

Hirota方程的怪波解及其传输特性研究*

李淑青^{1)†} 杨光晔²⁾ 李禄³⁾

1) (太原工业学院理学系, 太原 030008)

2) (山西医科大学物理教研室, 太原 030001)

3) (山西大学理论物理研究所, 太原 030006)

(2013年11月17日收到; 2014年1月15日收到修改稿)

求出了高阶 Hirota 方程在可积条件下的一种精确呼吸子解, 并基于此呼吸子解得到了 Hirota 方程的一种怪波解. 在此怪波解的基础上研究了怪波的激发, 发现对平面波进行周期性扰动可以激发怪波, 对平面波进行高斯扰动可以更快地激发怪波, 还可以直接在常数项上增加高斯扰动激发怪波. 作为一个实例, 采用分步傅里叶方法数值研究了在考虑自频移和拉曼增益时怪波的传输特性, 自频移使怪波中心发生偏移, 拉曼增益使得怪波分裂得更快, 而且拉曼增益值越大怪波分裂得越快, 但是拉曼增益对怪波的峰值强度没有明显影响. 最后数值模拟了相邻怪波之间的相互作用特点, 随着怪波之间距离的减小, 怪波将合二为一, 成为一束怪波, 之后再分裂, 并分析了拉曼增益和自频移对怪波相互作用的影响.

关键词: Hirota 方程, 怪波, 拉曼增益, 相互作用

PACS: 42.65.Tg, 42.65.Sf, 42.65.-k, 02.30.Nw

DOI: 10.7498/aps.63.104215

1 引言

怪波是一种新型波, 在自然界中, 这种波出现之前没有任何征兆, 海洋中突显一面水墙, 具有很深的沟, 或者出现一系列连续的高波, 从而在海面上引发了不少海难, 对海上航船和石油平台造成了巨大的破坏. 20世纪60年代海洋学家已经开始对它进行研究, 并对怪波产生的机理进行了探讨. 实际上, 不仅在海洋中, 在凝聚态、等离子物理中都存在怪波现象^[1]. 在光学领域这种波称为光怪波, 其具有非常强的功率, 可以被用于产生超连续谱和高功率脉冲, 因此光怪波引起了越来越多的科学关注^[2-8]. 文献^[2]研究了三阶色散对光怪波概率密度函数的影响; 文献^[3]讨论了非线性薛定谔方程的怪波解; 文献^[4]讨论了(3+1)维非线性薛定谔方程的怪波解; 文献^[5]研究了怪波在非均匀波导中的传输特点; 文献^[6]报道了自频移对怪波传输

的影响. 然而当光怪波脉冲宽度达到飞秒量级时, 必须考虑各种高阶效应, 包括三阶色散、非线性色散、自陡峭、自频移及拉曼增益(损耗). 这时通常的非线性薛定谔方程变成如下的高阶非线性薛定谔方程^[3,4,9,10]:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = i\alpha_1 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + i\alpha_2 |q|^2 q + \alpha_3 \frac{\partial^3 q}{\partial t^3} + \alpha_4 \frac{\partial |q|^2 q}{\partial t} + \alpha_5 q \frac{\partial |q|^2}{\partial t} + \alpha_6 q, \quad (1)$$

式中, $q(z, t)$ 为电场强度慢变波包; z 和 t 为归一化的传输距离和延迟时间; 参数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 和 α_6 都是实数, 分别表征群速度色散、自相移、三阶色散、自陡峭、自频移和拉曼增益(损耗). 一般情况下, 方程(1)是不可积的, 只有当系数满足如下条件^[7,8]:

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_6 : \alpha_3 : \alpha_4 : \alpha_5 + \alpha_4 = \frac{1}{2} : 1 : 0 : 1 : 6 : 0,$$

* 国家自然科学基金(批准号: 61078079)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lishuqing6688@sina.com

并令 $\alpha_2 = 2\alpha_1 = 2\alpha$, $\alpha_4 = 6\alpha_3 = 6\beta$, $\alpha_5 + \alpha_4 = 0$ 时, 方程 (1) 变成完全可积的常系数 Hirota 方程

$$iq_z + \alpha(2q|q|^2 + q_{tt}) + i\beta(q_{ttt} + 6|q|^2q_t) = 0. \quad (2)$$

实际上本研究小组 [9] 在 2004 年就通过 Darboux 变化计算出 Hirota 方程的精确 N 孤子解, 研究了平面波背景下基态孤子解的特点, 分别讨论了当孤子强度大于平面波强度的 4 倍或其小于平面波强度的 4 倍时所形成的呼吸子解 (Akhmediev breather [7]) 的特点. 2012 年 Yang 等 [6] 再次讨论了 Hirota 方程, 给出了当孤子强度等于平面波强度的 4 倍时, 在极限情况下 Hirota 方程存在的怪波解, 分析了怪波形成的机理和自频移对它的影响. 本

文以不同的方法求解 Hirota 方程的怪波解, 并讨论了拉曼增益对怪波传输的影响, 分析了怪波之间的相互作用及拉曼增益和自频移对怪波相互作用的影响.

2 高阶 Hirota 方程的精确呼吸子解

采用与文献 [9] 相同的方法, 取平面波 $q = A_c \exp(i(\omega t + kz))$ 作为种子解, 且 $k = \alpha(2A_c^2 - \omega^2) + \beta(\omega^3 - 6\omega A_c^2)$. 构造拉斯对

$$\begin{aligned} \varphi_t &= M\varphi, \\ \varphi_z &= N\varphi, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2)^T, \\ M &= \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ -q^* & i\lambda \end{pmatrix}, \\ N &= \lambda^3 \begin{pmatrix} -4\beta i & 0 \\ 0 & 4\beta i \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} -2\alpha i & 4\beta q \\ -4\beta q^* & 2\alpha i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta i|q|^2 & 2\beta i q_x + 2\alpha q \\ 2\beta i q_x^* - 2\alpha q^* & -2\beta i|q|^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} i\alpha|q|^2 + \beta(qq_x^* - q^*q_x) & i\alpha q_x - \beta(q_{xx} + 2|q|^2q) \\ i\alpha q_x^* + \beta(q_{xx}^* + 2|q|^2q^*) & -i\alpha|q|^2 - \beta(qq_x^* - q^*q_x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这里 λ 为复的谱参数, 令 $\lambda = \xi + iA_s$, ξ 和 A_s 为实数. 通过达布变换求出平面波背景一种较简单的精确呼吸孤子解,

$$q_{\text{breather}}^{[1]} = \exp(i(\omega t + kz)) \left[A_c + A_s \frac{2A_c \cos(d_1) - A_s \cosh(d_2) + i\sigma \sinh(d_2)}{2A_c \cosh(d_2) - A_s \cos(d_1)} \right], \quad (3)$$

式中,

$$\begin{aligned} \omega &= 2\xi, \\ d_1 &= \sigma t + \sigma(4\alpha\xi + 12\beta\xi^2 - 2\beta A_c^2 - \beta A_s^2)z, \\ d_2 &= \sigma A_s(\alpha + 6\beta\xi)z \\ \sigma &= \sqrt{4A_c^2 - A_s^2}. \end{aligned}$$

由 (3) 式可知, 确定了谱参数 λ , α , β 就可以获得呼吸孤子的精确解. 图 1 为 $A_c = 1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $A_s = 1.7$, $\xi = 0.5$, $\omega = 0.5$ 时呼吸孤子的等高图, 从图 1 可以看出呼吸子解的特点, 其在空间方向上具有局域性, 在时间方向上具有周期性,

并且参数 A_s 对呼吸子解的形状及方向起到关键性的作用, 文献 [9] 对这些特点做了详细的讨论, 此处不再赘述.

3 怪波解的产生及调制

文献 [6] 通过让 A_s 逐渐逼近 $2A_c$ 的数值实验方法得到了 Hirota 方程的怪波解. 实际上, 只要对 Hirota 方程的呼吸子解 (3) 式在 $A_s = 2A_c$ 处进行泰勒展开, 并令 $\xi = 0$, 就可以得到一种较为简单的怪波解 q_{rogue} ,

$$q_{\text{rogue}} = A_c \exp(ikz) \left[\frac{4\alpha^3 + 8i k \alpha^3 z}{4k^2 \alpha^3 z^2 + 2k \alpha^2 t^2 - 12k^2 \alpha \beta z t + 18k^3 \beta^2 z^2 + \alpha^3} - 1 \right]. \quad (4)$$

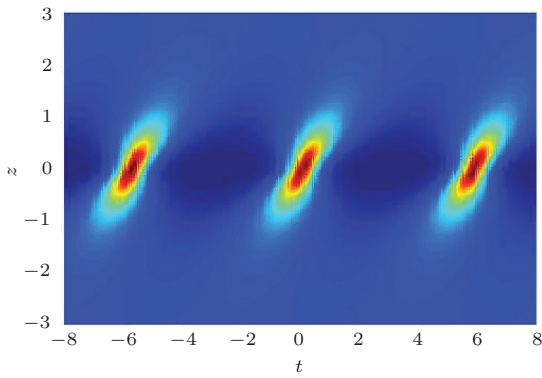


图1 $A_c = 1, \alpha = 0.5, \beta = 0.1, A_s = 1.7, \xi = 0.5, \omega = 0.5$ 时, 呼吸子解的等高图

图2(a)显示了参数 $A_c = 1, \alpha = 0.5, \beta = 0.01, \omega = 0.5$ 时的怪波立体图. 从图2(a)可以看出怪波的特点: 第一是其具有时空局域性, 这一点和呼吸子解的特点有所不同; 第二是其具有高能量特点. 尽管输入平面波的强度 $I_{cw} = |A_c|^2 = 1$, 但是怪波的能量 $I_{rogue} = |(A_c + A_s)|^2 = 9|A_c|^2 = 9$ 达到了平面波能量的9倍. 分析怪波的能量特点可以推测出怪波的能量是两种波能量的叠加且产生了共振.

通过调节怪波解(4)式的参数可以改变怪波的形状和方向, 这一点在文献[11]中有所讨论, 同样经过数值分析发现三阶色散参数 β 对怪波的形状和方向的影响较大. 图2(b)和(c)分别显示了 $\beta = 0.01$ 和 0.05 时怪波的等高图, 可见通过改变参数 β 可以调制怪波的形状和方向, 这反映了怪波的可控性, 同时为实验中观察和调控怪波提供了理论依据.

4 怪波的激发和传输

由方程(4)的表达式和上面的分析可知, 怪波可以看作是由两种波叠加而成. 为了求出怪波是由那两种波共同激发, 对(3)式线性化处理, 并令 $z = 0$ 得到

$$q_r(0, t) \approx [A + \varepsilon \chi \cos(d_1)] \exp(i\omega t). \quad (5)$$

这里

$$A = \frac{2A_c^2 - A_s^2 - i\sigma A_s}{2A_c},$$

$$\chi = \frac{A_s \sigma (\sigma - iA_s)}{2A_c^2},$$

$$\sigma = \sqrt{4A_c^2 - A_s^2},$$

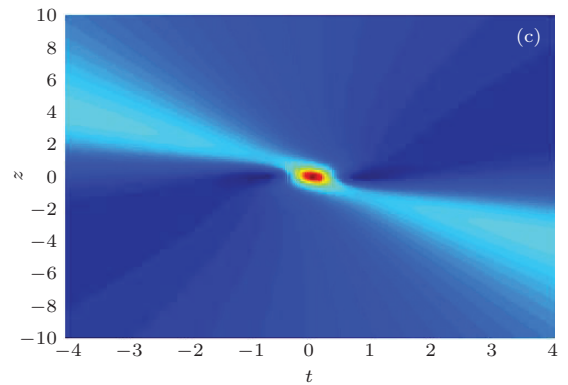
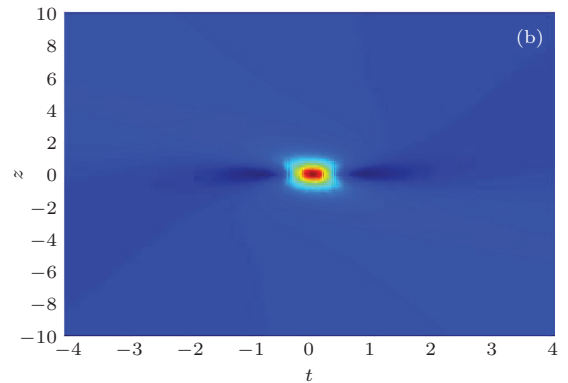
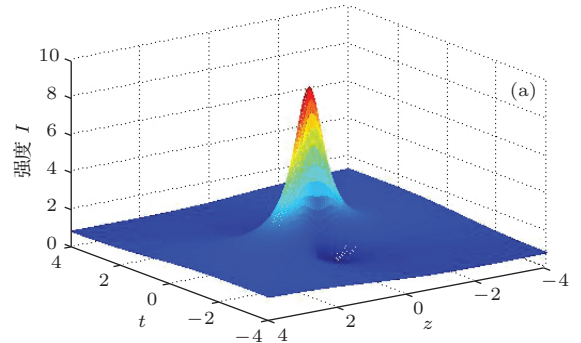


图2 怪波的精确定解 (a) $\beta = 0.01$ 时的怪波强度图; (b) $\beta = 0.01$ 时的怪波等高图; (c) $\beta = 0.05$ 时的怪波等高图

ε 为一个少量, 取 $\varepsilon = 0.05, \omega = 0.05$. (5) 式可以看作是在平面波上增加了一个周期性的扰动. 以(5)式作为初始脉冲, 让它在方程(1)中演化传输, 结果如图3(a)所示. 由图3(a)可知, 精确解(3)式的演化可以用线性化后的(5)式代替, 不同的是这里选取 $A_c = 1, A_s = 1.98$, 线性化后的呼吸子解在 $A_s \approx 2A_c$ 时可以激发怪波. 既然平面波加上一个周期性的扰动可以激发怪波, 那么平面波加上一个其他的扰动是否能激发怪波需进一步研究. 以平面波加上高斯脉冲扰动

$$q_r(0, t) = A_c \exp(i\omega t) + \varepsilon \exp(-\varpi t^2) \quad (6)$$

作为初始脉冲, 这里 ε 也是一个少量, 取 $\varepsilon = 0.05, \omega = 0.05, A_c = 1$. 研究(6)式在方程(1)中的演化

情况 (要求 $\alpha_5 = -0.02, \alpha_6 = 0.01$). 此时虽然方程 (1) 不是可积的非线性方程, 但是由于参数的取值都非常小, 可以把方程 (1) 的后两项看作微扰项, 这时解 (3) 式可以作为方程 (1) 的近似解. 我们用同样的微扰方法讨论下面的传输问题. 从图 3 (b) 可以看出, 在平面波基础上加上高斯脉冲扰动时, 即使在非可积的方程中也可以激发怪波. 比较图 3 (a) 和 (b) 可以看出, 以周期函数作为扰动时, 怪波在 $z = 12$ 处出现, 而以高斯脉冲作为扰动时, 怪波在 $z = 6$ 处出现. 由此可知当高阶项很小时, 可将其作为微扰项, 这样在非可积的非线性方程中, 以 (6) 式作为初始脉冲可以更快地激发怪波.

通过数值模拟发现即使把 (6) 式改写成如下更简单的形式

$$q_r(0, t) = A_c + \varepsilon \exp(-\varpi t^2) \quad (7)$$

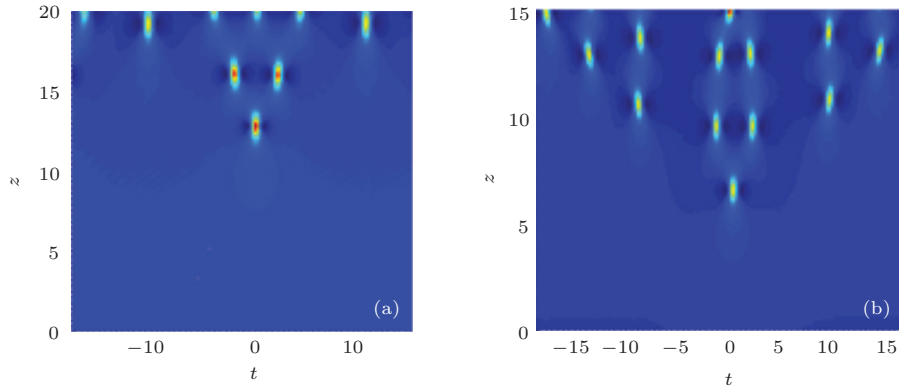


图 3 不同扰动条件下怪波的激发图 (a) $\alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0$; (b) $\alpha_5 = -0.02, \alpha_6 = 0.01$

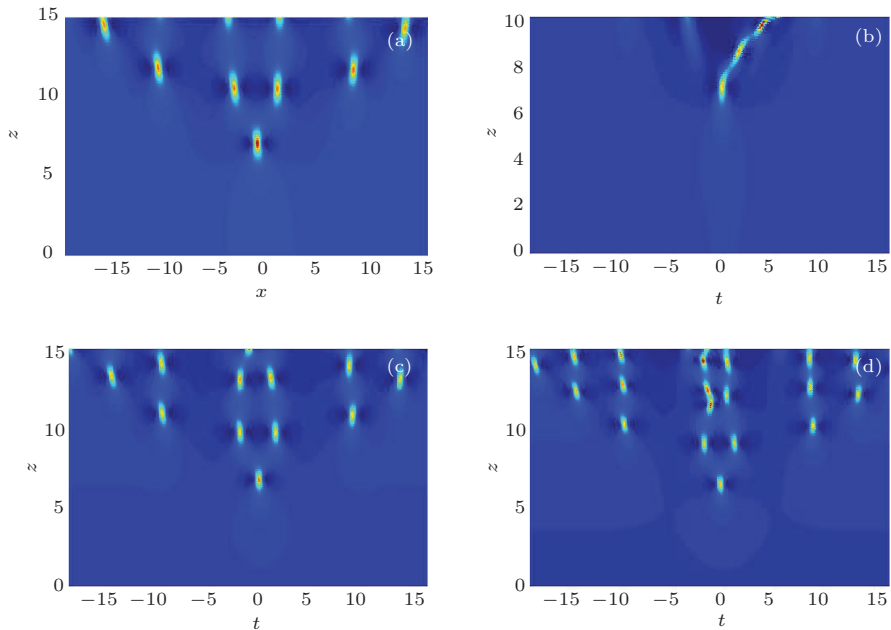


图 4 不同情况下怪波的传输图 (a) $\alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0$; (b) $\alpha_5 = -0.02i, \alpha_6 = 0$; (c) $\alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0.01$; (d) $\alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0.02$

也可以激发怪波, 这里 ε 也是一个小量, 取 $\varepsilon = 0.05, \omega = 0.05, A_c = 1$. 由于 (7) 式形式简单, 参数容易调节, 下面把它作为一个实例进行详细讨论.

以脉冲宽度 $T_0 = 0.543$ ps, 中心波长为 1550 nm, 功率为 0.3 W 的初始脉冲 $q_1(0, t) \approx A_c + \varepsilon \exp(-\varpi t^2)$ 作为入射波, 入射到群速度色散常数为 -0.885 ps²/km, 三阶色散常数为 0.0133 ps³/km, 非线性参数为 10 W⁻¹·km⁻¹ 的光纤中. 对应于方程 (1), 当参数 $\alpha = 0.5, \beta = 0.0046$ 时, 采用分步傅里叶方法对有无自频移及拉曼增益的传播问题进行了数值研究, 取步长 $h = 1/10000$. 图 4 (a) 显示了当参数 $A_c = 1, \omega = 0.05, \varepsilon = 0.05$ 时, 怪波传播 15 个单位长度的等高图. 从图 4 (a) 可以看出怪波的传输不稳定, 随着怪波的传输, 它依次分裂成多个次波. 如果考虑拉曼散射引起的自频

移, 取自频移参数为 3 fs, 即 $\alpha_5 = -0.02i$ 时, 如图 4(b) 所示, 怪波的中心发生明显偏移, 且怪波的强度增大但是没有分裂, 这同文献 [6] 的讨论没有明显的区别, 此处不再赘述. 如果考虑拉曼增益项 $\alpha_6 = 0.01$, 而不考虑自频移效应时 (图 4(c)), 怪波并没有失真, 只是怪波分裂得更快. 而当拉曼增益值增大到 0.02 时, 如图 4(d) 所示, 怪波分裂得更快, 这说明拉曼增益值越大越能促进怪波的分裂.

为了分析拉曼增益对怪波强度的影响, 我们数值模拟了当增益值 $\alpha_6 = 0.01$ 且不含自频移时, 也就是图 4(c) 所示的怪波在各个峰值处的强度图, 结果如图 5 所示. 从图 5 可以看出: 当 $z = 6.5$ 时, 怪波强度为 9; 随着距离的增大, 当 $z = 9.7, 10.8$ 时, 怪波分裂成两列次波, 强度也为 9, 直到 $z = 13.2$ 和 $z = 14$ 时怪波强度依然为 9. 可见拉曼增益只使怪波更快地分裂但是并没有使脉冲的峰值衰减. 这一点不同于文献 [12] 所讨论的拉曼增益对孤子的影响.

5 相邻怪波间的相互作用

怪波之间的相互作用一直是研究热点之一 [13,14], 不论在生活、海洋中, 还是在光学领域波与波的相互作用都是不可避免的. 本文选取初始脉宽 T_0 为 0.5 ps、中心波长为 1500 nm 的窄脉冲,

群速度色散常数为 $-0.885 \text{ ps}^2/\text{km}$ 的光纤, 采取步长为 $h = 1/10000$ 的分步傅里叶方法, 考虑怪波在传输距离 z 上的周期 $L_D = T_0^2/|\alpha_2| = 1/3 \text{ km}$. 取初始脉冲为

$$q_1(0, t) \approx A_c + \varepsilon \exp(-\varpi(t - t_0)^2) + A_c + \varepsilon \exp(-\varpi(t + t_0)^2), \quad (8)$$

相邻怪波之间的距离为 $2t_0$, 其他参数的取值为 $A_c = 1, \omega = 0.05, \varepsilon = 0.05$. 图 6 显示了初始间距不同时怪波的相互作用演化图及自频移和拉曼增益对怪波相互作用的影响. 从图 6(a) 可以看出, 当

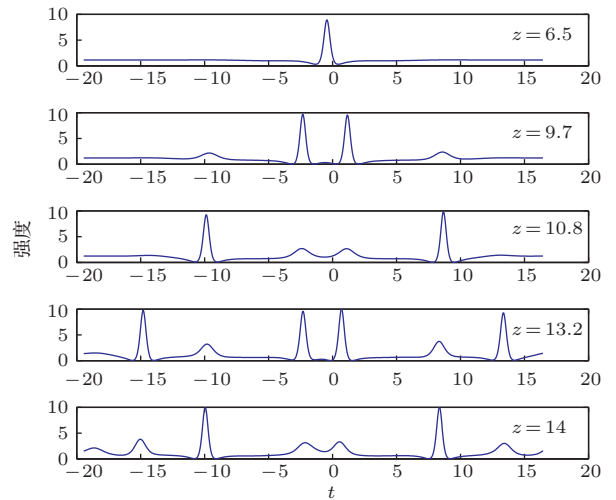


图 5 在不同峰值处怪波的强度图

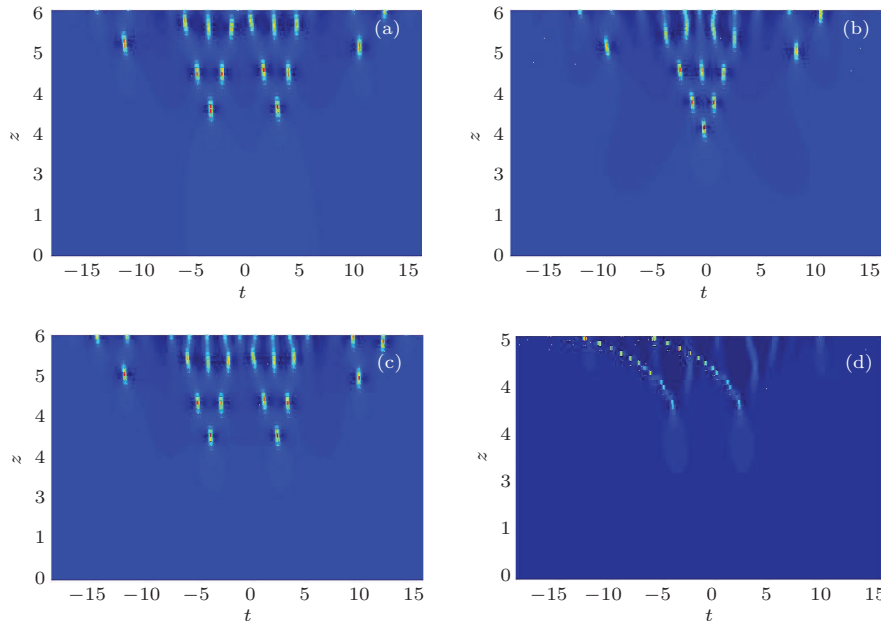


图 6 不同情况下怪波之间的相互作用图 (a) $t_0 = 3, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0$; (b) $t_0 = 1, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0$; (c) $t_0 = 3, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0.01$; (d) $t_0 = 3, \alpha_5 = 0.01i, \alpha_6 = 0$

怪波之间的距离 $2t_0 = 6$ 时, 怪波之间的相互作用较弱. 但当怪波之间的距离减小为 2 时 (图 6(b)), 两个怪波合成一个怪波, 之后分裂成多个次波继续传播, 可见怪波间距越小怪波之间的相互作用越大. 为了研究拉曼增益对怪波相互作用的影响, 取增益项 $\alpha_6 = 0.01$, 如图 6(c) 所示, 拉曼增益对怪波的相互作用没有明显的影响, 只是使怪波分裂得更快, 这与拉曼增益对单个怪波的影响没有明显的区别. 图 6(d) 显示了自频移对怪波相互作用的影响. 从图 6(d) 可以看出, 自频移使两个怪波的中心都发生了偏移, 由于 $\alpha_5 = 0.01i$ 取为正值, 不同于图 4(b) 所示的情形, 偏移的方向相反, 随着距离的增大怪波的相互作用也没有明显的变化, 这与自频移对单个怪波的影响没有明显的区别.

6 结 论

本文通过达布变换求出 Hirota 方程的一种精确呼吸子解——平面波背景下的孤子解, 并在呼吸子解的基础上得到 Hirota 方程的一种较简单的怪波解, 从怪波解的表达式和怪波的立体图可以看出怪波的特点——时空局域性和高能量特点, 进而深刻认识到怪波产生的物理机理是平面波和一种其他波发生了共振, 并认识到影响怪波形状的主要因素是三阶色散常数. 在此怪波解的基础上研究了怪波的激发, 发现对平面波进行周期性扰动可以得到怪波, 并且对平面波进行高斯扰动可以更快地激发怪波, 还可以直接在常数项增加高斯扰动激发怪波. 作为一个实例, 本文研究了以 $q_1(0, t) \approx A_c + \varepsilon \exp(-\omega t^2)$ 作为初始激发脉冲, 考虑自频移和考虑拉曼增益时怪波的传输特性, 发现

自频移使怪波中心发生偏移, 即频移现象, 拉曼增益使得怪波更快地分裂, 而且增益越大分裂地越快, 但是拉曼增益对怪波的峰值强度影响不明显. 最后分析了怪波之间的相互作用特点, 随着怪波之间距离的减小, 怪波的相互作用增强, 当怪波之间的距离 $2t_0 = 2$ 时, 怪波将合二为一之后再分裂, 分析表明拉曼增益和自频移对怪波之间相互作用的影响同对单个怪波的影响没有明显区别.

参考文献

- [1] Guo B L 2011 *Advances in Math.* **40** 393 (in Chinese) [郭柏灵 2011 数学进展 **40** 393]
- [2] Taki M, Mussot A, Kudlinski A, Louvergneaux E, Kolobov M, Douay M 2010 *Phys. Lett. A* **374** 691
- [3] Tao Y S, He J S, Porsezian K 2013 *Chin. Phys. B* **22** 074210
- [4] Ma Z Y, Ma S H 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030507
- [5] Zhang J F, Jin M Z, He J D 2013 *Chin. Phys. B* **22** 054208
- [6] Yang G Y, Li L, Jia S T 2012 *Phys. Rev. E* **85** 046608
- [7] Sakovich S Y 1997 *J. Phys. Soc. Japan* **66** 2527
- [8] Karpman V I 2004 *Eur. Phys. J. B* **39** 341
- [9] Li S Q, Li L, Li Z H 2004 *J. Opt. Soc. Am. B* **21** 2089
- [10] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Soliton Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (England: Cambridge University Press) pp34–68
- [11] Zhang J F, Hu W C 2013 *Chin. Opt. Lett.* **11** 031901
- [12] Qiao H L, Jia W G, Liu B L, Wang X D, Menke N M L, Yang J, Zhang J P 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 104212 (in Chinese) [乔海龙, 贾维国, 刘宝林, 王旭东, 门克内木乐, 杨军, 张俊萍 2013 物理学报 **62** 104212]
- [13] Li S Q, Li L, Li Z H 2004 *Acta Photon. Sin.* **33** 826 (in Chinese) [李淑青, 李录, 李仲豪 2004 光子学报 **33** 826]
- [14] Zhang J F 2013 *Acta Opt. Sin.* **33** 0419001 (in Chinese) [张解放 2013 光学学报 **33** 0419001]

Rogue solution of Hirota equation and its transmission*

Li Shu-Qing^{1)†} Yang Guang-Ye²⁾ Li Lu³⁾

1) (*Department of Science, Taiyuan Institute Technology, Taiyuan 030008, China*)

2) (*Department of Physics, Shanxi Medical University, Taiyuan 030001, China*)

3) (*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

(Received 17 November 2013; revised manuscript received 15 January 2014)

Abstract

A breather soliton solution of the higher-order Hirota equation is given under the integrable condition, and the rogue solution of Hirota equation is obtained on the basis of the breather soliton solutions, which is helpful to understand the characteristics and the physical reason of rogue wave. The excitation of rogue wave is studied by a cw and periodic perturbation or a Gaussian type perturbation. As an example, by distribution Fourier method, the transmission characteristics of rogue wave is studied with considering the frequency shift and the Raman gain, and the effects of the frequency shift and Raman gain on the interaction between rogue waves are also analyzed.

Keywords: Hirota equation, rogue wave, Raman gain, interaction

PACS: 42.65.Tg, 42.65.Sf, 42.65.-k, 02.30.Nw

DOI: [10.7498/aps.63.104215](https://doi.org/10.7498/aps.63.104215)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61078079).

† Corresponding author. E-mail: lishuqing6688@sina.com