

基于速度梯度张量的四元分解对若干 涡判据的评价*

李震¹⁾²⁾ 张锡文¹⁾ 何枫^{1)†}

1) (清华大学航天航空学院, 北京 100084)

2) (清华大学数学科学中心, 北京 100084)

(2013年10月9日收到; 2013年11月27日收到修改稿)

本文基于速度梯度张量分析, 对其中四种 ω 判据、 Q 判据、 Δ 判据、 λ_{ci} 判据的物理意义和局限性进行分析, 揭示各判据常用等值面展示的涡形态或强度的实际物理意义. 首次采用基于速度梯度张量正规性的四元分解, 将流体微元的运动分解为胀缩、沿正规标架的轴向变形、做平面运动和简单剪切, 使得各涡判据的运动学意义更加清晰. 涡量 ω 反映的流体微元的平均转动中总是包含简单剪切运动; Q 判据可揭示流体微元在复特征向量平面上净转动相对于轴向变形的强弱, 是净转动存在的充分但非必要条件; Δ 判据能准确辨别净转动是否存在, 却无法表示出净转动的强度; 在净转动存在的前提下, λ_{ci} 可反映其绝对强度大小, 净转动是复特征向量平面内正规转动和简单剪切的总和效果, 正规转动是最基本的转动. 新引入的四元分解方法有利于深入了解流体的涡及其运动.

关键词: 涡判据, 速度梯度张量, 四元分解

PACS: 47.32.-y, 47.32.C-

DOI: 10.7498/aps.63.054704

1 引言

旋涡在流体力学中起着关键性的作用. 对旋涡的生成、发展、运动、衰减、旋涡与旋涡之间、旋涡与固体之间相互作用、旋涡与湍流之间关系等的研究, 以及近年兴起的对旋涡的定义和识别的研究, 一直是流体力学中非常重要的研究课题. 陆士嘉、Küchemann^[1]称旋涡为流体运动的肌腱, 认为旋涡是流体运动的本质. Moffatt等^[2]称旋涡为湍流的原动力, 可见旋涡分析对深入理解流体运动非常重要, 它是流体力学中的基础和关键性的问题.

然而目前流体力学对旋涡概念的界定还是模糊的, 旋涡定义上的困难显示了人们对旋涡的直观认识与经典流体力学描述方法之间存在的差别. 直观感知的常常是流体大范围的位形变化, 带有动力系统的观点, 但经典流体力学理论常采用场论描述

流场的局部性质.

这里我们暂且不去讨论旋涡的定义是否合理, 只针对目前已建立并应用的大部分涡判据进行分析, 这些方法是用场论观点来看待旋涡, 并且判定的是局部旋涡的中心, 认为旋涡中心附近是涡量足够强的区域, 对于满足涡判据条件的点, 其邻域内的流体微元是围绕该点旋转从而形成局部涡旋, 大尺度的涡都是这些局部的涡组成的区域.

三维流场中, 考察相邻流体质点 O 位置差 $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ 的质点的相对运动, 其速度相对 O 点的速度采用一阶泰勒级数展开后得到

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_o + \delta\mathbf{V}, \quad (1)$$

其中相对速度 $\delta\mathbf{V}$ 和速度矢量梯度 $\nabla\mathbf{V}$ 相关, 如下:

$$\delta\mathbf{V} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3) \cdot \nabla\mathbf{V}. \quad (2)$$

许多涡判据的定义是建立在流体微元的速度

* 国家重点基础研究发展计划(973计划)(批准号: 2012CB720101)和国家自然科学基金(批准号: 11072130)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hefeng@tsinghua.edu.cn

矢量梯度张量 ∇V 的特征分析上, 这使得人们对流体微元的复杂运动有了一定的认识. 本文基于速度梯度张量正规性进行四元分解, 试图更深入理解和剖析常用涡判据包含的物理意义和其局限性, 在应用这些涡判据时, 就可了解各种判据相关量的数值大小展示了局部涡的哪些运动学特性, 等值面展示的结构形态的意义, 这有助于对复杂流动的流谱有更明确的分析 and 理解.

2 常用的 ω , Q , Δ , λ_{ci} , λ_2 涡判据

在流场的实验或数值模拟分析研究中, 人们常常需要展示流场涡结构, 因此发展了各种涡判别的方法.

关于流动中涡分析, 最简单的是采用流场的涡量场 ω 分析, 这里称为 ω 判据, ω 是涡流体微元平均转动角速度的两倍, 反映的是流体微元的平均转动, 人们常把流场中 ω 集中分布的区域当作旋涡, 通过实验测量流速分布也易于得到 ω 值 [3]. 但众所周知, 对于平行剪切流, 其涡量也不为零, 但直观上流场并没有旋转的流线, 所以这个判据的应用有局限性.

Okubo [4], Hunt 等 [5], Weiss [6] 提出了不可压或低压时应用的 Q 判据, 诊断的是流场涡张量超过应变率张量的区域大小, 并定义 Q 是速度矢量梯度 ∇V 的三个主不变量 I_1, I_2, I_3 中的第二主不变量, 即 $Q = I_2$, 条件是 $Q > 0$, Q 判据被广泛应用于流体三维流动涡识别中 [7].

Chong 等 [8] 将分析常微分方程平衡点的局部拓扑性质方法, 应用于复杂流谱分析中, 提出了 Δ 判据, 它是 ∇V 的特征多项式根的判别式, 条件是 $\Delta > 0$, 若用 ∇V 的三个主不变量表示 Δ , 则为

$$\Delta = \frac{1}{4}I_3^2 + \left(\frac{1}{27}I_1^3 - \frac{1}{6}I_1I_2\right)I_3 + \left(\frac{1}{27}I_2^3 - \frac{1}{108}I_1^2I_2^2\right). \quad (3)$$

流场中满足 $\Delta > 0$ 的点, 其 ∇V 有一实特征值和一对共轭复特征值存在, 且在复特征向量平面上的瞬时流线有焦点, 它被看作是涡心, 围绕焦点邻域的瞬时流线是盘旋的, 盘旋流线沿实特征值对应的特征向量方向被拉伸或压缩, 如图 1 所示. 流场中在 ∇V 复特征向量平面上展现和描述的局部涡, 只与当地的 ∇V 的特征值性质有关, 而不依赖观察者所在的参考系.

Zhou 等 [9] 建议当 ∇V 有共轭复特征值时, 选取其虚部 λ_{ci} 的绝对值表示旋涡的强度, 它可以反映流体微元在 ∇V 的复特征平面内净转动的角速度, λ_{ci} 仅当 $\Delta > 0$ 时才存在, 因此它与 Δ 判据是等价的.



图 1 三维瞬时随(焦)点平动参考系中螺旋的流线

多数涡判据都是从运动学的角度建立的, 但在一些流体力学研究以及工程实际中, 人们还常将低压作为旋涡的标志, 例如在气象学中, 就广泛使用这种识别旋涡的方法. 这种方法基于的原理是旋涡的旋转会产生离心力, 离心力在一些情况下要靠压力梯度来平衡, 因此在涡心处造成了低压. Jeong 和 Hussain [10] 修正了这种低压判别方法, 他们分析了在不可压缩情况下, 若排除黏性效应和非定常效应后, 出现压力截面极小的原因只有转动离心力. 他们通过不可压 Navier-Stokes 方程进行推导, 将应变率张量 D 和涡张量 Ω 的组合张量 $D^2 + \Omega^2$ 的特征值排序后为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, 认为压力达到截面最小的充要条件是 $\lambda_2 < 0$, 被称为 λ_2 判据. 陈林等 [11] 就用 λ_2 判据展示转捩边界层中流向条纹中涡的一些新特性.

还有很多其他形式涡判据不在此文中分析. 对流场局部变量的分析属于经典流体力学场论的研究内容, 这些量比较容易计算, 因此 ω 判据、 Q 判据、 Δ 判据、 λ_{ci} 判据和 λ_2 涡判据能得到广泛应用.

3 三维流场涡判据运动学分析

二阶张量 ∇V 可分解为对称部分和反对称部分, 在笛卡尔坐标系即为流体力学中应变率张量,

$$D_{ij} = (\partial \dot{x}_i / \partial x_j + \partial \dot{x}_j / \partial x_i) / 2$$

和涡张量

$$\Omega_{ij} = (\partial \dot{x}_j / \partial x_i - \partial \dot{x}_i / \partial x_j) / 2$$

两者之和, 即

$$\nabla\mathbf{V} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega},$$

\mathbf{D} 还可进一步分解为体积胀缩率张量 $E_{ii} = \partial\dot{x}_i/\partial x_i$ 与切变率张量和

$$A_{ij} = (\partial\dot{x}_i/\partial x_j + \partial\dot{x}_j/\partial x_i)/2, (i \neq j),$$

因此常规将 $\nabla\mathbf{V}$ 分解为三部分 (三元分解)

$$\nabla\mathbf{V} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{\Omega}. \quad (4)$$

三维流场中流体微元运动非常复杂, 其胀缩、畸变和平均转动三种过程是相互耦合的. $\nabla\mathbf{V}$ 在一般情况下非正规, 若从 $\nabla\mathbf{V}$ 正规性的角度去研究流体微元的变形运动, 有望揭示出涡判据所包含的一些新内涵.

当 $\Delta \leq 0$ 时, $\nabla\mathbf{V}$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都是实数, $\nabla\mathbf{V}$ 在正规标架下可表示为上三角矩阵, 即

$$\nabla\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \gamma & \beta \\ 0 & \lambda_2 & \alpha \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

若特征值都是实数时, 在特征向量平面上的瞬时流线的拓扑结构, 不会有焦点或中心点^[6]. 将 $\nabla\mathbf{V}$ 分解为正规张量 \mathbf{N} 和幂零张量 \mathbf{S} 之和, 这里将 \mathbf{S} 视为正规标架平面内的切变速率张量.

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{V} &= \mathbf{N} + \mathbf{S}, \\ \mathbf{N} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

\mathbf{N} 还可分解为代表均匀胀缩的胀缩速率张量 \mathbf{E} 、沿某标架轴 (例如沿 λ_3 特征向量方向) 的变形速率张量 \mathbf{Z} , 和垂直该标架轴平面切变率张量 $\mathbf{\Psi}$ 三部分之和, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{E} + \mathbf{Z} + \mathbf{\Psi}, \quad (7) \\ \mathbf{E} &= \frac{\vartheta}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{\varepsilon}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{\Psi} &= \psi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\vartheta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\varepsilon = \lambda_3 - (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, $\psi = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$.

当 $\Delta > 0$ 时, $\nabla\mathbf{V}$ 有一个实特征值 λ_r 和一对共轭复特征值 $\lambda_{cr} \pm i\lambda_{ci}$ 时, 在正规标架下有

$$\nabla\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \lambda_{cr} & \psi + \gamma & \beta \\ -\psi & \lambda_{cr} & \alpha \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}. \quad (9)$$

$\nabla\mathbf{V}$ 对应的特征值方程可写为

$$\begin{aligned} &(\lambda - \lambda_r)(\lambda - \lambda_{cr} - i\lambda_{ci})(\lambda - \lambda_{cr} + i\lambda_{ci}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

特征多项式根的判别式为

$$\Delta = \frac{1}{27}\lambda_{ci}^2 \left(\lambda_{ci}^2 + (\lambda_r - \lambda_{cr})^2 \right)^2. \quad (11)$$

将 $\nabla\mathbf{V}$ 分解为张量 \mathbf{N} 和幂零张量 \mathbf{S} 之和, \mathbf{N} 和 \mathbf{S} 的表达式如下:

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{V} &= \mathbf{N} + \mathbf{S}, \\ \mathbf{N} &= \begin{pmatrix} \lambda_{cr} & \psi & 0 \\ -\psi & \lambda_{cr} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

\mathbf{N} 仍然分解为三部分

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{E} + \mathbf{Z} + \mathbf{\Psi}, \quad (13) \\ \mathbf{E} &= \frac{\vartheta}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Z} &= \frac{\varepsilon}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

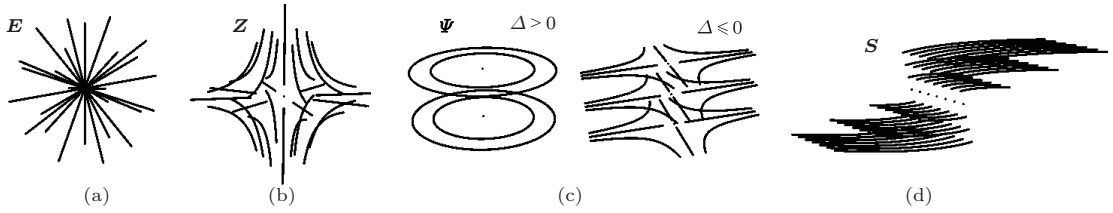


图2 四元分解中各张量代表的典型流谱示意图 (a) 胀缩率张量 \mathbf{E} 代表均匀胀缩; (b) 标架轴变形率张量 \mathbf{Z} 代表沿标架轴方向的轴向变形; (c) 垂直于标架轴的平面张量 Ψ ; $\Delta > 0$, Ψ 代表该平面为正规转动, $\Delta < 0$, Ψ 代表该平面有畸变; (d) 剪切率张量 \mathbf{S} 代表简单剪切

$$\Psi = \psi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

其中 $\vartheta = \lambda_r + 2\lambda_{cr}$, $\varepsilon = \lambda_r - \lambda_{cr}$.

而 ψ 为 \mathbf{N} 的共轭复特征值虚部的绝对值, 张量 Ψ 的意义变为复特征向量平面内的正规转动.

无论 $\Delta \leq 0$ 还是 $\Delta > 0$ 时, $\nabla \mathbf{V}$ 均可以进行如下的四元分解:

$$\nabla \mathbf{V} = \mathbf{E} + \mathbf{Z} + \Psi + \mathbf{S}, \quad (15)$$

其中张量 \mathbf{E} , \mathbf{Z} , Ψ , \mathbf{S} 各代表的典型流谱如图2所示.

现在分析常规的三元分解(4)式中 \mathbf{A} , Ω , 与四元分解(16)式中 \mathbf{Z} , Ψ , \mathbf{S} 之间的关系.

首先将 \mathbf{S} 分解为对称简单剪切 \mathbf{S}_S 和反对称简单剪切 \mathbf{S}_A 两部分

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_S &= \frac{1}{2} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T), \\ \mathbf{S}_A &= \frac{1}{2} (\mathbf{S} - \mathbf{S}^T), \end{aligned} \quad (16)$$

式中 \mathbf{S}^T 是 \mathbf{S} 的转置.

当 $\nabla \mathbf{V}$ 有三个实特征值时,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{Z} + \Psi + \mathbf{S}_S, \\ \Omega &= \mathbf{S}_A. \end{aligned} \quad (17)$$

张量 \mathbf{A} 代表的流体微元畸变是由标架轴向变形 \mathbf{Z} 、平面畸变 Ψ 和对称简单剪切 \mathbf{S}_S 三部分构成; 张量 Ω 代表的平均转动就是反对称简单剪切, 而不是真正的转动.

当 $\nabla \mathbf{V}$ 有共轭复特征值时

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{Z} + \mathbf{S}_S, \\ \Omega &= \Psi + \mathbf{S}_A. \end{aligned} \quad (18)$$

张量 \mathbf{A} 代表的流体微元畸变是由标架轴向变形 \mathbf{Z} 和对称简单剪切 \mathbf{S}_S 两部分构成; 张量 Ω 代表的平均转动则由正规转动 Ψ 和反对称简单剪切 \mathbf{S}_A 构

成, 或者说正规转动 Ψ 就是去除了部分简单剪切 \mathbf{S}_A 的平均转动.

由此可知, 畸变率张量 \mathbf{A} 和平均转动张量 Ω , 无论 $\nabla \mathbf{V}$ 特征值在何种情况下都包含有简单剪切张量 \mathbf{S} 的成分.

四元分解将简单剪切 \mathbf{S} 提取出来, 流体微团运动分解的物理意义就单纯明晰了.

根据 $\nabla \mathbf{V}$ 三元分解, Okubo^[4] 和 Weiss^[6] 建立的 Q 判据在可压和不可压时都认为是第二主不变量 I_2 ,

$$Q = I_2 = \frac{\vartheta^2}{3} - \frac{\|\mathbf{A}\|_f^2}{2} + \frac{\omega^2}{4}.$$

实际上第二主不变量 I_2 含有流体微元涨缩 $\vartheta = \nabla \cdot \mathbf{V}$ 的影响. 对只有均匀涨缩的可压缩问题, Q 依然大于零, 这显然是不合理的. 因此 Q 与 I_2 的关系应为

$$Q = I_2 - \frac{\vartheta^2}{3}. \quad (19)$$

这样对于可压和不可压, Q 均可统一表示为

$$Q = \frac{1}{4} (\omega^2 - 2\|\mathbf{A}\|_f^2) = \frac{1}{2} (\|\Omega\|_f^2 - \|\mathbf{A}\|_f^2). \quad (20)$$

当 $\nabla \mathbf{V}$ 有三个实特征值时, 将(17)式代入(20)式, 可得到

$$Q = -\left(\frac{1}{3}\varepsilon^2 + \psi^2\right) \leq 0. \quad (21)$$

可以看出, Q 是流体微元沿某标架轴向变形与垂直该标架轴的平面畸变总和的负值的量度.

将 Δ 的定义式(3)中三个主不变量代入特征值的关系, 再代入(8)式中特征值和 ϑ , ψ , ε 的关系, 可得到

$$\Delta = -\frac{1}{27}\psi^2 (\varepsilon^2 - \psi^2)^2 \leq 0. \quad (22)$$

可以看出, Δ 是流体微元沿某标架轴向变形与垂直该标架轴的平面畸变之差的量度.

当 $\nabla \mathbf{V}$ 有共轭复特征值时, 将(18)式代入(20)式可得到

$$Q = \psi(\psi + \gamma) - \frac{1}{3}\varepsilon^2$$

或

$$Q = \lambda_{ci}^2 - \frac{1}{3}\varepsilon^2. \quad (23)$$

(23)式使得 Q 的意义更明确,它为流体微元围绕实特征值 λ_r 的特征向量方向的净转动与轴向变形的差.满足 $Q > 0$ 的区域,一定有 $\lambda_{ci} \neq 0 (\Delta > 0)$,即有净转动的存在.但对于 $\lambda_{ci} \neq 0$ 净转动存在的区域,不一定满足 $Q > 0$,轴向变形 ε 大小会影响 Q 的正负.而且(23)式表明简单剪切 S 的存在不影响 Q 正负的判断.

现以具有轴向拉伸的轴对称Burgers涡为例,径向速度和轴向速度代表了流动具有轴向拉伸的变形,图3给出了具有较强轴向拉伸的Burgers涡轴向速度 V_z 、径向速度 V_r 、切向速度 V_θ 分布.图4为该速度场下的三个涡判据的比较.

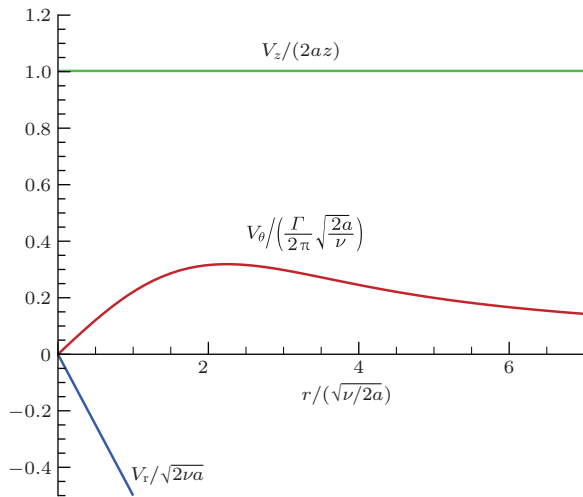


图3 Burgers 涡各速度分布

$0.00 < r/(\sqrt{\nu/2a}) < 1.38, Q > 0, \Delta > 0,$
 $\lambda_{ci} \neq 0, \omega \neq 0, \lambda_2 < 0;$

$1.38 < r/(\sqrt{\nu/2a}) < 1.63, Q < 0, \Delta > 0,$
 $\lambda_{ci} \neq 0, \omega \neq 0, \lambda_2 < 0;$

$1.63 < r/(\sqrt{\nu/2a}) < 2.20, Q < 0, \Delta > 0,$
 $\lambda_{ci} \neq 0, \omega \neq 0, \lambda_2 \geq 0;$

$2.20 < r/(\sqrt{\nu/2a}) < 6.00, Q < 0, \Delta < 0,$ 无
 $\lambda_{ci}, \omega \neq 0, \lambda_2 \geq 0;$

Q 判据($Q > 0$)诊断出有局部涡的区域相对最小, ω 判据诊断出局部涡的区域最大.

当 ∇V 有共轭复特征值时,将(14)式中 ϑ, ε 和特征值的关系代入(11)式后可得到

$$\Delta = \frac{1}{27}\lambda_{ci}^2 (\varepsilon^2 + \lambda_{ci}^2)^2 > 0. \quad (24)$$

(24)式使 Δ 判据的物理意义也更加明确, Δ 度量的是绕实特征值 λ_r 的特征向量方向的净转动和该轴向变形的总和,其中轴向变形 ε 不会影响 $\Delta > 0$ 的成立,所以 Δ 判据作为判定局部流线定性结构是合适的,但量度净转动的绝对强度大小,会受到标架轴向变形 ε 的干扰.

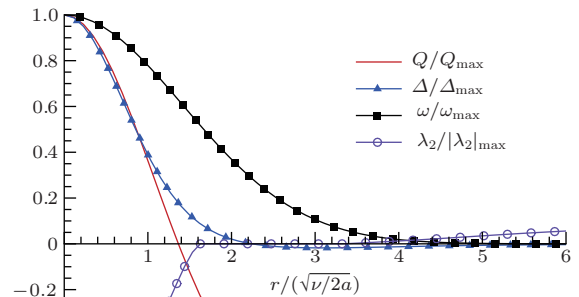


图4 对Burgers 涡采用四种涡判据分析对应区域大小比较

由(9)式得到 ∇V 的特征值的判别式应和(11)式相等,由此可得到

$$\lambda_{ci}^2 = \psi(\psi + \gamma). \quad (25)$$

λ_{ci} 的存在是最明确表明流体微元在复特征平面有净转动,选用其绝对值或平方还可度量净转动的绝对强度大小.由(25)式可知, λ_{ci} 代表的净转动是复特征向量平面内正规转动 ψ 和简单剪切 γ 的总效果.

由(18)式可知,正规转动 ψ 是去除了部分简单剪切的平均转动,是最基本的转动.正规转动均出现在本文4个涡判据当中,理论上可作为场论中最基本的局部涡判据,但其量值的计算相对常用的四个涡判据要复杂些.

λ_2 判据虽然是基于动力学的考虑,但定义本身完全是一个运动学量. λ_2 判据的运动学意义远不如 Δ 判据及 λ_{ci} 判据明显,从 $D^2 + \Omega^2$ 的第二主不变量就会发现耦合了流体微元的涨缩、畸变和平均转动,因此 λ_2 判据所描述的现象是完全三维的,它的复杂性使其无法像其他四种判据那样分解为几个成份的组合,它是所有成份的复合体.关于 λ_2 判据的深入讨论,将在今后展开.

4 结 论

若将速度梯度 $\nabla \mathbf{V}$ 分解为均匀胀缩率张量 \mathbf{E} 、正规标架轴向变形率张量 \mathbf{Z} 、平面张量 Ψ 和简单剪切率张量 \mathbf{S} 四部分, 可知流体微元的涡量表明的平均转动中总是包含有简单剪切 \mathbf{S} 成分, 因此涡量不等于零是无法区分出平行剪切流动的; 采用 $Q > 0$ 的数值表明的是流体微元净转动相对于特征向量标架轴向变形的强弱, 但 $Q > 0$ 只是 $\nabla \mathbf{V}$ 复特征向量平面上净转动存在的充分而不必要的条件; Δ 的正负直接决定了平面张量 ψ 代表流体微元是发生平面畸变, 还是复特征向量平面内的正规转动, 且能明确辨别 $\nabla \mathbf{V}$ 复特征向量平面净转动是否存在, 但由于受到标架轴向变形的影响, Δ 数值大小无法表达净转动的强度; λ_{ci} 是流体微元复特征平面净转动绝对强度的量度, 净转动是复特征向量平面上正规转动和简单剪切的合成. 正规转动是去除了部分简单剪切的平均转动, 是基本的转动, 但是演变为涡判据条件的计算相对复杂些. 采用上述四种涡判据诊断流场中局部涡区域的大小可能并不一致, 其数值大小更是反映了所诊断出的局部区域的不同运动学特性, 因而各涡判据等值面展示的所谓的涡结构形态, 也代表各自不同的意义. 相对而言,

λ_{ci} 判据更简单一些. λ_2 判据最初是基于动力学分析的角度, 但定义还是一个运动学量, 由于其复杂性使其无法简单分解为几个成份的组合进行分析.

参考文献

- [1] Wu J Z, Ma H Y, Zhou M D 1993 *Introduction to Vorticity and Vortex Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) p221 (in Chinese) [吴介之, 马晖扬, 周明德 1993 涡动力学引论 (北京: 高等教育出版社) 第 221 页]
- [2] Moffatt H K, Kida S, Ohkitani K 1994 *J. Fluid Mech.* **259** 241
- [3] Jiang N, Tang Z Q 2011 *Chin. Phy. Lett.* **28** 054702
- [4] Okubo A 1970 *Deep-Sea. Res.* **17** 445
- [5] Hunt J C R, Wray A A, Moin P 1988 *Center for Turbulence Research, Report* CTR-S88 p.193
- [6] Weiss J 1991 *Physica D* **48** 273
- [7] Cai W H, Li F C, Zhang H N 2011 *Chin. Phys. B* **20** 124702
- [8] Chong M S, Perry A E, Cantwell B J 1990 *Phys. Fluids A* **2** 765
- [9] Zhou J, Adrian R J, Balach, ar S, Kendall T M 1999 *J. Fluid Mech.* **387** 353
- [10] Jeong J, Hussain F 1995 *J. Fluid Mech.* **285** 69
- [11] Chen L, Tang D B, Liu C Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 094702 (in Chinese) [陈林, 唐登斌, Chaoqun Liu 2011 物理学报 **60** 094702]

Evaluation of vortex criteria by virtue of the quadruple decomposition of velocity gradient tensor*

Li Zhen¹⁾²⁾ Zhang Xi-Wen¹⁾ He Feng^{1)†}

1) (School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084 China)

2) (Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing 100084 China)

(Received 9 October 2013; revised manuscript received 27 November 2013)

Abstract

Vortices play a crucial role in fluid dynamics, which is closely related to fluid diffusion mixing, force, heat, and noise. Five widely-used vortex identification criteria, i.e. the ω -criterion, Q -criterion, Δ -criterion, λ_{ci} -criterion, and λ_2 -criterion are analyzed, and four of them are compared with each other based on the velocity-gradient-tensor decomposition method. A new quadruple decomposition method (QDM) is introduced for the first time, so far as we know, to decompose fluid motions into four fundamental components: dilatation, axial deformation along the principal axes of the strain-range sensor, planar motion, and pure shearing. This method helps make the kinematic implications of the four vortex identification criteria more clear. It is found that the mean rotation of fluid elements always contains the pure shearing motion. Non-zero mean rotation ω does not guarantee the existence of the spiraling streamlines, e.g. in a typically parallel shear flow. A positive Q value indicates the strength of the pure rotation of a fluid element in the 2D complex eigenvalue plane on top of the axial deformation, which however is a sufficient but not a necessary condition for the existence of pure rotation. The Δ -criterion can correctly tell the existence of pure rotation, but cannot accurately determine its strength. The λ_{ci} -value represents the absolute strength of the pure rotation, which is the combined effect of the canonical rotation in the complex eigenvector plane and the pure shearing. The proposed QDM enables us to achieve a deeper understanding of vortices and motions in fluid dynamics.

Keywords: vortex criterion, velocity-gradient tensor, quadruple-decomposition

PACS: 47.32.-y, 47.32.C-

DOI: 10.7498/aps.63.054704

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2012CB720101), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11072130).

† Corresponding author. E-mail: hefeng@tsinghua.edu.cn