

# 两类纳米级非线性忆阻器模型及串并联研究\*

董哲康<sup>1)</sup> 段书凯<sup>1)†</sup> 胡小方<sup>2)</sup> 王丽丹<sup>1)</sup>

1)(西南大学电子信息工程学院, 重庆 400715)

2)(香港城市大学机械与生物医学工程系, 香港)

(2014年1月4日收到; 2014年3月6日收到修改稿)

忆阻器是一种新型的非线性动态可变电阻器, 其阻值的变化依赖于通过它的电荷量或磁通量. 作为第四种基本电路元器件, 忆阻器在非易失性存储器、非线性电路及系统、神经形态系统等领域中有巨大的应用潜能. 忆阻器串并联组合电路具有比单个忆阻器更为丰富的器件特性, 引起了研究者越来越多的关注. 本文推导了带有窗函数的闭合形式的电荷及磁通量控制的忆阻器非线性模型, 能够有效地模拟忆阻器边缘附近的非线性离子迁移现象, 同时保证忆阻器的边界条件. 进一步, 分别从忆阻器的器件参数和激励阈值两个角度, 对忆阻器串并联电路进行了全面的理论推导和数值分析. 为了更加直观地观察忆阻器串并联特性, 设计了一种基于 Matlab 的忆阻器串并联图形用户界面, 能够清晰地展示两种分类方式下忆阻系统的器件特性, 可为忆阻器组合电路的后续研究提供良好的理论参考和实验依据.

**关键词:** 忆阻器, 非线性模型, 串并联电路, 图形用户界面

**PACS:** 85.35.-p, 73.40.Rw, 84.32.-y, 84.30.Bv

**DOI:** 10.7498/aps.63.128502

## 1 引言

1971年, Chua 教授<sup>[1]</sup>根据电路理论公理化体系的完备性阐述并定义了忆阻器的概念, 称之为除了电阻、电感、电容之外的第四种基本元器件. 2008年5月, 美国惠普实验室的研究人员公布了基于二氧化钛的交叉阵列存储结构, 并指出交叉点处的存储单元即为 Chua 预言的忆阻器<sup>[2-4]</sup>, 立刻引起了学术界和工业界的广泛关注. 实验证实, 纳米忆阻器具有独特的开关转换机制、自动的记忆功能、连续的输入输出特性, 在非易失性存储器、人工神经网络、大规模集成电路、非线性电路和图像处理等方面有着巨大的应用潜能<sup>[5-14]</sup>. 目前, 对忆阻器理论模型和器件性能的研究日益深入, 多种忆阻器模型被提出且得到广泛应用<sup>[15-20]</sup>, 其中部分模型未

考虑非线性离子迁移现象, 即所谓的理想忆阻器模型或线性离子迁移忆阻器模型<sup>[21-23]</sup>. 然而, 实际中一个微小的电压就会在纳米忆阻器中形成巨大的电场, 导致一种快速而显著的能量势垒的减小, 使得离子迁移表现出非线性<sup>[24]</sup>. 理想的忆阻器模型不能完全模拟实际器件的特性, 因此建立忆阻器非线性离子迁移模型更具实际意义.

随着忆阻器件的研究日益广泛, 研究者开始对多个忆阻器组合电路产生更多的兴趣, 因其具有更加丰富的器件特性, 有望在众多应用中展现更为突出的优势. 目前, 大部分涉及忆阻器串并联系统的工作都只是将某一种忆阻器串并联情况置于某种特定的应用中进行分析<sup>[20,22,23,25-27]</sup>, 尚没有出现对忆阻器串并联电路的全面剖析. 本文首先推导了更为实际的非线性电荷控制及磁通控制的忆阻器

\* 教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: 教技函 [2013] 47 号)、国家自然科学基金 (批准号: 61372139, 61101233, 60972155)、教育部“春晖计划”科研项目 (批准号: z2011148)、留学人员科技活动项目 (批准号: 渝人社办 [2012] 186 号)、重庆市高等学校优秀人才支持计划 (批准号: 渝教人 [2011] 65 号)、重庆市高等学校青年骨干教师资助计划 (批准号: 渝教人 [2011]65 号) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: XDJK2014A009, XDJK2013B011) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: duansk@swu.edu.cn

模型, 并对该模型下忆阻器串并联电路进行了详细的理论推导、数值仿真以及特性分析. 进一步, 分别从忆阻器的器件参数和激励阈值两个角度, 对忆阻器串并联电路进行了细致分类和全面分析. 在此基础上, 设计了一种基于 Matlab 的忆阻器串并联图形用户界面 (GUI), 利用该界面, 可以直观准确地观察忆阻器串并联电路的本构关系曲线, 以及各种参数变化对其特性的影响.

## 2 忆阻器非线性离子迁移模型

忆阻器是一种具有记忆功能的无源非线性二端元件, 其阻值可变且受控于供给电源的强度、极性以及供电时间<sup>[5]</sup>. 惠普忆阻器是由两层二氧化钛薄膜夹在两个铂片电极之间构成的: 其中一层缺失了部分氧原子, 称为掺杂层 ( $\text{TiO}_{2-x}$  层), 具有较强的导电性; 另一层为不含杂质的纯  $\text{TiO}_2$  层, 称为无掺杂层, 具有较高的阻抗. 忆阻器总的阻值是这两层二氧化钛层的电阻值之和. 当有外加偏压时, 掺杂层中的氧空位会在电场作用下发生离子迁移, 引起掺杂层和无掺杂层之间的边界移动, 从而改变忆阻器的有效电阻.

### 2.1 闭合形式的电荷控制非线性忆阻器模型

惠普忆阻器物理模型如图 1 所示, 其中,  $D$  是二氧化钛薄膜的总厚度, 约为 10 nm,  $w$  是掺杂层的厚度.

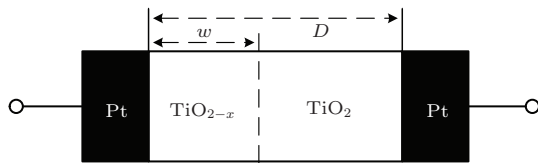


图 1 惠普忆阻器模型

惠普忆阻器遵循欧姆定律:

$$v(t) = M(t) \cdot i(t). \quad (1)$$

忆阻器的阻值为掺杂层和非掺杂层阻值之和:

$$\begin{aligned} M(t) &= R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})x(t), \\ x(t) &= \frac{w(t)}{D} \in (0, 1), \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $R_{\text{on}}$  和  $R_{\text{off}}$  分别为  $w = D$  和  $w = 0$  时的极限忆阻值. 当  $t = 0$  时, 忆阻值为初始值  $M_0$ .

掺杂层和无掺杂层之间的边界移动速度为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ki(t)f(x), \\ k &= \frac{\mu_v R_{\text{ON}}}{D^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\mu_v \approx 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$  是平均的离子迁移率. 已知在纳米器件中一个微小的电压就可以产生巨大的电场, 使离子运动产生显著的非线性. 对于纳米忆阻器, 这种非线性在薄膜边缘处更为明显: 离子迁移的速度会受到强烈抑制, 忆阻器的阻值变化率减小. 这种现象称为非线性离子迁移<sup>[24]</sup>, 可由 (3) 式右边的窗函数  $f(x)$  来模拟. 基于文献<sup>[3, 24, 28]</sup>, 本文采用的窗函数为

$$f(x) = 4x - 4x^2. \quad (4)$$

将窗函数代入 (3) 式, 可以得到

$$\frac{dx}{dt} = ki(t)(4x - 4x^2), \quad (5)$$

求解可得

$$x(t) = \left[ 1 - \frac{1}{1 + e^{4kq(t)}} \right] + (0.5\Delta R + M_0), \quad (6)$$

其中,  $\Delta R = R_{\text{off}} - R_{\text{on}}$ .

将 (6) 式代入 (2) 式, 得

$$M(t) = M_0 + \Delta R \left( \frac{1}{1 + e^{4kq(t)}} - \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

进一步, 根据忆阻器的物理限制  $R_{\text{on}} \leq M(t) \leq R_{\text{off}}$ , 可以得到有效电荷  $q(t)$  的范围, 即可保证忆阻效应的激励电荷的范围, 下文称为激励阈值:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4k} \ln \frac{0.5R_{\text{off}} + 0.5R_{\text{on}} - M_0}{0.5R_{\text{on}} - 1.5R_{\text{off}} + M_0} \\ &\leq q(t) \leq \frac{1}{4k} \ln \frac{1.5R_{\text{on}} - 0.5R_{\text{off}} - M_0}{M_0 - 0.5R_{\text{off}} - 0.5R_{\text{on}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

这里, 定义激励阈值分别为  $c_1, c_2$ , 则有

$$c_1 = \frac{1}{4k} \ln \frac{0.5R_{\text{off}} + 0.5R_{\text{on}} - M_0}{0.5R_{\text{on}} - 1.5R_{\text{off}} + M_0}, \quad (9a)$$

$$c_2 = \frac{1}{4k} \ln \frac{1.5R_{\text{on}} - 0.5R_{\text{off}} - M_0}{M_0 - 0.5R_{\text{off}} - 0.5R_{\text{on}}}. \quad (9b)$$

最终, 可得闭合形式的电荷控制非线性忆阻器的数学模型:

$$M(t) = \begin{cases} R_{\text{off}} & (q(t) < c_1) \\ M_0 + \Delta R \left( \frac{1}{1 + e^{4kq(t)}} - \frac{1}{2} \right) & (c_1 \leq q(t) < c_2) \\ R_{\text{on}} & q(t) \geq c_2 \end{cases} \quad (10)$$

## 2.2 闭合形式的磁通控制非线性忆阻器模型

类似地, 将  $i(t) = \frac{v(t)}{M}$  代入 (3) 式, 得到

$$\frac{dx}{dt} = ki(t)f(x) = k \frac{v(t)}{M} f(x). \quad (11)$$

由忆阻器阻值 (2) 式, 可得

$$\frac{dx}{dt} = k \frac{v(t)}{R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})x} f(x), \quad (12)$$

这里, 由于  $R_{\text{on}}$  远小于  $R_{\text{off}}$ , 故  $R_{\text{on}} - R_{\text{off}} \approx -R_{\text{off}}$ , 得到

$$\begin{aligned} & \frac{R_{\text{off}} dx}{(4x - 4x^2)} - \frac{R_{\text{off}} dx}{(4 - 4x)} \\ &= \frac{R_{\text{off}}}{4x} dx = kv(t) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

求解可得

$$x(t) = e^{\frac{4k\varphi(t)}{R_{\text{off}}}} + \frac{R_{\text{off}} - R_0}{R_{\text{off}} - R_{\text{on}}}. \quad (14)$$

将 (14) 式代入 (2) 式, 得到

$$M(\varphi) = R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \times \left( e^{\frac{4k\varphi}{R_{\text{off}}}} + \frac{R_{\text{off}} - R_0}{R_{\text{off}} - R_{\text{on}}} \right). \quad (15)$$

同理, 根据忆阻器的物理限制, 可以得到保证忆阻效应的磁通量  $\varphi(t)$  的范围, 即另一组激励阈值:

$$\begin{aligned} & \frac{R_{\text{off}}}{4k} \ln \frac{R_0 - R_{\text{off}}}{R_{\text{off}} - R_{\text{on}}} \\ & \leq \varphi \leq \frac{R_{\text{off}}}{4k} \ln \frac{R_0 - R_{\text{on}}}{R_{\text{off}} - R_{\text{on}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

令

$$c_3 = \frac{R_{\text{off}}}{4k} \ln \frac{R_0 - R_{\text{off}}}{R_{\text{off}} - R_{\text{on}}}, \quad (17a)$$

$$c_4 = \frac{R_{\text{off}}}{4k} \ln \frac{R_0 - R_{\text{on}}}{R_{\text{off}} - R_{\text{on}}}. \quad (17b)$$

最终, 得到闭合形式的磁通控制的非线性忆阻器的数学模型:

$$M(\varphi) = \begin{cases} R_{\text{off}}, & (\varphi < c_3) \\ R_{\text{off}} - \Delta R \left( e^{\frac{4k\varphi}{R_{\text{off}}}} + \frac{R_{\text{off}} - R_0}{R_{\text{off}} - R_{\text{on}}} \right) & (c_3 \leq \varphi < c_4) \\ R_{\text{on}} & (\varphi \geq c_4) \end{cases} \quad (18)$$

图 2 显示了电荷控制的忆阻器模型中电荷量和忆阻值之间的关系以及磁通控制的忆阻器模型中磁通量和忆阻值之间的关系. 与实际器件行为一致, 当电荷量 (或者磁通量) 达到或者超过两个阈值 (红色虚线表示) 时, 忆阻器的阻值将达到并保持于最大忆阻值或最小忆阻值状态. 其中各项参数设置如下:

$$\begin{aligned} R_{\text{on}} &= 100 \Omega, \quad R_{\text{off}} = 20 \text{ k}\Omega, \quad M_0 = 10 \text{ k}\Omega, \\ D &= 10 \text{ nm}, \quad \mu_v = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}. \end{aligned}$$

值得注意的是, 图 2 中忆阻器的特性曲线与文献 [24—27] 中给出的结果一致, 显示了推导的忆阻器非线性离子迁移模型的正确性.

## 3 忆阻器串并联特性研究

基于上述忆阻器非线性离子迁移模型对忆阻器串并联特性进行分析, 方便起见, 在串联电路中使用电荷控制的忆阻器模型, 在并联电路中使用磁通控制的忆阻器模型.

### 3.1 忆阻器串联特性

在串联电路中, 首先考虑由两个忆阻器构成的简单忆阻系统. 因忆阻器是一种具有极性的二端器件 (如图 3 (a) 所示), 在研究忆阻器串联问题时要分为同向串联和反向串联两种情况讨论. 设两个忆阻器的忆阻值、电压和电流分别为  $M_1, M_2, U_1, U_2, I_1, I_2$ . 该忆阻系统的等效忆阻值为  $M$ , 等效电压

为  $U$ , 等效电流为  $I$ . 根据欧姆定律以及串联电路的一般性质, 得到两个忆阻器串联时等效忆阻值的表达式

$$M = \frac{U}{I} = (U_1 + U_2)/I$$

$$= (M_1 I_1 + M_2 I_2)/I = M_1 + M_2. \quad (19)$$

进一步, 当串联的忆阻器个数为任意正整数  $n$  的时候, 得到

$$M = \frac{U}{I} = (U_1 + U_2 + \dots + U_n)/I$$

$$= (M_1 I_1 + M_2 I_2 + \dots + M_n I_n)/I$$

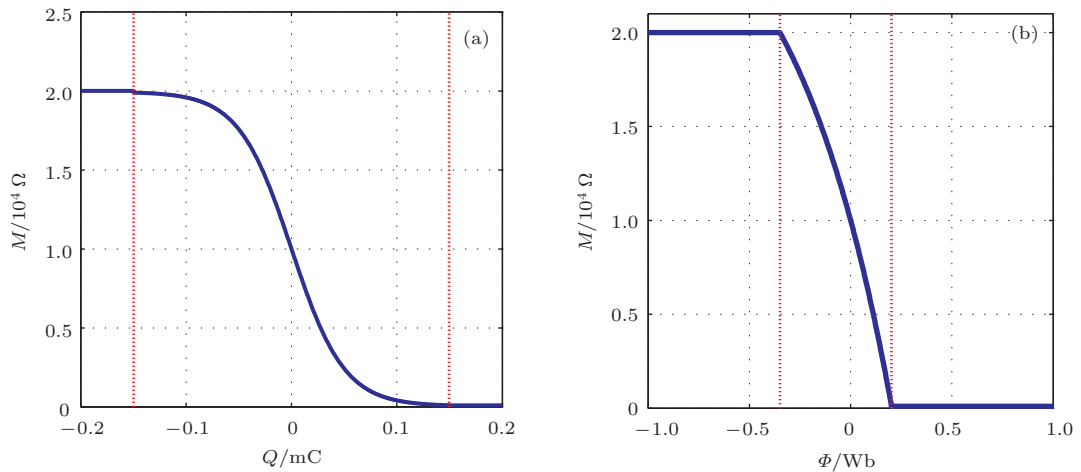


图2 (网刊彩色) 非线性忆阻器离子迁移模型 (a) 电荷控制的忆阻器模型; (b) 磁通控制的忆阻器模型

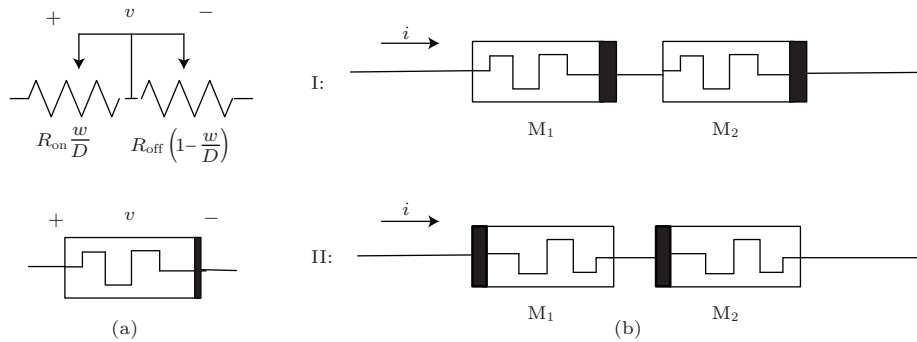


图3 两个忆阻器同向串联电路 (a) 忆阻器等效电路及电路符号; (b) 两个忆阻器同向串联

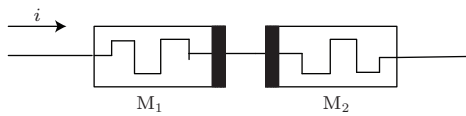


图4 两个忆阻器反向串联电路

图4为两个忆阻器反向串联的等效电路, 已知, 任意调换两个忆阻器在电路中的位置, 电流始终保持从一个忆阻器的正极流入负极流出, 从另一个忆阻器的负极流入正极流出. 因此, 忆阻器的反向串

$$= M_1 + M_2 + \dots + M_n$$

$$= \sum_{i=1}^n M_i (n \in N^*), \quad (20)$$

可见忆阻器串联之后, 等效忆阻值在数值上等于各个时刻所有忆阻器阻值的代数和.

进一步, 将忆阻器的串联分为同向串联和反向串联两种情况, 等效电路如图3所示, 值得注意的是, 当进行忆阻器同向串联特性分析时, 根据电流流入忆阻器极性的不同, 进一步分成两种情况, 即图3(b)中的I和II子图.

联分析只需要讨论这一种情况.

### 3.2 忆阻器并联特性

类似地, 在忆阻器并联电路中, 也需要分忆阻器同向并联和忆阻器反向并联两种情况进行讨论.

根据欧姆定律和并联电路的基本性质, 可得两个忆阻器并联时的等效忆阻值:

$$M = \frac{U}{I} = (M_1 I_1)/(I_1 + I_2)$$

$$= \frac{M_1}{1 + \frac{I_2}{I_1}} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}. \quad (21)$$

进一步, 当忆阻器并联的个数为  $n$  ( $n$  为正整数), 得到

$$\begin{aligned} M &= \frac{U}{I} = (M_1 I_1) / (I_1 + I_2 + \dots + I_n) \\ &= \frac{M_1}{1 + \frac{I_2}{I_1} + \dots + \frac{I_n}{I_1}} \\ &= \frac{M_1}{1 + \frac{M_1}{M_2} + \frac{M_1}{M_3} + \dots + \frac{M_1}{M_n}} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{M_i}} \quad (n \in N^*), \end{aligned} \quad (22)$$

因此, 多个忆阻器并联的等效忆阻值等于各个时刻所有忆导值代数之和的倒数.

与忆阻器同向串联的分析方法类似, 根据忆阻器的极性和其两端的电压极性的不同, 忆阻器同向并联也需要分两种情况进行讨论, 如图 5 所示.

图 5 (a) 所示为忆阻器的极性与其两端的电压极性相同, 电流从忆阻器正极流入负极流出; 相反, 图 5 (b) 所示为忆阻器的极性与其两端的电压极性相反, 此刻, 电流从忆阻器的负极流入正极流出.

图 6 为两个忆阻器反向并联的等效电路, 由图可知, 任意调换两个忆阻器的位置, 电压始终保持与其中一个忆阻器极性相同, 与另一个忆阻器极性相反. 故而, 忆阻器反向并联的等效电路惟一.

## 4 忆阻器串并联分类研究

### 4.1 以忆阻器器件参数进行分类

惠普 (HP) 忆阻器模型的器件参数主要有 4 个:  $R_{on}$ ,  $R_{off}$ ,  $D$ ,  $\mu_v$ . 对于具体器件, 这些参数值不会随着外部激励的变化发生改变. 这一部分, 选取 4 个器件参数中的两个,  $R_{on}$  和  $R_{off}$  作为忆阻器串并联的分类依据进行分析.

基于控制变量法, 保持薄膜厚度  $D$  和离子迁移率  $\mu_v$  不变, 并令串并联电路中两个忆阻器的瞬时阻值、最小忆阻值和最大忆阻值分别为:  $M_1$  和  $M_2$ ,  $R_{on1}$  和  $R_{on2}$ ,  $R_{off1}$  和  $R_{off2}$ .

首先, 以忆阻器的阻值参数为参考对串并联电路进行有效分类, 另根据忆阻器物理条件可知  $R_{on1} < R_{off1}$ ,  $R_{on2} < R_{off2}$ , 得到 13 种组合情况,

总结于表 1. 其中的坐标 I—VI 表示两个忆阻器的最大 (小) 阻值的虚拟位值, 如图 7 所示. 表 1 中的横杠表示此位置无忆阻值. 接下来, 分别以同向串联、反向串联、同向并联以及反向并联 4 种连接方式, 对这 13 种情况进行更为详细的分析.

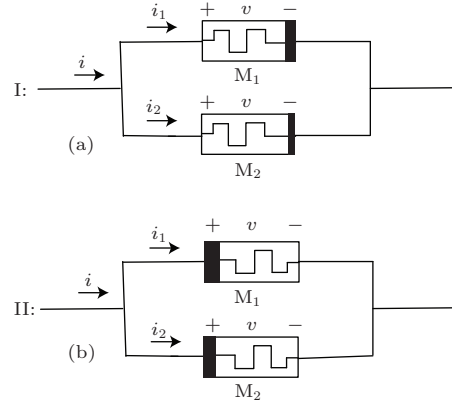


图 5 两个忆阻器同向并联电路 (a) 忆阻器极性与电压极性相同; (b) 忆阻器极性与电压极性相反

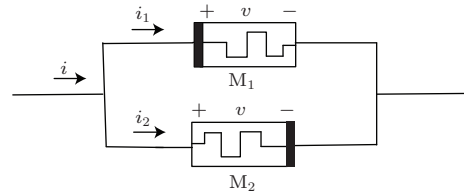


图 6 两个忆阻器反向并联电路

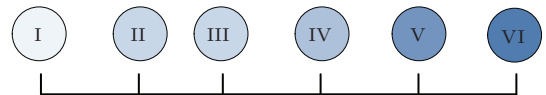


图 7 忆阻器阻值排列模拟坐标轴

#### 4.1.1 忆阻器同向串联

忆阻器的同向串联需要根据电流流入忆阻器的极性不同分两种情况进行讨论.

##### 1) 电流从忆阻器正极流入负极流出

如图 3 (b) 中的 I 所示, 由于忆阻器同向串联的过程中任意的调换忆阻器的位置不会影响电路特性, 因此, 可以得到:

$$\text{Case } i = \text{Case } i + 6 \quad (1 \leq i \leq 6), \quad (23)$$

由此, 忆阻器同向串联可以分为 7 种情况, 即 Case 1—6 及 Case 13 (或者 Case 7—12 及 Case 13). 由于空间限制, 这里仅给出两种情况下的特性曲线, 对应于表 1 中的 Case 1 和 Case 13, 如图 8 所示.

表 1 基于忆阻器器件参数分类的 13 种串并联情况

| 情况种类    | 模拟坐标               |            |                      |            |                      |            |
|---------|--------------------|------------|----------------------|------------|----------------------|------------|
|         | I                  | II         | III                  | IV         | V                    | VI         |
| Case 1  | $R_{on1}$          | $R_{off1}$ | $R_{on2}$            | —          | $R_{off2}$           | —          |
| Case 2  | $R_{on1}$          | —          | $R_{off1}, R_{on2}$  | —          | $R_{off2}$           | —          |
| Case 3  | $R_{on1}$          | —          | $R_{on2}$            | $R_{off1}$ | $R_{off2}$           | —          |
| Case 4  | $R_{on1}$          | —          | $R_{on2}$            | —          | $R_{off2}, R_{off1}$ | —          |
| Case 5  | $R_{on1}$          | —          | $R_{on2}$            | —          | $R_{off2}$           | $R_{off1}$ |
| Case 6  | $R_{on1}, R_{on2}$ | —          | $R_{off1}$           | —          | $R_{off2}$           | —          |
| Case 7  | $R_{on2}$          | $R_{off2}$ | $R_{on1}$            | —          | $R_{off1}$           | —          |
| Case 8  | $R_{on2}$          | —          | $R_{on1}, R_{off2}$  | —          | $R_{off1}$           | —          |
| Case 9  | $R_{on2}$          | —          | $R_{on1}$            | $R_{off2}$ | $R_{off1}$           | —          |
| Case 10 | $R_{on2}$          | —          | $R_{on1}$            | —          | $R_{off1}, R_{off2}$ | —          |
| Case 11 | $R_{on2}$          | —          | $R_{on1}$            | —          | $R_{off1}$           | $R_{off2}$ |
| Case 12 | $R_{on1}, R_{on2}$ | —          | $R_{off2}$           | —          | $R_{off1}$           | —          |
| Case 13 | $R_{on1}, R_{on2}$ | —          | $R_{off1}, R_{off2}$ | —          | —                    | —          |

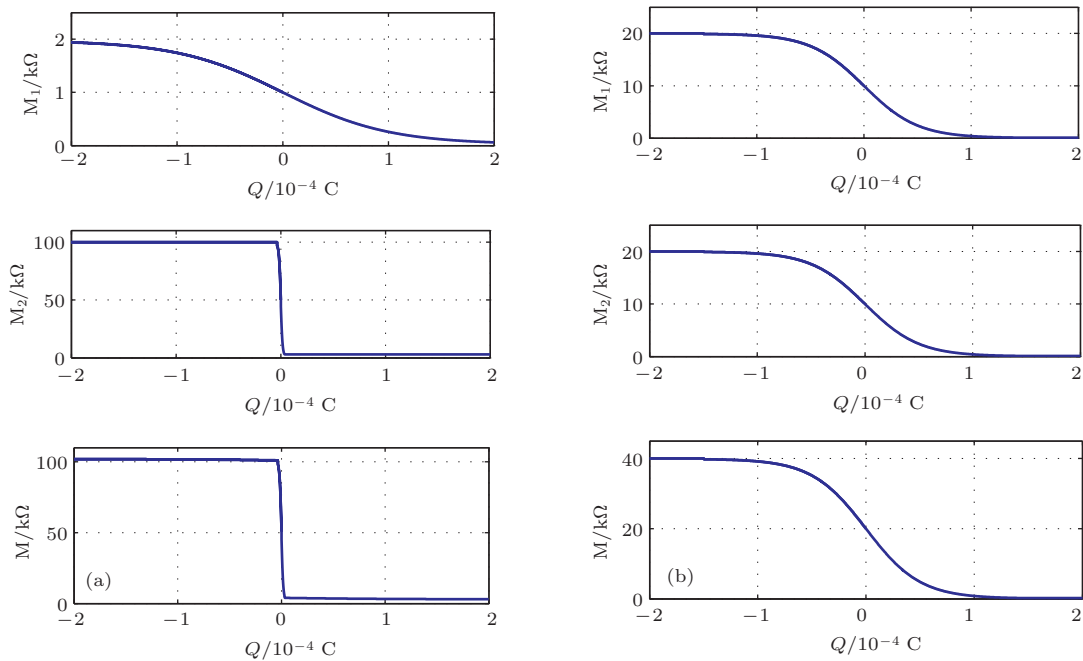


图 8 电流从忆阻器正极流入负极流出情况下两个忆阻器同向串联时忆阻值和电荷量之间的关系 (a) Case 1, 其中  $R_{on1} = 50 \Omega$ ,  $R_{off1} = 2000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 3000 \Omega$ ,  $R_{off2} = 100000 \Omega$ ; (b) Case 13, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$

2) 电流从忆阻器负极流入正极流出

类似地, 电流从忆阻器负极流入正极流出也存在 7 种情况: 即 Case 1—6 及 Case 13 (或者 Case 7—12 及 Case 13). 同样这里仅给出两种情况下的特性曲线, 对应于表 1 中的 Case 3 和 Case 5, 如图 9 所示.

仿真结果验证了前文的理论推导, 即在忆阻器串联电路中, 总的忆阻值等于各个时刻所有忆阻器阻值的代数和. Case 13 为一种特殊状况, 即同向串联的两个忆阻器参数完全相同, 则该忆阻系统的等效忆阻值等于单个忆阻器的两倍. 需要注意的是, 虽然理论上忆阻器串联系统的阻值是单个忆阻器



的阻值之和, 但不同的分类情况下, 该忆阻器系统所展示的特性曲线不同. 了解这些特性曲线, 有助于将适当的忆阻器组合形式灵活地运用于不同的需求中.

### 4.1.2 忆阻器反向串联

与忆阻器同向串联一样, 反向串联仍遵循表 1 所列举的 13 种情况. 但不同的是, 忆阻器反向串联不需要考虑电流方向和忆阻器极性之间的

关系, 同时, 基于图 10, 两个忆阻器反向串联的过程中, 当  $q = c_x$  且  $c_x$  小于任一激励阈值, Case 1 与 Case 7 对应的等效忆阻值分别为  $(II + III) \Omega$  及  $(V+I) \Omega$ , 两者不满足恒等关系, 故而等式 (23) 不再满足. 图 11 给出的是对应于 Case 1 和 Case 13 两种情况下的忆阻器组合电路的特性曲线. 特别地, 当反向串联的两个忆阻器完全相同时 (Case 13), 等效的总阻值基本保持恒定.

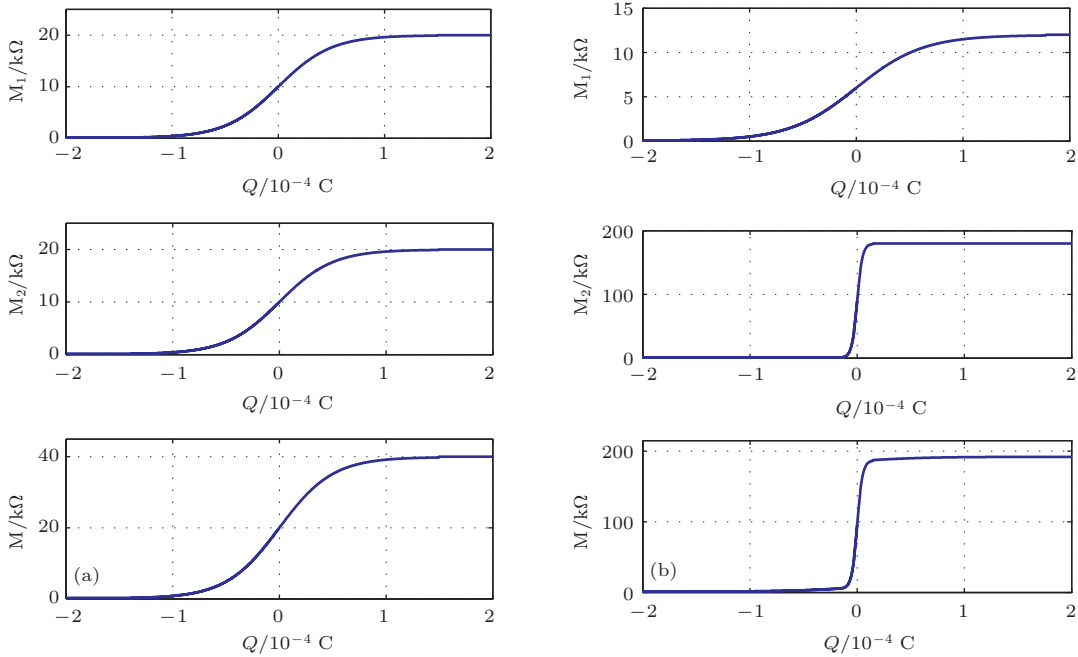


图 9 电流从忆阻器负极流入正极流出情况下两个忆阻器同向串联时忆阻值和电荷量之间的关系 (a) Case 5, 其中  $R_{on1} = 80 \Omega$ ,  $R_{off1} = 18000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 12000 \Omega$ ; (b) Case 3, 其中  $R_{on1} = 80 \Omega$ ,  $R_{off1} = 12000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 1000 \Omega$ ,  $R_{off2} = 180000 \Omega$

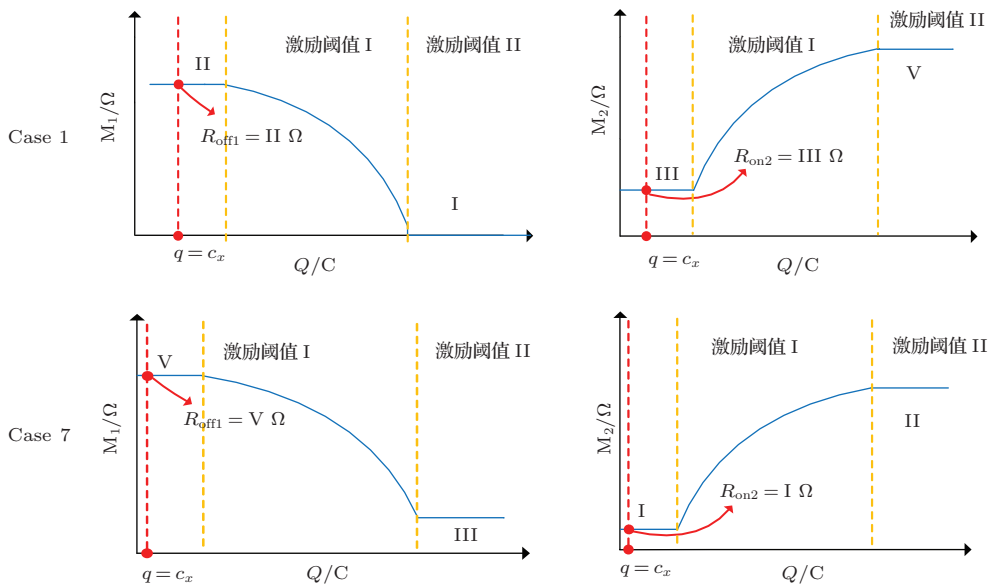


图 10 (网刊彩色) 两种情况下电荷量和忆阻值之间的关系曲线

### 4.1.3 忆阻器同向并联

忆阻器的同向并联需要根据忆阻器的电压极性与忆阻器自身极性关系分两种情况.

1) 电压的极性与忆阻器极性保持一致

忆阻器并联电路中, 任意地上下调换忆阻器

的位置, 不会影响电路的输入输出特性, 因此, 这里等式(23)依然满足. 最终, 忆阻器同向并联可以分为7种情况, 即 Case 1—6 及 Case 13 (或者 Case 7—12 及 Case 13). 对应的数值仿真举例如图 12 所示.

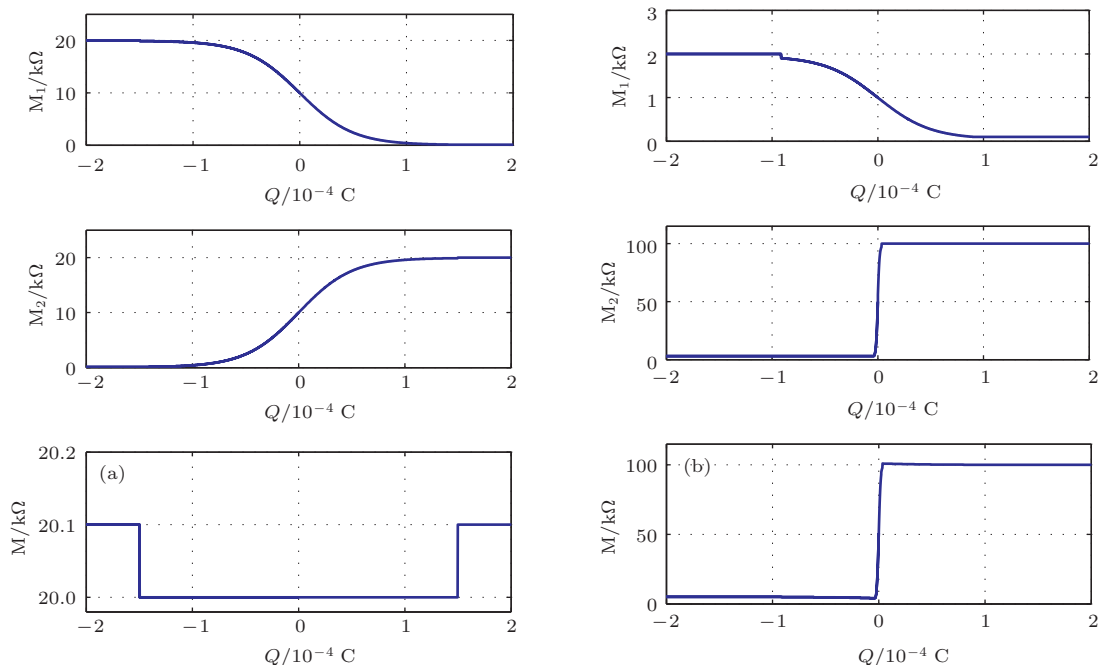


图 11 两个忆阻器反向串联时忆阻值和电荷量之间的关系 (a) Case 13, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$ ; (b) Case 1, 其中  $R_{on1} = 80 \Omega$ ,  $R_{off1} = 2000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 3000 \Omega$ ,  $R_{off2} = 100000 \Omega$

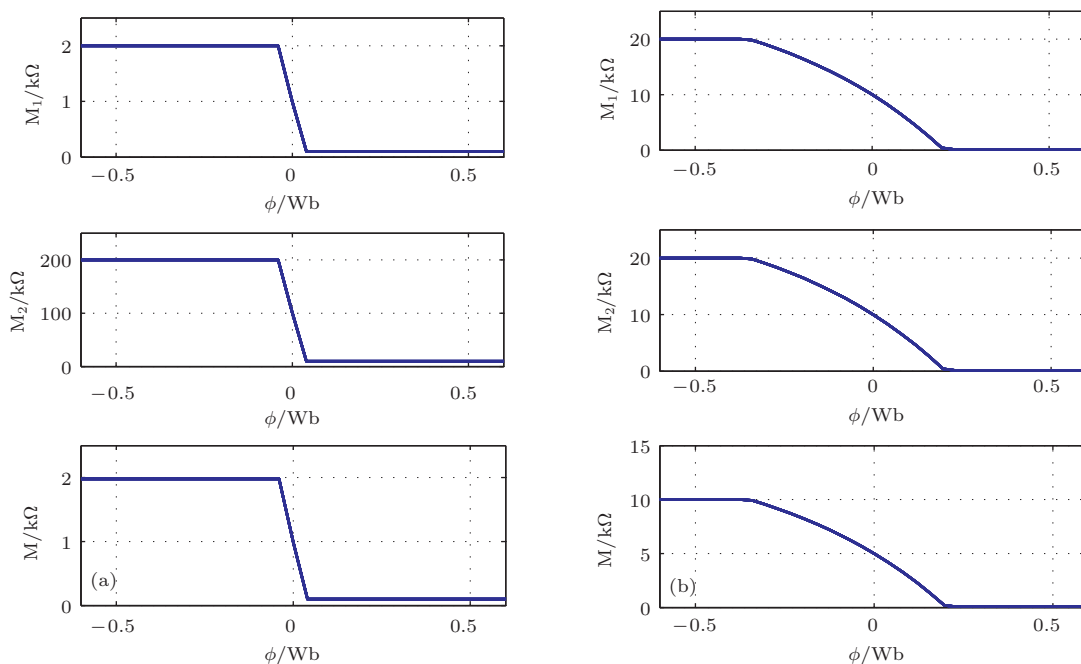


图 12 电压与忆阻器极性一致时两个忆阻器同向并联时忆阻值和磁通量之间的关系 (a) Case 1, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 2000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 9800 \Omega$ ,  $R_{off2} = 200000 \Omega$ ; (b) Case 13, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$



2) 电压的极性与忆阻器极性相反

同理, 当电压的极性与忆阻器极性相反的时候, 也存在7种情况 (即 Case 1—6 及 Case 13 或者 Case 7—12 及 Case 13). 通过两个数值仿真举例说明, 如图 13.

图 12 和图 13 显示了一般情况下两个忆阻器同向并联的忆阻值和磁通量之间的关系, 这里假设  $M_1 > M_2$ , 从图中, 当两个忆阻器并联之后, 等效忆阻值小于两个忆阻器中较大忆阻器阻值的一半, 即  $M < \frac{1}{2}M_1$ , 当且仅当  $M_1 = M_2$  (Case 13), 等效

忆阻值等于任一忆阻器阻值的一半, 即

$$M = \frac{1}{2}M_1 = \frac{1}{2}M_2.$$

#### 4.1.4 忆阻器反向并联

与忆阻器同向并联不同, 忆阻器反向并联不需要考虑电压的极性与忆阻器极性的关系. 基于图 14, 当  $\varphi = f_x$  且  $f_x$  在数值上小于任一激励阈值, Case 1 和 Case 7 的对应的等效忆阻值分别为 (II+III)  $\Omega$  及 (I+V)  $\Omega$ , 两者不相等, 故不满足等式

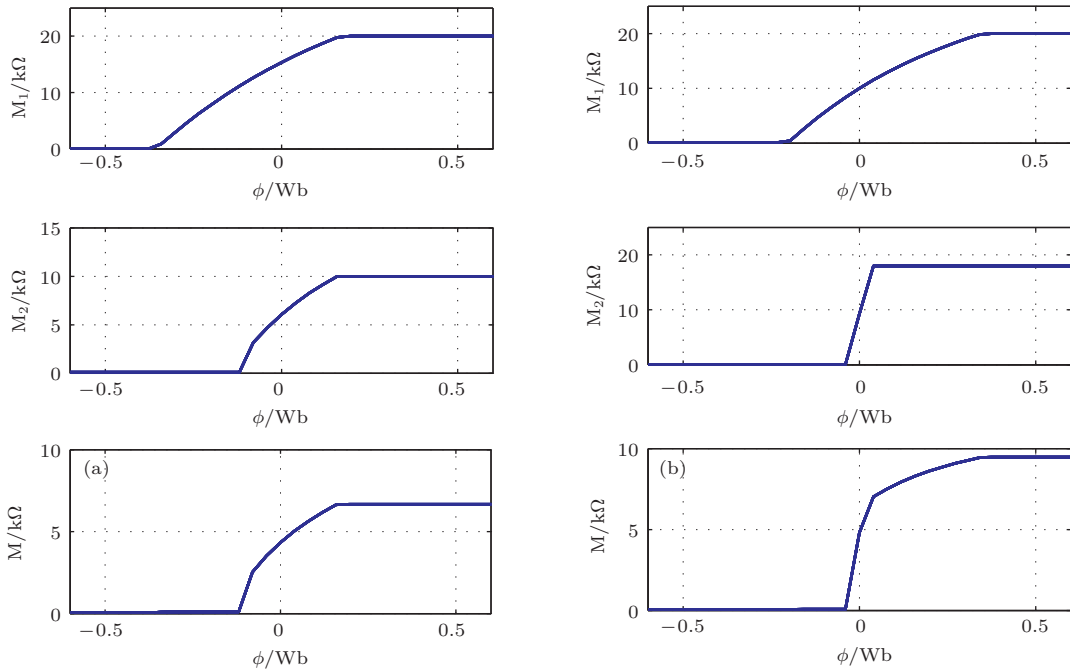


图 13 电压与忆阻器极性相反情况下两个忆阻器同向并联时忆阻值和磁通量之间的关系 (a) Case 5, 其中  $R_{on1} = 80 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 10000 \Omega$ ; (b) Case 9, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 80 \Omega$ ,  $R_{off2} = 18000 \Omega$

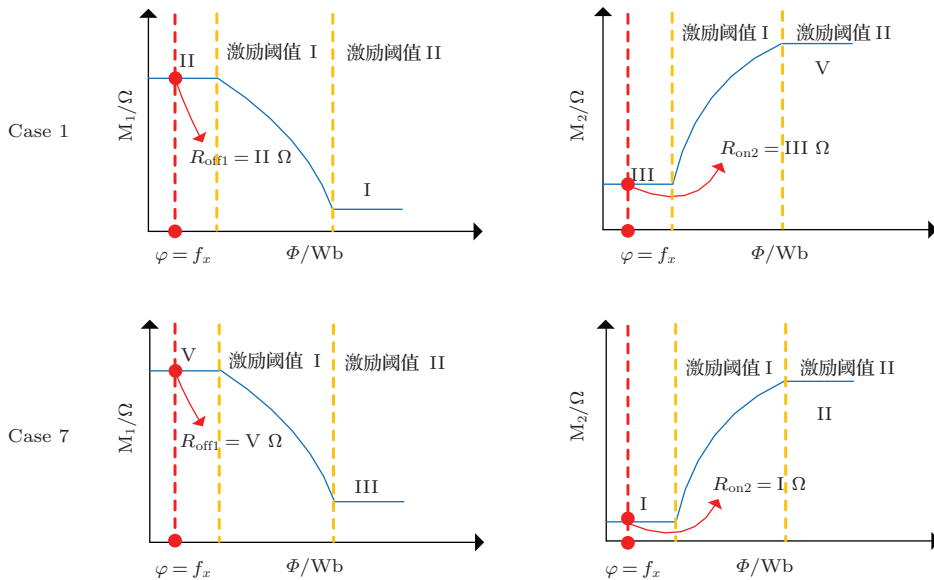


图 14 (网刊彩色) 两种情况下忆阻值和磁通量之间的关系

(23). 结合表 1, 得到忆阻器的反向并联共存在 13 种情况. 图 15 给出的是 Case 4 和 Case 13 两种情况下忆阻器组合电路的特性曲线, 特别地, 当反向并联的两个忆阻器参数完全相同时 (Case 13), 等效的总阻值与磁通量之间的关系曲线是一条关于  $y$  轴 (即  $f = 0$ ) 对称的曲线.

### 4.2 以激励阈值进行分类

由 (9) 和 (17) 式可知, 忆阻器模型分别存在两个激励阈值, 阈值范围之内, 忆阻器具有忆阻效应; 超出阈值, 忆阻器退化为固定电阻. 因此在具体应用中需要了解忆阻器的激励阈值, 有目的地施加适

当的激励, 使忆阻器根据需要处于忆阻或固定电阻状态. 本文也以激励阈值为分类依据, 对忆阻器串并联电路进行全面分析, 研究在此意义下的忆阻器串并联特性.

设定两个电荷控制 (或者磁通控制) 的忆阻器的激励阈值分别为  $s_1, s_2$  和  $s_3, s_4$ , 值得注意的是, 基于 (9) 及 (17) 式, 得到  $s_1 s_2 \leq 0, s_3 s_4 \leq 0$ , 这里假设  $s_1 < s_2$  且  $s_3 < s_4$ , 故而有:  $s_1 \leq 0 \leq s_2$  且  $s_3 \leq 0 \leq s_4$ . 通过将  $s_1, s_2, s_3$  及  $s_4$  按照从小到大的顺序排列, 可以得到 9 种排列方法, 如表 2 所示. 最终, 分 4 部分对表 2 中的情况进行详细讨论.

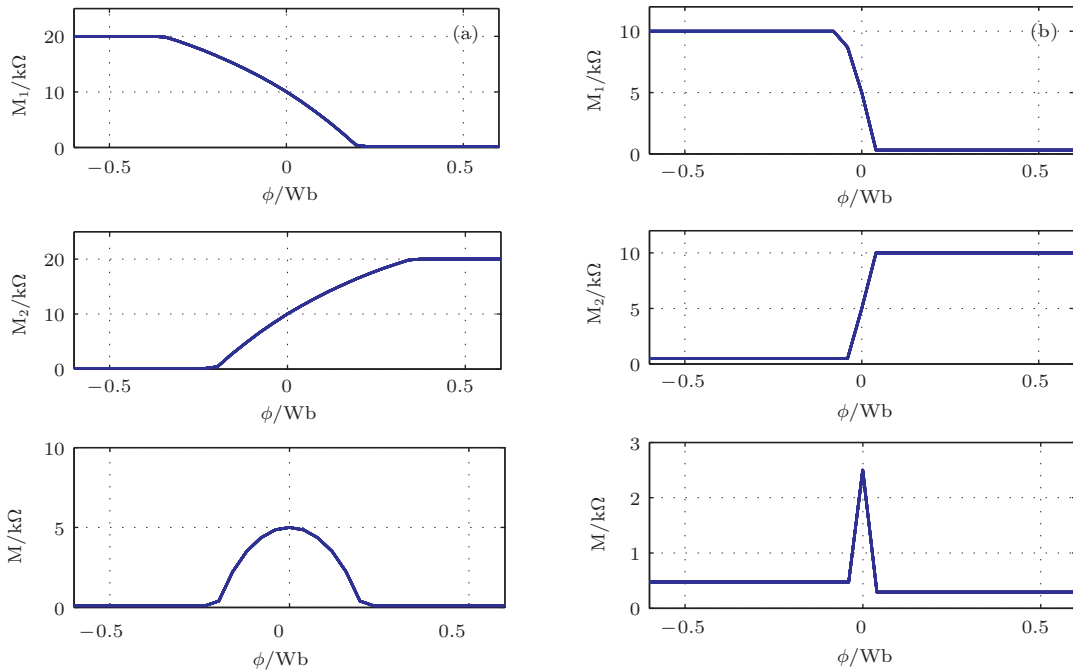


图 15 两个忆阻器反向并联时忆阻值和磁通量之间的关系 (a) Case 13, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega, R_{off1} = 20000 \Omega, R_{on2} = 100 \Omega, R_{off2} = 20000 \Omega$ ; (b) Case 4, 其中  $R_{on1} = 300 \Omega, R_{off1} = 10000 \Omega, R_{on2} = 500 \Omega, R_{off2} = 10000 \Omega$

#### 4.2.1 忆阻器同向串联

结合第 3 节对忆阻器同向串联特性的分析, 根据电流流入忆阻器极性的不同, 需要分两种情况进行讨论. 同时, 因同向串联中任意左右调换两个忆阻器的位置不会影响组合电路的性质, 得到

$$\text{Case } i = \text{Case } i + 4 \quad (1 \leq i \leq 4). \quad (24)$$

结合表 2, 得到忆阻器的同向串联存在 10 种情况, 这里根据电流流入忆阻器极性的不同分别给出相对应的特性曲线, 如图 16 和 17 所示. 由图可知, 每个忆阻器均存在一正一负的两个阈值 (红色虚线表示), 阈值将电荷量与忆阻值的关系曲线划分为 3

个部分, 串联后两曲线叠加.

表 2 基于激励阈值的 9 种串并联分类情况

| 情况种类   | 模拟坐标       |    |            |       |            |       |
|--------|------------|----|------------|-------|------------|-------|
|        | I          | II | III        | IV    | V          | VI    |
| Case 1 | $s_1$      | —  | $s_3$      | $s_2$ | $s_4$      | —     |
| Case 2 | $s_1$      | —  | $s_3$      | —     | $s_4, s_2$ | —     |
| Case 3 | $s_1$      | —  | $s_3$      | —     | $s_4$      | $s_2$ |
| Case 4 | $s_1, s_3$ | —  | $s_2$      | —     | $s_4$      | —     |
| Case 5 | $s_3$      | —  | $s_1$      | $s_4$ | $s_2$      | —     |
| Case 6 | $s_3$      | —  | $s_1$      | —     | $s_2, s_4$ | —     |
| Case 7 | $s_3$      | —  | $s_1$      | —     | $s_2$      | $s_4$ |
| Case 8 | $s_1, s_3$ | —  | $s_4$      | —     | $s_2$      | —     |
| Case 9 | $s_1, s_3$ | —  | $s_2, s_4$ | —     | —          | —     |

### 4.2.2 忆阻器反向串联

与4.1节中忆阻器反向串联相类似, 当电荷量  $q$  小于忆阻器任一激励阈值时, 不同情况下等效忆

阻值不再满足恒等关系, 即不满足等式(24). 结合表2, 得到忆阻器反向串联存在9种情况, 具体的仿真举例如图18所示.

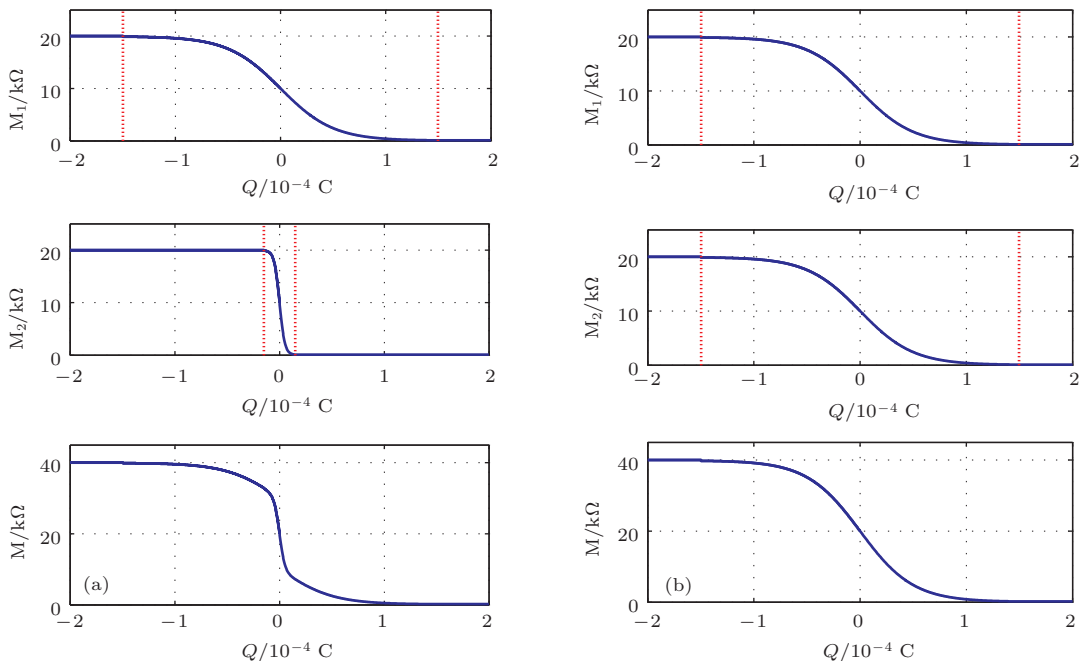


图16 (网刊彩色) 电流从忆阻器正极流入负极流出情况下两个忆阻器同向串联时忆阻值和电荷量之间的关系 (a) Case 3, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v2} = 10^{-13} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ; (b) Case 9, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = \mu_{v2} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

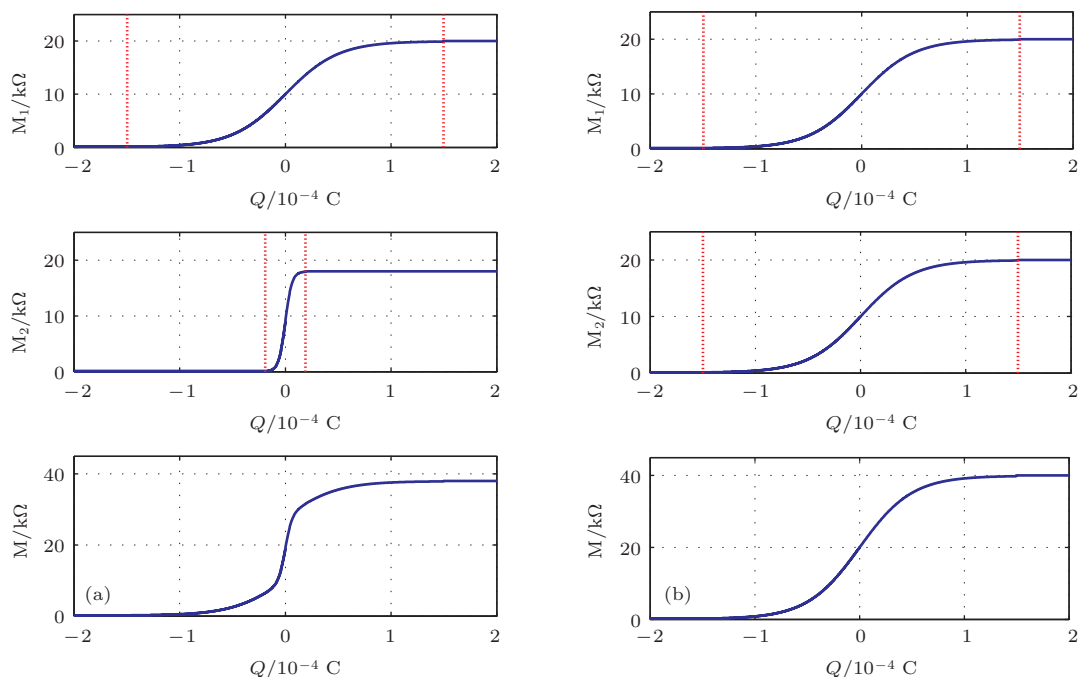


图17 (网刊彩色) 电流从忆阻器负极流入正极流出情况下两个忆阻器同向串联时忆阻值和磁通量之间的关系 (a) Case 3, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v2} = 10^{-13} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ; (b) Case 9, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = \mu_{v2} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

### 4.2.3 忆阻器同向并联

同样地, 根据忆阻器的电压极性与忆阻器本身极性之间的关系, 将忆阻器同向并联分成两类进行讨论. 进一步, 由忆阻器同向并联中上下互换忆阻器的位置不会影响电路的性质, 满足等式 (24), 得出忆阻器的同向并联存在 10 种情况, 选择其中典

型的情况进行分析, 如图 19 和图 20 所示.

### 4.2.4 忆阻器反向并联

同理, 两个忆阻器反向并联时, 当磁通量  $\varphi$  小于任一激励阈值时, 不同情况下相应的等效忆阻值不满足恒等关系. 因此, 这里忆阻器反向并联可分

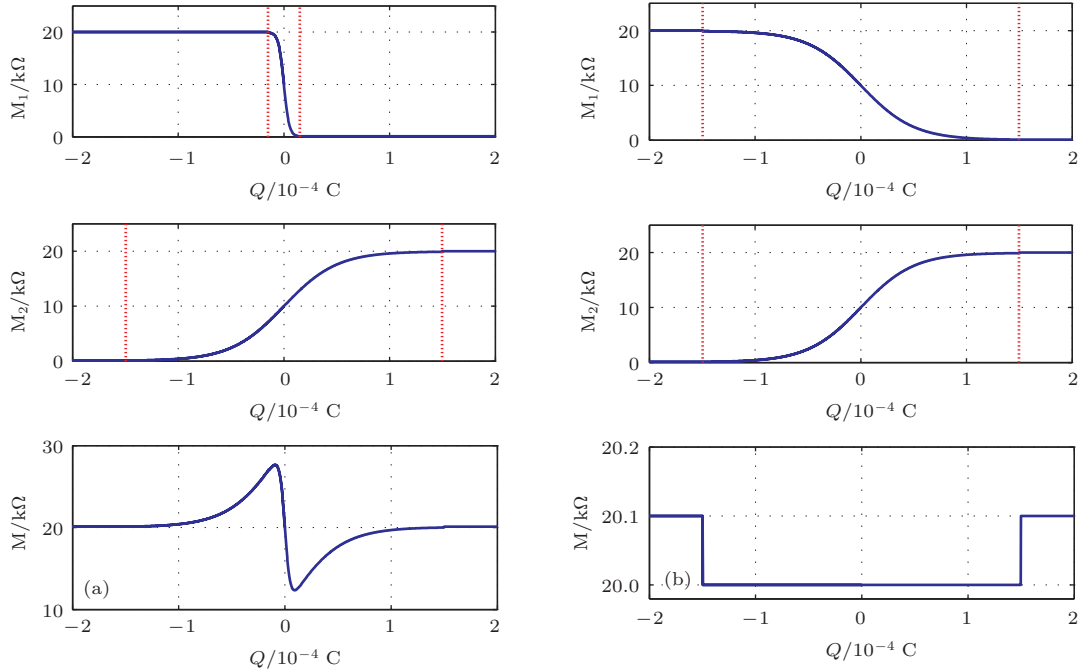


图 18 (网刊彩色) 两个忆阻器反向串联时忆阻值和电荷量之间的关系 (a) Case 7, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = 10^{-13} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v2} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ; (b) Case 9, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = \mu_{v2} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

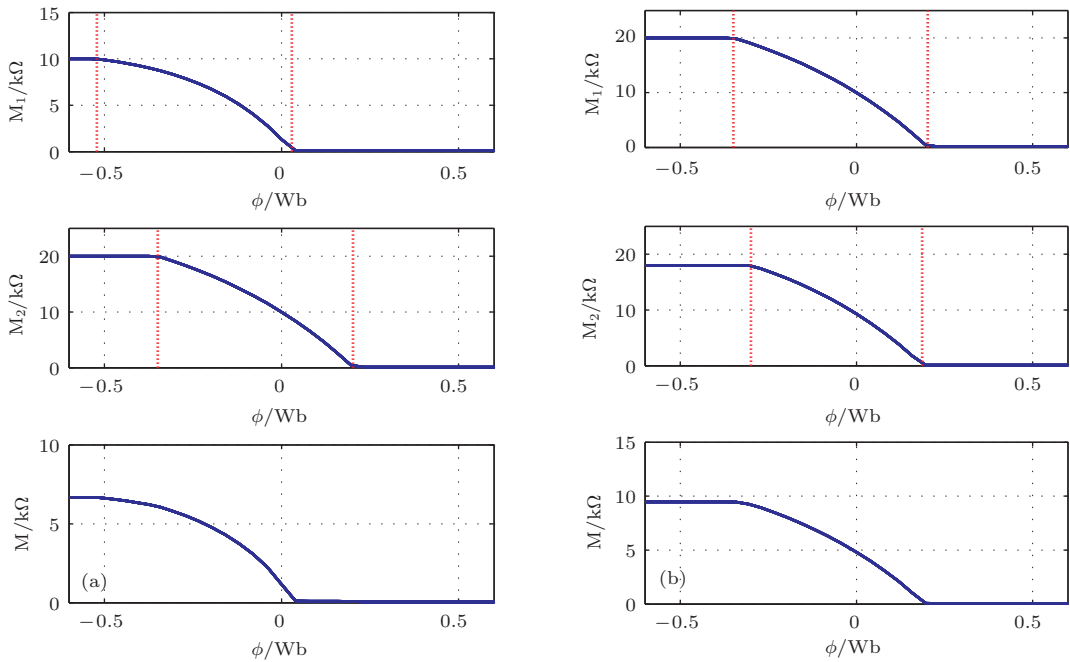


图 19 (网刊彩色) 电压的极性与忆阻器极性保持一致情况下两个忆阻器同向并联时忆阻值和磁通量之间的关系 (a) Case 1, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 10000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = \mu_{v2} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ; (b) Case 3, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 18000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = \mu_{v2} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

为9种情况, 见表 2. 其中对 Case 1 及 Case 7 的数值分析结果如图 21 所示.

综上, 分别以器件参数和激励阈值为依据, 对忆阻器串并联电路进行细致全面的分类分析, 分类

情况简单总结于表 3 中. 由表 3 可知: 由于分类方式 I 涉及的相关参数较少, 操作相对简单、高效, 适用于工程领域; 分类方式 II 尽管涉及的相关参数较多, 且需要一定的数学计算, 但是分类更为全面合

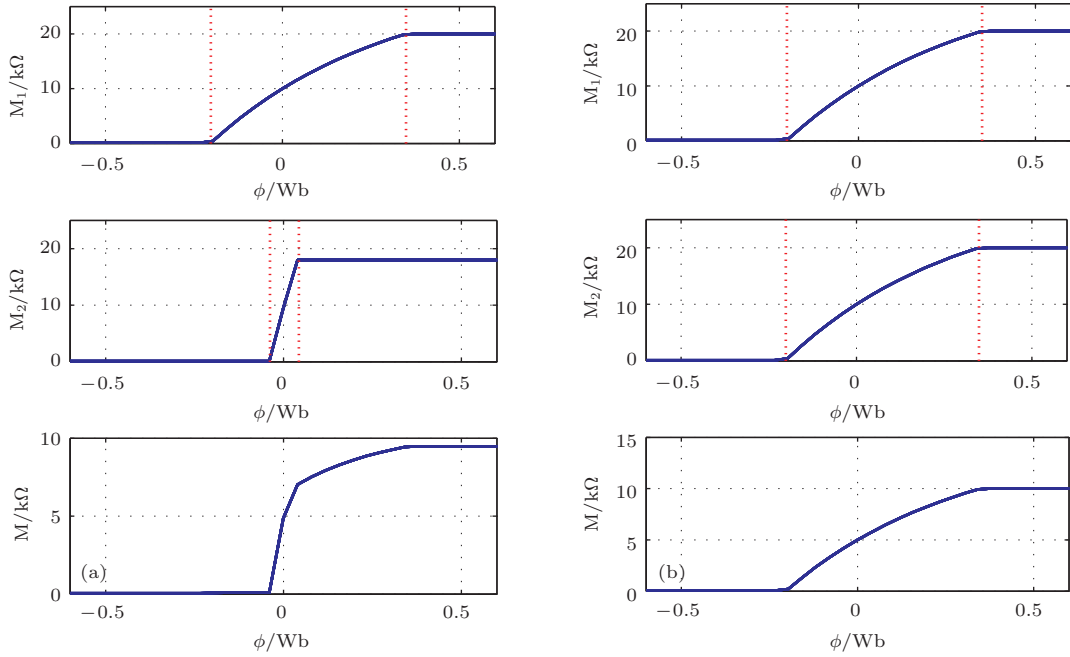


图 20 (网刊彩色) 电压与忆阻器极性相反情况下两个忆阻器同向并联时忆阻值和磁通量之间的关系 (a) Case 3, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 18000 \Omega$ ,  $\mu_{v2} = 10^{-13} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ; (b) Case 9, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = \mu_{v2} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

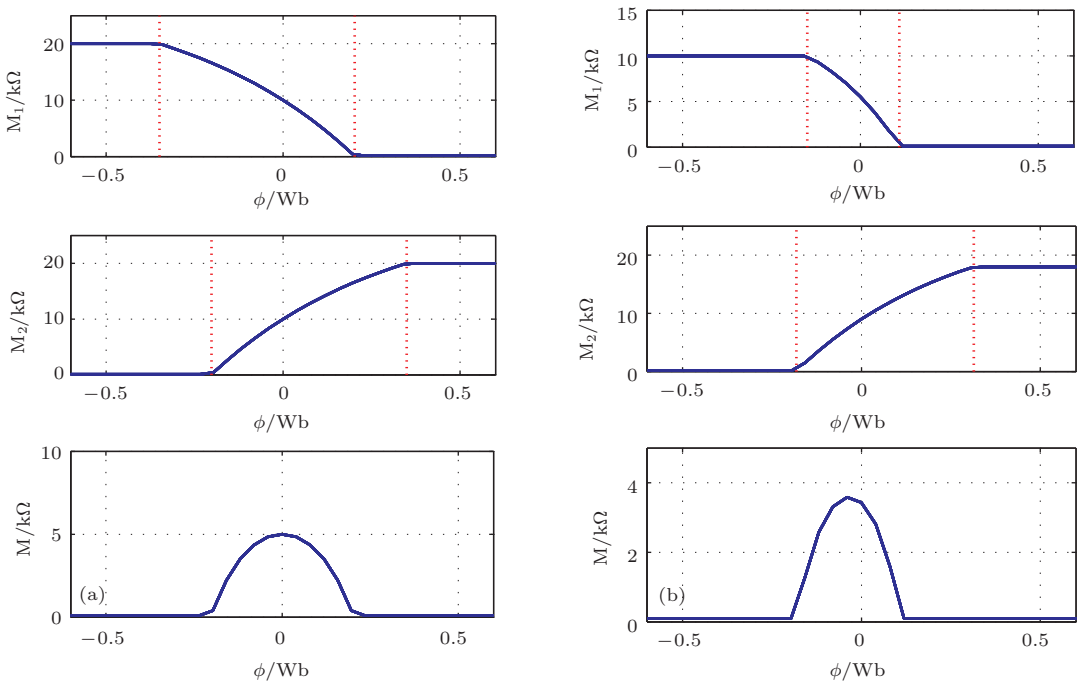


图 21 (网刊彩色) 两个忆阻器反向并联时忆阻值和磁通量之间的关系 (a) Case 1, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 20000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 20000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = \mu_{v2} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ; (b) Case 7, 其中  $R_{on1} = 100 \Omega$ ,  $R_{off1} = 10000 \Omega$ ,  $R_{on2} = 100 \Omega$ ,  $R_{off2} = 18000 \Omega$ ,  $\mu_{v1} = \mu_{v2} = 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

表3 忆阻器串并联两种分类方式对比

| 种类      | 种类   |      |      |      | 分类依据 | 相关参数                             |
|---------|------|------|------|------|------|----------------------------------|
|         | 同向串联 | 反向串联 | 同向并联 | 反向并联 |      |                                  |
| 分类方式 I  | 14 种 | 13 种 | 14 种 | 13 种 | 器件参数 | $R_{on}, R_{off}$                |
| 分类方式 II | 10 种 | 9 种  | 10 种 | 9 种  | 激励阈值 | $R_{on}, R_{off}, M_0, D, \mu_v$ |

理, 适用于更严谨的科学研究.

## 5 忆阻器串并联图形用户界面设计及仿真

### 5.1 忆阻器串并联的图形用户界面 (GUI)

为了更加清晰直观地显示忆阻器串并联特性, 设计了基于 Matlab 的忆阻器串并联图像用户界面, 如图 22 所示. 界面主要包括键位选择、图形显示窗口、参数调整、实例选择以及退出模块等. 左上方的分类方式选择模块包含了忆阻器的两种分类方式, 通过选择不同的分类方式, 可以得到相应的分类方式下忆阻器串并联可能呈现的所有的特性曲线. 右边的 4 个窗口分别表示两个忆阻器之间的连接形式, 忆阻器  $M_1$ , 忆阻器  $M_2$  以及忆阻器组合结构  $M$  的特性曲线. 正下方区域分别表示了基于忆阻器器件参数分类时, 忆阻器串并联等效电路的连

接形式、分类情况以及参数调整模块, 其中连接形式包括了忆阻器的同向串联、反向串联、同向并联以及反向并联. 值得注意的是, 忆阻器的同向串联以及同向并联又分别细分为两种情况, 在界面中分别用“Case I”及“Case II”表示. 参数调整模块主要包括调节忆阻器的最大忆阻值、最小忆阻值以及忆阻器的初始忆阻值. 最后一个部分包含了基于激励阈值分类时忆阻器串并联可能出现的所有情况以及退出界面模块.

该界面具有三大特点: 1) 分类方式可以自由选择, 且选定了一种分类方式时, 另一种分类方式下的所有按钮呈现不可操作状态, 易于操作; 2) 忆阻器的参数可以灵活调节, 通过不同忆阻器的串并联组合, 观察总的忆阻系统的输出特性曲线; 3) 界面整洁、直观、人性化, 丰富的图形窗口可以清晰便捷地展示忆阻器在四种连接方式下所有的特性曲线.

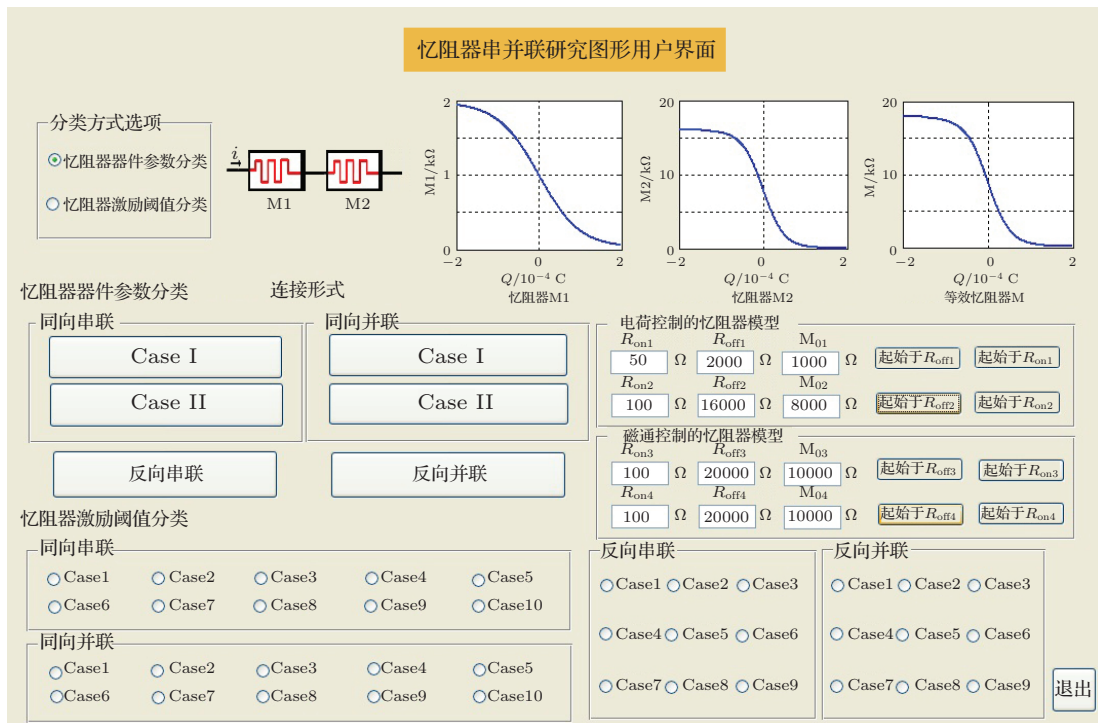


图 22 忆阻器串并联图形用户界面



### 5.2 忆阻器串并联图形用户界面的仿真结果与分析

利用设计的图形用户界面,可观察并分析忆阻器典型的电荷量-忆阻值以及磁通量-忆阻值之间的关系曲线,研究忆阻器内部参数以及连接方式对忆阻器串并联的影响.

选定忆阻器器件参数方式研究忆阻器的串联特性时,选择电荷控制的忆阻器模型;相对的,研究忆阻器并联特性时,选择磁通控制的忆阻器模型.如图22所示,两个忆阻器的最大、最小以及初始忆阻值分别设定为 $R_{off1} = 2000 \Omega$ 和 $R_{off2} = 16000 \Omega$ , $R_{on1} = 50 \Omega$ 和 $R_{on2} = 100 \Omega$ , $M_{01} = 1000 \Omega$ 和 $M_{02} = 8000 \Omega$ ,同时选择同向串联的连接方式,得到等效的忆阻值和电荷量之间的特性曲线.类似的,该界面也将基于忆阻器激励阈

值方式下忆阻器串并联的所有情况都列举出来,可以根据需要进行选择和分析.如图23所示,选择忆阻器反向并联的第四种情况(Case 4),其中参数设定如下:

$$\begin{aligned} R_{on1} &= 100 \Omega, & R_{off1} &= 20000 \Omega, \\ M_{01} &= 13500 \Omega, & R_{on2} &= 100 \Omega, \\ R_{off2} &= 20000 \Omega, & M_{02} &= 10000 \Omega, \\ D &= 10^{-8} \text{ m}, & \mu_v &= 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}, \end{aligned}$$

对应的窗口随即展现相应的图形或曲线.

综上所述,GUI能够清晰地展示两种分类方式下忆阻系统的器件特性.同时,该界面简洁直观、可操作性强,便于用户进一步深入理解忆阻器的串并联特性,从而快速准确地选择最优的忆阻器模型及组合方式,进行后续的应用研究.

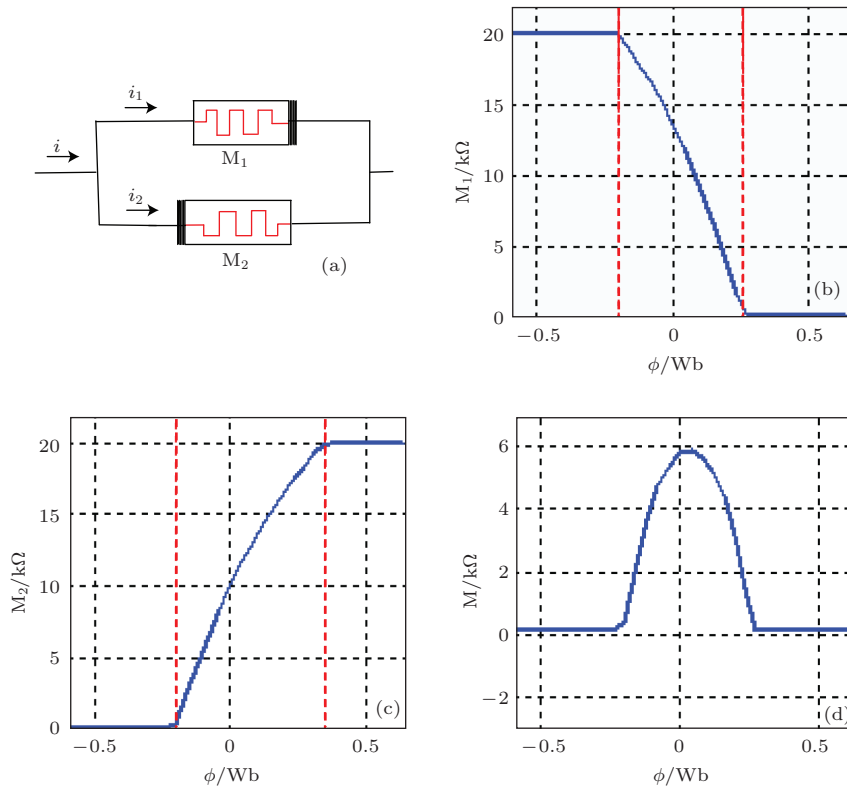


图23 (网刊彩色) 阈值分类方式下忆阻器反向并联 GUI 仿真结果 (a) 连接方式; (b) 忆阻器  $M_1$  的忆阻值与磁通量的关系曲线; (c) 忆阻器  $M_2$  的忆阻值和磁通量的关系曲线; (d) 忆阻器  $M_1$  与忆阻器  $M_2$  反向并联后等效忆阻值和磁通量的关系曲线

## 6 结 论

本文首先推导得到了两种更为实际的忆阻器电荷控制模型以及磁通量控制模型,能够有效地模

拟实际情况中忆阻器内部离子非线性迁移的特性,同时保证忆阻器物理意义下的边界条件.其次,经过推导,得到 $n$ 个忆阻器串并联电路的等效忆阻值公式,即多个忆阻器串联时,等效忆阻值为该时刻所有忆阻器阻值的代数和,总阻值随着串联的忆阻

器个数的增加而增大; 多个忆阻器并联时, 等效忆阻值为该时刻所有忆导值代数之和的倒数, 总阻值随着并联的忆阻器个数的增加而减小. 进一步, 分别以忆阻器器件参数和激励阈值为依据, 对忆阻器串并联进行详细全面的分类. 整个分析过程理论基础简单, 但不同情况下展现的特性曲线非常丰富, 可运用于不同的应用领域中.

在理论推导及数值分析的基础上, 本文设计了基于 Matlab 的 GUI. 该 GUI 可以根据用户需求自由地选择忆阻器串并联的分类方式, 调节忆阻器参数, 改变忆阻器之间的连接方式, 快速便捷地观察任一情况下忆阻器串并联的特性曲线. 该 GUI 简洁实用, 结果清晰直观, 可为进一步研究忆阻器的组合形式在图像处理、非线性系统、神经网络等应用领域提供有利的分析工具.

## 参考文献

- [1] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **18** 507
- [2] Tour J M, Tao H 2008 *Nature* **453** 42
- [3] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 80
- [4] Williams R S 2008 *IEEE Spectr.* **45** 28
- [5] Hu X F, Duan S K, Wang L D, Liao X F 2011 *Sci. China Inf. Sci.* **41** 500
- [6] Li Y T, Long S B, Lu H B, Liu Q, Wang Q, Wang Y, Zhang S, Lian W T, Liu S, Liu L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 017305
- [7] Itoh M, Chua L O 2008 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **18** 3183
- [8] Duan S K, Hu X F, Wang L D, Li C D, Mazumder P 2012 *Sci. China Inf. Sci.* **42** 754
- [9] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030510
- [10] Hu X F, Duan S K, Wang L D, Li C D 2011 *J. Univ. Electron. Technol. China* **40** 642
- [11] Gao S Y, Duan S K, Wang L D 2012 *Adv. Mater. Res.* **9** 204
- [12] Vontobel P O, Robinett W, Kuekes P J, Stewart D R, Williams R S, Straznicky J 2009 *Nanotechnology* **20** 21
- [13] Jo S H, Chang T, Ebong I, Bhadviya B B, Mazumder P, Lu W 2010 *Nano Lett.* **10** 1297
- [14] Borghetti J, Snider G S, Kuekes P J, Yang J J, Stewart D R, Williams R S 2010 *Nature* **464** 873
- [15] McDonald N R, Pino R E, Rozwood P J, Wysocki B T 2010 *The 2010 International Joint Conference on Neural Networks* Barcelona, Spain, July 18–23, 2010 p1
- [16] Wang X Y, Andrew L F, Herbert H C I, Victor S, Qi W G 2012 *Chin. Phys. B* **21** 108501
- [17] Kvatinisky S, Friedman E G, Kolodny A, Weiser U C 2012 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **60** 211
- [18] Mahvash M, Parker A C 2010 *IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems* Seattle, USA, August 1–4, 2010 p989
- [19] Fang X D, Tang Y H, Wu J J 2012 *Chin. Phys. B* **21** 098901
- [20] Batas D, Fiedler H 2011 *IEEE Trans. Nanotechnol.* **2** 250
- [21] Wang L D, Drakakis E, Duan S K, He P F 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **22** 1250205
- [22] Wang L D, Duan S K 2012 *Abstr. Appl. Anal.* **2012** 726927
- [23] Yin W H, Wang L D, Duan S K 2013 *Appl. Mech. Mater.* **284** 2485
- [24] Birolek Z, Birolek D, Biolková V 2009 *Radio. Eng.* **18** 210
- [25] Kim H, Sah M, Yang C, Cho S, Chua L O 2012 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **59** 2422
- [26] Adhikari S P, Yang C, Kim H, Chua L O 2012 *IEEE Trans. Neural Netw. Learning Syst.* **23** 1426
- [27] Kim H, Sah M, Yang C, Roska T, Chua L O 2012 *Proc. IEEE* **100** 2061
- [28] Prodromakis T, Peh B P, Papavassiliou C, Toumazou C 2011 *IEEE Trans. Electron. Dev.* **58** 3099

# Two types of nanoscale nonlinear memristor models and their series-parallel circuits\*

Dong Zhe-Kang<sup>1)</sup> Duan Shu-Kai<sup>1)†</sup> Hu Xiao-Fang<sup>2)</sup> Wang Li-Dan<sup>1)</sup>

1) (School of Electronic and Information Engineering, Southwest University, Chongqing 400715, China)

2) (Department of Mechanical and Biomedical Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong, China)

( Received 4 January 2014; revised manuscript received 6 March 2014 )

## Abstract

The memristor is a novel kind of electronic device with dynamic variable resistance that is dependent on the past history of the input current or voltage. As the fourth fundamental circuit element, the memristor captures a number of unique properties that have been found to possess attractive potentials in some promising fields such as nonvolatile memory, nonlinear circuit and system, and neuromorphic system. Additionally, compared with a circuit of single memristor, series-parallel circuit of memristors possesses more abundant device characteristics which arouses increasingly extensive interest from numerous researchers. In this paper, the mathematical closed-form charge-governed and flux-governed HP memristor nonlinear models are presented with constructive procedures. In particular, these models are more realistic by taking into account the nonlinear dopant drift effect nearby the terminals and the boundary conditions, and by adding a simple and effective window function. Furthermore, based on the internal parameters and threshold of the memristor respectively, the theoretical derivation and numerical analysis of the memristor-based series-parallel connection circuits have been made comprehensively. For obtaining the characteristics of the memristor-based combinational circuits intuitively, a graphical user interface is designed based on Matlab software, which is beneficial to displaying the properties of the memristive system clearly. The results in the present paper may provide theoretical reference and reliable experimental basis for the further development of the memristor-based combinational circuits.

**Keywords:** memristor, nonlinear model, series-parallel circuits, graphical users interface

**PACS:** 85.35.-p, 73.40.Rw, 84.32.-y, 84.30.Bv

**DOI:** [10.7498/aps.63.128502](https://doi.org/10.7498/aps.63.128502)

---

\* Project supported by the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China (Grant No. [2013]47), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61372139, 61101233, 60972155), the “Spring Sunshine Plan” Research Project of Ministry of Education of China (Grant No. z2011148), the Technology Foundation for Selected Overseas Chinese Scholars, Ministry of Personnel in China (Grant No. [2012]186), the University Excellent Talents Supporting Foundation of Chongqing, China (Grant No. [2011]65), the University Key Teacher Supporting Foundation of Chongqing, China (Grant No. [2011]65), and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant Nos. XDJK2014A009, XDJK2013B011).

† Corresponding author. E-mail: [duansk@swu.edu.cn](mailto:duansk@swu.edu.cn)