物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 12 (2014) 120503

# 分数阶非对称耦合系统在对称周期势中的定向输运*

屠浙[1)] 赖莉[1)] 罗懋康[1)2)†

1) (四川大学数学学院, 成都 610065)

2) (四川大学空天科学与工程学院, 成都 610065)

( 2014 年 1 月 15 日收到; 2014 年 2 月 25 日收到修改稿 )

在没有外力且周期势对称的情况下, 对非对称耦合粒子链的运动, 以具备更强刻画能力的分数阶微积分理论建立了分数阶模型, 对其定向输运现象进行针对性研究, 采用分数阶差分法进行数值求解并分析系统参数对定向输运速度的影响. 相应仿真表明, 分数阶非对称耦合系统在没有外力和噪声驱动的情况下仍能产生定向输运, 且输运速度随阶数的增大而增大; 当阶数固定时, 粒子链平均速度随耦合强度和势垒高度非单调变化; 当系统存在噪声时, 粒子链平均速度出现了广义随机共振现象, 且通过调节其他参数, 可使得系统对噪声免疫甚至使噪声促进定向输运.

**关键词**: 分数阶系统, 非对称耦合, 定向输运, 广义随机共振

**PACS:** 05.10.Gg, 45.10.Hj **DOI:** 10.7498/aps.63.120503

## 1 引 言

近年来, 耦合系统的定向输运现象受到了物理、生物等不同学科领域的密切关注, 并且成为了非线性系统定向输运研究的一个重要方向[1,2]. 随着科学技术的发展, 人们发现分子马达一般以集体形式工作[3,4], 马达之间的相互作用不可避免, 其定向输运现象有着广泛的应用前景, 如控制输运、分离细小颗粒以及实现某些生物功能等[2−6]. 已有大量的文献从实验和理论两方面对耦合系统定向输运现象进行了研究. 例如, Lipowsky 等[7] 发现多个分子马达的耦合会大幅提高输运速度; Downton 等[8] 则发现马达链内部做功会使得多分子马达的输运效率远远低于单分子马达; Roostalu 等[9] 发现驱动蛋白 Cin8 利用分子间的耦合作用可以改变定向输运的方向. 特别是, 当系统具有对称性时单粒子无法产生定向运动, 而多粒子之间的耦合作用可以导致系统对称性破缺, 从而形成定向输运[2,4]. 例如, Porto 等[10] 提出了含时耦合的定向输运模型; Zheng 等[11] 提出了耦合偏置的定向输运模型.

目前, 关于耦合系统定向输运现象的研究大多仍局限于整数阶系统[1−11]. 而越来越多的研究表明, 在许多物理生化过程、黏弹性材料等复杂系统中, 粒子的均方位移不正比于时间, 粒子的运动具有空间或时间的非局域性, 也即所谓的"记忆性", 此时整数阶系统将不再适用, 需要把粒子轨道的历史贡献考虑进来, 将传统的阻尼速度改为分数阶速度[12]. 分数阶微积分因其具有时间记忆性和长程空间相关性, 被广泛应用于混沌、随机共振及反常扩散等研究[13−19].

本文引入分数阶微积分理论来刻画系统的幂律记忆性, 在没有外力且周期势具有空间反演对称性的情况下, 对非对称耦合粒子链的运动建立了分数阶模型, 并研究其定向输运现象. 采用分数阶差分法进行数值仿真, 进而分析分数阶阶数、耦合强

* 国家自然科学基金 (批准号: 11171238) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

度、势垒高度和噪声强度等系统参数对粒子链定向输运速度的影响. 仿真表明, 分数阶非对称耦合系统在没有外力及噪声驱动的情况下仍可产生定向输运, 并且输运速度随阶数的增大而增大; 当阶数固定时, 粒子链定向输运速度将分别随耦合强度和势垒高度非单调变化; 当系统存在噪声时, 可以通过调节其他参数, 使得系统对噪声免疫甚至使得噪声促进定向输运.

## 2 系统模型

在非均匀介质中, 粒子所受阻尼力通常与历史速度有关, 即具有记忆性[14,20], 忽略惯性效应, $N$个耦合粒子在周期势场中的运动可由如下方程描述:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \gamma(t-\tau)\dot{x}_i(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=-\frac{\partial W(x_i)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}(\varepsilon+r)(x_{i+1}-x_i-a)\\&\quad-\frac{1}{2}(\varepsilon-r)(x_i-x_{i-1}-a)\\&\quad+\sqrt{2D}\xi_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,N),\end{aligned}\tag{1}$$

其中, $x_i(t)$为第$i$个粒子的位移, $\gamma(t)$为阻尼核函数, $W(x)$为势函数, $\varepsilon$为扩散耦合强度, $r$为梯度耦合强度, $a$为粒子间自由距离, $D$为噪声强度, $\xi_i(t)$为零均值高斯白噪声, 满足

$$\begin{aligned}&\langle\xi_i(t)\rangle=0,\\&\langle\xi_i(t)\xi_j(s)\rangle=\delta_{ij}\delta(t-s).\end{aligned}\tag{2}$$

在很多物理和生化过程中, 非均匀介质对粒子速度表现出幂律记忆性, 即距当前时刻越近, 记忆性越强, 历史速度影响越大[14,20,21]. 为此, 本文将阻尼核函数建模为如下的幂律函数:

$$\gamma(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}|t|^{-\alpha}\quad(0<\alpha<1).\tag{3}$$

阻尼核函数的图像如图1所示. 可以看到, $\alpha$越小, $\gamma(t)$衰减得越慢, 即对历史速度的记忆性越强, 可见$\alpha$刻画了阻尼记忆性的强弱.

结合Caputo分数阶微积分的定义[22]

$$\begin{aligned}{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha}x(t)=&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\dot{x}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&(0<\alpha<1),\end{aligned}\tag{4}$$

模型(1)可改写为如下分数阶系统:

$$\begin{aligned}{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha}x_i(t)=&-\frac{\partial W(x_i)}{\partial x_i}\\&+\frac{1}{2}(\varepsilon+r)(x_{i+1}-x_i-a)\\&-\frac{1}{2}(\varepsilon-r)(x_i-x_{i-1}-a)\\&+\sqrt{2D}\xi_i(t)\\&(i=1,2,\cdots,N;\quad 0<\alpha<1).\end{aligned}\tag{5}$$

本文研究一种非对称耦合情形, 即令$\varepsilon=r=k$ ($k$为耦合强度), 此时耦合成为单向耦合, 它在神经网络的信号传输、交通流等许多现象中都存在[2]. 采用周期边界条件, 并选取势函数为具有空间反演对称性的周期势, 即$W(x)=-d\cos x$, 其中$d$为势垒高度, 势函数的示意图见图2.

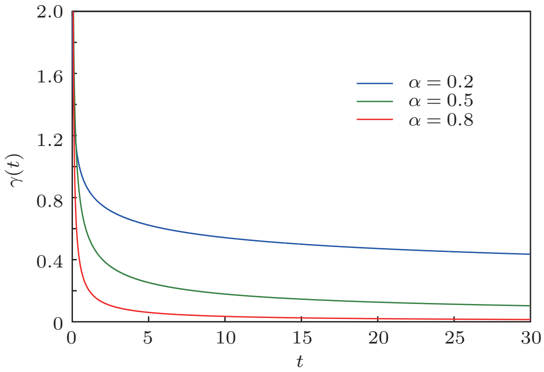


图1 (网刊彩色) 阻尼核函数$\gamma(t)$

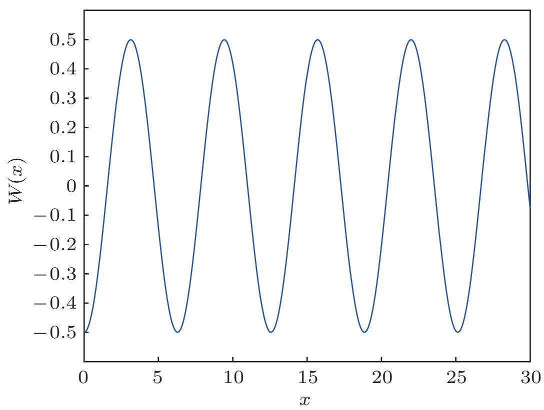


图2 对称周期势$W(x)$

于是, 模型(5)可简化为

$$\begin{aligned}&{}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha}x_i(t)\\&=-d\sin x_i+k(x_{i+1}-x_i-a)\\&\quad+\sqrt{2D}\xi_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,N;\\&\quad 0<\alpha<1),\end{aligned}\tag{6}$$

$$x_0 = x_N - Na, \quad x_{N+1} = x_1 + Na. \tag{7}$$

耦合系统的粒子链定向输运速度可定义为[17]

$$v = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i(t) - x_i(t_0)}{t - t_0}, \tag{8}$$

其中$t_0$和$t$分别为粒子运动的起止时间.

粒子链平均速度能从宏观上反映粒子链的整体运动趋势, 故本文将以此为考察对象, 通过数值仿真来研究分数阶耦合系统在对称周期势中的合作定向输运现象以及阶数$\alpha$, 势垒高度$d$, 耦合强度$k$和噪声强度$D$等系统参数对定向输运速度$v$的影响.

## 3 数值仿真与分析

本文采用分数阶差分法[23]对由模型(6)式所刻画的粒子链耦合定向输运系统进行数值仿真, 并取仿真采样步长为$\Delta t = 0.01$ s, 仿真时间为$T_s = 100$ s, 粒子数为$N = 10$, 粒子间自由长度为$a = 0.4\pi$. 若无特别说明, 周期势势垒高度为$d = 1$, 耦合强度为$k = 1$, 系统阶数为$\alpha = 0.9$.

### 3.1 无噪声情形 ($D = 0$)

#### 3.1.1 粒子链平均速度与阶数的关系

图3给出了不同耦合强度下粒子链平均速度与系统阶数的关系. 可以看到, 在耦合强度适当大的情况下 (如$k = 1$), 在不同系统阶数下均能观察到粒子链的非零定向流, 并且当系统阶数较小时, 粒子链还存在反向流现象; 随着系统阶数的逐渐增大, 粒子链平均速度随之增大, 其输运方向也由负向转为正向. 这是因为较大的系统阶数意味着较弱的阻尼力记忆性, 从而使得粒子在势阱中的驻留时间减少, 即定向流速度增大. 在耦合强度较小的情况下 (如$k = 0.2$), 粒子链的反向流现象将随着系统阶数的增大而逐渐消失.

可见, 粒子之间的耦合作用是促使粒子链产生定向输运的一个重要因素, 系统阶数则通过阻尼力来影响定向输运速度. 当然, 耦合强度也并不是越大越好, 即在系统阶数固定的情况下, 粒子链平均速度关于耦合强度是非单调变化的.

#### 3.1.2 粒子链平均速度与耦合强度的关系

图4给出了不同阶数 (图4(a)) 及不同势垒高度 (图4(b)) 下粒子链平均速度$v$与耦合强度$k$的关系. 从图4可以看到, 在其他参数固定的情况下, 分数阶非对称耦合系统存在关于耦合强度$k$的共振峰, 即粒子链平均速度具有随着耦合强度的增大而呈先快速增大后缓慢减小的趋势, 也即存在一个适当的耦合强度$k$, 使得此时粒子链定向输运速度达到最大值. 可见, 粒子之间的耦合作用可以促使粒子链定向输运加速, 但是过强的耦合反而会束缚粒子, 从而削弱粒子链定向运动.

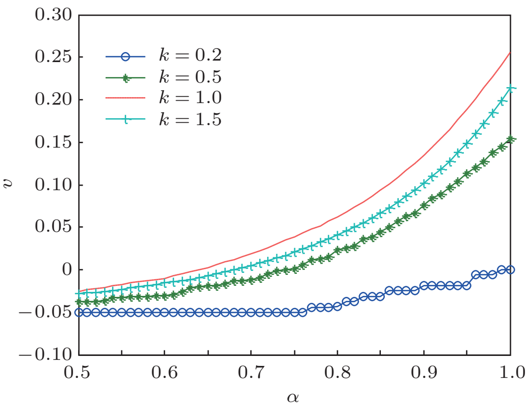


图3 不同耦合强度下粒子链平均速度与系统阶数的关系

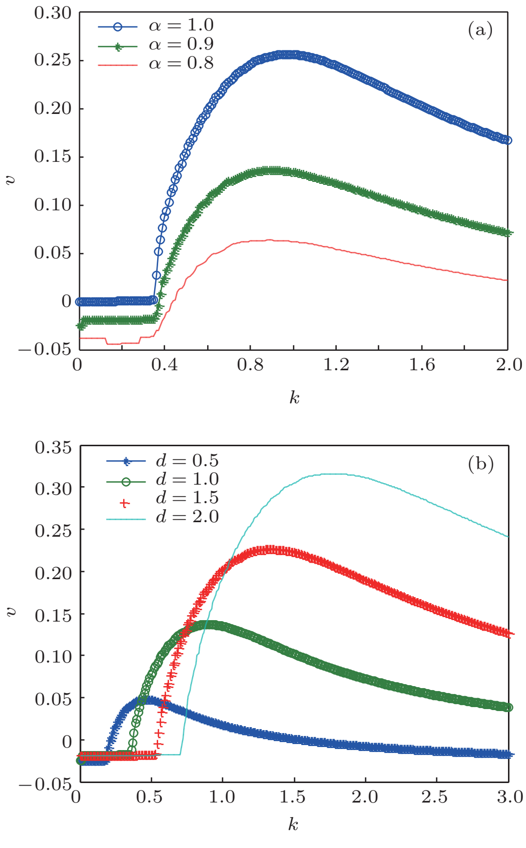


图4 粒子链平均速度与耦合强度的关系 (a) 不同阶数; (b) 不同势垒高度

此外, 从图4 (a) 还可以看到, 在相同耦合强度下, 系统阶数越大, 粒子链平均速度也越大; 当

耦合强度$k$很小时 (如$k = 0.1$), 整数阶系统没有发生定向输运, 而分数阶系统则存在微弱的反向流现象. 从图4 (b) 还可以看到, 随着势垒高度$d$的增大, 粒子链平均速度的共振峰位置 (即最佳耦合强度) 向右偏移, 即当势垒高度变大时, 粒子需要更强的耦合作用才能帮助其他粒子越过更高的势垒.

#### 3.1.3　粒子链平均速度与势垒高度的关系

图5给出了不同阶数 (图5 (a)) 及不同耦合强度 (图5 (b)) 下粒子链平均速度$v$与势垒高度$d$的关系. 从图5可以看到, 在其他参数固定的情况下, 粒子链平均速度关于势垒高度具有非单调变化的特点, 即粒子链平均速度随着耦合强度的增大先缓慢增大后快速减小.

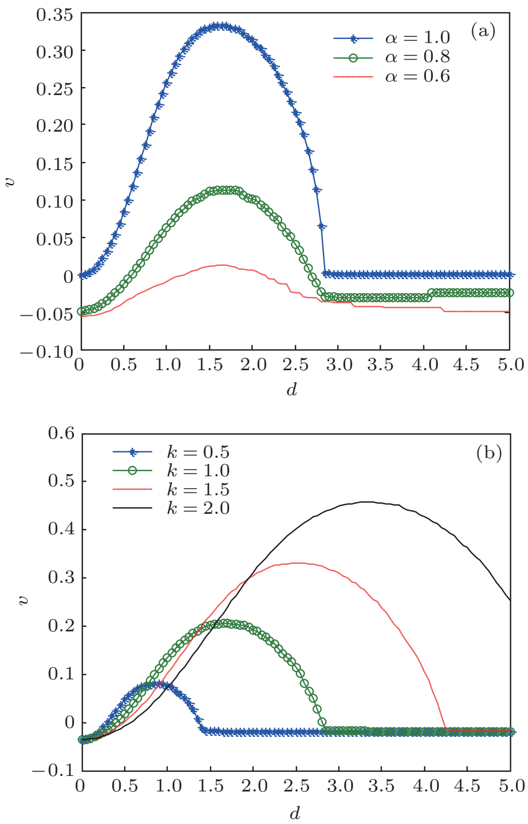


图5　(网刊彩色) 粒子链平均速度与势垒高度的关系 (a) 不同阶数; (b) 不同耦合强度

此外, 从图5 (a) 可以看到, 当势垒高度给定时, 系统阶数越高, 粒子链平均速度越大, 但共振峰位置基本不变, 即最佳势垒高度与系统阶数无关. 另一方面, 当势垒高度过高时, 整数阶系统的定向输运现象将消失, 而分数阶系统的粒子链则有反向流出现. 从图5 (b) 可以看到, 随着耦合强度的增大, 粒子链定向流速的共振峰位置向右偏移, 即当耦合强度较大时, 粒子链需要更强的势场力才能达到最大平均速度.

### 3.2　有噪声情形 ($D \neq 0$)

图6给出了不同阶数 (图6 (a)) 及不同耦合强度 (图6 (b)) 下粒子链平均速度$v$与噪声强度$D$的关系. 可以看到, 在适当系统参数下, 当系统存在噪声时, 粒子链平均速度在某一定值附近随机波动, 该值为在无噪声时的粒子链平均速度. 可见, 分数阶非对称耦合系统对噪声具有一定的免疫性, 即噪声在一定强度范围内对系统定向输运速度影响较小.

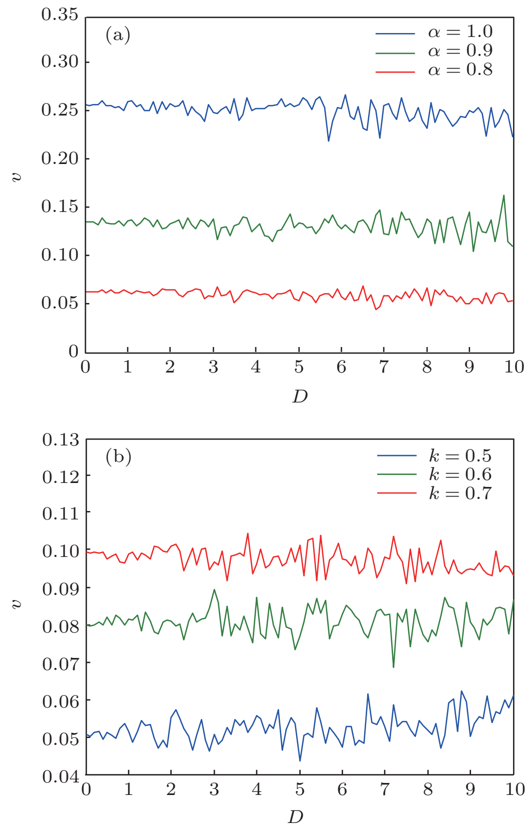


图6　(网刊彩色) 粒子链平均速度与噪声强度的关系 (a) 不同阶数下的平均速度; (b) 不同耦合强度下的平均速度

图7给出了不同噪声强度下粒子链平均速度分别与耦合强度 (图7 (a)) 及势垒高度 (图7 (b)) 的关系. 可以看到, 在系统存在噪声的情况下, 分数阶非对称耦合系统也能形成非零定向流, 且此时粒子链平均速度随着耦合强度和势垒高度的变化而出现广义随机共振现象.

此外还可以看到, 在耦合强度或势垒高度较

大的情况下, 粒子链平均速度对噪声不再免疫. 如图7 (a) 所示, 当耦合强度$k > 1$时, 无噪声时粒子链平均速度最大, 而当系统存在噪声时, 粒子链平均速度随噪声强度增大而减小, 即在强耦合情况下, 噪声会抑制粒子链的定向输运; 又如图7 (b) 所示, 当势垒高度$d > 2$时, 适当强度的噪声则会促进粒子链定向输运. 可见, 对于分数阶非对称耦合系统而言, 噪声对粒子链定向输运的影响 (免疫、抑制或促进), 不但可以预判从而加以针对性利用, 而且还可以通过其与系统其他参数之间的相互关联, 按预定目标预先加以有效控制和运用.

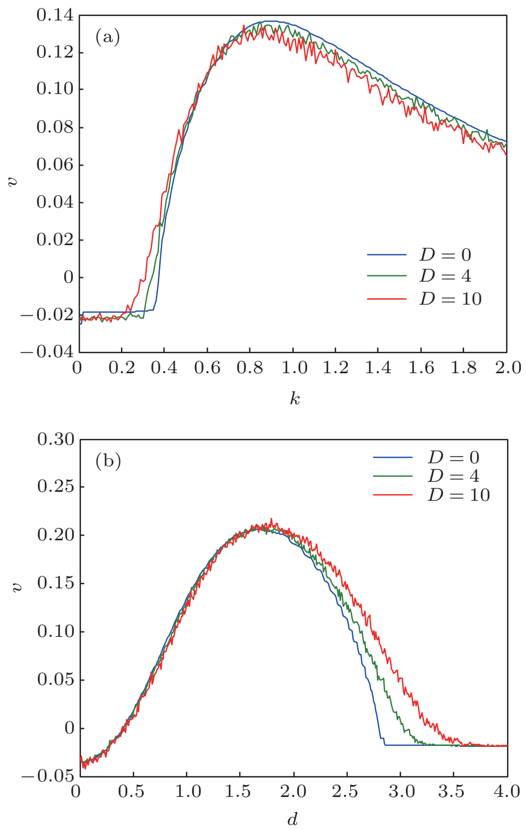


图7 (网刊彩色) 不同噪声强度下, 粒子链平均速度与其他参数的关系 (a) 平均速度随耦合强度的变化; (b) 粒子链平均速度随势垒高度的变化

## 4 结 论

目前, 对耦合系统的定向输运现象研究大多基于整数阶模型, 而越来越多的研究发现许多复杂系统具有整数阶模型所不能刻画的记忆性. 为此, 本文引入分数阶微积分理论来刻画系统的幂律记忆性, 在没有外力且周期势具有空间反演对称性的情况下, 对非对称耦合粒子链的运动建立了分数阶模型, 并研究其定向输运现象. 采用分数阶差分法对该模型进行数值求解, 进而分析了分数阶阶数$\alpha$, 耦合强度$k$, 势垒高度$d$和噪声强度$D$等系统参数对粒子链平均速度的影响. 仿真结果表明: 1) 分数阶非对称耦合系统中的粒子链在没有外力和噪声驱动的情况下仍可产生定向输运, 并且在其他参数固定的情况下, 粒子链定向输运速度随着分数阶阶数的增大而增大; 2) 在阶数固定的情况下, 粒子链定向输运速度还受到耦合强度和势垒高度的影响, 具有非单调变化的特点, 即随参数增大而呈现出先增后减的趋势; 3) 当系统存在噪声时, 粒子链定向输运速度出现了广义随机共振现象, 并且通过调节其他参数, 可以使得系统对噪声免疫甚至使得噪声促进定向输运.

## 参考文献


[1] Fendrik A J, Romanelli L, Reale M V 2012 *Phys. Rev. E* **85** 041149

[2] Zheng Z G 2004 *Spantiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) p279 (in Chinese) [郑志刚 2004 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社) 第 279 页]

[3] Guérin T, Prost J, Martin P 2010 *Current Opinnion in Cell Biology* **22** 14

[4] Chen H B, Zheng Z G 2012 *J. Univ. Shanghai Sci. Technol.* **34** 6 (in Chinese) [陈宏斌, 郑志刚 2012 上海理工大学学报 **34** 6]

[5] Savel E S, Marchesoni F, Nori F 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 10601

[6] Veigel C, Schmidt C F 2011 *Nat. Rev. Mol. Cel. Biol.* **12** 163

[7] Lipowsky R, Klumpp S, Nieuwenhuizen T M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 108101

[8] Downton M T, Zuckermann M J, Craig E M, Plischke M, Linke H 2006 *Phys. Rev. E* **73** 011909

[9] Roostalu J, Hetrich C, Bieling P, Telley I A, Schiebel E, Surrey T 2011 *Science* **332** 94

[10] Porto M, Urbakh M, Klafter J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 6058

[11] Zheng Z G, Hu G, Hu B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2273

[12] Bao J D 2012 *Introduction to Anomalous Statistics Dynamics* (Beijing: Science Press) p196 (in Chinese) [包景东 2012 反常统计动力学导论 (北京: 科学出版社) 第196 页]

[13] Liu F, Anh V V, Turner I, Zhuang P 2003 *J. Appl. Math. Comp.* **13** 233

[14] Bai W S M, Peng H, Tu Z, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210501 (in Chinese) [白文斯密, 彭皓, 屠浙, 马洪 2012 物理学报 **61** 210501]

[15] Benson D A, Wheatcraft S W, Meerschaert M M 2000 *Water Resour. Res.* **36** 1403

[16] Tu Z, Peng H, Wang F, Ma H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 030502 (in Chinese) [屠浙, 彭皓, 王飞, 马洪 2013 物理学报 **62** 030502]

[17] Lai L, Zhou X X, Ma H, Luo M K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 150502 (in Chinese) [赖莉, 周薛雪, 马洪, 罗懋康 2013 物理学报 **62** 150502]

[18] Zhang L, Deng K, Luo M K 2012 *Chin. Phys. B* **21** 090505

[19] Wang F, Deng C, Tu Z, Ma H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040501 (in Chinese) [王飞, 邓翠, 屠浙, 马洪 2013 物理学报 **62** 040501]

[20] Bao J D 2009 *Random Simulation Method of Classical and Quantum Dissipation System* (Beijing: Science Press) p80 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 80 页]

[21] Oldham K B, Spanier J 1974 *The Fractional Calculus* (New York: Academic Press)

[22] Podlubny I 1998 *Fractional Differential Equation* (San Diego: Academic Press)

[23] Petrás I 2011 *Fractional-Order Nonlinear Systerms Modeling, Analysis and Simulation* (1st Ed.) (Beijing: Higher Education Press) p19

# Directional transport of fractional asymmetric coupling system in symmetric periodic potential*

Tu Zhe[1)] Lai Li[1)] Luo Mao-Kang[1)2)†]

1) (*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

2) (*College of Aerospace Science and Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

( Received 15 January 2014; revised manuscript received 25 February 2014 )

**Abstract**

Based on the fractional calculus theory, in the absence of external driving force, the fractional transport model of asymmetric coupling particle chain in symmetric periodic potential is established. Using the method of fractional difference, the model is solved numerically and the influences of the various system parameters on directional transport velocity are discussed. Numerical results show that in the case without external force and noise-driven, the fractional asymmetric coupling system can still generate directional transport, and the transport velocity increases as fractional order increases. When the fractional order is fixed, the average velocity of the particle chain varies non-monotonically with coupling strength and barrier height. In the case with noise, the generalized stochastic resonance phenomenon occurs. Besides, we can make the noise not affect the system or even promote directional transport by adjusting other parameters.

**Keywords:** fractional system, asymmetric coupling, directional transport, generalized stochastic resonance

**PACS:** 05.10.Gg, 45.10.Hj **DOI:** 10.7498/aps.63.120503

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238).

† Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn