b} & \frac{(\lambda_2 - a)j_3 + (\lambda_3 - a)k_3}{b} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

取坐标变换  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ , 有

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (33a)$$

即

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda_1 u \\ \frac{dv}{dt} = av - bw \\ \frac{dw}{dt} = bv + aw \end{cases}, \quad (33b)$$

构造  $\rho = u^2 + v^2 + w^2$  (距离的平方)<sup>[37]</sup>, 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = \lambda_1 u^2 + av^2 + aw^2 \equiv F_1(u, v, w). \quad (34)$$

注意到平移变换  $\xi = x - 6\sqrt{2}$ ,  $\eta = y - 6\sqrt{2}$ ,  $\zeta = z - 27$ , 可得

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P_1^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P_1^{-1} \begin{pmatrix} x - 6\sqrt{2} \\ y - 6\sqrt{2} \\ z - 27 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

由 (32) 和 (35) 式, 可得

$$u = h_1 x + h_2 y + h_3 z - 6\sqrt{2}h_1 - 6\sqrt{2}h_2 - 27h_3, \quad (36a)$$

$$v = \frac{(\lambda_2 - a)j_1 + (\lambda_3 - a)k_1}{b}x + \frac{(\lambda_2 - a)j_2 + (\lambda_3 - a)k_2}{b}y + \frac{(\lambda_2 - a)j_3 + (\lambda_3 - a)k_3}{b}z - \frac{6\sqrt{2}(\lambda_2 - a)j_1 + 6\sqrt{2}(\lambda_3 - a)k_1 + 6\sqrt{2}(\lambda_2 - a)j_2 + 6\sqrt{2}(\lambda_3 - a)k_2 + 27(\lambda_2 - a)j_3 + 27(\lambda_3 - a)k_3}{b}, \quad (36b)$$

$$w = (j_1 + k_1)x + (j_2 + k_2)y + (j_3 + k_3)z - 6\sqrt{2}(j_1 + k_1) - 6\sqrt{2}(j_2 + k_2) - 27(j_3 + k_3). \quad (36c)$$

(34) 式中的  $F_1(u, v, w)$  用变量  $x, y, z$  表示为

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) = & \left( \frac{1}{9} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{1}{9} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{41}{9} \right) (h_1 x + h_2 y + h_3 z \\ & - 6\sqrt{2}h_1 - 6\sqrt{2}h_2 - 27h_3)^2 + \left( -\frac{1}{18} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} + \frac{1}{18} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{41}{9} \right) \\ & \times \left[ \frac{(\lambda_2 - a)j_1 + (\lambda_3 - a)k_1}{b}x + \frac{(\lambda_2 - a)j_2 + (\lambda_3 - a)k_2}{b}y + \frac{(\lambda_2 - a)j_3 + (\lambda_3 - a)k_3}{b}z \right. \\ & \left. - \frac{6\sqrt{2}(\lambda_2 - a)j_1 + 6\sqrt{2}(\lambda_3 - a)k_1 + 6\sqrt{2}(\lambda_2 - a)j_2 + 6\sqrt{2}(\lambda_3 - a)k_2 + 27(\lambda_2 - a)j_3 + 27(\lambda_3 - a)k_3}{b} \right]^2 \\ & + \left( -\frac{1}{18} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} + \frac{1}{18} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{41}{9} \right) [(j_1 + k_1)x + (j_2 + k_2)y \\ & + (j_3 + k_3)z - 6\sqrt{2}(j_1 + k_1) - 6\sqrt{2}(j_2 + k_2) - 27(j_3 + k_3)]^2. \end{aligned} \quad (37)$$

$F_1(x, y, z) = 0$  为区分右平衡点  $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$  的准稳定区域与准不稳定区域的分界面。

记  $F_1(x, y, z) < 0$  的区域为  $U_R^N$ , 我们称之为 Nereus<sup>1</sup> 区域, 当  $F_1(x, y, z) < 0$  时, 即  $\frac{d\rho}{dt} < 0$ , 当  $t$  增加时,  $\rho = u^2 + v^2 + w^2$  减少, 存在  $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$  的一个邻域  $U_1$ , 使得 Lorenz 系统的轨线总保持在  $U_1$  内, 在 Nereus 区域内, 轨线的动力学特征保持稳定, 轨线始终绕平衡点  $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$  做相对规则的运动, 在该区域内是相对稳定的称之为准稳定区域<sup>[37]</sup>.

记  $F_1(x, y, z) > 0$  的区域为  $U_R^P$ , 我们称之为 Proteus<sup>2</sup> 区域, 当  $F_1(x, y, z) > 0$  时, 即  $\frac{d\rho}{dt} > 0$ , 在 Proteus 区域内, 当  $t$  增加时,  $\rho = u^2 + v^2 + w^2$  增加, 轨线表现出不稳定的动力学特征, 存在某些时刻, 轨线穿过分

<sup>1</sup> Nereus, 希腊神话中的海神, 他值得信赖、和蔼可亲、公正善良。

<sup>2</sup> Proteus, 希腊神话中的海神, 他能随意变成各种形状, 变化多端。

界曲面  $F_1(x, y, z) = 0$ , 到另外一个平衡态去, 所以在该区域是相对不稳定的, 称之为准不稳定区域 [37], 在气候动力学上就是所谓的突变, 而对于数值天气预报来说, 就是形式发生改变, 发生转折期, 当然气候突变与数值天气预报中的形式发生改变, 这两者是有时间尺度区分的.

### 2.2.2 系统在左平衡点 $L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ 的稳定性

对于左平衡点  $L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ , 用同样的方法, 可以得到

$$\begin{aligned}
 F_2(x, y, z) = & \left( \frac{1}{9} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{1}{9} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{41}{9} \right) (h_1x + h_2y - h_3z \\
 & + 6\sqrt{2}h_1 + 6\sqrt{2}h_2 + 27h_3)^2 + \left( -\frac{1}{18} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} + \frac{1}{18} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{41}{9} \right) \\
 & \left[ \frac{(\lambda_2 - a)j_1 + (\lambda_3 - a)k_1}{b}x + \frac{(\lambda_2 - a)j_2 + (\lambda_3 - a)k_2}{b}y - \frac{(\lambda_2 - a)j_3 + (\lambda_3 - a)k_3}{b}z \right. \\
 & \left. + \frac{6\sqrt{2}(\lambda_2 - a)j_1 + 6\sqrt{2}(\lambda_3 - a)k_1 + 6\sqrt{2}(\lambda_2 - a)j_2 + 6\sqrt{2}(\lambda_3 - a)k_2 + 27(\lambda_2 - a)j_3 + 27(\lambda_3 - a)k_3}{b} \right]^2 \\
 & + \left( -\frac{1}{18} \sqrt[3]{-425537 + 36\sqrt{140629614}} + \frac{1}{18} \sqrt[3]{425537 + 36\sqrt{140629614}} - \frac{41}{9} \right) [(j_1 + k_1)x + (j_2 + k_2)y \\
 & - (j_3 + k_3)z + 6\sqrt{2}(j_1 + k_1) + 6\sqrt{2}(j_2 + k_2) + 27(j_3 + k_3)]^2. \tag{38}
 \end{aligned}$$

$F_2(x, y, z) = 0$  为区分左平衡点  $L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$  的准稳定区域与准不稳定区域的分界曲面, 对于左平衡点  $L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$  有相应的 Nereus 区域  $U_L^N$  和 Proteus 区域  $U_L^P$ , 轨线的运动特征分析与右平衡点  $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$  的基本一样.

## 3 数值模拟

本文用四阶、五阶 Runge-Kutta 单步算法求解 Lorenz 方程组 (1), 截断误差为  $(\Delta x)^3$ , 初值为  $x_0 = 12, y_0 = 2, z_0 = 9$ .

计算可得, 系数矩阵  $A_1$  的特征值的数值解为

$$\lambda_1 = -13.8546, \tag{39a}$$

$$\lambda_2 = 0.0940 + 10.1945i, \tag{39b}$$

$$\lambda_3 = 0.0940 - 10.1945i. \tag{39c}$$

函数  $F_1(u, v, w)$  为

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} &= -13.8546u^2 + 0.0940v^2 + 0.0940w^2 \\
 &= F_1(u, v, w), \tag{40}
 \end{aligned}$$

矩阵  $P_1$  和  $P_1^{-1}$  的数值解为

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.8557 & -0.3763 & 0.4172 \\ -0.3298 & 0.0454 & 0.8048 \\ -0.3988 & -1.0171 & 0 \end{pmatrix}, \tag{41a}$$

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8450 & -0.4380 & -0.3322 \\ -0.3313 & 0.1718 & -0.8529 \\ 0.3650 & 1.0533 & -0.0880 \end{pmatrix}. \tag{41b}$$

空间  $(x, y, z)$  到  $(u, v, w)$  的变换为

$$\begin{cases} u = 0.8450x - 0.4380y - 0.3322z + 5.5159 \\ v = -0.3313x + 0.1718y - 0.8529z + 24.3817 \\ w = 0.3650x + 1.0533y - 0.0880z - 9.6587 \end{cases}, \tag{42}$$

可得  $F_1(x, y, z)$  的数值解

$$\begin{aligned}
 F_1(x, y, z) = & -13.8546(0.8450x \\
 & - 0.4380y - 0.3322z + 5.5159)^2 \\
 & + 0.0940(-0.3313x + 0.1718y \\
 & - 0.8529z + 24.3817)^2 \\
 & + 0.0940(0.3650x + 1.0534y \\
 & - 0.0880z - 9.6587)^2. \tag{43}
 \end{aligned}$$

图 1 给出了曲面  $F_1(x, y, z) = 0$  ( $z_1$  和  $z_2$  曲面) 和 Lorenz 曲线.  $z_1$  和  $z_2$  两曲面中间的区域是  $F_1(x, y, z) > 0$  的区域, 也就是  $U_R^P$  即 Proteus 区域;  $z_1$  曲面以上和  $z_2$  曲面以下的区域都是  $F_1(x, y, z) < 0$  的区域, 也就是  $U_R^N$ , 即 Nereus 区域. 从 Lorenz 轨线的运动来看, 在 Proteus 区域内轨线有穿过曲面  $F_1(x, y, z) = 0$  (这里关键是  $z_1$  曲面) 的可能, 跃入左平衡点周围; 但是在 Nereus 区



域内轨线不会跃入左平衡点周围,所以在Proteus区域轨线运动不稳定,是准不稳定区域;相反在Nereus区域轨线运动相对稳定,是准稳定区域.这一数值试验结论佐证了本文前期的理论推导.

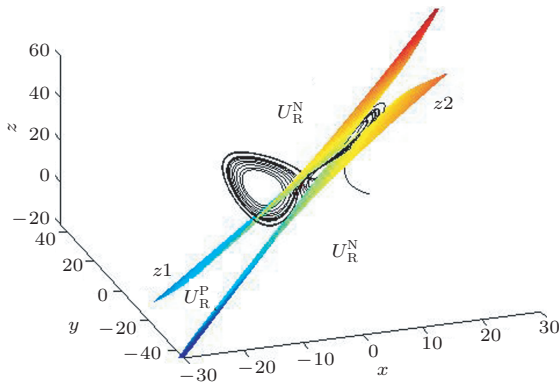


图1 右平衡点 $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ 的准不稳定区域和准稳定区域

为了更清楚地看到Lorenz曲线的运动规律,图2给出了各个时刻的动态图.当Lorenz曲线进入准不稳定区域 $U_R^P$ 时,运动不稳定,特别是图中的长方形区域,表现得极为敏感,会在某些时刻穿过分界面 $F_1(x, y, z) = 0$ ,跳到另外一个平衡态中去,

离开平衡点 $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ ;但在稳定区域 $U_R^N$ 内,轨线运动稳定,始终在平衡点 $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ 周围运动.

下面再来看左平衡点 $L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ 的情况.系数矩阵 $A_2$ 的特征值的数值解为

$$\lambda_1 = -13.8546, \tag{44a}$$

$$\lambda_2 = 0.0940 + 10.1945i, \tag{44b}$$

$$\lambda_3 = 0.0940 - 10.1945i, \tag{44c}$$

函数 $F_2(u, v, w)$ 为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} &= -13.8546u^2 + 0.0940v^2 + 0.0940w^2 \\ &= F_2(u, v, w), \end{aligned} \tag{45}$$

矩阵 $P_2$ 和 $P_2^{-1}$ 的数值解为

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.8557 & -0.3763 & 0.4172 \\ -0.3298 & 0.0454 & 0.8048 \\ 0.3988 & 1.0171 & 0 \end{pmatrix}, \tag{46a}$$

$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8450 & -0.4380 & 0.3322 \\ -0.3313 & 0.1718 & 0.8529 \\ 0.3650 & 1.0533 & 0.0880 \end{pmatrix}, \tag{46b}$$

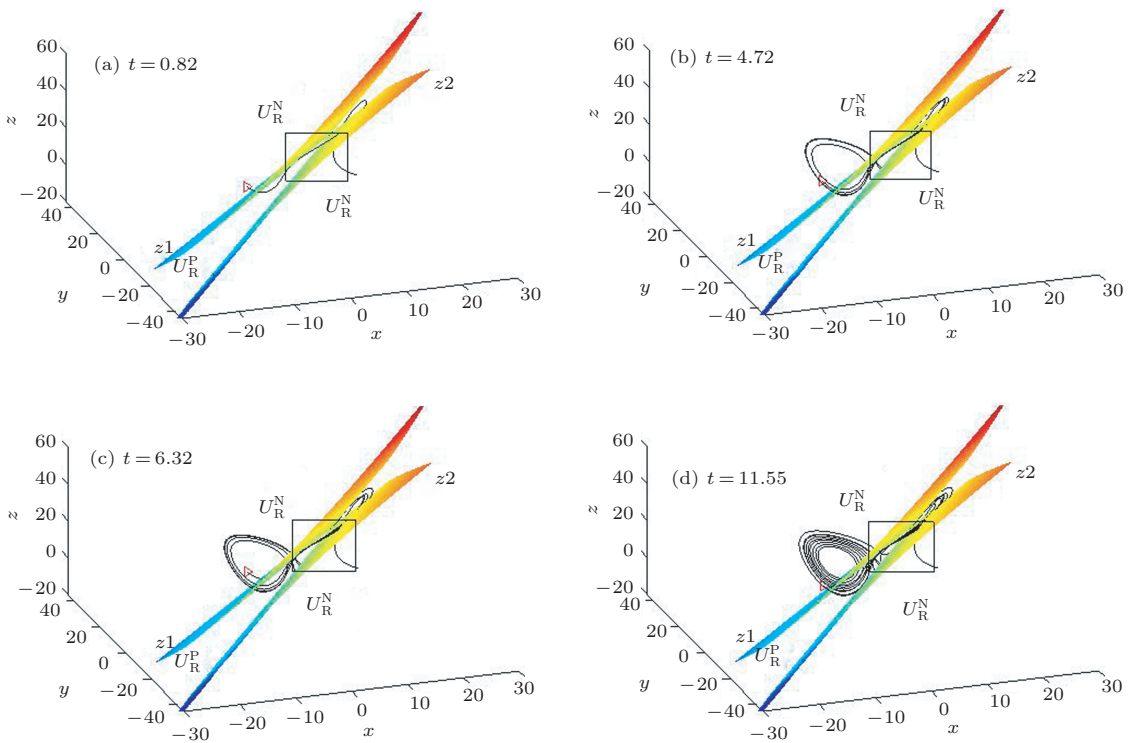


图2 各个时刻的动态 (a)  $t = 0.82$ ; (b)  $t = 4.72$ ; (c)  $t = 6.32$ ; (d)  $t = 11.55$

空间  $(x, y, z)$  到  $(u, v, w)$  的变换为

$$\begin{cases} u = 0.8450x - 0.4380y + 0.3322z - 5.5159 \\ v = -0.3313x + 0.1718y + 0.8529z - 24.3817 \\ w = 0.3650x + 1.0533y + 0.0880z + 9.6587 \end{cases} \quad (47)$$

可得  $F_2(x, y, z)$  的数值解

$$\begin{aligned} F_2(x, y, z) = & -13.8546(0.8450x - 0.4380y \\ & + 0.3322z - 5.5159)^2 \\ & + 0.0940(-0.3313x + 0.1718y \\ & + 0.8529z - 24.3817)^2 \\ & + 0.0940(0.3650x + 1.0534y \\ & + 0.0880z + 9.6587)^2. \end{aligned} \quad (48)$$

图3给出了曲面  $F_2(x, y, z) = 0$  ( $z_3$  和  $z_4$ ) 和Lorenz轨线.  $z_3$  和  $z_4$  两曲面中间的区域是  $F_2(x, y, z) > 0$  的区域, 也就是  $U_L^P$ , 即Proteus区域;  $z_3$  曲面以上和  $z_4$  曲面以下的区域都是  $F_2(x, y, z) < 0$  的区域, 也就是  $U_L^N$ , 即Nereus区域. 从Lorenz轨线的运动来看, 在Proteus区域内轨线可能穿过曲面  $F_2(x, y, z) = 0$  (这里关键是  $z_3$

曲面), 跃入右平衡点周围; 但是在Nereus区域内, 轨线不会跃入右平衡点周围, 轨线运动稳定. 轨线整个的运动规律和右平衡点类似, 不再赘述.

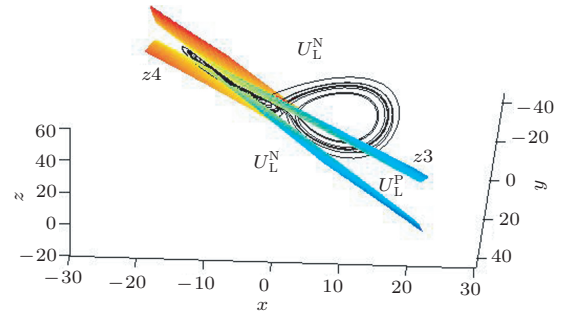


图3 左平衡点  $L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$  的准不稳定区域和准稳定区域

图4给出了左平衡点  $L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$  各个时刻的动态图. 当Lorenz曲线进入准不稳定区域  $U_L^P$  时, 运动不稳定, 会在某些时刻穿过分界曲面  $F_2(x, y, z) = 0$ , 跳到另外一个平衡态中去, 离开平衡点  $L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ ; 但在稳定区域  $U_L^N$  内, 轨线运动稳定, 始终在平衡点  $L(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$  周围运动, 这些和图2的结论完全一致 (右平衡点  $R(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ ).

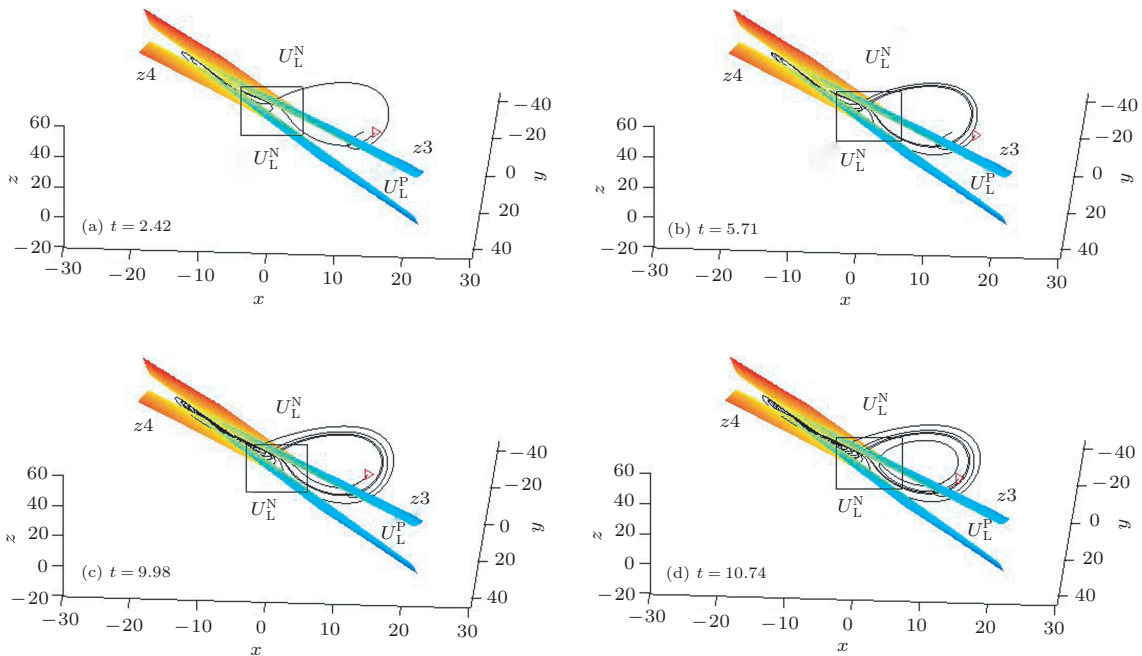


图4 (a)  $t = 2.42$ ; (b)  $t = 5.71$ ; (c)  $t = 9.98$ ; (d)  $t = 10.74$

图1和图2给出右平衡点的情况; 图3和图4给出左平衡点的情况, 图5给出Lorenz曲线的整体情况. 从图中可知: 当轨线在区域  $U_R^N$  和区

域  $U_L^N$  的交集  $U_R^N \cap U_L^N$  内, 轨线一定稳定, 不会跳跃到另外一个平衡点中去; 当轨线在区域  $U_R^P$  和区域  $U_L^P$  的并集  $U_R^P \cup U_L^P$  内, 轨线可能会跳跃到另外

一个平衡点中去.

若记集合  $U_R$  与  $U_L$  分别为

$$U_R = \{(x, y, z) \in R^3 | F_1(x, y, z) = 0\}, \quad (49a)$$

$$U_L = \{(x, y, z) \in R^3 | F_2(x, y, z) = 0\}, \quad (49b)$$

则有

$$R^3 = U_R \cup U_R^N \cup U_R^P = U_L \cup U_L^N \cup U_L^P. \quad (50)$$

集合  $U_R$ ,  $U_R^N$  和  $U_R^P$  两两不交, 集合  $U_L$ ,  $U_L^N$  和  $U_L^P$  也两两不交, 简单计算之后有

$$R^3 = (U_R^N \cap U_L^N) \cup (U_R^P \cup U_L^P) \cup (U_R \cup U_L). \quad (51)$$

维恩图 6 中的绿色区域为  $U_L^N$ , 蓝色区域为  $U_L^P$ , 两者中间的分界线为  $U_L$ ; 右斜线区域为  $U_R^N$ , 左斜线区域为  $U_R^P$ , 两者中间的分界线为  $U_R$ . 区域  $U_R^P \cup U_L^P$  就是红色框中的区域, 当然要把曲线  $U_L$  与  $U_R$  抠出, 区域  $U_R^N \cap U_L^N$  是左上角那块区域.

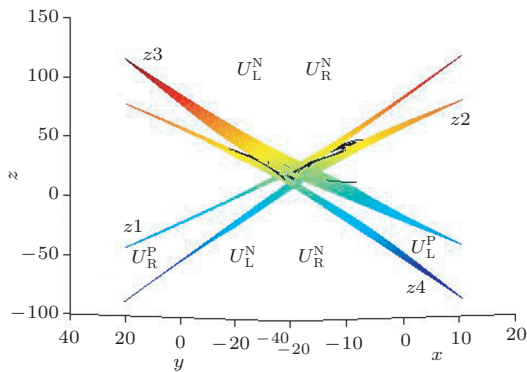


图5 Lorenz 曲线的准不稳定区域和准稳定区域

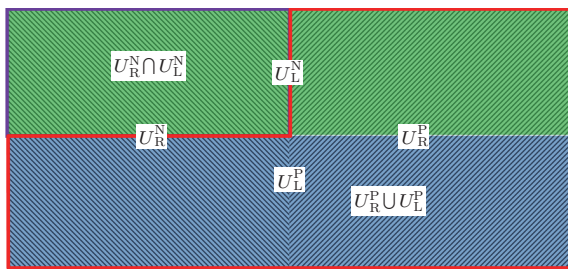


图6 集合  $U_R^N \cap U_L^N$  与  $U_R^P \cup U_L^P$  维恩图 (概念图)

#### 4 数值天气转折期预报和气候突变预报中的使用方法与步骤

本文在理论上为数值天气转折期预报和气候突变预报给出一种新思路与方法. 数值天气预报系

统是一个  $n$  维动力系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}, \quad (52)$$

而 Lorenz 系统是三维动力系统. 在数学理论上来看: 三维动力系统和  $n$  维动力系统没有本质的区别, 既然上述方法适用于 Lorenz 系统, 自然也会适用于数值天气预报中的  $n$  维动力系统.

具体可通过以下步骤来进行:

1) 求出数值天气预报中的  $n$  维动力系统的平衡点

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, \quad (53)$$

这一步从理论上没有难度;

2) 求出数值天气预报中的  $n$  维动力系统在各个平衡点的线性近似方程, 用矩阵表示为

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}, \quad (54)$$

这里的  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  是离散之后的大气状态变量,  $\mathbf{A}$  是  $n$  维矩阵,  $\mathbf{B}$  是  $n$  维向量, 矩阵  $\mathbf{A}$  和向量  $\mathbf{B}$  可以算出, 甚至可以通过坐标平移使得向量  $\mathbf{B} = 0$ , 即为

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}; \quad (55)$$

3) 求出矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值;

4) 通过矩阵变换和坐标变换, 把 (55) 式写为

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dots \\ \dot{\xi}_n \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad (56)$$

矩阵  $\mathbf{B}$  往往会有比较好的对角形式, 或者是块对角形式, 具体计算时要用到高阶矩阵的计算;

5) 构造出函数

$$\mathbf{F}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt}, \quad (57)$$

与

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \frac{d\hat{\rho}}{dt}; \quad (58)$$

6) 利用

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (59a)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \quad (59b)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0, \quad (59c)$$

求出各个各个平衡点的分界曲面、准稳定区域 (Nereus 区域) 和准不稳定区域 (Proteus 区域);

7) 分析不同区域内的运动特征, 在准不稳定区域 (Proteus 区域) 内, 系统轨线不稳定, 将在某些时刻从该平衡点周围穿过分界曲面跳跃到其他平衡点周围, 进入另外一个平衡态中, 即发生突变, 发生突变的区域为敏感区域, 在数值天气预报中转折期预报中, 或气候突变检测上, 可求出 Proteus 区域, 以此来检测、预测突变; 但在准稳定区域 (Nereus 区域) 内, 系统轨线稳定, 不会发生突变。

## 5 结 论

本文通过理论推导, 对 Lorenz 方程组的平衡点进行稳定性分析: 对于每个平衡点来说, 有分界曲面  $F(x, y, z) = 0$ , 其把  $R^3$  分为准稳定区域 (Nereus 区域) 和准不稳定区域 (Proteus 区域). 在 Nereus 区域,  $F(x, y, z) < 0$ , 随时间  $t$  增加  $\rho$  减少, 轨线在 Nereus 区域内的动力学特征保持稳定, 围绕平衡点做相对规则运动, 在该区域内是稳定的. 在 Proteus 区域内,  $F(x, y, z) > 0$ , 随时间  $t$  增加  $\rho$  增加, 轨线表现出不稳定的动力学特征, 存在某个时刻, 轨线达到 Proteus 区域的边界, 并穿过曲面  $F(x, y, z) = 0$  跳到另外一个平衡点周围中, 轨线的动力学特征在该区域内是不稳定的。

本文给出了数值天气转折期预报和气候突变的预报。

虽然本文给出了一种全新方法来预测气候突变, 但真正的使用还很遥远. 首先本文的方法比较粗糙, 不是太精细, 刻画出来的 Nereus 区域和 Proteus 区域范围太宽, 特别是 Proteus 区域, 能否让 Proteus 区域的范围小一点, 精细一点; 其次理论上的实现到实际使用还有很多技术要克服, 一个无法逃避的现实是数值天气预报对应的动力系统的维数太高, 这就有一个高维矩阵计算问题, 如何解

决这个问题? 最后大气系统的混沌度要比 Lorenz 系统的混沌度高得多, 所以大气系统的非线性和复杂性和 Lorenz 系统相比, 两者不是一个量级。

## 参考文献

- [1] Bjerknes V 1904 *Meteor. Zeit.* **21** 1
- [2] Richardson 1922 *The Weather Prediction by Numerical Process* (London: Cambridge University Press)
- [3] Charney J G, Fjörtoft R, von Neumann J 1950 *Tellus* **2** 237
- [4] Gu Z C 1958 *Acta Meteor. Sin.* **29** 176 (in Chinese)[顾震潮 1958 气象学报 **29** 176]
- [5] Gu Z C 1958 *Acta Meteor. Sin.* **29** 93 (in Chinese)[顾震潮 1958 气象学报 **29** 93]
- [6] Chou J F 1974 *Sci. China D* **6** 635 (in Chinese) [丑纪范 1974 中国科学 D **6** 635]
- [7] Qiu C J, Shao A M, Xu Q, Wei L 2007 *J. Geophys. Res.* **112** D11105
- [8] Shao A M, Xi S, Qiu C J, Xu Q 2009 *J. Geophys. Res.* **114** D17114
- [9] Huang J P, Chou J F 1989 *Sci. China B* **9** 1001 (in Chinese) [黄建平, 丑纪范 1989 中国科学 B **9** 1001]
- [10] Huang J P, Wang S W 1991 *Sci. China B* **21** 216 (in Chinese) [黄建平, 王绍武 1991 中国科学 B **21** 216]
- [11] Huang J P, Yi Y H, Wang S W, Chou J F 1993 *Quart. J. Roy Meteor. Soc.* **119** 547
- [12] Huang J P, Yi Y H 1991 *Sci. China B* **3** 331 (in Chinese)[黄建平, 衣育红 1991 中国科学 **3** 331]
- [13] Huang J P, Yi Y H 1991 *Sci. China B* **34** 1246
- [14] Huang J P, North G R 1996 *J. Atmosph. Sci.* **53** 370
- [15] Feng G L, Cao H X, Wei F Y 1999 *J. Appl. Meteor. Sci.* **10** 470 (in Chinese) [封国林, 曹鸿兴, 魏凤英 1999 应用气象学报 **10** 470]
- [16] Feng G L, Dong W J 2003 *Chin. Phys.* **12** 1076
- [17] Zheng Z H 2010 *Ph. D. Dissertation* (Lanzhou: Lanzhou University) (in Chinese) [郑志海 2010 博士学位论文 (兰州: 兰州大学)]
- [18] Da C J 2011 *Ph. D. Dissertation* (Lanzhou: Lanzhou University) (in Chinese) [达朝究 2011 博士学位论文 (兰州: 兰州大学)]
- [19] Xue H L 2013 *Ph. D. Dissertation* (Lanzhou: Lanzhou University) (in Chinese) [薛海乐 2013 博士学位论文 (兰州: 兰州大学)]
- [20] Shabbar A, J Huang, K Higuchi 2001 *Int. J. Climatol.* **21** 355
- [21] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [22] Fu Z B, Wang Q 1992 *Chin. J. Atmos. Sci.* **16** 482 (in Chinese)[符淙斌, 王强 1992 大气科学 **16** 482]
- [23] Ye D Z, Tao S Y, Li M C 1958 *Acta Meteor. Sin.* **29** 249 (in Chinese) [叶笃正, 陶诗言, 李麦村 1958 气象学报 **29** 249]

- [24] Feng G L, Gong Z Q, Zhi R 2008 *Acta Meteor. Sin.* **66** 892 (in Chinese)[封国林, 龚志强, 支蓉 2008 气象学报 **66** 892]
- [25] Yan P C, Hou W, Hu J G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 189202 (in Chinese)[颜鹏程, 侯威, 胡经国 2012 物理学报 **61** 189202]
- [26] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese)[封国林, 戴新刚, 王爱慧, 丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]
- [27] Wu H, Hou W, Yan P C 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 039206 (in Chinese)[吴浩, 侯威, 颜鹏程 2013 物理学报 **62** 039206]
- [28] Feng G L, Hou W, Zhi R 2011 *Research on Detecting, Diagnosing and Predictability of Extreme Climate Events* (Beijing: Science Press) pp350–366 (in Chinese) [封国林, 侯威, 支蓉 2011 极端气候事件的检测、诊断和可预测性研究 (北京: 科学出版社) 第350—366页]
- [29] Zhao J H, Feng G L, Zhang S X, Sun S P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 099205 (in Chinese)[赵俊虎, 封国林, 张世轩, 孙树鹏 2011 物理学报 **60** 099205]
- [30] Zhao J H, Yang J, Gong Z Q, Zhi R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 099206 (in Chinese)[赵俊虎, 杨杰, 龚志强, 支蓉 2013 物理学报 **62** 099206]
- [31] Wang Q G, Zhang Z P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1976 (in Chinese)[王启光, 张增平 2008 物理学报 **57** 1976]
- [32] Cui H, He H L, Liu X H, Li Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 109201
- [33] Wang Q G, Zhi R, Zhang Z P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5343 (in Chinese)[王启光, 支蓉, 张增平 2008 物理学报 **57** 5343]
- [34] Zheng Z H, Ren H L, Huang J P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7359 (in Chinese)[郑志海, 任宏利, 黄建平 2009 物理学报 **58** 7359]
- [35] Wang Q G, Feng G L, Zheng Z H, Zhi R 2011 *Chin. J. Atmos. Sci.* **35** 287 (in Chinese)[王启光, 封国林, 郑志海, 支蓉 2011 大气科学 **35** 287]
- [36] Zheng Z H, Huang J P, Feng G L, Chou J F 2012 *Sci. China D* **43** 594 (in Chinese) [郑志海, 黄建平, 封国林, 丑纪范 2012 中国科学 D **43** 594]
- [37] Zhang J Y, Feng B Y 2000 *The Geometric and Bifurcation Theory of Ordinary Differential Equations* (Beijing: Beijing University Press) p36 (in Chinese) [张锦炎, 冯贝叶 2003 常微分方程几何理论与分支问题 (北京: 北京大学出版社) 第36页]
- [38] Gunter Maher, Ke Z Y 1995 *Theory of Matrices* (Beijing: Higher Education Press) p127 (in Chinese) [甘特马赫尔, 柯召译 1995 矩阵论 (北京: 高等教育出版社) p127]



# The theoretical study of the turning period in numerical weather prediction models based on the Lorenz equations\*

Da Chao-Jiu<sup>1)2)†</sup> Mu Shuai<sup>1)</sup> Ma De-Shan<sup>1)</sup> Yu Hai-Peng<sup>2)</sup>  
Hou Wei<sup>3)</sup> Gong Zhi-Qiang<sup>3)</sup>

1) (School of Mathematics and Computer Science Institute, Northwest University for Nationalities, Lanzhou 730030, China)

2) (College of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

3) (Laboratory for Climate Studies, National Climate Center, China Meteorological Administration, Beijing 100081, China)

( Received 16 August 2013; revised manuscript received 8 October 2013 )

## Abstract

Based on the Lorenz equations, the dynamics of the weather turning period is studied about numerical weather prediction. Through the analysis of the stability of equilibrium points of the Lorenz equations, we get the surfaces which separate the quasi-stable region and quasi-unstable region. In the quasi-stable region, the path curve of the Lorenz equations can remain relatively stable around the equilibrium points, however in the quasi-unstable region, the path curve of the Lorenz equations can spring from this equilibrium point to another one. This is one of the important dynamic characteristics of the Lorenz system, and the paper give new method and theory for the detection of the abrupt change of climate.

**Keywords:** Lorenz equations, quasi stabile region, quasi unstable region, mutation period

**PACS:** 92.40.Cy, 92.60.Aa

**DOI:** [10.7498/aps.63.029201](https://doi.org/10.7498/aps.63.029201)

---

\* Project supported by the Key Technologies R&D Program of China (Grant No. 2009BAC51B04), the Meteorological Special Project of China (Grant Nos. GYHY201206009, GYHY201106016), the National Basic Research Program of China (Grant No. 2012CB955902), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40930952, 41175067, 61162021) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. zyz2012079).

† Corresponding author. E-mail: [jtdcj@163.com](mailto:jtdcj@163.com)